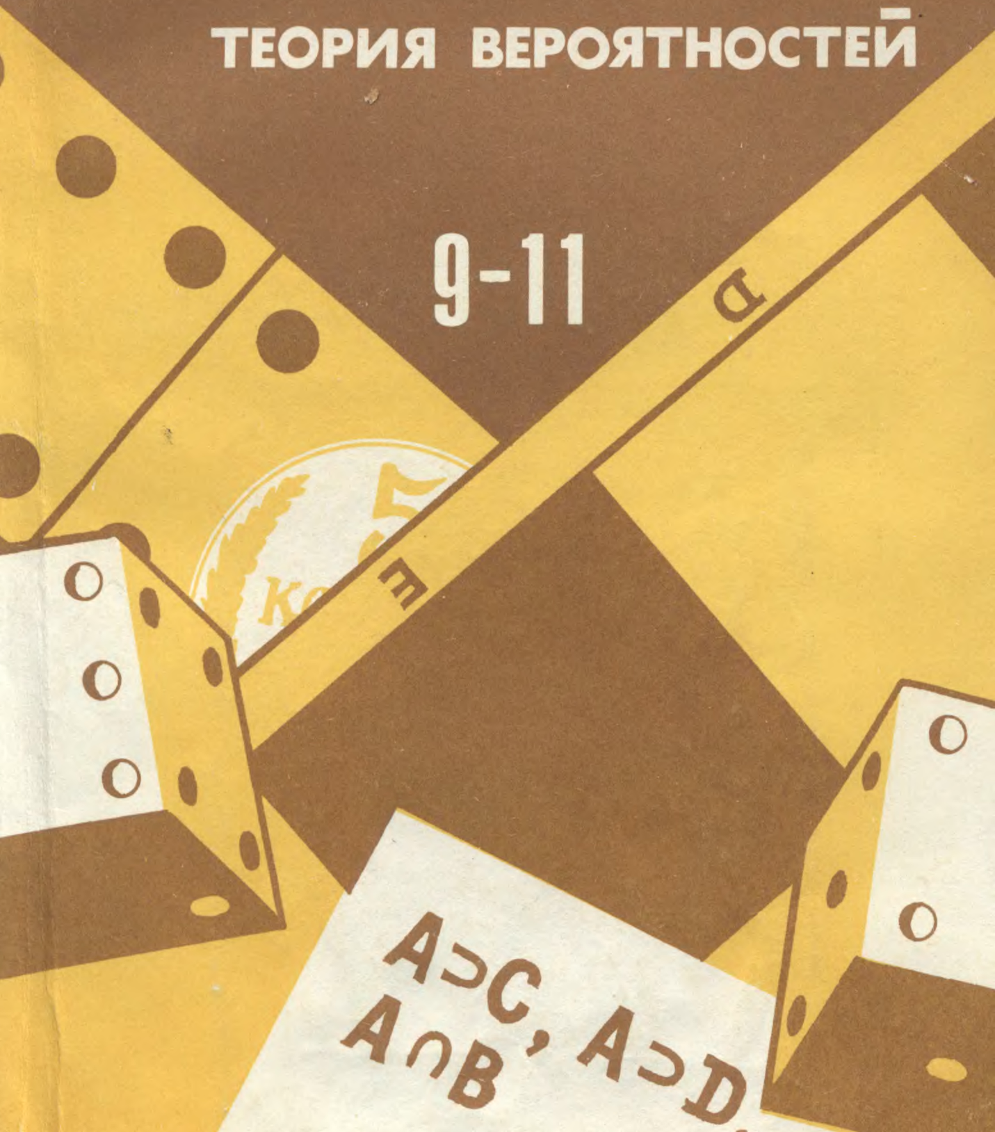
В. С. ЛЮТИКАС

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

9-11



В.С. ЛЮТИКАС

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие
для 9—11 классов
средней школы

Рекомендовано
Главным учебно-
методическим управлением общего
среднего образования
Госкомитета СССР
по народному образованию

3-Е ИЗДАНИЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1990

ББК 22.171я72
Л96

Рецензенты:

академик АН УССР, профессор МГУ Б. В. Гнеденко;
доктор физико-математических наук, профессор МГЗПИ Н. Я. Виленкин

Лютикас В. С.

Л96 Факультативный курс по математике: Теория вероятностей: Учеб. пособие для 9—11 кл. сред. шк.— 3-е изд., перераб.— М.: Просвещение, 1990.— 160 с.: ил.— ISBN 5-09-001289-X

Цель данного пособия — понятно изложить самые элементарные сведения из теории вероятностей, научить юного читателя применять их при решении практических задач.

Л $\frac{4306020000-451}{103(03)-90}$ инф. письмо — 89, доп. № 1 ББК 22.171я72

ISBN 5-09-001289-X

СЛОВО К ЧИТАТЕЛЮ

Эта небольшая книга раскроет перед вами, если вы проявите достаточно желания и упорства, мир случайного. Собственно, мир остается таким, каков он есть, но показывается он не совсем с обычной стороны.

Оказывается, только пользуясь языком науки о случае — теории вероятностей, можно описать многие явления и ситуации.

Постепенно при чтении этой книги вы углубите свои знания в теории и сможете с ее помощью решать задачи занимательного и практического содержания, к которым недавно не знали, как и подступиться. На этом этапе задачи объясняют, иллюстрируют теорию.

Понятно изложить самые элементарные сведения из теории вероятностей, научить юного читателя применять их при решении практических задач — такова основная цель, которую преследовал автор. А для того чтобы эта цель была достигнута, автор, не претендуя на оригинальность в математических рассуждениях, старался исходить из возможностей и интересов школьников.

Настоящее издание представляет собой переработанный вариант книги автора «Школьнику о теории вероятностей», выпущенной издательством «Просвещение» в 1976 г. Оно лучше приспособлено к современным определениям вероятностных понятий, дополнено доказательствами ряда законов, по структуре ближе к школьному учебнику, дополнено примерами программирования решений вероятностных задач на языке Бейсик.

Теория вероятностей, изложенная здесь, доступна ученику IX—XI классов, учащемуся техникума и каждому читателю, уже получившему среднее образование, но еще не успевшему забыть школьную математику.

Книга написана так, чтобы старшеклассник мог ею пользоваться как материалом для внеклассного чтения по математике и для подготовки к факультативным занятиям, а учитель — как конспектом для проведения факультативных занятий по теории вероятностей.

Книга также может быть применена в качестве учебника по теории вероятностей для средних специальных учебных заведений.

Термин «Упражнения» здесь означает большее, чем просто набор учебных примеров для тренировки по усвоению прочитанного материала. В действительности здесь содержатся и некоторые задачи для размышлений, самостоятельного поиска.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам рукописи академику Б. В. Гнеденко, профессору Н. Я. Виленкину за ценные замечания, которые способствовали значительному усовершенствованию пособия.

I. КОЕ-ЧТО ИЗ ПРОШЛОГО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Еще первобытный вождь понимал, что у десятка охотников вероятность поразить копьем зубра гораздо больше, чем у одного. Поэтому и охотились тогда коллективно.

Неосновательно было бы думать, что такие древние полководцы, как Александр Македонский или Дмитрий Донской, готовясь к сражению, уповали только на доблесть и искусство воинов.

Несомненно, они на основании наблюдений и опыта военного руководства умели как-то оценить вероятность своего возвращения со щитом или на щите, знали, когда принимать бой, когда уклониться от него. Они не были рабами случая, но вместе с тем они были еще очень далеки от теории вероятностей.

Позднее, с опытом, человек все чаще стал взвешивать случайные события, классифицировать их исходы как невозможные, возможные и достоверные. Он заметил, что случайностями не так уж редко управляют объективные закономерности. Вот простейший опыт — подбрасывают монету. Выпадение герба или цифры, конечно, чисто случайное явление. Но при многократном подбрасывании обычной монеты можно заметить, что появление герба происходит примерно в половине случаев.

Кто и когда впервые проделал опыт с монетой, неизвестно. Французский естествоиспытатель Ж. Л. Л. Бюффон (1707—1788) в восемнадцатом столетии 4040 раз подбрасывал монету — герб выпал 2048 раз. Математик К. Пирсон в начале нынешнего столетия подбрасывал ее 24 000 раз — герб выпал 12 012 раз. Лет 20 назад американские экспериментаторы повторили опыт. При 10 000 подбрасываний герб выпал 4979 раз. Значит, результаты бросаний монеты, хотя каждое из них и является случайным событием, при неоднократном повторении подвластны объективному закону.

Рассмотрим другой, более сложный пример — эксперимент с так называемой доской Гальтона (рис. 1). Доска размещена вертикально. Из верхнего резервуара стальные шарики катятся (на отдельных участках падают) вниз и накапливаются в нижних гнездах. Каждый шарик, встретив на своем пути оче-

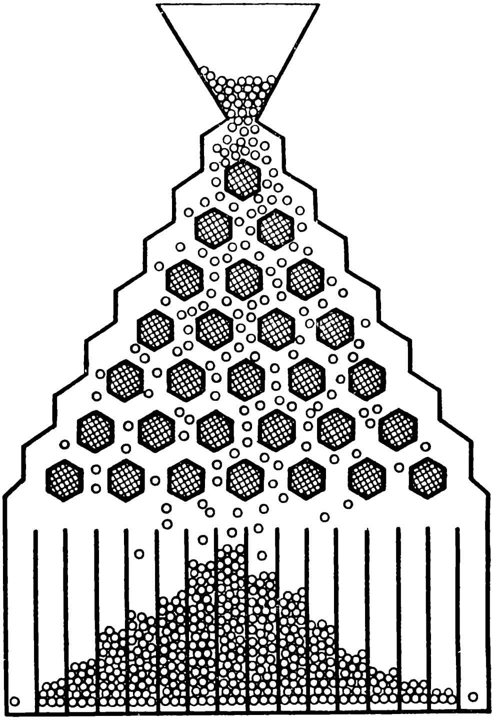


Рис. 1

редное препятствие, отклоняется или влево или вправо, а затем падает вниз. Шарик, конечно, может попасть в любое из гнезд. Между тем правильное расположение шариков (симметричное, при котором в центральных гнездах их много, а в крайних мало), повторяющееся от эксперимента к эксперименту, убедительно свидетельствует о существовании объективного закона их распределения.

Итак, случайности могут подчиняться относительно простым и более сложным закономерностям. Но, спрашивается, где же математика, где математические задачи?

Наиболее интересные для начинающих задачи теории вероятностей возникли в области азартных игр. Этому, по-видимому, способствовало наличие таких «наглядных пособий», как монета или игральная кость. Формированию основ теории вероятностей способствовали также выяснение длительности жизни, подсчет населения, практика страхования. Мы начнем, естественно, с простых задач.

К азартным играм относили бросание шестигранных игральных костей (рис. 2). Слово «азар» по-арабски означает «трудный». Так, арабы называли азартной игрой комбинацию очков, которая при бросании нескольких костей могла появиться лишь единственным способом. Например, при бросании двух костей трудным («азар») считалось появление в сумме двух или двенадцати очков.

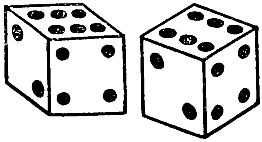


Рис. 2

В 1494 году итальянский математик Л. Пачиоли (1454—1514) опубликовал энциклопедический труд по математике, где разбирал следующую ситуацию.

Два игрока договорились играть в кости до момента, когда одному из них удастся выиграть m партий. Но игра была прервана после того, как первый выиграл a $(a<m)$, а второй b $(b<m)$ партий. Как справедливо разделить ставку?

Сам Пачиоли верного решения не нашел. Он предлагал разделить ставку в отношении $a:b$, не учитывая числа партий, которые нужно еще выиграть, чтобы получить свою ставку.

Спустя без малого 50 лет другой итальянский математик Д. Кардано (1501—1576) поверг рассуждения Пачиоли справедливой критике, но и сам предложил ошибочное решение.

Прошло еще 100 с лишним лет, и в 1654 году задача была наконец решена в ходе переписки между двумя выдающимися французскими математиками Б. Паскалем (1623—1662) и П. Ферма (1601—1665).

Посмотрим, как решил Б. Паскаль задачу в случае $m=3$, $a=2$ и $b=1$.

Допустим, что игра прервана, когда у игрока A две выигранные партии, а у игрока B одна. Как делить ставку, пока неясно. Но все упростилось бы, если бы игроки сыграли еще одну партию. В самом деле:

1) если эту партию выигрывает игрок A, то он как набравший заветное число $m=3$ выигрышей получает всю ставку;

2) если партию выиграет игрок B, то справедливо разделить всю ставку пополам, так как у каждого по две выигрышные партии.

Возможности у каждого из этих исходов одинаковы.

Таким образом, A может выиграть всю ставку или $\frac{1}{2}$ ставки, т. е. в среднем

$$\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

ставки.

У B возможности поскромнее: он может или ничего не выиграть, или выиграть $\frac{1}{2}$ ставки, т. е. в среднем

$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

ставки. Поэтому ставка должна быть разделена в отношении 3:1 (а не 2:1, как предлагал Пачиоли).

Здесь мы сталкиваемся впервые с математическим ожиданием случайной величины. О том, что это такое, рассказывается в конце книги.

В 1718 году в Лондоне вышла в свет книга со странным по тем временам названием «Учение о случаях». Ее автор — французский математик А. Муавр (1667—1754). Самое большое его достижение — открытие закономерности, которая очень часто наблюдается в случайных явлениях. Он впервые заметил и теоретически обосновал роль распределения, которое позднее было названо нормальным. А. Муавру также принадлежит слава введения понятия независимости событий, открытия теоремы умножения вероятностей.

Муавр измерил рост у 1375 случайно выбранных женщин. Результат схематически изображен на рисунке 3. Колоколообразная кривая, которая приближенно «накрывает» диаграмму распределения роста, похожа на смещенный направо график функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{1.1}$$

где

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}71828... \tag{1.2}$$

Закон нормального распределения имеет важное практическое значение. Оказывается, что так распределяется скорость га-

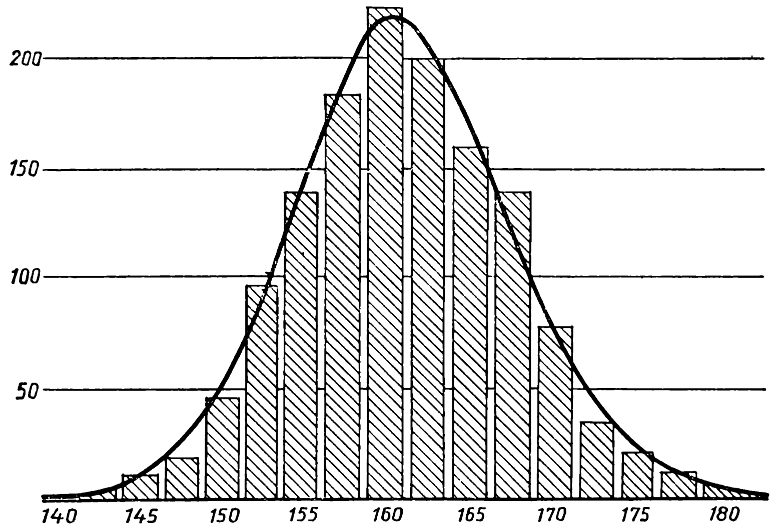


Рис. 3

зовых молекул, вес новорожденных и много других случайных событий физической и биологической природы.

Впервые основы теории вероятностей были изложены последовательно французским математиком П. Лапласом (1749—1827) в книге «Аналитическая теория вероятностей».

В предисловии автор писал: «Замечательно, что наука, которая началась с рассмотрения азартных игр, обещает стать наиболее важным объектом человеческого знания... Ведь по большей части важнейшие жизненные вопросы являются на самом деле лишь задачами теории вероятностей».

П. Лаплас не мог предусмотреть, что пройдет несколько десятилетий и интерес к теории вероятностей снизится. А так на деле и случилось. Во второй половине XIX века и в начале XX века некоторые математики перестали интересоваться теорией вероятностей как математической дисциплиной.

Чем объясняется такое безразличие некоторых математиков к теории вероятностей? Причин много. Но здесь мы раскроем только некоторые.

Вероятность события была определена Лапласом так:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1.3}$$

где n — общее число равновозможных событий, а m — число тех событий, когда происходит нужный исход («благоприятствующее событие»). Например, пусть следует вычислить вероятность события A — «при бросании двух костей выпало 8 очков».

При бросании двух костей могут получиться следующие равновозможные результаты:

I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$
1	3	2	3	3	3	4	3	$\boxed{5}$	$\boxed{3}$	6	3
1	4	2	4	3	4	$\boxed{4}$	$\boxed{4}$	5	4	6	4
1	5	2	5	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	4	5	5	5	6	5
1	6	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$	3	6	4	6	5	6	6	6

Как видно, всего возможных вариантов 36. Специально выделяются те случаи, когда произошло событие A. Таких случаев 5 — все они равновозможны. Если договориться вероятность события A обозначить $P(A)$, то, следуя Лапласу, будем иметь:

$$P(A)=\frac{5}{36}.$$

Кажется, что все в порядке — к лапласовскому определению вероятности события никак не придраться. Но вот вопрос: когда и какие случайные события можно считать равновозможными?

Рождается ребенок. Мальчик или девочка, кажется, равновозможные события (одно из двух, как и при бросании монеты). Но оказывается, что статистика рождений не вполне согласуется с нашим «кажется».

Она может быть, например, такой:

	Год	Число родившихся детей	Число родившихся мальчиков	Число родившихся девочек	Частота рождения мальчиков
Польша	1927	958 733	496 544	462 189	0,518
Швеция	1935	88 273	45 682	42 591	0,517

Если в разное время в разных странах мальчиков рождается больше, чем девочек, значит, вероятности рождения мальчика или девочки неодинаковые: вероятность события «родился мальчик» больше $\frac{1}{2}$.

Вспомним о подбрасывании монеты (см. об этом на с. 5). Откуда у нас уверенность, что вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$?

Факты, обнаруживающие, что объективная реальность необязательно совпадает с человеческим «кажется», послужили причиной сомнений в правомерности понятия «равновозможные события». Возникла потребность «перепроверять» вероятности, которые вычислялись по лапласовской формуле $\boldsymbol{P}(A)=\frac{m}{n}$, экспериментами.

Эта «перепроверка» привела к следующей статистической оценке возможности появления события. Пусть в результате некоторого опыта может произойти или не произойти событие A. В ходе l опытов событие A произошло k раз. Тогда частотой события A называется

$$\boldsymbol{P}_l\{A\}=\frac{k}{l}. \qquad (1.4)$$

За вероятность события A принимается постоянная величина, около которой группируются наблюдаемые значения частоты. Это определение вероятности называют статистическим.

В 1846 году Петербургская академия наук издала книгу В. Я. Буняковского (1804—1889) под названием «Основания математической теории вероятностей». Это был первый русский учебник по теории вероятностей. По нему учился и выдающийся русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894). Хотя он по теории вероятностей написал не так уж много трудов, но все они сохраняют первостепенное значение вплоть до наших дней. Так называемое неравенство П. Л. Чебышева на веки веков вошло в сокровищницу математической науки.

Ученик П. Л. Чебышева А. А. Марков (1856—1922) развил труды своего учителя. Ему принадлежит слава открывателя важной области применения теории вероятностей — теории вероятностных, или стохастических, процессов.

Наследие русских математиков получило развитие в работах советских математиков Е. Е. Слуцкого (1880—1948), С. Н. Бернштейна (1880—1968), А. Я. Хинчина (1894—1959), Ю. В. Линника (1904—1972) и особенно академика А. Н. Колмогорова (1903—1987). Созданная А. Н. Колмогоровым советская школа теории вероятностей, среди представителей которой следовало бы отметить академика АН СССР Ю. В. Прохорова, академика АН Украинской ССР Б. В. Гнеденко, академика АН Узбекской ССР С. Х. Сираждинова, академиков АН Литовской ССР И. П. Кубилюса и В. А. Статулявичуса, профессоров А. А. Боровкова, В. Н. Золотарева, Ю. А. Розанова, В. С. Королюка, А. Н. Ширяева, И. Н. Коваленко, В. И. Романовского и многих других, завоевала всеобщее признание и сегодня занимает ведущие позиции в мировой науке.

II. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1. СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

Человека окружает мир событий. Он часто замечает такой факт: одни события при реализации данного комплекса условий непременно происходят, другие же могут произойти, а могут и не произойти. Рассмотрим группу таких событий:

Событие	Реализация комплекса условий	Исход
A_1	При нагревании проволоки	Ее длина увеличилась
A_2	При бросании игральной кости	Выпали четыре очка
A_3	При бросании монеты	Выпал герб
A_4	При осмотре почтового ящика	Найдены три письма
A_5	При низкой температуре	Вода превратилась в лед

Про события A_1 и A_5 мы вынуждены сказать, что они произойдут закономерно, а про события A_2, A_3, A_4 — что они могли произойти, но могло быть и иначе. Сравнение данных примеров позволяет ощутить случайность событий A_2, A_3 и A_4.

Мы можем рассуждать так. Нас окружают события. Мы замечаем:

Событие — исход наблюдения или эксперимента

когда оно при реализации данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти

↓

Случайное событие

Отсюда непосредственно следует определение понятия:

Случайным событием называется такой исход наблюдения или эксперимента, который при реализации данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Представим, что некоторый прямоугольник E мы разрезали (рис. 4) на n прямоугольных пронумерованных карточек e_i ($i=1, 2, 3, \ldots, n$). Допустим, после хорошей перетасовки одну карточку наугад вытаскиваем из всей стопки. При такой операции:

1) одно из событий «вытащена одна карточка» непременно произойдет;

2) при одном испытании вытаскивание любой из карточек проявляется в одном и только в одном исходе; скажем, если была вытащена карточка 17, т. е. произошло событие e_{17}, то в это же время не могло произойти событие e_5, состоящее в вытаскивании карточки с номером 5.

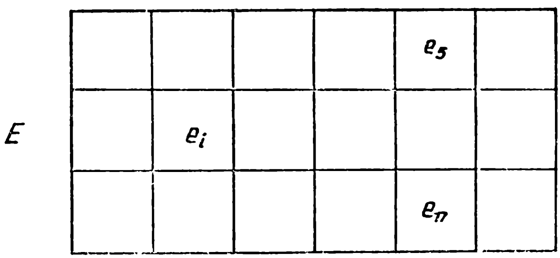


Рис. 4

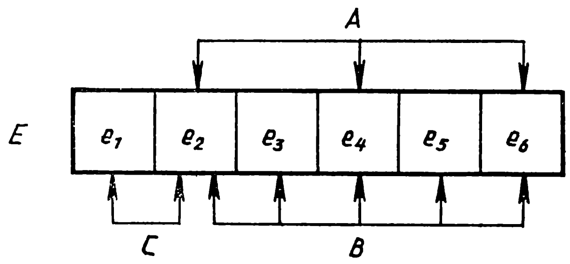


Рис. 5

События e_i, состоящие в появлении карточки с номером i ($i=1, 2, 3, \ldots, n$), могут послужить примером элементарных событий, а прямоугольник E — примером пространства элементарных событий, связанного с реализацией испытания S — вытаскиванием одной карточки после разреза прямоугольника E на маленькие прямоугольники и вытаскивания случайной карточки после тщательной перетасовки. Этот пример позволяет геометрически иллюстрировать пространство E и его элементы.

Пространство элементарных событий E, определенное бросанием игральной кости, представляет события, где e_i — «выпало i очков» ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Рассмотрим события (рис. 5):

A — «выпало четное число очков»;

B — «выпало не меньше 2 очков»;

C — «выпало не больше 2 очков».

A произошло, если произошло одно из элементарных событий e_2, e_4, e_6. *Естественно e_2, e_4, e_6 назвать элементарными событиями, благоприятствующими событию A.* Этот факт выразим символом $e_2 \in A$, $e_4 \in A$, $e_6 \in A$.

Тогда выходит, что

$$\left.\begin{array}{l} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{array}\right\} \in B, \quad \left.\begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \end{array}\right\} \in C.$$

Поскольку e_2, e_4, e_6 есть некоторые из элементов пространства $E\{e_1;\ e_2;\ e_3;\ e_4;\ e_5;\ e_6\}$, эту тройку удобно называть подпространством (частью) пространства E. Значит, событие A можно рассматривать как подпространство ему благоприятствующих элементарных событий $\{e_2;\ e_4;\ e_6\}$, событие B — как подпространство ему благоприятствующих элементарных событий $\{e_2;\ e_3;\ e_4;\ e_5;\ e_6\}$, событие C — как подпространство ему благоприятствующих элементарных событий $\{e_1;\ e_2\}$. Если e_i не благоприятствует событию A, то пишем: $e_i \overline{\in} A$.

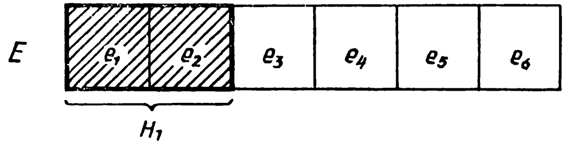


Рис. 6

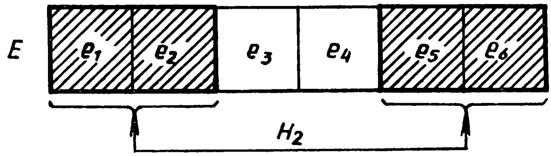


Рис. 7

Реализация испытания S однозначно определяет пространство элементарных событий $\boldsymbol{E}$. Любое случайное событие H, связанное с испытанием S, можно рассматривать как подпространство благоприятствующих этому событию элементарных событий пространства $\boldsymbol{E}$. Изобразить его можно некоторой фигурой, построенной из клеточек, символизирующих элементарные события, благоприятствующие событию H.

Например, событие H_1 — «выпало меньше 3 очков» — может быть изображено одной заштрихованной фигурой (рис. 6), а событие H_2 — «выпало не больше 2 или не меньше 5 очков» — двумя фигурами (рис. 7).

3. ДОСТОВЕРНОЕ И НЕВОЗМОЖНОЕ СОБЫТИЕ

Рассмотрим следующий пример.

На трех карточках проставлены цифры 1, 2, 3. После перетасовки карточек по очереди выстраиваем их в один ряд. Получается трехзначное число α.

Пространство элементарных событий $\boldsymbol{E}$ представляют события

$$e_1 — «\alpha = 123»;\ e_2 — «\alpha = 213»;\ e_3 — «\alpha = 312»;$$
$$e_4 — «\alpha = 231»;\ e_5 — «\alpha = 132»;\ e_6 — «\alpha = 321».$$

Рассмотрим в аспекте пространства $\boldsymbol{E}$ такие события:

$$V — «\alpha < 123» \text{ и } U — «\alpha \geqslant 123».$$

Как складывается у нас представление о событии V?

1. Мы интуитивно догадываемся, что событие V в аспекте данного испытания невозможно.

2. Мы можем наглядно убедиться в том, что среди элементарных событий пространства $\boldsymbol{E}$ нет ни одного события, благоприятствующего событию V.

Как складывается у нас представление о событии U?

1. Мы интуитивно догадываемся, что событие U в аспекте данного испытания достоверное.

2. Мы можем наглядно убедиться в том, что все элементарные события пространства $\boldsymbol{E}$ благоприятствуют событию U.

Следовательно, невозможное событие V и достоверное событие U как бы крайние варианты случайного события вообще.

Наши рассуждения можем обобщить таким графом:

Случайное событие по отношению к испытанию S

когда среди элементарных событий пространства $\boldsymbol{E}$, определяемого испытанием S, нет ни одного элементарного события, благоприятствующего событию V

V — невозможное событие по отношению к испытанию S

когда все элементарные события пространства $\boldsymbol{E}$, определяемого испытанием S, благоприятствуют событию U

U — достоверное событие по отношению к испытанию S

Таким образом, невозможное и достоверное события — это не абсолютные категории событий, а категории, связанные с некоторым конкретным испытанием S.

Упражнения

1. Какие из следующих событий достоверные:
   A — «два попадания при трех выстрелах»,
   B — «выплата рубля семью монетами»,
   D — «наугад выбранное трехзначное число не больше 1000»,
   E — «наугад выбранное число, составленное из цифр 1, 2, 3 без повторений, меньше 400»?
2. Какие из следующих событий невозможные:
   A — «опаздывание ленинградского экспресса в субботние дни»,
   B — «появление 17 очков при бросании 3 игральных костей»,
   C — «появление слова «мама» при случайном наборе букв а, а, м, м»,

D — «появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного 9 числа при случайном однократном наборе указанных цифр»,

E — «появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного 3 числа при произвольном однократном наборе указанных цифр»?

3. Укажите достоверные и невозможные события:

A — «выплата 10 рублей четырьмя купюрами»,

B — «появление сразу 3 лайнеров над аэропортом»,

C — «попадание в мишень при 3 выстрелах»,

D — «появление в окошке счетчика трехзначного числа, составленного из цифр 1, 2, 3 и кратного 5».

4. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ

Сравним следующие события:

A — «появление двух очков при бросании игральной кости»,

B — «появление четного числа очков при бросании игральной кости».

Замечаем следующее соотношение между событиями: если произошло A, то тем самым произошло и B. Тот факт, что «A влечет за собой B» (или «B является следствием A»), запишем:

$$A \subset B \text{ или } B \supset A. \qquad (2.1)$$

Событие A является частью события B, поскольку событие B состоит в осуществлении трех элементарных событий: «появление 2 очков», «появление 4 очков», «появление 6 очков», а событие A — одним из них — «появлением 2 очков». Возможность представить события как подпространства пространства $\boldsymbol{E}$ помогает геометрически проиллюстрировать соотношения A и B (рис. 8).

Сопоставим события:

A — «появление герба при подбрасывании монеты»,

B — «непоявление цифры при подбрасывании монеты».

Если же монета не может укатиться и застрять в щели пола

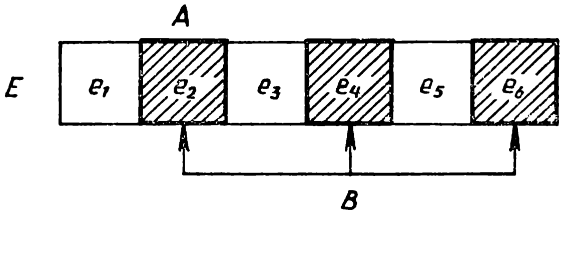


Рис. 8

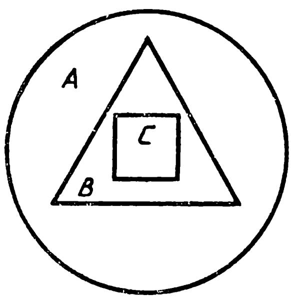


Рис. 9

или встать на ребро, тогда если произошло A, то произошло и B, и в то же время если произошло B, то произошло и A. Символическая запись: $A \subset B$ и $B \subset A$. Тогда запишем $A = B$ и будем говорить, что события A и B равносильны.

Еще раз подчеркнем, что A будет частью события B только в том случае, когда элементарные события, представляющие событие A, принадлежат подпространству элементарных событий, представляющих событие B.

Упражнения

4. Какие из событий являются частью другого события:

а) A — «попадание в мишень первым выстрелом»,
   B — «попадание в мишень по меньшей мере одним из 4 выстрелов»,
   C — «попадание точно в мишень одним из 2 выстрелов»,
   D — «попадание в мишень не более чем 5 выстрелами»;

б) мишень изображена на рисунке 9:
   A — «попадание в круг»,
   B — «попадание в треугольник»,
   C — «попадание в квадрат»?

5. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

Мы уже убедились в том, что между событиями соблюдаются отношения, аналогичные отношениям «больше», «меньше» или «равно», как и между числами.

Теперь естественно ввести и операции над событиями.

Объединение

Пусть событию A благоприятствуют элементарные события (клетки) e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 и e_7, а событию B — элементарные события e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12} (рис. 10).

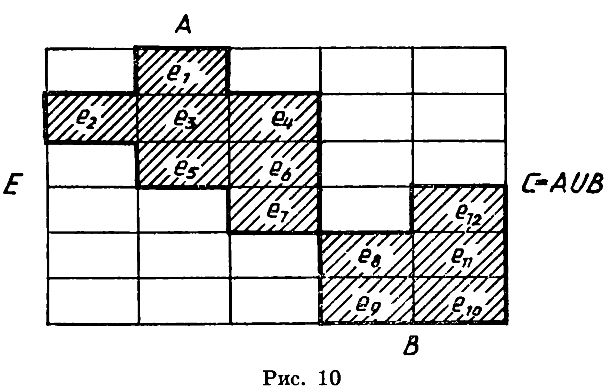


Рис. 10

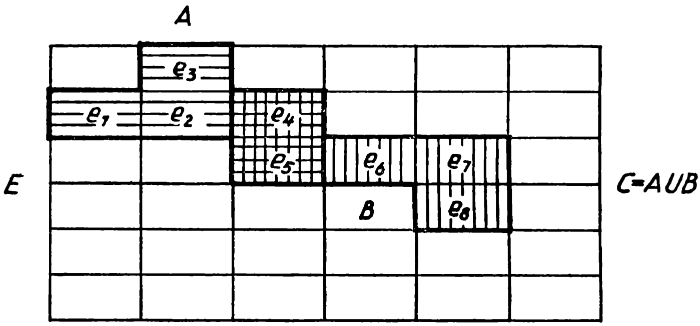


Рис. 11

Пусть событию C благоприятствуют все элементарные события, которые представляют заштрихованные клетки.

Логично событие C называть объединением событий A и B. Оно означает, что произошло или A, или B.

Пусть теперь событию A благоприятствуют элементарные события (клетки) e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, а событию B — элементарные события e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 (рис. 11).

Пусть опять событию C благоприятствуют элементарные события, которые представляют заштрихованные клетки (рис. 11).

И на этот раз логично событие C считать объединением событий A и B. Но поскольку e_5 и e_4 благоприятствуют и A и B, то на этот раз C *означает, что произошло или A, или B, или и то и другое вместе.*

Оба случая (рис. 10 и 11) можно обобщить так:

Объединением событий A и B называется событие C, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A и B.

Такое соотношение принято обозначать символом $\cup$:

$$C = A \cup B.$$

В общем случае:

Объединением событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n называется событие A, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n (или A_1, или A_2, ..., или A_n, или нескольких из них, или всех).

Символически:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n. \tag{2.2}$$

Оперируя диаграммами подобного рода (см. рис. 11 и 10), можем убедиться, что для случайных событий имеют место закономерности:

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Упражнения

5. Событие A — «попадание в мишень первым выстрелом»,
событие B — «попадание в мишень вторым выстрелом».
В чем состоит событие $A \cup B$?
6. Событие A — «ученик учится без троек»,
событие B — «ученик учится без двоек»,
событие C — «ученик не отличник».
Сформулируйте: $A \cup B \cup C$.
7. Событие A — «лотерейный выигрыш 1 р.»,
событие B — «лотерейный выигрыш 2 р.»,
событие C — «лотерейный выигрыш 3 р.»,
событие D — «лотерейный выигрыш 4 р.»,
В чем состоит событие $A \cup B \cup C \cup D$?
8. Событие A — «появление двух гербов при подбрасывании двух монет»,
событие B — «появление герба и цифры при подбрасывании двух монет».
В чем состоит событие $A \cup B$?
9. Событие A_1 — «поражение мишени одним выстрелом»,
событие A_2 — «поражение мишени двумя выстрелами»,
событие A_3 — «поражение мишени тремя выстрелами»,

. . . .

событие A_{100} — «поражение мишени сотней выстрелов».
В чем состоит событие $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_{100}$?
10. Событие A — «появление 6 очков при бросании игральной кости»,
событие B — «появление 5 очков при бросании игральной кости»,
событие C — «появление 4 очков при бросании игральной кости».
В чем состоит событие $A \cup B \cup C$?
11. Выясните смысл событий $U \cup U$, $V \cup V$, $U \cup V$.

Пересечение

Пусть событию A благоприятствуют элементарные события (клетки) e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, а событию B — элементарные события e_3, e_4, e_5, e_6 и e_7 (рис. 12).

Пусть событию C благоприятствуют элементарные события, которые представлены заштрихованными клетками (рис. 12).

Логично событие C называть пересечением событий A и B. *Оно означает, что произошло и A, и B.*

В таком случае применяется символ

$$C = A \cap B. \tag{2.3}$$

В общем случае пересечение событий определяется так:

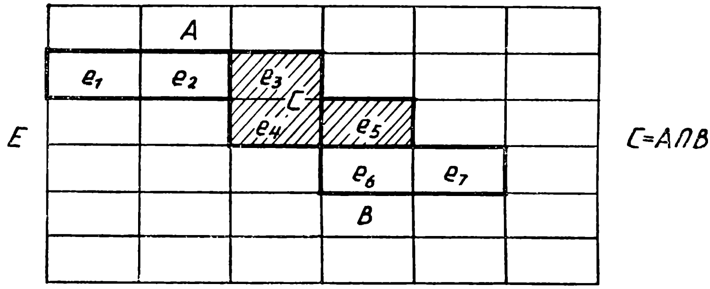


Рис. 12

***Пересечением событий** A_1, A_2, A_3, ..., A_n **называется событие** A, **состоящее в одновременном исполнении всех (и** A_1, **и** A_2, **и** A_3, ..., **и** A_n**) событий** A_1, A_2, A_3, ..., A_n.*

Символически:

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n. \tag{2.4}$$

Рассмотрим такой пример:

A — «входящий в подъезд человек — мужчина»,

B — «входящий в подъезд человек светловолосый»,

C — «входящий в подъезд человек — светловолосый мужчина».

Событие C происходит только при одновременном исполнении событий A и B, поэтому $C = A \cap B$.

Еще пример.

Произвольно выбираем два двузначных числа. Определяем события:

A — «выбранные числа кратны 2»,

B — «выбранные числа кратны 3»,

C — «выбранные числа кратны 6».

Событие C происходит, если одновременно происходят события A и B. Если одно из событий A или B не произойдет, то не произойдет и C.

Пусть событию A благоприятствуют элементарные события (клетки) e_1, e_2, e_3, e_4, а событию B — e_5, e_6, e_7 (рис. 13).

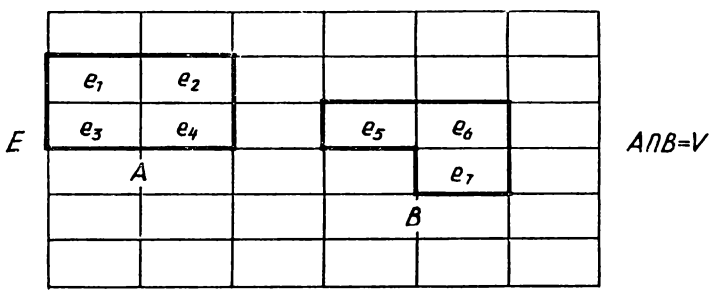


Рис. 13

Ясно, что совместное осуществление A и B невозможно: элементарных событий, благоприятствующих и тому, и другому событию, нет.

Два события A и B, пересечение которых — невозможное событие ($A \cap B = V$), называются несовместимыми событиями.

Как уже мы упомянули ранее, для таких событий определение объединения формулируется так:

Объединением двух несовместимых событий A и B называется событие C, осуществляющееся в появлении либо события A, либо события B.

Два события A и B называются совместимыми, когда существует по крайней мере одно элементарное событие, благоприятствующее и событию A, и событию B.

Рассмотрим следующие пары событий:

A_1 — «выпадение герба при подбрасывании монеты»,
A_2 — «невыпадение герба при подбрасывании монеты»;
B_1 — «выздоровление больного»,
B_2 — «невыздоровление больного»,
C_1 — «появление новой кометы в текущем году»,
C_2 — «непоявление новой кометы в текущем году».

Естественно события в каждой из пар считать противоположными.

Установим два свойства, которым удовлетворяет любая из пар событий:

1. Объединение событий каждой пары — достоверное событие:

$$A_1 \cup A_2 = U,$$
$$B_1 \cup B_2 = U,$$
$$C_1 \cup C_2 = U.$$

2. Пересечение событий каждой пары — невозможное событие:

$$A_1 \cap A_2 = V,$$
$$B_1 \cap B_2 = V,$$
$$C_1 \cap C_2 = V.$$

Теперь можно ввести определение:

Если объединение событий A и B — достоверное событие, а пересечение — невозможное событие, то события A и B называются противоположными.

Если A и B — противоположные события, то символически записываем это так:

$$A = \bar{B} \text{ или } B = \bar{A}. \qquad (2.5)$$

Разумеется, на языке пространства элементарных событий противоположное событие A представляется дополнением события A в отношении всего пространства элементарных событий $\boldsymbol{E}$ (рис. 14).

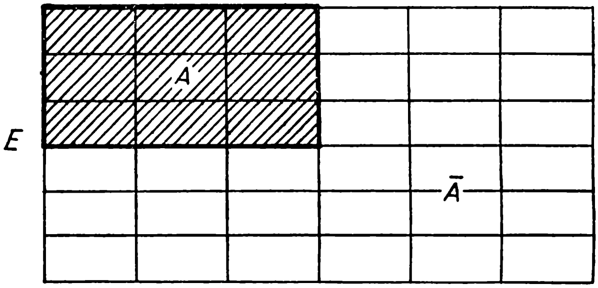


Рис. 14

Упражнения

12. Событие A — «попадание первым выстрелом»,
событие B — «попадание вторым выстрелом».

В чем состоит событие $A \cap B$?

13. Событие A — «появление нечетного числа очков при бросании игральной кости»,

событие B — «непоявление 3 очков при бросании игральной кости»,

событие C — «непоявление 5 очков при бросании игральной кости».

В чем состоят события

$$A \cap B \cap C,\ A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C?$$

14. Справедливо ли равенство $U \cap V = V$?

15. Турист из пункта A в пункт B может попасть двумя дорогами. Обозначим события:

A_1 — «он пошел первой дорогой»,

A_2 — «он пошел второй дорогой».

Из пункта B в пункт C ведут три дороги. Обозначим события:

B_1 — «он пошел первой дорогой»,

B_2 — «он пошел второй дорогой»,

B_3 — «он пошел третьей дорогой».

Применяя понятия объединения и пересечения, а также противоположного события, постройте события, состоящие в том, что:

— от A до B он выбрал дорогу наугад, а от B до C пошел третьей дорогой;

— от A до B он пошел первой дорогой, а от B до C — дорогой, выбранной наугад;

— от A до B он пошел не первой дорогой, а от B до C — не третьей;

— он дошел от A до C.

16. Докажите: $A\cap A=A$.

17. Рассмотрев конкретные события A, B, C, убедитесь в том, что

$$A\cap B=B\cap A,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$
$$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B},$$
$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B},$$
$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

При решении пользуйтесь геометрическим представлением событий и их соотношений.

18. Наугад отобранная деталь может оказаться или первого сорта (событие A), или второго (событие B), или третьего (событие C).

В чем состоят события

$$A\cup B,\ \overline{A\cup C},\ A\cap C,\ (A\cap B)\cup C?$$

19. При каких условиях имеют место равенства:

а) $A\cup B=A\cap B$; б) $A\cup\bar{A}=A$; в) $A\cap\bar{A}=A$?

20. Справедливы ли равенства:

а) $\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cup B}$;

б) $\overline{A\cup B\cup C}=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;

в) $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A\cap B\cap C}$?

(При решении пользуйтесь геометрическим представлением событий и их соотношений.)

21. Упростите выражения:

а) $(A\cup B)\cap(A\cup\bar{B})$;

б) $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$;

в) $((A\cup B)\cap B)\cup(A\cap(A\cap B))$.

(При решении пользуйтесь геометрическим представлением событий и их соотношений, применяя цветные карандаши.)

22. Пусть A, B и C — случайные события, выраженные элементарными событиями одного и того же пространства элементарных событий. Запишите такие события:

а) произошло только A;

б) произошло одно и только одно из данных событий;

в) произошли два и только два из данных событий;

г) произошли все три события;

д) произошло хотя бы одно из данных событий;

е) произошло не более двух событий.

23. Событие A — «попадание в мишень», событие B — «попадание в мишень первым выстрелом».

В чем состоит событие $A\cap\bar{B}$?

24. Событие A — «получение достаточной для сдачи экзамена оценки»,

событие B — «получение пятерки».

В чем состоят события $A\cap\bar{B}$, $A\cap B$, $\bar{A}\cap\bar{B}$, $\bar{A}\cap B$ и $\overline{A\cap B}$?

25. Докажите, что

$(A\cap\bar{C})\cap(B\cap\bar{C})=(A\cap B)\cap\bar{C}$,

$A\cap(\overline{B\cup C})=(A\cap\bar{B})\cap\bar{C}$. (2.6)

26. В ящике имеются шары трех цветов: белые, черные и красные. Обозначим события:

A — «наугад выбранный шар белый»,

B — «наугад выбранный шар черный»,

C — «наугад выбранный шар красный».

Используя понятия объединения, пересечения и противоположного события, проверьте правильность равенств:

$$C=\overline{A\cap B},\ B=\overline{A\cap C},$$
$$A\cup B\cup C=U,\ (A\cap B)\cap C=C,$$
$$(A\cup B)\cap\bar{C}=U,\ A\cup C=\bar{B}.$$

27. Докажите, что

$$A\cap(\overline{B\cap C})=(A\cap\bar{C})\cap(A\cap\bar{B}).$$

III. НАУКА О ПОДСЧЕТЕ ЧИСЛА КОМБИНАЦИЙ — КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству. Иногда комбинаторику рассматривают как введение в теорию вероятностей, поскольку методы комбинаторики очень помогают в теории вероятностей осуществить подсчет числа возможных исходов и числа благоприятных исходов в разных конкретных случаях.

В теории вероятностей принято говорить не о комбинациях, а о выборках. Поэтому мы будем придерживаться термина «выборка».

В комбинаторике рассматриваются виды выборок — перестановки, размещения, сочетания.

1. ОБЩИЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

Рассмотрим два общих правила, с помощью которых решается большинство задач комбинаторики,— правило суммы и правило произведения.

Допустим, в ящике имеется n разноцветных шариков. Произвольным образом вынимаем один шарик. Сколькими способами можно это сделать? Конечно, n способами. Теперь эти n

шариков распределим по двум ящикам: в первом m шариков, во втором k. Произвольно из какого-нибудь ящика вынимаем один шарик. Сколькими разными способами можно это сделать? Из первого ящика шарик можно вынуть m разными способами, из второго — k разными способами. Всего способами

$$n = m + k. \tag{3.1}$$

Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B — k способами (не такими, как A), то объект «либо A, либо B» можно выбрать $m+k$ способами.

Это так называемое правило суммы.

Перейдем к правилу произведения. Рассмотрим следующую задачу:

З а д а ч а. Сколько можно записать двузначных чисел в десятичной системе счисления?

Поскольку число двузначное, число десятков может принимать одно из девяти значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Число единиц может принимать те же значения и может, кроме того, быть равным нулю.

Если цифра десятков 1, цифра единиц может быть 0, 1, 2, ..., 9 — всего 10 значений. Если цифра десятков 2, то вновь цифра единиц может быть равна 0, 1, 2, ..., 9. Всего получаем 90 двузначных чисел.

Обобщим полученный результат. Пусть данное множество из $n = m + k$ элементов разбито на два подмножества, состоящие соответственно из m и k элементов. Пусть из подмножества, содержащего m элементов, выбирается один элемент и независимо из подмножества, содержащего k элементов, выбирается один элемент. Спрашивается: сколько различных пар элементов при этом образуется?

Ответ на поставленный вопрос дает таблица:

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} a_1b_1; & a_1b_2; & \ldots; & a_1b_k \\ a_2b_1; & a_2b_2; & \ldots; & a_2b_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_mb_1; & a_mb_2; & \ldots; & a_mb_k \end{matrix}\right\}}_{k \text{ пар в каждой строке}} m \text{ строк}$$

Таким образом, если общее число всевозможных пар обозначим N, то

$$N = mk. \tag{3.2}$$

Сформулируем теперь правило произведений:

Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) k способами, то пары объектов A и B можно выбрать mk способами.

2. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ И ВЫБОРКИ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Генеральная совокупность без повторений — это набор некоторого конечного числа различных элементов: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Наглядному представлению такой генеральной совокупности может послужить набор из n разноцветных квадратов.

Выборкой объема m $(m \leqslant n)$ будем называть произвольную группу из m элементов данной генеральной совокупности. Наглядному представлению такой выборки может служить пестрая лента, построенная из m квадратов различной окраски.

Каким минимальным признаком может отличиться одна выборка объема m от другой выборки такого же объема? Это равносильно вопросу: каким минимальным признаком могут отличаться узоры двух пестрых лент, построенных из одинакового количества квадратов?

Иной окраской по крайней мере одного квадрата
или
порядком расположения квадратов в линейном строю.

Таким образом, минимальным признаком, отличающим одну выборку объема m от другой выборки такого же объема, может быть:

их различие по крайней мере одним элементом (а)
или
их различие порядком расположения элементов. (б)

Назовем такие выборки размещениями без повторений из n элементов по m.

Можно построить такой наглядный граф наших рассуждений:

Выборки объема m из генеральной совокупности без повторений объема n

когда одна от другой отличаются по крайней мере одним элементом или порядком расположения элементов

$\downarrow$

Размещения без повторений из n элементов по m

Отсюда следует определение понятия:

Размещениями без повторений из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Характерный пример размещений без повторений — вся совокупность трехзначных номеров, в каждом из которых нет повторения цифр.

Число размещений из n элементов по m договоримся обозначать A_n^m. Попробуем определить это число.

Пусть имеем n элементов. Первый элемент можно выбрать n способами. Второй приходится выбирать из оставшихся $n-1$ элементов, поэтому второй элемент можно выбрать $n-1$ способом. Тогда по формуле (3.2) пары двух элементов можно образовать $n(n-1)$ способами. Третий элемент придется отбирать из числа оставшихся $n-2$ элементов. Это можно сделать $n-2$ способами. Тогда опять по формуле (3.2) тройки элементов можно образовать $n(n-1)(n-2)$ способами. Аналогично четверки можно образовать $n(n-1)(n-2)(n-3)$ способами, а размещения по m элементов $n(n-1)(n-2)...(n-(m-1))$ способами. Таким образом,

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1). \qquad (3.3)$$

Формулу (3.3) преобразуем, умножая и деля правую часть на произведение $(n-m)(n-m-1)(n-m-2)...3\cdot 2\cdot 1$.

Получаем:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1}.$$

Математики ввели специальное название для произведения

$$n(n-1)(n-2)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

Такое произведение называется факториалом числа n и обозначается символом $n!$ Причем принято считать $0!=1$.

Формула (3.3) теперь приобретает удобную для запоминания форму:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (3.4)$$

В случае, когда $m=n$, одно размещение от другого отличается только порядком расположения элементов. *Такие размещения называются перестановками без повторений.* Мы можем продолжать наши рассуждения по такой схеме:

Выборки объема m из генеральной совокупности без повторений объема n

↓ когда обладают или признаком (а), или (б)

Размещения без повторений из n элементов по m

↓ когда $m=n$ и обладают признаком (б) и только (б)

Перестановки без повторений из n элементов

Отсюда определение:

Перестановками без повторений из n элементов называются размещения без повторений из n элементов по n, т. е. размещения, отличающиеся одно от другого только порядком расположения элементов.

Характерный пример перестановок без повторений — вся совокупность всех десятизначных номеров, в каждом из которых нет повторения цифр.

Обозначим число перестановок объема n символом P_n. Тогда по определению и формуле (3.3)

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1,$$

т. е.

$$P_n = n! \tag{3.5}$$

Среди размещений без повторений из n элементов по m $(m<n)$ можно выделить такие, которые отличаются одно от другого (а) и только (а) признаком. Такие размещения называются сочетаниями без повторений. Свои рассуждения можем продолжать по такой схеме:

Выборки объема m из генеральной совокупности без повторений объема n

↓ когда обладают или признаком (а), или (б)

Размещения без повторений из n элементов по m

↓ когда $m < n$ и обладают признаком (а) и только (а)

Сочетания без повторений из n элементов по m

Определение:

Сочетаниями без повторений из n элементов по m называются такие размещения без повторений из n элементов по m, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число таких сочетаний обозначается символом C_n^m. Разумеется, при $m=n$ $C_n^n=1$.

Характерный пример сочетаний без повторений — всевозможные варианты состава делегации в количестве, например, трех человек от коллектива, в котором 10 человек.

В каждом из C_n^m сочетаний имеется m различных элементов, поэтому на базе каждого сочетания можно получить P_m перестановок. Совокупность всех выборок, полученных путем построения всех перестановок на базе каждого из C_n^m сочетаний, представляет собой число размещений A_n^m, т. е.

$$C_n^m \cdot P_m = A_n^m,$$

откуда

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{3.6}$$

Все нами рассмотренное в параграфе 2 можно привести к такой обобщающей схеме:

Выборки объема m из совокупности n различных элементов

если одна от другой отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения

Размещения без повторений объема m из n данных элементов. Их число

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

если одно от другого отличаются только порядком расположения элементов

Перестановки без повторений объема m. Их число

$$P_m = m!$$

если одно от другого отличаются хотя бы одним элементом

Сочетания без повторений объема m из данных n элементов. Их число

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

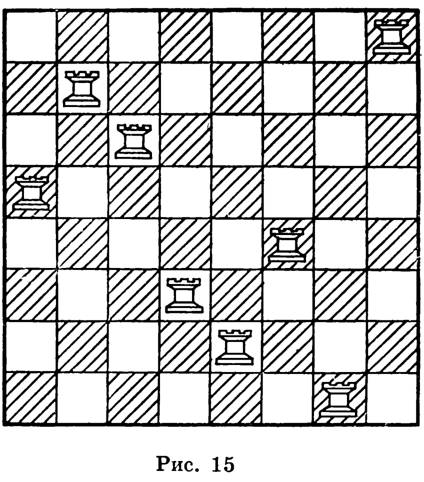


Рис. 15

Примеры

1. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером разных стартовых пятерок?

Так как при составлении стартовой пятерки тренера интересует только состав пятерки, то достаточно определить число сочетаний из 12 элементов по 5:

$$C_{12}^5 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 792.$$

2. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей (рис. 15) так, чтобы они не могли взять друг друга?

Ясно, что в этом случае на каждой горизонтали и каждой вертикали шахматной доски может быть расположено только по одной ладье. Число возможных позиций — число перестановок из 8 элементов:

$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320.$

3. Для полета на Марс необходимо укомплектовать следующий экипаж космического корабля: командир корабля, первый его помощник, второй помощник, два бортинженера и один врач. Командующая тройка может быть отобрана из числа 25 готовящихся к полету летчиков, два бортинженера — из числа 20 специалистов, в совершенстве знающих устройство космического корабля, и врач — из числа 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж исследователей космоса?

При выборе командира и его помощников важно определить, какой из военных летчиков лучше других справляется с теми или иными функциями в управлении кораблем. Значит, здесь важен не только персональный состав командующей тройки, но и соответствующая расстановка подобранных людей. Поэтому ясно, что командующая тройка может быть укомплектована A_{25}^3 способами.

Обязанности у обоих бортинженеров примерно одинаковые. Они могут выполнять их по очереди. Следовательно, пара бортинженеров может быть укомплектована C_{20}^2 способами. Аналогичное положение и с врачом — его можно подобрать C_8^1 способами.

В силу формулы (3.2) весь экипаж может быть укомплектован $A_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_8^1 = 20\,976\,000$ способами.

Упражнения

28. В классе 30 учеников. Необходимо избрать старосту, комсорга и культорга класса. Сколькими способами можно образовать эту руководящую тройку, если одно лицо может занимать только один пост?

29. Сколько разных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?

30. Игрок сначала бросает белую игральную кость, потом черную. Сколько может быть случаев, когда число очков, появившихся на белой кости, больше числа очков, появившихся на черной?

31. Сколько разных стартовых шестерок можно образовать из числа 10 волейболистов?

32. В кружке юных математиков 25 членов. Необходимо из-

брать председателя кружка, его заместителя, редактора стенгазеты и секретаря. Сколькими способами можно образовать эту руководящую четверку, если одно лицо может занимать только один пост?

33. Школьная комсомольская организация, в которой насчитывается 150 членов, выбирает 6 делегатов на районную конференцию. Сколькими способами может быть избрана эта шестерка?

34. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?

35. В одной арабской сказке речь идет о такой задаче. Вокруг костра сидят 12 разбойников. Каждый из них смертельно ненавидит двух ближайших соседей. С целью спрятать награбленное необходимо выделить 5 разбойников. Сколькими способами атаман может назначить пятерых так, чтобы между ними не было распрей?

36. В колоде 32 карты. Раздаются 3 карты. Сколько может быть случаев появления одного туза среди розданных карт?

37. В пионерском отряде 4 звена по 8 пионеров. Выбираются 4 делегата на дружинный сбор. Что можно сказать о числе случаев избрания в делегаты хотя бы одного представителя первого отряда?

38. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры могут повторяться?

39. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1 и 2?

40. На книжной полке плотно уставлено n книг. Сколькими способами можно взять с полки k книг при условии, что ни разу не будут вынуты рядом стоящие книги?

41. Докажите, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

42. Докажите равенство Паскаля:

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Программа на языке Бейсик для вычисления A_n^m:

```
8    REM ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ
9    REM ЧИСЛА РАЗМЕЩЕНИЙ
10   INPUT "ВВЕДИТЕ M. N", M, N
20   IF N>=M THEN 50
30   PRINT "M>N"
40   GO TO 130
50   F=N
60   GOSUB 200
70   N1=F1
80   F=N-M
90   GOSUB 200
100  M1=F1
110  A=N1/M1
```

```
120 PRINT "ЧИСЛО РАЗМЕЩЕНИЙ A="; A
130 STOP
198 REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ
199 REM ФАКТОРИАЛА
200 F1=1
210 F2=0
220 IF F=F2 THEN 260
230 F2=F2+1
240 F1=F1 * F2
250 GO TO 220
260 RETURN
270 END
```

3. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ С ПОВТОРЕНИЯМИ И ВЫБОРКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Генеральная совокупность с повторениями — это набор элементов n различных классов, когда элементы, принадлежащие одному классу, считаются одинаковыми:

$$\underbrace{a,\ a,\ \ldots,\ a}_{\text{1-й класс}},\ \underbrace{b,\ b,\ \ldots,\ b}_{\text{2-й класс}},\ \ldots,\ \underbrace{l,\ l,\ \ldots,\ l}_{n\text{-й класс}}.$$

Наглядному представлению генеральной совокупности с повторениями может послужить набор квадратов n различных окрасок.

Разумеется, число элементов в каждом из этих n классов неограниченное.

Выборкой с повторениями объема m будем называть произвольную группу m элементов генеральной совокупности с повторениями.

Наглядному представлению выборки с повторениями может послужить лента, построенная из m квадратов. На этот раз лента может быть не только пестрая. Независимо от m она может быть и одноцветной — любой из имеющихся n окрасок.

Каким минимальным признаком может отличаться одна такая выборка объема m от другой выборки такого же объема? Это равносильно вопросу: каким минимальным признаком могут отличаться узоры лент, построенных из одинакового количества квадратов?

Иной окраской по крайней мере одного квадрата

или

порядком расположения квадратов в линейном строю.

Таким образом, минимальным признаком отличия одной выборки от другой может быть:

их различие по крайней мере одним элементом (а)

или

их различие порядком расположения элементов. (б)

Как видно, эти признаки совпадают с признаками (а) и (б), о которых шла речь в параграфе 2, поэтому выборки, о которых идет речь сейчас, следует называть размещениями с повторениями из элементов n классов по m. Строим соответствующую нашим рассуждениям схему:

Выборки объема m из генеральной совокупности элементов n классов

когда одна от другой отличаются или признаком (а), или (б)

Размещения с повторениями из элементов n классов по m

Определение:

Размещениями с повторениями из элементов n классов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа элементов данных n классов генеральной совокупности с повторениями, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число таких размещений обозначим символом $\bar{A}_n^m$.

Характерный пример таких размещений — совокупность n-значных номеров автомашин.

Первый элемент какого-нибудь из упомянутых размещений мы можем выбрать n различными способами: некоторый элемент любого из n классов. Второй элемент тоже n различными способами: опять некоторый элемент любого из n классов. Тогда в силу формулы (3.2) размещения объема 2 можно образовать $n \cdot n = n^2$ различными способами. Третий элемент можем выбрать тоже n способами: опять некоторый элемент любого из n классов. Тогда в силу формулы (3.2) размещения объема 3 можно образовать $n^2 \cdot n = n^3$ различными способами. Читатель, вероятно, уже почувствовал аналогию: размещения объема m можно построить n^m различными способами, поэтому

$$\bar{A}_n^m = n^m. \qquad (3.7)$$

Из совокупности размещений с повторениями можно выделить группу выборок с повторениями, которые одна от другой отличаются по крайней мере одним элементом. Порядок расположения элементов во внимание не принимается. Такие размещения по аналогии названию, принятому в параграфе 2, будем называть сочетаниями с повторениями. Поразмышляем по схеме:

Выборки объема m из генеральной совокупности элементов n классов

когда одна от другой отличаются или (а), или (б) признаком

Размещения с повторениями из элементов n различных классов по m

когда одно от другого отличаются (а) и только (а) признаком

Сочетания с повторениями из элементов n классов по m

Определение:

Сочетаниями с повторениями из элементов n классов по m называются такие размещения с повторениями из элементов n классов по m, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число таких сочетаний обозначим $\bar{C}_n^m$.

Характерный пример таких сочетаний — всевозможные различные комплекты m предметов, составленные из предметов n различных видов.

Поскольку при построении сочетаний с повторениями порядок расположения элементов не принимается во внимание, любое сочетание объема m из элементов n классов мы можем представить так:

$$\underbrace{aa...a}_{k_1} \times \underbrace{bb...b}_{k_2} \times ... \times \underbrace{ll...l}_{k_n}, \qquad (3.8)$$

где $k_1 + k_2 + ... + k_n = m$.

Читатель, думаем, догадался, что $\times$ — это символ границы между двумя различными классами. Передвижения границ $\times$ означают факты замены элементов одних классов элементами других классов, т. е. факты образования новых сочетаний с повторениями.

В совокупности (3.8) мы имеем $n-1$ символ $\times$ и m символов «не $\times$», которые обозначим α. Тогда наша совокупность будет выглядеть так:

$$\alpha\alpha...\alpha \times \alpha\alpha...\alpha \times ... \times \alpha\alpha...\alpha.$$

Теперь ясно, что $\overline{C}_n^m$ — это число перестановок с повторениями из $n-1$ элементов $\times$ и m элементов α. Поэтому

$$\overline{C}_n^m = P_{m;\ n-1}.$$

Что собой представляют эти перестановки?

Рассмотрим размещения с повторениями объема k, которые удовлетворяют такому условию: в каждой выборке должно быть k_i элементов ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) i-го класса, причем $k=\sum_{i=1}^{n} k_i$. Очевидно, что такие выборки одна от другой будут отличаться только порядком расположения элементов. Целесообразно их называть перестановками с повторениями.

Опять поможем себе такой схемой:

Выборки объема k из генеральной совокупности элементов, которые принадлежат n различным классам

когда они отличаются или (а), или (б) признаком

$\downarrow$

Размещения с повторениями из элементов n различных классов по k

когда одно от другого отличаются признаком (б) и только (б)

$\downarrow$

Перестановки с повторениями из элементов n различных классов по k, когда от i-го класса в каждой выборке участвует k_i элементов

Определение:

Перестановками с повторениями по k элементов из n различных классов называются размещения с повторениями объема k, которые одно от другого отличаются только порядком расположения элементов, когда от i-го класса в каждой выборке участвует k_i элементов.

Число таких перестановок обозначим $P_{k_1;\ k_2;\ \ldots;\ k_r}$.

Если $k_1=k_2=\ldots=k_n=1$, то мы имели бы дело с перестановками без повторений и по формуле (3.5) число таких перестановок было бы $k!$

При взаимной перестановке элементов одного класса новые перестановки не получаются, поэтому число различных перестановок с повторениями, получаемых из перестановок (3.5), будет в определенное число раз меньше $k!$ Но во сколько раз?

Элементы a можно взаимно переставить местами $k_1!$ раз.

Элементы b можно взаимно переставить местами $k_2!$ раз.

. . . .

Элементы l можно взаимно переставить местами $k_n!$ раз.

Значит, число различных перестановок с повторениями меньше $k!$ в $k_1!k_2!...k_n!$ раз. Поэтому число перестановок с повторениями

$$P_{k_1;\ k_2;\ ...;\ k_n}=\frac{k!}{k_1!k_2!...k_n!}, \tag{3.9}$$

где, как раньше отмечалось, $k=k_1+k_2+...+k_n$.

Все нами рассмотренное в параграфе 3 можно привести к такой обобщающей схеме:

Выборки объема m из совокупности повторяющихся элементов n различных классов

↓

если одна от другой отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения

↓

Размещения с повторениями объема m из повторяющихся элементов n различных классов. Их число

$$\bar{A}_n^m=n^m$$

↓ если одно от другого отличаются только порядком расположения элементов

Перестановки с повторениями. Когда элемент i-го класса ($i=1,\ 2,\ ...,\ n$) повторяется в перестановке k_i раз, то число таких перестановок

$$P_{k_1;\ k_2;\ ...;\ k_n}=\frac{k!}{k_1!\ k_2!\ ...\ k_n!}$$

↓ если одно от другого отличаются хотя бы одним элементом

Сочетания с повторениями объема m из повторяющихся элементов n различных классов. Их число

$$\bar{C}_n^m=P_{m;\ n-1}=\frac{(m+n-1)!}{m!\ (n-1)!}$$

Примеры

1. Мать купила 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Девять дней подряд она каждый день предлагает сыну по одному фрукту. Сколькими способами она может выдать сыну фрукты?

Обозначим: яблоко — я, грушу — г, апельсин — а. Напишем одну из возможных выборок:

ггягааяаа

Все остальные выборки можно получить перестановкой ее элементов. Следовательно, приходится вычислять перестановки с повторениями. В нашей задаче $k=9$, $k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=4$. Поэтому число всевозможных способов раздачи фруктов

$$P_{2,\,3,\,4}=\frac{9!}{2!3!4!}=1260.$$

2. В продажу поступили открытки 10 разных видов. Сколькими способами можно образовать набор из 12 открыток? из 8 открыток?

В данном случае нам приходится считать сочетания с повторениями:

$$\bar{C}_{10}^{12}=\frac{21!}{12!\ 9!}=293\ 930,$$

$$\bar{C}_{10}^{8}=\frac{17!}{8!\ 9!}=24\ 310.$$

3. Сколько разных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, если та же самая цифра может повторяться несколько раз?

Из цифр 0, 1, 2 можно составить $\bar{A}_3^4=3^4$ четырехзначных числа. Но числа, записанные четырьмя цифрами, первая из которых нуль, не являются четырехзначными. Значит, из числа размещений с повторениями надо вычесть число таких выборок, которые начинаются нулем. Последних столько, сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2 при повторении цифр. Таких чисел будет $\bar{A}_3^3=3^3$.

Поэтому ответ:

$$3^4-3^3=54.$$

Упражнения

43. Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «математика»?

44. Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «соединение»?

45. Для несения почетного караула из 10 человек могут быть приглашены офицеры пехотных войск, авиации, погран-

войск, артиллерии, офицеры морского флота и ракетных войск. Сколькими способами можно избрать состав почетного караула?

46. Докажите:

$$\overline{C}_n^{k-m} = C_{n-m+k-1}^{k-m}.$$

47. На школьный вечер танцев собрались ребята IX, X и XI классов. Вести хоровод приглашаются 10 школьников. Сколькими способами можно составить хоровод при условии участия в нем хотя бы одного одиннадцатиклассника?

48. На студенческий вечер собрались юноши и девушки 8 факультетов университета (в том числе математического и филологического). Для исполнения народных танцев приглашаются 10 студентов. Сколькими способами можно выбрать эту десятку при условии участия в ней хотя бы одного студента математического и хотя бы одного студента филологического факультета?

49. На Всемирный фестиваль молодежи прибыла молодежь пяти континентов мира. Возникла необходимость организовать делегацию из восьми представителей разных стран для оглашения клятвы борцов за мир. Сколькими способами можно было образовать делегацию при условии участия в ней представителей всех континентов?

50. В гастрономе имеются конфеты трех наименований. Конфеты упакованы в коробки трех видов — для каждого наименования своя коробка. Сколькими способами можно заказать набор из пяти коробок?

51. Сколько автомашин можно обеспечить 6-значными номерами?

52. Сколько 5-значных чисел можно образовать из цифр 0 и 1?

53. В одном государстве (сказочном) не найдется двух человек, у которых оказался бы одинаковый состав зубов: либо у них разное число зубов, либо зубов нет в разных местах. Оцените наибольшую численность населения в этом государстве, если максимальное число зубов у одного человека 32.

54. Сколькими способами можно отослать 6 писем разным адресатам, если их будут разносить 3 курьера и заранее известно, какому курьеру какое достанется письмо?

55. Четыре студента сдают экзамен. Сколько может быть вариантов распределения оценок, если известно, что так или иначе все они экзамены сдали?

56. Три парня и три девушки решили после окончания школы поступить на работу в своем родном городе. В городе имеются 3 завода, на которые берут только мужчин, 2 — где нужны женщины и 2 — которые принимают на работу и муж-

чин, и женщин. Сколькими способами пять выпускников могут распределиться по заводам города?

57. Выпускнику средней школы, поступающему в вуз, нужно сдать экзамены и набрать на них не менее 17 баллов (двойки при этом получать нельзя). Сколько существует разных наборов экзаменационных оценок, дающих ему право поступления?

58. Сколько разных по стоимости браслетов может составить ювелир из набора в 18 камней, если у него имеются 5 одинаковых по стоимости рубинов, 6 одинаковых по стоимости алмазов и 7 одинаковых по стоимости кусков янтаря?

59. У мужа 12 сослуживцев: 5 женщин и 7 мужчин. У жены тоже 12: 7 женщин и 5 мужчин. За семейным столом помещаются 14 человек. Сколько разных компаний из 6 женщин и 6 мужчин могут они пригласить при условии участия 6 знакомых мужа и 6 знакомых жены?

60. Все участники туристической поездки владеют по крайней мере одним иностранным языком. 6 из них владеют английским языком, 6 — немецким, 7 — французским, 4 — английским и немецким, 3 — немецким и французским, 2 — французским и английским. Один турист владеет английским, французским и немецким языками. Других туристов в группе нет. Сколько туристов владеет только английским языком, только французским? Сколько туристов в группе?

61. Отряд из 92 школьников собрался в поход. Из них 47 приготовили бутерброды с колбасой, 38 — с сыром, 42 — с ветчиной, 28 — с колбасой и сыром, 31 — с колбасой и ветчиной, 26 — с сыром и ветчиной. Взяли с собой бутерброды всех сортов 25 школьников, а некоторые взяли только по бутылке молока. Сколько было таких, которые взяли только молоко?

62. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, которые получаются при перестановке цифр 1, 2, 3, 4.

63. Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?

64. Найдите сумму трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1, 2, 3 и 4?

65. Города A и B соединяются двумя шоссейными дорогами, которые пересечены десятью проселочными. Сколькими разными способами можно добраться от A до B, чтобы ни разу не пересекать пройденный путь?

66. Имеется неограниченное количество монет по 10, 15 и 20 к. Сколькими способами можно образовать набор из 20 монет?

67. На заседании научного студенческого общества присутствовало 52 студента: по 13 студентов от 4 факультетов. Сколькими способами можно избрать правление общества в составе 4 лиц так, чтобы в состав правления вошли представители 3 факультетов?

68. По линейке расположено n предметов. Сколькими способами можно убрать 3 из них так, чтобы не были убраны рядом стоящие предметы?

69. 5 белых шариков, 5 черных и 5 красных надо разложить по 3 ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось по 5 шариков. Сколькими способами это можно осуществить?

70. При закрытии пионерского фестиваля Прибалтийских республик в первый ряд президиума (из 9 мест) были приглашены 3 литовских, 3 латышских и 3 эстонских пионера. Сколькими способами их можно рассадить так, чтобы ни одна тройка представителей из одной республики не занимала трех соседних мест?

71. Сколько цифр понадобится для записи всех чисел от 1 до 999 999 включительно?

IV. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

1. КЛАССИЧЕСКОЕ ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Бросаем игральную кость. Выпасть могут или одно, или два, или три, или четыре, или пять, или шесть очков. Каждое из этих событий элементарное, и вместе они образуют пространство элементарных событий. Но будут ли эти элементарные события равновозможными? Какие обстоятельства могут это обеспечить? Это довольно сложный вопрос. Мы, конечно, можем прикинуть, что эти элементарные события будут равновозможными, когда кость будет предельно правильным кубом с центром тяжести в своем геометрическом центре, когда она сделана из идеально однородного материала, когда она подбрасывается наугад одинаковым способом. Этих «когда» так много, что трудно их все учесть. А может, нам обойтись без

Обозначение события	Содержание события	Количество элементарных событий, благоприятствующих данному событию
A	Выпало четное число очков	3
B	Выпало меньше 3 очков	2
C	Выпало менее 5 очков	4
D	Выпало не более 5 очков	5
G	Выпало не менее 3 очков	4
V	Выпало больше 6 очков	0
U	Выпало не более 6 очков	6

особых хитростей и послушаться собственной интуиции: **равновозможными элементарными событиями считать такие события, любое из которых по отношению к другим событиям не обладает никаким преимуществом появляться чаще другого при многократных испытаниях, проводимых в одинаковых условиях.**

В таблице на с. 41 рассматриваем случайные события, представляющие подпространства пространства равновозможных элементарных событий, определяемых испытанием с игральной костью.

Эта таблица показывает неодинаковые возможности появления этих событий при одном испытании: более возможно то событие, которому благоприятствует большее число равновозможных элементарных событий данного пространства. Эти числа и могли бы быть численной мерой возможностей появления различных событий, связанных с данным испытанием.

А как сравнить возможности появления событий A_1 и B_1, которые связаны с различными пространствами элементарных событий?

Пусть в одном ящике 10 черных шаров, пронумерованных четными числами 2, 4, 6, ..., 18, 20, а в другом — 8 белых шаров, пронумерованных числами 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Наугад вынимаем из каждого ящика по одному шару. Пусть

событие A_1 — «номер черного шара, кратный 3»,

событие B_1 — «номер белого шара не больше 5».

Какое из этих событий более возможно?

Событию A_1 благоприятствуют 3 равновозможных события (6; 12; 18), событию B_1 тоже 3 (1; 3; 5). Может быть, A_1 и B_1 равновозможные события? Ответить на заданный вопрос можно, только зная количество всех равновозможных элементарных событий пространства, связанного с выниманием черного шара, и пространства, связанного с выниманием белого шара.

Полная информация об этих событиях может быть представлена в форме сводной таблицы:

Событие	Содержание события	Число элементарных событий всего пространства	Число элементарных событий, благоприятствующих данному событию	Отношение
A_1	Появление числа, кратного 3, на черном шаре	10	3	0,300
B_1	Появление числа, не большего 5, на белом шаре	8	3	0,375

По такой сводке нетрудно прийти к выводам:

а) событие B_1 более возможное, чем событие A_1;

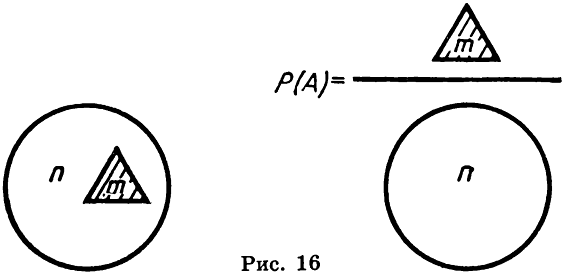


Рис. 16

б) возможность появления некоторого события H удобно измерять отношением $\frac{m}{n}$, где n — число всех равновозможных элементарных событий, вытекающих из условий данного испытания, а m — число равновозможных событий, которые благоприятствуют событию H.

Эту удобную меру возможности появления события H принято называть вероятностью этого события и обозначать символом

$$P(H)=\frac{m}{n}. \tag{4.1}$$

Определение:

Вероятностью случайного события H называется отношение числа равновозможных элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к числу всех равновозможных элементарных событий пространства E, определяемого данным испытанием.

Это — классическое определение вероятности случайного события.

Полезно формуле (4.1) придать наглядную иллюстрацию (рис. 16).

2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

При классическом подходе определение понятия вероятности сводится к более простому понятию — равновозможности элементарных событий. А это понятие основано на интуитивном воображении человеком тех условий испытания, которые вроде достоверно определяют эту равновозможность. Но не каждое испытание поддается такому воображению. Например, не может быть речи о равновозможных исходах испытания, состоящего в подбрасывании неправильной игральной кости, центр тяжести которой сознательно смещен с геометрического центра.

Каким путем следует подойти к понятию, например, вероятности выпадения шестерки при бросании такой кости? Через воспоминания о правильной кости?

Как известно, вероятность выпадения шестерки при бросании правильной игральной кости $\frac{1}{6}$.

Допустим, провели n бросаний такой игральной кости и определили, что шестерка выпала m раз. Отношение $\frac{m}{n}$ назовем статистической частотой появления шестерки. При проведении серии таких испытаний может случиться, что

при подбрасывании кости n раз шестерка выпала m_1 раз: статистическая частота $\tilde{p}_1 = \frac{m_1}{n}$;

при подбрасывании кости $n+1$ раз шестерка выпала m_2 раз: статистическая частота $\tilde{p}_2 = \frac{m_2}{n+1}$;

. . . .

при подбрасывании кости N раз шестерка выпала m_N раз: статистическая частота $\tilde{p}_N = \frac{m_N}{N}$.

Что мы непременно заметим? Для статистических частот $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \ldots, \tilde{p}_N$ будет характерна устойчивость: они будут с возрастанием числа испытаний сколь угодно близко сосредоточиваться около вероятности $p = \frac{1}{6}$.

Подбрасывая неправильную кость и определяя статистические частоты появления, например, шестерки, заметим такую же устойчивость этих частот, но эти частоты с возрастанием числа испытаний устойчиво будут сосредоточиваться около некоторого в результате неправильности игральной кости нам неизвестного числа p. Это неизвестное число в отношении статистических частот появления шестерки при подбрасывании неправильной игральной кости выступает как бы в роли $\frac{1}{6}$ в отношении статистических частот появления шестерки при подбрасывании правильной игральной кости. Логично это неизвестное число p считать вероятностью выпадения шестерки при бросании неправильной игральной кости. Конечно, для каждой своеобразно неправильной игральной кости это p будет разное.

Пусть $\frac{m_1}{n}$; $\frac{m_2}{n+1}$; ...; $\frac{m_N}{N}$ — статистические частоты наступления события A в некоторой серии испытаний, каждое из которых проводится в одинаковых условиях (например, подбрасывается одна и та же игральная кость с одинаковой высоты).

Вероятностью события A называется то неизвестное число p, около которого сосредоточиваются значения статистических частот наступления события A при возрастании числа испытаний.

Это — статистическое определение вероятности случайного события.

Вероятность события можно приближенно определить принципиально со сколько угодной высокой точностью, осуществив достаточно большое число испытаний и подсчитав частоту наступления события в этой совокупности испытаний. Несколько примеров.

Пусть стрелок производит выстрел по мишени. Как оценить вероятность попадания? Если события «попадание» и «промах» равновозможны, то ответ получаем сразу:

$$P\ (\text{«попадание»}) = \frac{1}{2}.$$

Но они могут быть не равновозможны. Скажем, Алеша постоянно посещает тренировки по стрельбе и каждый раз из сотни выстрелов попадает в мишень 80—90 раз, а Сережа на стрельбище бывает редко, поэтому из сотни выстрелов попадает только 30—40 раз. Ясно, что у Алеши возможность попадания больше, чем у Сережи. Как оценить эти разные возможности? Из практики, так, как определяется число появлений герба при подбрасывании монеты.

Произведено выстрелов	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Число попаданий Алеши	8	17	26	33	41	49	56	65	72	81
Число попаданий Сережи	3	5	8	12	15	19	22	25	28	31

Из таблицы видно, что как у Алеши, так и у Сережи отношение числа попаданий к числу произведенных выстрелов меняется. Эти отношения в какой-то мере зависят от числа произведенных выстрелов. Но вместе с тем заметно, что упомянутое отношение для каждого стрелка колеблется около определенного числа: у Алеши около $\frac{4}{5}$, у Сережи около $\frac{3}{10}$. Эти числа логично принять за оценку вероятности попадания. Эта оценка тем более надежна, чем больше проведено опытов с целью установления ее значения.

Пусть l — число испытаний, при проведении которых могло произойти или не произойти событие A, а k — число испытаний, при проведении которых событие A произошло. Отношение $\frac{k}{l}$ называем статистической частотой события A и обозначаем

$$P_l(A) = \frac{k}{l}. \qquad (4.2)$$

Индекс l специально ставим для того, чтобы подчеркнуть зависимость статистической частоты от числа испытаний. Практика показывает, что в случаях, когда точно знаем вероятность $P(A)$ в классическом понимании, при достаточно большом числе испытаний l

$$P_l\{A\} \approx P(A).$$

Это приближенное равенство получило теоретическое обоснование, как увидим далее, в законе больших чисел, открытом Яковом Бернулли. Непосредственно из формулы (4.1) следуют такие важные выводы:

1. Вероятность достоверного события равна 1, т. е.

$$P(U) = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю, т. е.

$$P(V) = \frac{0}{n} = 0.$$

З а м е ч а н и е. Если $P(A) = 0$, то это не значит, что событие A невозможно.

3. Вероятность любого события A подчиняется неравенству

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1, \quad \text{ибо} \quad 0 \leqslant m \leqslant n.$$

П р и м е р ы

1. Как приближенно установить число рыб в озере?

Пусть в озере x рыб. Забрасываем сеть и, допустим, находим в ней n рыб. Каждую из них метим и выпускаем обратно в царство Нептуна. Через несколько дней в такую же погоду и в том же месте забрасываем ту же самую сеть. Допустим, что находим в ней m рыб, среди которых k меченых. Пусть событие A — «пойманная рыба мечена». Тогда по формуле (4.2)

$$P_m\{A\} = \frac{k}{m}.$$

Но если в озере x рыб и мы в него выпустили n меченых, то согласно формуле (4.1)

$$P(A) = \frac{n}{x}.$$

Так как

$$P_m\{A\} \approx P(A), \quad \text{то} \quad x \approx \frac{mn}{k}.$$

2. Из 1000 произвольно выбранных деталей примерно 4 бракуются. Сколько бракованных окажется среди 2400 деталей (приближенно)?

Обозначим события:

A — «наугад выбранная деталь бракованная».

Тогда $P(A) = 0{,}004$.

Если среди 2400 деталей x бракованных, то $P(A)=\frac{x}{2400}$. Так как $P\{A\}\approx P(A)$, то $\frac{x}{2400}\approx 0{,}004$, откуда $x\approx 10$.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Формирование геометрического понятия вероятности можно начать с такого примера.

Пусть на плоскости задан круг и в нем треугольник B. В круг наудачу «бросается точка». Как определить вероятность события A, состоящего в том, что точка попадает в треугольник?

Предлагаем при подходе к решению этой задачи руководствоваться следующим исходным положением: вероятность попасть в какую-либо часть круга пропорциональна площади этой части.

Интуитивное соображение логичности такого подхода не вызывает никаких осложнений.

Если площадь круга составляет n единиц площади, а площадь треугольника m единиц площади, то в силу пропорциональности

$$P(A)=\frac{mk \text{ единиц площади}}{nk \text{ единиц площади}}=\frac{m}{n}. \qquad (4.3)$$

На этот раз следует добавить, что $\frac{m}{n}$ в данной ситуации не обязано быть рациональным числом, хотя формально результат записывается так же, как формула (4.1). Смысл он имеет несколько иной.

Можно на конкретном примере показать, что геометрический подход к вероятности события не зависит от вида измерений геометрического пространства: важно только, чтобы пространство элементарных событий E и подпространство, представляющее событие A, были бы одинакового вида и одинаковых измерений.

С этой целью можно рассмотреть такой пример.

Пусть на плоскости задан круг и определен его сектор BOC (рис. 17). $\angle BOC=\alpha$. Рассмотрим вероятности трех событий A_1, A_2 и A_3, состоящих в следующем.

В круг наудачу бросается точка M.

A_1 — «попадание M в сектор BOC».

На дугу окружности наугад бросается точка N.

A_2 — «попадание N на дугу BDC».

На рисунок наудачу бросается вектор $\overrightarrow{OS}$, начало которого закреплено в точке O.

A_3 — «попадание $\overrightarrow{OS}$ в угол α».

Пусть $OC=r$ — радиус круга. Тогда

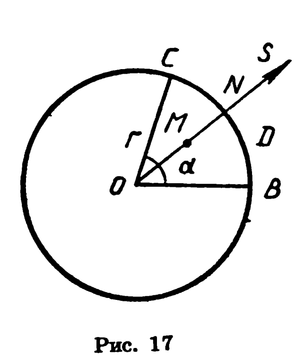


Рис. 17

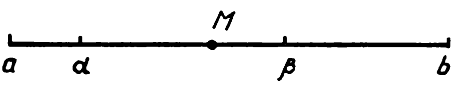


Рис. 18

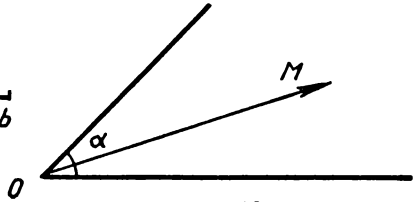


Рис. 19

$$P(A_1)=\frac{S_{\text{сект. } BOC}}{S_{\text{круга}}}=\frac{0{,}5r^2\alpha}{\pi r^2}=\frac{\alpha}{2\pi};$$

$$P(A_2)=\frac{C_{\smile BOC}}{C_{\text{окруж}}}=\frac{r\alpha}{2\pi r}=\frac{\alpha}{2\pi};$$

$$P(A_3)=\frac{\alpha}{2\pi}.$$

Тот факт, что $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)$, подтверждает вышеизложенное суждение и позволяет обобщить формулу (4.3):

если событие A состоит в попадании точки M на отрезок $[\alpha;\beta]$ при ее бросании наугад на отрезок $[a;b]$ (рис. 18), то

$$P(A)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}; \qquad (4.4)$$

если событие A состоит в попадании вектором $\overrightarrow{OM}$ в угол α при бросании наугад, когда начало вектора закреплено в точке O (рис. 19), то

$$P(A)=\frac{\pi}{2\pi}\ (\text{в радианах})=\frac{\pi}{360^\circ}\ (\text{в градусах});$$

если событие A состоит в попадании точки M в пространство T при бросании ее наугад в пространство S, то

$$P(A)=\frac{V_T}{V_S}.$$

Геометрическая интерпретация вероятности события является важным средством подхода к расчету вероятностей сложных событий.

Рисунок 16 способствует запоминанию формулы вероятности.

При том или ином подходе к понятию вероятности вырисовывается единое ядро: вероятность — это специальная мера.

Определение:

Вероятностью случайного события А называется численная мера возможности наступления этого события при некотором испытании.

Мера

когда она выражается числом

↓

Численная мера

когда ею измеряется возможность наступления события A при некотором испытании

↓

Вероятность события A

Примеры

1. В ящике имеются 4 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется белым?

В этом случае $m=4$, $n=11$. Поэтому P («наудачу вынутый шар белый»)$=\frac{4}{11}$.

2. Первенство по баскетболу оспаривают 18 лучших команд, которые путем жеребьевки распределяются на две группы, по 9 команд в каждой; 5 команд обычно занимают первые места. Какова вероятность попадания всех лидирующих команд в одну группу? Какова вероятность попадания двух лидирующих команд в одну группу и трех — в другую?

Обозначим события:

A — «все 5 лидирующих команд попали в одну группу»,

B — «2 лидирующие команды попали в одну группу, 3 — в другую».

Из 18 команд группы по 9 команд могут быть образованы C_{18}^{9} способами. Таким образом, $n=C_{18}^{9}$. Событию A благоприятствует столько событий, сколькими способами 5 лидирующих команд могут образовывать девятки с четырьмя командами из числа остальных 13 команд. Поэтому как первая, так и вторая девятка может быть образована C_{13}^{4} способами. Следовательно, $m=2C_{13}^{4}$.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2C_{13}^{4}}{C_{18}^{9}}=\frac{1}{34}.$$

Аналогичные рассуждения подсказывают нам, что число событий, благоприятствующих событию B, равно:

$$m=C_5^2\cdot C_{13}^7+C_5^3\cdot C_{13}^6.$$

Поэтому

$$P(B)=\frac{C_5^2\cdot C_{13}^7+C_5^3\cdot C_{13}^6}{C_{18}^9}=\frac{12}{17}.$$

Наличие лидирующих команд в обеих группах более вероятно, чем их отсутствие в одной из групп. Любители баскетбола в этом убеждаются на практике: слабых групп нет!

3. Таня и Ваня договорились встречать Новый год в компании из 10 человек. Они оба очень хотели сидеть за праздничным столом рядом. Какова вероятность исполнения их желания, если среди их друзей принято места распределять путем жребия?

10 человек могут усесться за стол 10! разными способами. Сколько же из этих $n=10!$ равновозможных способов благоприятны для Тани и Вани? Таня и Ваня, сидя рядом, могут занять 20 разных позиций. В то же время восьмерка их друзей может сесть за стол 8! разными способами, поэтому $m=20\cdot 8!$ Следовательно, P («исполнение желания Тани и Вани») $=\frac{20\cdot 8!}{10!}=\frac{2}{9}$.

Упражнения

72. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Неграмотный мальчик перемешал буквы, а потом наугад их собрал. Какова вероятность того, что он опять составил слово «книга»?

73. На первом этаже семиэтажного дома в лифт зашли 3 человека. Вероятность выхода каждого из лифта на любом этаже одинакова. Найдите вероятности событий:

A — «все вышли из лифта на четвертом этаже»,

B — «все вышли из лифта на одном и том же этаже»,

C — «все выходили из лифта на разных этажах».

74. 10 шаров произвольно раскладываются по 4 ящикам. Чему равна вероятность того, что в первом ящике окажется 1 шар, во втором — 2, в третьем — 3 и в четвертом — 4 шара?

75. 4 зенитных пулемета ведут огонь по 3 самолетам. Каждый пулемет выбирает объект обстрела наугад. Какова вероятность того, что все 4 пулемета ведут огонь по одному и тому же самолету?

76. На 5 карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4 и 5. Наугад выбираются одна за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше, чем на первой?

77. В одном ящике 6 белых и 4 черных шарика, в другом —

7 белых и 3 черных. Из каждого ящика наугад вынимается по одному шарику. Чему равна вероятность того, что оба шарика окажутся белыми?

78. Условие задачи 77. Чему равна вероятность того, что вынутые шарики разных цветов?

79. Четырем игрокам раздается поровну колода из 32 карт. Определите вероятность того, что каждый игрок получил карты только одной масти.

80. Какова вероятность того, что при случайном распределении n шариков по n гнездам одно гнездо окажется пустым?

81. На стоянке автомобилей можно поместить 12 машин в один ряд. Однажды оказались свободны 4 места подряд. Является ли это событием исключительным или столь же часто бывают свободны 4 не соседних места?

82. В ящике 90 стандартных и 10 нестандартных деталей. Какова вероятность того, что среди 10 наугад вынутых деталей бракованных не окажется?

83. В одной семье 4 сестры по очереди моют посуду. Из каждых 4 разбитых тарелок 3 разбито младшей, и потому ее называют неуклюжей. Справедливо ли это?

84. Номер телефона состоит из 5 цифр. Какова вероятность того, что все цифры наугад набранного номера разные?

85. Замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, если все диски занимают определенные положения относительно корпуса замка, их цифры образуют определенное число, составляющее «секрет» замка. Какова вероятность открыть замок, установив произвольную комбинацию цифр?

86. Два друга условились встретиться в Москве у памятника А. С. Пушкину между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течение α минут ($\alpha < 60$), после чего уходит. Чему равна вероятность встречи?

До сих пор мы использовали для подсчета вероятностей только определение вероятности. Со следующего параграфа начнем использовать некоторые простейшие формулы.

V. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕРОЯТНОСТЯМИ

1. ВЕРОЯТНОСТЬ ОБЪЕДИНЕНИЯ НЕСОВМЕСТИМЫХ СОБЫТИЙ

Пусть m — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию A, k — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию B, несовместимому по отношению к событию A. Пусть n — общее число равновозможных элементарных событий, образующих пространство E всех элементарных событий.

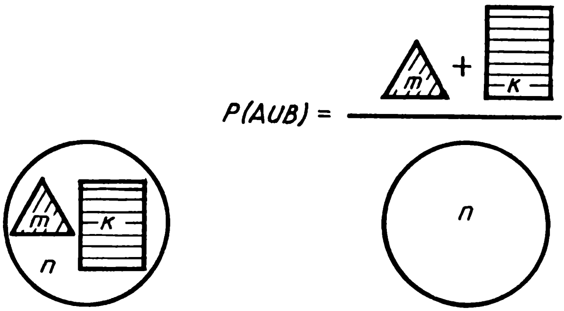


Рис. 20

В силу формулы (4.1)

$$\boldsymbol{P}(A)=\frac{m}{n}, \ \boldsymbol{P}(B)=\frac{k}{n}.$$

Согласно определению объединения несовместимых событий $A \cup B$ означает: «имеет место или A, или B». Но число событий, благоприятствующих такому событию, равно $m+k$, поэтому согласно формуле (4.1)

$$\boldsymbol{P}(A \cup B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=\boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(B). \quad (5.1)$$

На рисунке 20 дана геометрическая интерпретация формулы (5.1), если m, k и n здесь величины площадей нарисованных фигур.

Последнее равенство выражает следующее правило, которое последовательным применением формулы (5.1) может быть распространено на любое конечное число событий:

Вероятность объединения попарно несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий.

С помощью этого правила мы можем справиться со многими задачами.

Примеры

1. В лотерее выпущено 10 000 билетов и установлено: 10 выигрышей по 200 р., 100 — по 100 р., 500 — по 25 р. и 1000 выигрышей по 5 р. Гражданин купил один билет. Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 25 р.?

Обозначим события:

A — «выигрыш не менее 25 р.»,

A_1 — «выигрыш равен 25 р.»,

A_2 — «выигрыш равен 100 р.»,

A_3 — «выигрыш равен 200 р.».

Поскольку куплен только один билет, то $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3$, где события A_1, A_2, A_3 попарно несовместимы, поэтому

$\boldsymbol{P}(A)=\boldsymbol{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)=\boldsymbol{P}(A_1)+\boldsymbol{P}(A_2)+\boldsymbol{P}(A_3)$,

$P(A_1)=0{,}05$; $P(A_2)=0{,}01$; $P(A_3)=0{,}001$;
$P(A)=0{,}05+0{,}01+0{,}001=0{,}061$.

2. На военных учениях летчик получил задание «уничтожить» 3 рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета одна бомба. Вероятность попадания в первый склад примерно равна 0,01, во второй — 0,008, в третий — 0,025.

Любое попадание в результате детонации вызывает взрыв и остальных складов. Какова вероятность того, что склады противника будут уничтожены?

Обозначим события:

A — «склады уничтожены»,

A_1 — «попадание в первый склад»,

A_2 — «попадание во второй склад»,

A_3 — «попадание в третий склад».

Для уничтожения складов достаточно попадания в один из упомянутых трех складов. Поэтому

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3,$$
$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=$$
$$=0{,}01+0{,}008+0{,}025=0{,}043.$$

3. Бросают две монеты. Чему равна вероятность появления хотя бы одного герба?

Обозначим события:

A — «появление герба при подбрасывании первой монеты»,

B — «появление герба при подбрасывании второй монеты».

Снова предстоит найти вероятность события $C=A\cup B$. Но в этом случае $P(C)\neq P(A)+P(B)$, ибо события A и B совместимы. Поэтому формула (5.1) не применима. Приходится избрать другой путь решения.

Пусть событие $\bar{C}$ — «выпадение герба не состоялось». Ясно, что $P(\bar{C})=\frac{1}{4}$, ибо при бросании двух монет могут произойти только следующие события:

$$\text{гг},\ \boxed{\text{цц}},\ \text{цг},\ \text{гц}.$$

Событие $C\cup\bar{C}$ представляет собой достоверное событие, поэтому $C\cup\bar{C}=U$.

$$P(U)=P(C\cup\bar{C})=P(C)+P(\bar{C})=1,$$

отсюда

$$P(C)=1-P(\bar{C})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

2. ВЕРОЯТНОСТЬ ОБЪЕДИНЕНИЯ СОВМЕСТИМЫХ СОБЫТИЙ

Пусть m — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию A, k — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих событию B. Допустим, что среди упомянутых $m+k$ событий содержится l таких, которые благоприятствуют и событию A, и событию B. Если n — общее число равновозможных элементарных событий, образующих пространство E всех элементарных событий, то согласно формуле (4.1)

$$\boldsymbol{P}(A)=\frac{m}{n},\ \boldsymbol{P}(B)=\frac{k}{n},\ \boldsymbol{P}(A\cap B)=\frac{l}{n}.$$

Запись $A\cup B$ означает: «произойдет или событие A, или событие B, или то и другое вместе». Но такому событию благоприятствуют $(m+k-l)$ элементарных событий. Поэтому по формуле (4.1) находим:

$$\boldsymbol{P}(A\cup B)=\frac{m+k-l}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n}.$$

Подставляя значение, получим:

$$\boldsymbol{P}(A\cup B)=\boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(B)-\boldsymbol{P}(A\cap B). \qquad (5.2)$$

Ясно, что эта формула представляет собой обобщение формулы (5.1). На основании равенства (5.2) формулируем правило:

Вероятность объединения двух совместимых событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного осуществления.

Геометрическая интерпретация формулы (5.2) дается на рисунке 21, где m, k, l, n представляют величины площадей изображенных фигур.

Примеры

1. Подбрасываем две монеты. Какова вероятность выпадения хотя бы одного герба?

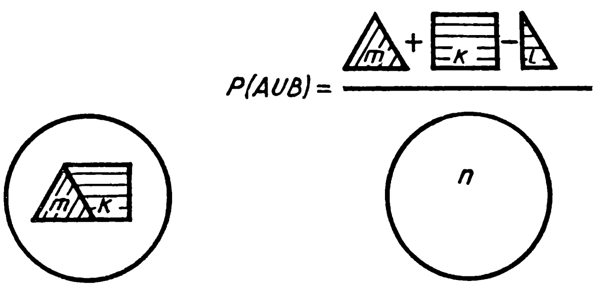


Рис. 21

Обозначим события:
A — «появление герба при подбрасывании первой монеты»,
B — «появление герба при подбрасывании второй монеты».
Нам надо определить вероятность события $C = A \cup B$.
Так как A и B — совместимые события, то

$$\boldsymbol{P}(C) = \boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B).$$

Ясно, что $\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Отсюда $\boldsymbol{P}(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

2. A, B, C — совместимые события. Доказать:
$\boldsymbol{P}(A \cup B \cup C) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}(A \cap B) - \boldsymbol{P}(A \cap C) - \boldsymbol{P}(B \cap C) + \boldsymbol{P}(A \cap B \cap C)$.

Обозначим $A \cup B = D$. Тогда

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(A \cup B \cup C) &= \boldsymbol{P}(D \cup C) = \boldsymbol{P}(D) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}(D \cap C) = \\ &= \boldsymbol{P}(A \cup B) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}((A \cup B) \cap C) = \\ &= \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ &= \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}(A \cap B) - \boldsymbol{P}(A \cap C) - \boldsymbol{P}(B \cap C) + \\ &+ \boldsymbol{P}((A \cap C) \cap (B \cap C)) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) + \boldsymbol{P}(C) - \boldsymbol{P}(A \cap B) - \\ &- \boldsymbol{P}(A \cap C) - \boldsymbol{P}(B \cap C) + \boldsymbol{P}(A \cap B \cap C),\end{aligned}$$

ибо $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

3. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Из ящика, в котором a белых и b черных шаров, наугад вынимают последовательно один за другим два шара.

Рассмотрим события:

A — «первый шар белый», B — «второй шар белый».

Понятно, что $\boldsymbol{P}(A) = \frac{a}{a+b}$. Какова же вероятность события B?

Если событие A произошло, то среди оставшихся $a+b-1$ шаров только $a-1$ белых, поэтому вероятность того, что второй шар белый, $\frac{a-1}{a+b-1}$. Если же A не произошло, то среди оставшихся шаров белых a, поэтому вероятность того, что второй шар белый, $\frac{a}{a+b-1}$. Мы столкнулись с ситуацией, когда вероятность появления события B зависит от того, произошло или не произошло событие A. В таком случае говорим, что событие B зависит от события A, а вероятность появления события B условная.

Найдем способ вычисления таких вероятностей.

Условную вероятность появления события B, если событие A произошло, будем обозначать $\boldsymbol{P}(B/A)$.

Пусть из n равновозможных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, составляющих пространство E всех элементарных событий,

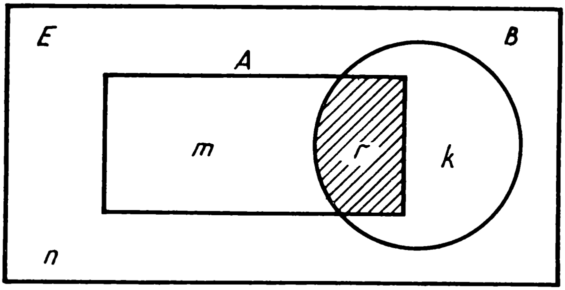


Рис. 22

событию A благоприятствуют m событий,

событию B благоприятствуют k событий,

событию $A \cap B$ благоприятствуют r событий

(понятно, что $r \leqslant k$, $r \leqslant m$). Если событие A произошло, то это означает, что наступило одно из событий A_j, благоприятствующих событию A. При этом условии событию B благоприятствуют r и только r событий A_j, благоприятствующих $A \cap B$ (рис. 22). Таким образом,

$$\boldsymbol{P}(B/A)=\frac{r}{m}=\frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}}=\frac{\boldsymbol{P}(A \cap B)}{\boldsymbol{P}(A)}. \tag{5.3}$$

Точно так же

$$\boldsymbol{P}(A/B)=\frac{\boldsymbol{P}(A \cap B)}{\boldsymbol{P}(B)}.$$

На основании этих формул находим:

$$\boldsymbol{P}(A \cap B)=\boldsymbol{P}(B) \cdot \boldsymbol{P}(A/B),$$
$$\boldsymbol{P}(A \cap B)=\boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B/A),$$

т. е.

$$\boldsymbol{P}(A \cap B)=\boldsymbol{P}(B) \cdot \boldsymbol{P}(A/B)=\boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B/A). \tag{5.3'}$$

На основании (5.3) формулируем правило умножения вероятностей:

Вероятность пересечения двух событий равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло.

Замечание. Формулы (5.3) имеют смысл в том случае, если имеют смысл события A/B и B/A. А они имеют смысл тогда, когда события A и B совместимы.

Примеры

1. В ящике a белых и b черных шаров. Последовательно вынимаем два шара. Какова вероятность того, что оба они белые?

Обозначим события:

A — «первый шар белый»,

B — «второй шар белый».

Нам надлежит найти $\boldsymbol{P}(A \cap B)$. Имеем:

$$\boldsymbol{P}(B/A) = \frac{a-1}{a+b-1}; \ \boldsymbol{P}(A) = \frac{a}{a+b}.$$

Согласно формуле (5.3) находим:

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

2. Из колоды в 32 карты наугад одну за другой вынимают две карты. Найти вероятность того, что:

а) вынуты два валета;

б) вынуты две карты пиковой масти;

в) вынуты валет и дама.

Обозначим события:

A — «первая карта — валет»,

B — «вторая карта — валет»,

C — «первая карта пиковой масти»,

D — «вторая карта пиковой масти»,

E — «вторая карта — дама».

Нам следует найти $\boldsymbol{P}(A \cap B)$, $\boldsymbol{P}(C \cap D)$ и $\boldsymbol{P}(A \cap E)$. По формуле (5.3)

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(B/A) \cdot \boldsymbol{P}(A);$$

$$\boldsymbol{P}(C \cap D) = \boldsymbol{P}(D/C) \cdot \boldsymbol{P}(C);$$

$$\boldsymbol{P}(A \cap E) = \boldsymbol{P}(E/A) \cdot \boldsymbol{P}(A);$$

$\boldsymbol{P}(B/A) = \frac{3}{31}$; $\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{8}$, тогда $\boldsymbol{P}(A \cap B) = \frac{3}{248}$;

$\boldsymbol{P}(D/C) = \frac{7}{31}$; $\boldsymbol{P}(C) = \frac{1}{4}$, тогда $\boldsymbol{P}(C \cap D) = \frac{7}{124}$;

$\boldsymbol{P}(E/A) = \frac{4}{31}$; $\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{8}$, тогда $\boldsymbol{P}(E \cap A) = \frac{1}{62}$.

3. Доказать:

$$\boldsymbol{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \boldsymbol{P}(A_1) \cdot \boldsymbol{P}(A_2/A_1) \cdot \boldsymbol{P}(A_3/(A_1 \cap A_2)).$$

Пусть $A_1 \cap A_2 = B$. Тогда $\boldsymbol{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \boldsymbol{P}((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = \boldsymbol{P}(B \cap A_3) = \boldsymbol{P}(A_3/B) \cdot \boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(A_3/(A_1 \cap A_2))\, \boldsymbol{P}(A_1 \cap A_2) = \boldsymbol{P}(A_3/(A_1 \cap A_2)) \cdot \boldsymbol{P}(A_2/A_1) \cdot \boldsymbol{P}(A_1)$, что и требовалось доказать.

4. НЕЗАВИСИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

К понятию независимости случайных событий есть несколько подходов.

Событие B называется независимым от A, если его вероятность не зависит от того, произошло или не произошло событие A, т. е.

$$\boldsymbol{P}(B/A) = \boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(B/A).$$

В случае независимости события B от события A из формулы (5.3) получим:

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B). \tag{5.4}$$

Сопоставляя формулы (5.3) и (5.4), убеждаемся, что свойство независимости взаимно. Если событие B не зависит от осуществления A, то и A не зависит от осуществления B.

На основании (5.4) формулируем правило:

Вероятность пересечения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

На практике, как мы убедимся при рассмотрении примеров, для установления независимости событий обычно пользуются соображениями, основанными на опыте обращения с данными объектами, а не анализом формул.

Доказательство правила (5.4) проводилось на основе соотношений

$$\boldsymbol{P}(A/B) = \boldsymbol{P}(A) \text{ и } \boldsymbol{P}(B/A) = \boldsymbol{P}(B), \tag{5.5}$$

т. е. у нас получилось так: если имеет место (5.5), то имеет место и (5.4). Но читателя может интересовать и обратное: следует ли (5.5) из (5.4)?

Пусть

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B), \text{ причем } \boldsymbol{P}(A) \neq 0 \text{ и } \boldsymbol{P}(B) \neq 0.$$

Тогда на основании формул

$$\boldsymbol{P}(A/B) = \frac{\boldsymbol{P}(A \cap B)}{\boldsymbol{P}(B)}, \quad \boldsymbol{P}(B/A) = \frac{\boldsymbol{P}(B \cap A)}{\boldsymbol{P}(A)}$$

и (5.4) получаем:

$$\boldsymbol{P}(A/B) = \frac{\boldsymbol{P}(A \cap B)}{\boldsymbol{P}(B)} = \frac{\boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B)}{\boldsymbol{P}(B)} = \boldsymbol{P}(A);$$

$$\boldsymbol{P}(B/A) = \frac{\boldsymbol{P}(B \cap A)}{\boldsymbol{P}(A)} = \frac{\boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B)}{\boldsymbol{P}(A)} = \boldsymbol{P}(B),$$

т. е. из (5.4) следует (5.5). Таким образом, исходной точкой определения независимости A и B может быть и формула (5.4), т. е. мы можем сказать и так:

События A и B называются независимыми тогда и только тогда, когда имеет место условие

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B). \tag{5.6}$$

Однако определение независимости событий на основе (5.5) более близкое к интуитивному воображению.

Важно запомнить: независимые события с положительными вероятностями не являются несовместимыми. Пусть

$$\boldsymbol{P}(A) \neq 0 \text{ и } \boldsymbol{P}(B) \neq 0. \tag{5.7}$$

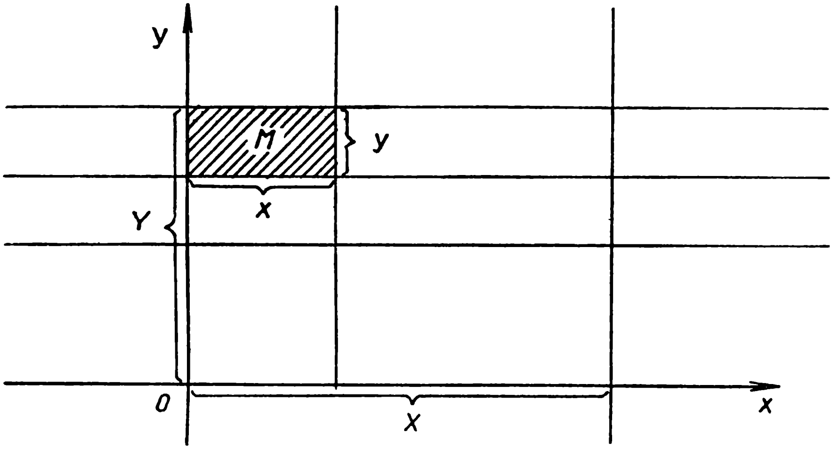


Рис. 23

Как известно, пересечение несовместимых событий $A \cap B = V$ — невозможное событие. Следовательно, для несовместимых событий

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(V) = 0.$$

Но тогда в силу (5.6) по крайней мере одно из вероятностей $\boldsymbol{P}(A)$ или $\boldsymbol{P}(B)$ должно быть равно нулю. Это противоречит (5.7), а значит, подтверждает факт, что независимые события могут быть совместимы.

Приведем любопытный пример, когда интуитивное понимание независимости событий тоже приводит к формальному соотношению (5.4).

Пусть точка M наудачу бросается в прямоугольник с размерами X и Y, стороны которого параллельны координатным осям. Какова вероятность того, что M попадет в прямоугольник с размерами x и y, стороны которого тоже параллельны координатным осям (рис. 23)? Пусть события:

A — «M попала в полосу шириной x». Разумеется, $\boldsymbol{P}(A) = \frac{x}{X}$,

B — «M попала в полосу шириной y». Разумеется, $\boldsymbol{P}(B) = \frac{y}{Y}$.

По формуле (4.3) $\boldsymbol{P}$ («M попала в маленький прямоугольник») $= \boldsymbol{P}(A \cap B)$, но $\boldsymbol{P}$ («M попала в маленький прямоугольник») $= \frac{xy}{XY} = \frac{x}{X} \cdot \frac{y}{Y} = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B)$. Следовательно,

$$\boldsymbol{P}(A \cap B) = \boldsymbol{P}(A) \cdot \boldsymbol{P}(B),$$

что и требовалось доказать.

5. НЕЗАВИСИМОСТЬ В СОВОКУПНОСТИ

Несколько событий называются независимыми, если любое из них не зависит от любой совокупности остальных. Для независимости событий в их совокупности недостаточно, чтобы они были попарно независимы.

Приведем такой пример.

Пусть в ящике 4 шара: черный, красный, белый и один пестрый — окрашенный в полоску всеми этими тремя цветами.

Обозначим события: после изъятия одного шара видим

A — «черный цвет»,

B — «красный цвет»,

C — «белый цвет»,

тогда

$$\boldsymbol{P}(A)=\boldsymbol{P}(B)=\boldsymbol{P}(C)=\frac{1}{2};$$

$$\boldsymbol{P}(A/B)=\boldsymbol{P}(A/C)=\boldsymbol{P}(C/A)=\boldsymbol{P}(C/B)=\boldsymbol{P}(B/C)=\boldsymbol{P}(B/A)=$$
$$=\frac{\sqrt{1}}{2}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{P}(A/B)=\boldsymbol{P}(A);\quad \boldsymbol{P}(A/C)=\boldsymbol{P}(A);\quad \boldsymbol{P}(C/A)=\boldsymbol{P}(C);$$
$$\boldsymbol{P}(C/B)=\boldsymbol{P}(C);\ \boldsymbol{P}(B/A)=\boldsymbol{P}(B);\ \boldsymbol{P}(B/C)=\boldsymbol{P}(B).$$

Это значит, что A, B, C попарно независимы. Тем не менее $\boldsymbol{P}(A/B\cap C)=\frac{1}{4}$. Значит, в совокупности A, B и C не являются независимыми.

Для независимых в совокупности имеет место

$$\boldsymbol{P}(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=\boldsymbol{P}(A_1)\cdot\boldsymbol{P}(A_2)\cdot\ \ldots\ \cdot\boldsymbol{P}(A_n). \qquad (5.8)$$

Примеры

1. Бросают две игральные кости. Какова вероятность появления на первой кости нечетного числа очков и на второй пяти очков?

Обозначим события:

A — «появление нечетного числа очков при бросании первой кости»,

B — «появление пяти очков при бросании второй кости».

Нам нужно найти $\boldsymbol{P}(A\cap B)$. Так как события A и B совместимы и независимы, то $\boldsymbol{P}(A\cap B)=\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B)$. Но $\boldsymbol{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{P}(B)=\frac{1}{6}$, поэтому $\boldsymbol{P}(A\cap B)=\frac{1}{12}$.

2. A, B и C — совместимые и независимые в совокупности события. Доказать, что $\boldsymbol{P}(A\cap B\cap C)=\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B)\cdot\boldsymbol{P}(C)$.

Допустим, что $A\cap B=D$. Тогда $\boldsymbol{P}(A\cap B\cap C)=\boldsymbol{P}(D\cap C)=$ $=\boldsymbol{P}(D)\cdot\boldsymbol{P}(C)=\boldsymbol{P}(A\cap B)\cdot\boldsymbol{P}(C)=\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B)\cdot\boldsymbol{P}(C)$.

3. Зашедший в магазин мужчина что-нибудь покупает с ве-

роятностью 0,1, зашедшая женщина — с вероятностью 0,6. У прилавка один мужчина и две женщины. Какова вероятность того, что по крайней мере одно лицо что-нибудь купит?

Обозначим события:

A — «покупку сделает мужчина»,

B_1 — «покупку сделает первая женщина»,

B_2 — «покупку сделает вторая женщина».

Если событие C — «по крайней мере одно лицо что-нибудь купит», то $C=A\cup B_1\cup B_2$. По формуле, построенной в примере 2 параграфа 2,

$$\boldsymbol{P}(C)=\boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(B_1)+\boldsymbol{P}(B_2)-\boldsymbol{P}(A\cap B_2)-\boldsymbol{P}(A\cap B_1)-\boldsymbol{P}(B_1\cap B_2)+\boldsymbol{P}(A\cap B_1\cap B_2).$$

Допуская, что покупатели между собой незнакомы, можем принимать, что A, B_1 и B_2 — события независимы. Тогда в силу (5.6) $\boldsymbol{P}(C)=\boldsymbol{P}(A)+\boldsymbol{P}(B_1)+\boldsymbol{P}(B_2)-\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B_2)-\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B_1)-\boldsymbol{P}(B_1)\cdot\boldsymbol{P}(B_2)+\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B_1)\cdot\boldsymbol{P}(B_2)$.

Но $\boldsymbol{P}(A)=0{,}1$, $\boldsymbol{P}(B_1)=\boldsymbol{P}(B_2)=0{,}6$, поэтому

$$\boldsymbol{P}(C)=0{,}1+0{,}6+0{,}6-0{,}1\cdot 0{,}6-0{,}1\cdot 0{,}6-0{,}6\cdot 0{,}6+0{,}1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}6=0{,}856.$$

4. Если события A и B независимы, то события A и $\bar{B}$ также независимы.

Действительно, поскольку A и B независимы, то $P(B/A)=P(B)$ и $P(\bar{B}/A)=1-P(B)=P(\bar{B})$.

Аналогично убеждаемся, что в случае независимости событий A и B независимыми будут события B и $\bar{A}$.

Предлагаем вам самостоятельно установить, что в этом случае независимыми будут также события $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

6. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть требуется найти вероятность события A, которое происходит вместе с одним из независимых событий B_1, B_2, B_3, ..., B_n (рис. 24).

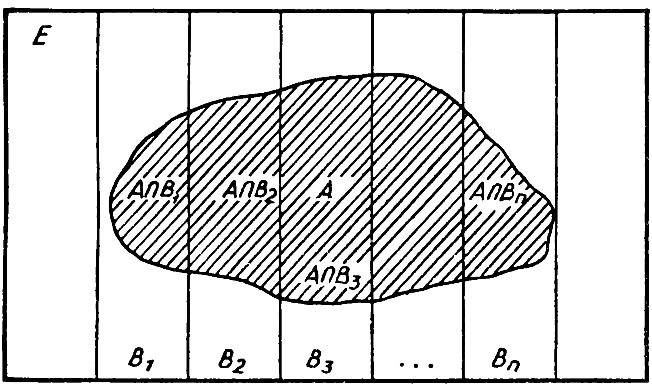


Рис. 24

Если A произошло вместе с одним из событий B_1, B_2, B_3, ..., B_n, значит, произошло одно из несовместимых событий

$$A \cap B_1,\ A \cap B_2,\ A \cap B_3,\ \ldots,\ A \cap B_n.$$

Таким образом, событие A представляет или событие $A \cap B_1$, или $A \cap B_2$, или $A \cap B_3$, ..., или $A \cap B_n$, а это означает, что

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup \ldots \cup (A \cap B_n).$$

Поскольку события B_1, B_2, B_3, ..., B_n взаимно несовместимы, то и события

$$A \cap B_1,\ A \cap B_2,\ A \cap B_3,\ \ldots,\ A \cap B_n$$

обладают тем же свойством. Поэтому

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A \cap B_1) + \boldsymbol{P}(A \cap B_2) + \boldsymbol{P}(A \cap B_3) + \ldots + \boldsymbol{P}(A \cap B_n).$$

По формуле (5.3′)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(A \cap B_1) &= \boldsymbol{P}(A/B_1) \cdot \boldsymbol{P}(B_1),\\
\boldsymbol{P}(A \cap B_2) &= \boldsymbol{P}(A/B_2) \cdot \boldsymbol{P}(B_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\boldsymbol{P}(A \cap B_n) &= \boldsymbol{P}(A/B_n) \cdot \boldsymbol{P}(B_n).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A/B_1) \cdot \boldsymbol{P}(B_1) + \boldsymbol{P}(A/B_2) \cdot \boldsymbol{P}(B_2) + \ldots + \boldsymbol{P}(A/B_n) \cdot \boldsymbol{P}(B_n). \tag{5.9}$$

Равенство (5.9) носит название формулы полной вероятности. С помощью этой формулы легко находим так называемую формулу Бейеса:

$$\boldsymbol{P}(B_i/A) = \frac{\boldsymbol{P}(A/B_i)\,\boldsymbol{P}(B_i)}{\boldsymbol{P}(A/B_1) \cdot \boldsymbol{P}(B_1) + \boldsymbol{P}(A/B_2) \cdot \boldsymbol{P}(B_2) + \ldots + \boldsymbol{P}(A/B_n) \cdot \boldsymbol{P}(B_n)} \tag{5.10}$$

при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Особенно широко она применяется при решении задач, связанных с вероятностной оценкой гипотез.

Докажем справедливость формулы Бейеса.

По формуле (5.3′)

$\boldsymbol{P}(A \cap B_i) = \boldsymbol{P}(A/B_i) \cdot \boldsymbol{P}(B_i)$ и

$\boldsymbol{P}(A \cap B_i) = \boldsymbol{P}(B_i/A) \cdot \boldsymbol{P}(A)$.

Из последнего равенства находим:

$$\boldsymbol{P}(B_i/A) = \frac{\boldsymbol{P}(A \cap B_i)}{\boldsymbol{P}(A)}.$$

Подставляя значение $\boldsymbol{P}(A)$ из формулы полной вероятности (5.9), получаем формулу Бейеса.

Примеры

1. Охотник сделал три выстрела по кабану. Вероятность попадания первым выстрелом примерно равна 0,4, вторым — 0,5,

третьим — 0,7. Одним попаданием кабана можно убить с вероятностью, примерно равной 0,2, двумя попаданиями — с вероятностью 0,6, а тремя наверняка. Найти вероятность того, что кабан будет убит.

Рассмотрим несовместимые события A_0, A_1, A_2, A_3:

A_0 — «промах»,

A_1 — «одно попадание»,

A_2 — «два попадания»,

A_3 — «три попадания».

Пусть

B_1 — «попадание с первого выстрела»,

B_2 — «попадание со второго выстрела»,

B_3 — «попадание с третьего выстрела»,

A — «кабан убит».

Согласно формуле полной вероятности

$$\boldsymbol{P}(A)=\boldsymbol{P}(A_0)\cdot\boldsymbol{P}(A/A_0)+\boldsymbol{P}(A_1)\cdot\boldsymbol{P}(A/A_1)+$$
$$+\boldsymbol{P}(A_2)\cdot\boldsymbol{P}(A/A_2)+\boldsymbol{P}(A_3)\cdot\boldsymbol{P}(A/A_3).$$

Вспомнив, что события, противоположные событиям B_1, B_2, B_3, обозначаются соответственно $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, $\bar{B}_3$, имеем:

$$A_0=\bar{B}_1\cap\bar{B}_2\cap\bar{B}_3,$$
$$A_1=(B_1\cap\bar{B}_2\cap\bar{B}_3)\cup(\bar{B}_1\cap B_2\cap\bar{B}_3)\cup(\bar{B}_1\cap\bar{B}_2\cap B_3),$$
$$A_2=(B_1\cap B_2\cap\bar{B}_3)\cup(B_1\cap\bar{B}_2\cap B_3)\cup(\bar{B}_1\cap B_2\cap B_3),$$
$$A_3=B_1\cap B_2\cap B_3.$$

Поскольку B_1, B_2, B_3 независимы в совокупности и $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, $\bar{B}_3$ независимы, то

$$\boldsymbol{P}(A_0)=\boldsymbol{P}(\bar{B}_1)\cdot\boldsymbol{P}(\bar{B}_2)\cdot\boldsymbol{P}(\bar{B}_3),$$
$$\boldsymbol{P}(A_1)=\boldsymbol{P}(B_1)\cdot\boldsymbol{P}(\bar{B}_2)\cdot\boldsymbol{P}(\bar{B}_3)+\boldsymbol{P}(\bar{B}_1)\cdot\boldsymbol{P}(B_2)\cdot\boldsymbol{P}(\bar{B}_3)+$$
$$+\boldsymbol{P}(\bar{B}_1)\cdot\boldsymbol{P}(\bar{B}_2)\cdot\boldsymbol{P}(B_3),$$
$$\boldsymbol{P}(A_2)=\boldsymbol{P}(B_1)\cdot\boldsymbol{P}(B_2)\cdot\boldsymbol{P}(\bar{B}_3)+\boldsymbol{P}(B_1)\cdot\boldsymbol{P}(\bar{B}_2)\cdot\boldsymbol{P}(B_3)+$$
$$+\boldsymbol{P}(\bar{B}_1)\cdot\boldsymbol{P}(B_2)\cdot\boldsymbol{P}(B_3),$$
$$\boldsymbol{P}(A_3)=\boldsymbol{P}(B_1)\cdot\boldsymbol{P}(B_2)\cdot\boldsymbol{P}(B_3).$$

Из условия задачи известно, что $\boldsymbol{P}(B_1)=0{,}4$, $\boldsymbol{P}(B_2)=0{,}5$, $\boldsymbol{P}(B_3)=0{,}7$; отсюда находим $\boldsymbol{P}(\bar{B}_1)=0{,}6$, $\boldsymbol{P}(\bar{B}_2)=0{,}5$, $\boldsymbol{P}(\bar{B}_3)=0{,}3$. Поэтому

$$\boldsymbol{P}(A_0)=0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3=0{,}09;$$
$$\boldsymbol{P}(A_1)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}36;$$
$$\boldsymbol{P}(A_2)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}41;$$
$$\boldsymbol{P}(A_3)=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}14.$$

Из условия следует:

$\boldsymbol{P}(A/A_0)=0$, $\boldsymbol{P}(A/A_1)=0{,}2$, $\boldsymbol{P}(A/A_2)=0{,}6$, $\boldsymbol{P}(A/A_3)=1$.

Подставляя эти результаты в формулу полной вероятности, получим:

$$P(A)=0{,}09\cdot 0+0{,}36\cdot 0{,}2+0{,}41\cdot 0{,}6+0{,}14\cdot 1=0{,}458.$$

2. Строительная бригада получает железобетонные перекрытия от трех домостроительных комбинатов (ДСК): от I ДСК — 30%, от II ДСК — 55% и от III ДСК — 15% перекрытий. Известно, что брак продукции I ДСК составляет 5%, II ДСК — 6%, а III ДСК — 10%. Полученные перекрытия хранятся в общем складе. Наугад для контроля проверенное перекрытие оказалось браком. Какова вероятность того, что бракованное перекрытие изготовлено на I ДСК?

Обозначим события:

A — «наугад проверенное перекрытие — брак»,

B_1 — «наугад проверенное перекрытие изготовлено на I ДСК»,

B_2 — «наугад проверенное перекрытие изготовлено на II ДСК»,

B_3 — «наугад проверенное перекрытие изготовлено на III ДСК».

Нам следует найти $P(B_1/A)$ по формуле (5.10):

$$P(B_1/A)=\frac{P(A/B_1)\cdot P(B_1)}{P(A/B_1)\cdot P(B_1)+P(A/B_2)\cdot P(B_2)+P(A/B_3)\cdot P(B_3)}.$$

Но по условию задачи

$$P(A/B_1)=0{,}05,\ P(A/B_2)=0{,}06,\ P(A/B_3)=0{,}1,$$
$$P(B_1)=0{,}3,\ P(B_2)=0{,}55,\ P(B_3)=0{,}15,$$

поэтому

$$P(B_1/A)=\frac{0{,}05\cdot 0{,}3}{0{,}05\cdot 0{,}3+0{,}06\cdot 0{,}55+0{,}1\cdot 0{,}15}=0{,}238.$$

3. Из 10 учеников, которые пришли на экзамен по математике, трое подготовились отлично, четверо — хорошо, двое — удовлетворительно, а один совсем не готовился — понадеялся на то, что все помнит. В билетах 20 вопросов. Отлично подготовившиеся ученики могут ответить на все 20 вопросов, хорошо — на 16 вопросов, удовлетворительно — на 10, и неподготовившийся — на 5 вопросов. Каждый ученик получает наугад 3 вопроса из 20. Приглашенный первым ученик ответил на все 3 вопроса. Какова вероятность того, что он отличник?

Обозначим события:

A_1 — «приглашен ученик, подготовившийся отлично»,

A_2 — «приглашен ученик, подготовившийся хорошо»,

A_3 — «приглашен ученик, подготовившийся удовлетворительно»,

A_4 — «приглашенный ученик к экзаменам не готов»,

A — «приглашенный ученик ответил на 3 вопроса».

Согласно условию задачи

$P(A_1)=0{,}3,\ P(A_2)=0{,}4,\ P(A_3)=0{,}2,\ P(A_4)=0{,}1.$

Кроме того, ясно:

$$P(A/A_1)=1,\ P(A/A_2)=\frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\approx 0{,}491,$$

$$P(A/A_3)=\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18}\approx 0{,}105,$$

$$P(A/A_4)=\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\approx 0{,}009.$$

Следует найти $P(A_1/A)$.

По формуле Бейеса (5.10)

$$P(A_1/A)=\frac{0{,}3\cdot 1}{0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 0{,}009}\approx 0{,}58.$$

Как видно, искомая вероятность сравнительно невелика. Поэтому учителю придется предложить ученику еще несколько дополнительных вопросов.

Упражнения

87. В ящике 10 белых и 8 красных шариков. Одновременно наугад вынимают 2 шарика. Какова вероятность того, что они разных цветов?

88. В ящике 7 белых и 9 черных шариков. Наугад вынимают один шарик, рассматривают его на свету и кладут обратно в ящик. Опять наугад вынимают один шарик. Какова вероятность, что оба шарика белые?

89. (Задача-шутка.) 10 участников собрания носят галоши одинакового размера. Уходя с собрания домой, они вынуждены галоши надевать в темном коридоре, поэтому не могут отличить своих галош от чужих галош того же размера. Чему равна вероятность того, что каждый из участников собрания вернется домой в своих галошах?

90. Из N выпускаемых с конвейера деталей допускаются M нестандартных. С целью контроля качества наугад отобраны n деталей. Получено указание: если среди них не меньше m окажутся нестандартными, то следует забраковать всю партию. Какова вероятность того, что партия деталей будет забра кована?

91. Вероятность обнаружения туберкулезного заболевания при одной рентгеноскопии примерно равна $\frac{3}{4}$. Чему равна вероятность, что заболевание будет раскрыто при трех рентгеноскопиях?

92. В лотерее выпущено n билетов, m из которых выигрывают. Гражданин купил k билетов. Какова вероятность того, что по крайней мере один из купленных билетов выигрышный?

93. Из колоды, содержащей 52 карты, наугад вынимают

4 карты. Найдите вероятность того, что все эти карты разных мастей.

94. Вероятность, что при нажиме стартера мотор машины заработает, равна примерно $\frac{5}{6}$. Чему равна вероятность, что при повторном нажиме стартера включают мотор?

95. Корабль-мишень обстреливается ракетами. Вероятность попадания каждой ракетой примерно равна $\frac{9}{10}$. Корректировки стрельбы нет, и поэтому попадания — независимые события. Вероятность того, что попавшая в цель ракета потопит корабль, примерно равна $\frac{2}{3}$. Обстрел ведется до тех пор, пока корабль потоплен или пока не исчерпаны запасы ракет. Ракетный катер (атакующий корабль) вооружен 5 ракетами. Чему равна вероятность того, что корабль будет потоплен до того момента, когда катер использует весь запас ракет?

96. У рыбака есть 3 излюбленных места рыбалки. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что рыба клюнет в первом месте, близка к $\frac{1}{3}$, во втором — $\frac{1}{2}$, в третьем — $\frac{1}{4}$. Известно, что рыбак забросил удочку 3 раза, а вытащил только одну рыбу. Какова вероятность того, что он рыбачил в первом из излюбленных мест?

97. Путешественник может купить билет в одной из трех касс железнодорожного вокзала. Вероятность того, что он направится к первой кассе, примерно равна $\frac{1}{2}$, ко второй — $\frac{1}{3}$, к третьей — $\frac{1}{6}$. Вероятности того, что билетов уже нет в кассах, примерно такие: в первой кассе — $\frac{1}{5}$, во второй — $\frac{1}{6}$, в третьей — $\frac{1}{8}$. Путешественник обратился в одну из касс и получил билет. Определите вероятность того, что он направился к первой кассе.

98. В одном из ящиков 10 белых и 6 черных шариков, во втором — 7 белых и 9 черных. Произвольно выбирают ящик и из него наугад вынимают шарик. Он белый. Чему равна вероятность того, что и второй шарик, наугад вынутый из этого ящика, окажется белым?

99. При взрыве снаряда образуются осколки трех весовых категорий: крупные, средние и мелкие, причем число крупных, средних и мелких осколков составляет соответственно 0,1; 0,3; 0,6 общего числа осколков.

При попадании в броню крупный осколок пробивает ее с вероятностью около 0,9, средний — с вероятностью, близкой к 0,2, и мелкий — с вероятностью, близкой к 0,05. В броню попал один осколок и пробил ее. Найдите вероятности того, что эта пробоина причинена: крупным, средним и мелким осколком.

100. Рабочий обслуживает 5 станков. 20% времени он уделяет первому станку, 10% — второму, 18% — третьему, 25% — четвертому, 30% — пятому. Какова вероятность того, что случайно заглянувший в цех мастер найдет рабочего:

а) у первого или третьего станка;

б) у первого или пятого станка;

в) у первого или четвертого станка;

г) у первого, второго или третьего станка?

101. Группе студентов для прохождения производственной практики выделено 30 мест: 15 — в Туле, 8 — во Владимире, 7 — в Калуге. Какова вероятность того, что студент и студентка, которые в скором времени собираются справить свадьбу, будут посланы для прохождения практики в один и тот же город, если декан ничего не знает об их семейных делах?

102. Вероятность улучшения спортсменом личного достижения по прыжку с шестом равна p. Чему равна вероятность того, что он улучшит свой результат, если ему представлена возможность прыгать 2 раза?

103. Два зенитных орудия ведут огонь по одному и тому же самолету. Вероятность попадания выстрелом из первого орудия примерно равна 0,2, из второго — 0,6. Первым залпом в самолет попали только из одного орудия. Какова вероятность того, что промахнулся расчет первого орудия?

104. Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут пять дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течение часа составляет около 0,6; если по второй — 0,3; если по третьей — 0,2; если по четвертой — 0,1; если по пятой — 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?

105. Какова вероятность того, что при n бросаниях игральной кости хотя бы один раз появится шестерка? хотя бы два раза пятерка?

VI. НЕЗАВИСИМЫЕ ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

1. ФОРМУЛА Я. БЕРНУЛЛИ

Несколько раз бросаем монету. Появление герба, скажем, при четвертом бросании не зависит от того, каковы были результаты при первом, при втором и при третьем бросаниях. Мы имеем дело с независимыми испытаниями. Решим теперь такую задачу.

При проведении некоторого однократного испытания вероятность появления события A равна p, а непоявления $q=1-p$.

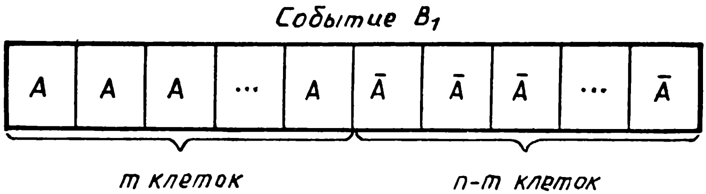


Рис. 25

Какова вероятность того, что при n повторных испытаниях событие A произойдет m раз? Это событие запишем так: «$S_n = m$».

Станем искать $\boldsymbol{P}(S_n = m)$.

Событие, состоящее в том, что при n независимых испытаниях A происходило m раз, а не происходило $n-m$ раз, можем себе представить в виде n клеток, m из которых заполнены буквой A, а $n-m$ — буквой $\bar{A}$. Например, одно из таких представлений, которое назовем событием B_1, может быть таким, как на рисунке 25.

Таких событий, когда m клеток заполнено буквой A, а $n-m$ клеток — буквой $\bar{A}$, может произойти столько, сколько перестановок с повторениями можно построить из m букв A и $n-m$ букв $\bar{A}$. Если число таких событий обозначим N, то по формулам (3.6) и (3.9)

$$N = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m. \tag{6.1}$$

Нас интересующее событие «$S_n = m$» представляет собой объединение N событий $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_N$. Они равновозможны и попарно несовместимы, поэтому в силу (5.1)

$$\boldsymbol{P}(S_n = m) = \boldsymbol{P}(B_1) + \boldsymbol{P}(B_2) + \ldots + \boldsymbol{P}(B_N) = N\boldsymbol{P}(B_1). \tag{6.2}$$

Но

$$B_1 = \underbrace{A \cap A \cap \ldots \cap A}_{m \text{ раз}} \cap \underbrace{\bar{A} \cap \bar{A} \cap \ldots \cap \bar{A}}_{n-m \text{ раз}}.$$

Поскольку испытания независимы в совокупности и $\boldsymbol{P}(A) = p$, $\boldsymbol{P}(\bar{A}) = q$, то в силу (5.8)

$$\boldsymbol{P}(B_1) = \overbrace{\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(A)\ldots\boldsymbol{P}(A)}^{m \text{ раз}}\cdot\overbrace{\boldsymbol{P}(\bar{A})\cdot\boldsymbol{P}(\bar{A})\cdot\boldsymbol{P}(\bar{A})\ldots\boldsymbol{P}(\bar{A})}^{n-m \text{ раз}} =$$

$$= (\boldsymbol{P}(A))^m \cdot (\boldsymbol{P}(\bar{A}))^{n-m} = p^m q^{n-m}. \tag{6.3}$$

Подставляя результаты (6.1) и (6.3) в формулу (6.2), находим:

$$\boldsymbol{P}(S_n = m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{6.4}$$

Это так называемое биноминальное распределение вероятностей. Рассуждения, которые к нему привели, часто называют схемой Я. Бернулли, по имени математика, который первым ее рассмотрел.

С помощью формулы (6.4) можно найти значение $S_n = m_0$, которому соответствует наибольшая вероятность.

Поскольку

$$\frac{\mathbf{P}(S_n = m)}{\mathbf{P}(S_n = m-1)} = 1 + \frac{(n+1)p - m}{mq},$$

то

$$\mathbf{P}(S_n = m) > \mathbf{P}(S_n = m-1) \text{ при } m < (n+1)p,$$
$$\mathbf{P}(S_n = m) < \mathbf{P}(S_n = m-1) \text{ при } m > (n+1)p,$$
$$\mathbf{P}(S_n = m) = \mathbf{P}(S_n = m-1) \text{ при } m = (n+1)p,$$

если $(n+1)p$ — целое число.

Поэтому вероятнейшее значение $S_n = m_0$ должно удовлетворить условию

$$(n+1)p - 1 \leqslant m_0 \leqslant (n+1)p.$$

Поскольку $p = 1 - q$, то

$$np - q \leqslant m_0 \leqslant np + p.$$

Примеры

1. Подбрасываем монету 10 раз. Какова вероятность двукратного появления герба?

В этом случае $n = 10$, $m = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$,

тогда

$$\mathbf{P}(S_{10} = 2) = C_{10}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{45}{1024} \approx 0{,}04395.$$

2. Вероятность того, что изделие не пройдет контроля, равна 0,125. Какова вероятность того, что среди 12 изделий не будет ни одного забракованного контролером?

Имеем $n = 12$, $m = 0$, $p = \frac{1}{8}$, $q = \frac{7}{8}$. По формуле (6.4)

$$\mathbf{P}(S_{12} = 0) = C_{12}^0 \left(\frac{1}{8}\right)^0 \left(\frac{7}{8}\right)^{12} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{12} \approx 0{,}2514.$$

3. Подводная лодка атакует крейсер, выпуская по нему одну за другой 4 торпеды. Вероятность попадания каждой торпедой примерно равна $\frac{3}{4}$. Любая из торпед с одинаковой вероятностью может пробить один из 10 отсеков крейсера, которые в результате попадания наполняются водой. При заполнении хотя бы двух отсеков крейсер тонет. Вычислить вероятность гибели крейсера.

Обозначим события:
A_1 — «попадание одной торпедой»,
A_2 — «попадание двумя торпедами»,
A_3 — «попадание тремя торпедами»,
A_4 — «попадание четырьмя торпедами»,
A — «крейсер потоплен».
Согласно формуле (6.4)

$$P(A_1)=C_4^1\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3}{64},\quad P(A_2)=C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128},$$

$$P(A_3)=C_4^3\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{64},\quad P(A_4)=C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^0=\frac{81}{256},$$

$$P(A/A_1)=0,\ P(A/A_2)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10},$$

$$P(A/A_3)=1-\frac{1}{10^2}=\frac{99}{100},\ P(A/A_4)=1-\frac{1}{10^3}=\frac{999}{1000}.$$

По формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{3}{64}\cdot 0+\frac{27}{128}\cdot\frac{9}{10}+\frac{27}{64}\cdot\frac{99}{100}+\frac{81}{256}\cdot\frac{999}{1000}\approx 0{,}9237.$$

У крейсера противника мало шансов на спасение!

Упражнения

106. В телевизоре 10 ламп. Для любой из ламп вероятность, что она останется исправной в течение года, равна p. Какова вероятность того, что:

а) в течение года хотя бы одна лампа выйдет из строя;
б) в течение года выйдет из строя ровно одна лампа;
в) в течение года выйдут из строя 2 лампы?

107. Юноша, желающий поступать во втуз, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий первого испытания примерно 0,9, второго — 0,95, третьего — 0,8 и четвертого — 0,85. Какова вероятность того, что:

а) юноша с успехом пройдет все испытания;
б) юноша успешно пройдет 2 испытания;
в) юноша с успехом пройдет не менее двух испытаний?

108. С разных позиций по мишени выпускают 4 выстрела. Вероятность попадания первым выстрелом примерно 0,1, вторым — 0,2, третьим — 0,3 и четвертым — 0,4. Какова вероятность того, что все 4 выстрела — промахи?

109. В квартире 4 электролампочки. Для каждой лампочки вероятность того, что она останется исправной в течение года, примерно равна $\frac{5}{6}$. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не меньше половины лампочек?

110. Проводятся 3 испытания, каждое из которых может завершиться результатом A_1 — с вероятностями p_{11}, p_{12}, p_{13}, результатом A_2 — с вероятностями p_{21}, p_{22}, p_{23}, результатом A_3 — с вероятностями p_{31}, p_{32}, p_{33} и результатом A_4 — с вероятностями p_{41}, p_{42}, p_{43}. Какова вероятность того, что при проведении трех испытаний событие A_1 произойдет один раз, событие A_2 — два раза, а события A_3 и A_4 совсем не произойдут?

111. Вы играете в шахматы с равным по силе партнером. Чего следует больше ожидать: трех побед в 4 партиях или пяти побед в 8 партиях?

112. Случайно встреченное лицо с вероятностью, близкой к 0,2, может оказаться брюнетом, с вероятностью 0,3 — шатеном, с вероятностью 0,4 — блондином и с вероятностью 0,1 — рыжим. Какова вероятность того, что среди шести случайно встреченных лиц:

а) не меньше 4 блондинов;

б) хотя бы один рыжий;

в) 3 блондина и 3 шатена?

113. Мишень в тире состоит из яблочка и двух концентрических колец. Вероятность попадания в яблочко одним выстрелом примерно $\frac{1}{10}$, в первое кольцо — $\frac{1}{5}$, во второе — $\frac{2}{5}$, вероятность промахнуться $\frac{3}{10}$. По мишени выпущено 5 выстрелов. Какова вероятность двух попаданий в яблочко и одного попадания во второе кольцо?

114. В лагере m пионеров. Они зажгли n костров и случайным образом распределились около них. Какова вероятность того, что у первого костра сели k пионеров?

115. При проведении некоторого испытания вероятность появления ожидаемого результата 0,01. Сколько раз его нужно провести, чтобы с вероятностью 0,5 можно было ожидать хотя бы одного появления этого результата?

116. Рабочий обслуживает 12 одинаковых станков. Вероятность того, что в течение часа станок потребует регулировки, равна примерно $\frac{1}{3}$. Какова вероятность того, что в течение часа рабочему придется регулировать 4 станка?

117. (Задача шевалье де Мере.) Какова вероятность того, что при 24-кратном бросании двух игральных костей хотя бы один раз появятся две шестерки?

118. В учреждении 10 служащих, которые одновременно обедают в одном из двух кафе, расположенных недалеко от места их работы. Сколько мест необходимо резервировать в каждом кафе для сотрудников этого учреждения, чтобы заведующие кафе с гарантией 95% могли быть уверены, что мест в кафе во время обеда для сотрудников упомянутого учреждения хватит?

119. В магазин зашли n лиц. Найдите вероятность события, состоящего в том, что m из них будут что-нибудь покупать. Вероятность, что любой из посетителей не уйдет без покупки, равна p. Вычислите значение искомой вероятности, если:

а) $n=8$, $p=0{,}3$, $m=3$;

б) $n=12$, $p=0{,}2$, $m=4$;

в) $n=9$, $p=0{,}4$, $m=5$.

120. Сколько раз придется бросать игральную кость, чтобы вероятнейшее число появления шестерки было бы 32?

121. Испытание с вероятностью 0,2 монет окончится результатом A, с вероятностью 0,3 — результатом B и с вероятностью 0,5 — результатом C. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях результат A появится 3 раза, B — 5 раз, C — 2 раза?

122. Из всей продукции обувной фабрики 31% составляют изделия высшего сорта. Сколько пар ботинок высшего сорта можно надеяться найти среди 75 пар, поступивших с этой фабрики в магазин?

123. С помощью автоматического станка изготовлено 90 деталей. Какова вероятность того, что изготовленная деталь первого сорта, если в упомянутой партии изготовленных деталей вероятнейшее число деталей первого сорта 82?

Программа на языке Бейсик для вычисления

$$P(S_n=m)=C_n^m p^m q^{n-m}:$$

```
  8 REM ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ
  9 REM ВЕРОЯТНОСТИ P
 1Ø INPUT "ВВЕДИТЕ M.N.P", M, N, P
 2Ø IF N>M THEN 5Ø
 3Ø PRINT "M>N"
 4Ø GO TO 19Ø
 5Ø F=N
 6Ø GOSUB 2ØØ
 7Ø N1=F1
 8Ø F=M
 9Ø GOSUB 2ØØ
1ØØ M1=F1
11Ø F=N-M
12Ø GOSUB 2ØØ
13Ø M2=F1
14Ø C1=N1/M1/M2
15Ø P1=P ¬ M
16Ø P2=(1-P) ¬ (N-M)
17Ø C=C1*P1*P2
18Ø PRINT "ВЕРОЯТНОСТЬ P="; C
19Ø STOP
```

```
198 REM ПОДПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ
199 REM ФАКТОРИАЛА
200 F1=1
210 F2=0
220 IF F=F2 THEN 260
230 F2=F2+1
240 F1=F1*F2
250 GO TO 220
260 RETURN
270 END
```

2. ФОРМУЛА МУАВРА — ЛАПЛАСА

Познакомимся с наиболее важным открытием замечательного французского математика А. Муавра в теории вероятностей. Медиками установлено, что 94% лиц, которым сделаны прививки против туберкулеза, приобретают иммунитет против этого заболевания. Какова вероятность того, что среди 100 000 граждан, получивших прививки, 5800 не защищены от заболевания туберкулезом?

Эту задачу можно было бы решить с помощью формулы (6.4).

В нашем случае $n=100\,000$, $m=5800$, $p=0{,}06$, $q=0{,}94$. Если интересующие нас события обозначим A, то

$$P(A)=\mathrm{P}(S_{100\,000}=5800)=C_{100\,000}^{5800}\cdot(0{,}06)^{5800}\cdot(0{,}94)^{94\,200}.$$

Нетрудно убедиться в том, что попытка получить окончательный результат непосредственным вычислением — изнурительный труд, даже если воспользоваться логарифмами или ЭВМ. Как быть?

Аналогичную проблему рассматривали Муавр и Лаплас. Нет надобности раскрывать перед читателем всю сложность их рассуждений, но маленькое окошко в эту тайну откроем.

Математики того времени знали формулу

$$n!\approx\sqrt{2\pi}\,n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}. \tag{6.5}$$

Называлась она формулой Стирлинга, хотя имеются данные, что раньше этого шотландца данную формулу знал Муавр.

Теперь приступим к доказательству локальной теоремы Муавра — Лапласа, особенно не тревожа читателя строгостью самой процедуры доказательства. Нам хотелось бы, чтобы читатель только почувствовал, как часто говорит Д. Пойа (см. [10]), правдоподобность наших рассуждений. Теорема гласит:

Пусть:

1) событие A при отдельном испытании может произойти

с вероятностью p, а не произойти с вероятностью $q=1-p$; 2) проведено n независимых испытаний.

Если n и m таковы, что $\frac{m}{n}-p\to 0$, а

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

есть ограниченная величина при n, стремящемся к бесконечности, то

$$P(S_n=m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}. \qquad (6.6)$$

Доказательство.

Известно, что в случае $|x|<1$ по формуле суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$1-x+x^2-x^3+\ldots=\frac{1}{1+x}.$$

Когда x близко к нулю, можно, например, пользоваться приближенным соотношением

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x. \qquad (6.7)$$

Скажем, при $x=0{,}1$ левая часть равенства (6.7) дает результат 0,90909..., а правая — 0,9. При $x=-0{,}1$ левая часть (6.7) даст 1,111..., а правая — 1,1.

Когда x близко к нулю, погрешность будет незначительна, т. е.

$$\int_0^z\frac{dx}{1+x}\approx\int_0^z dx-\int_0^z xdx,$$

$$\ln(1+z)\approx z-\frac{z^2}{2}. \qquad (6.8)$$

Из формулы (6.4), применяя формулу (6.5), легко получаем:

$$P(S_n=m)\approx\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\cdot\left(\frac{np}{m}\right)^m\cdot\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}.$$

Введем обозначение $\beta_m=m-np$. Разумеется, из условия теоремы $\frac{m}{n}-p\to 0$ следует, что с возрастанием n $\frac{\beta_m}{n}\to 0$. Значит, $m=np+\beta_m$, $n-m=n-np-\beta_m=n(1-p)-\beta_m=nq-\beta_m$.

Заменяя m и $n-m$ полученными аналогами, находим:

$$P(S_n=m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\beta_m}{np}\right)^{np+\beta_m+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\beta_m}{nq}\right)^{nq-\beta_m+\frac{1}{2}}}\right). \qquad (6.9)$$

Знаменатель дроби в скобках обозначаем $K(m;\ n)$, т. е.

$$K(m;\ n)=\left(1+\frac{\beta_m}{np}\right)^{np+\beta_m+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\beta_m}{nq}\right)^{nq-\beta_m+\frac{1}{2}}. \qquad (6.10)$$

Тогда

$$\ln K(m;\ n)=\left(np+\beta_m+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{\beta_m}{np}\right)+$$
$$+\left(nq-\beta_m+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{\beta_m}{nq}\right).$$

Поскольку при возрастании n $\frac{\beta_m}{n}\to 0$, то в силу (6.8) в формуле (6.10) $\ln\left(1+\frac{\beta_m}{np}\right)$ и $\ln\left(1-\frac{\beta_m}{nq}\right)$ заменяем их приближенными выражениями:

$$\ln K(m;\ n)\approx\left(np+\beta_m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\beta_m}{np}-\frac{\beta_m^2}{2n^2p^2}\right)+$$
$$+\left(nq-\beta_m+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\beta_m}{nq}-\frac{\beta_m^2}{2n^2q^2}\right)=$$
$$=\beta_m-\frac{\beta_m^2}{2np}+\frac{\beta_m^2}{np}-\frac{\beta_m^3}{2n^2p^2}+\frac{\beta_m}{2np}-\frac{\beta_m^2}{4n^2p^2}-$$
$$-\beta_m-\frac{\beta_m^2}{2nq}+\frac{\beta_m^2}{nq}+\frac{\beta_m^3}{2n^2q^2}-\frac{\beta_m}{2nq}-\frac{\beta_m^2}{4n^2q^2}.$$

Приводим подобные члены и группируем по степеням $\frac{\beta_m}{n}$, $\frac{\beta_m^2}{n}$, $\frac{\beta_m^2}{n^2}$. Получаем:

$$\ln K(m;\ n)\approx\frac{\beta_m}{n}\cdot\frac{q-p}{2pq}+\frac{\beta_m^2}{n}\cdot\frac{q+p}{2pq}+\frac{\beta_m^2}{n^2}\cdot\frac{2p^2\beta_m-2q^2\beta_m-q^2-p^2}{4p^2q^2}.$$

Поскольку $p+q=1$, то

$$\ln K(m;\ n)\approx\frac{\beta_m}{n}\cdot\frac{q-p}{2pq}+\frac{\beta_m^2}{2npq}+\left(\frac{\beta_m}{n}\right)^2\cdot\frac{2\beta_m(p-q)+2pq-1}{4p^2q^2}=$$
$$=\frac{\beta_m}{n}\cdot\frac{q-p}{2pq}+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_m}{\sqrt{npq}}\right)^2+\left(\frac{\beta_m}{n}\right)^2\cdot\frac{2pq-1}{4p^2q^2}+\left(\frac{\beta_m}{\sqrt{npq}}\right)^2\cdot\frac{p-q}{2}\cdot\left(\frac{\beta_m}{n}\right).$$

Но из условий теоремы следует:

1) $\frac{\beta_m}{n}\to 0$;

2) $\frac{\beta_m}{\sqrt{npq}}$ ограничено.

Таким образом,

$\ln K(m;\ n)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_m}{\sqrt{npq}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2$, т. е.

$$K(m;\ n)\approx e^{\frac{1}{2}\left(\frac{m-nq}{\sqrt{npq}}\right)^2}.$$

Подставляя полученный результат в (6.10), получаем (6.6). Обозначим

$$\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=x,\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{6.11}$$

Тогда

$$P(S_n=m)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}. \tag{6.12}$$

Значения функции $\varphi(x)$ представлены в таблице 2 в конце книги. С графиком этой функции читатель уже знаком (см. рис. 3).

П р и м е р ы

1. Решить задачу, условие которой дано в начале этого пункта.

По формуле (6.12)

$$P(S_{100\,000}=5800)\approx\frac{\varphi\left(\frac{5800-100\,000\cdot 0{,}06}{\sqrt{100\,000\cdot 0{,}06\cdot 0{,}94}}\right)}{\sqrt{100\,000\cdot 0{,}06\cdot 0{,}94}},$$

$$\sqrt{100\,000\cdot 0{,}06\cdot 0{,}94}\approx 75,\quad x\approx -2{,}7.$$

Отыскивая значение $\varphi(x)$ по таблице 2, не обращаем внимания на знак x, так как $\varphi(-x)=\varphi(x)$. Находим $\varphi(2{,}7)=0{,}0104$. Тогда

$$P(S_{100\,000}=5800)\approx 0{,}000139.$$

2. Вероятность встретить на улице своего учителя, допустим, 0,002. Какова вероятность того, что среди 1200 случайных прохожих вы встретите не более трех своих учителей?

Пусть A_0 — событие, состоящее в том, что вы своих учителей не встретите, A_i — событие, состоящее в том, что вы встретите ровно i своих учителей. Тогда событие A, состоящее в том, что вы встретите не больше трех учителей, равно объединению вышеупомянутых событий, т. е.

$$A=A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3.$$

Но события A_0, A_1, A_2, A_3 несовместимы, поэтому

$$P(A)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).$$

По формуле (6.12)

$$P(A_0)=P(S_{1200}=0)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1200\cdot 0{,}002\cdot 0{,}998}}\cdot\varphi\left(\frac{0-1200\cdot 0{,}002}{\sqrt{1200\cdot 0{,}002\cdot 0{,}998}}\right)=0{,}0775;$$

$$P(A_1)=P(S_{1200}=1)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1200\cdot 0{,}002\cdot 0{,}998}}\cdot\varphi\left(\frac{1-1200\cdot 0{,}002}{\sqrt{1200\cdot 0{,}002\cdot 0{,}998}}\right)=0{,}1719;$$

$$P(A_2)=P(S_{1200}=2)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1200\cdot 0{,}002\cdot 0{,}998}}\cdot\varphi\left(\frac{2-1200\cdot 0{,}002}{\sqrt{1200\cdot 0{,}002\cdot 0{,}998}}\right)=0{,}2505;$$
$$P(A_3)=P(S_{1200}=3)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1200\cdot 0{,}002\cdot 0{,}998}}\cdot\varphi\left(\frac{3-1200\cdot 0{,}002}{\sqrt{1200\cdot 0{,}002\cdot 0{,}998}}\right)=0{,}2389.$$

Тогда $P(A)=0{,}0775+0{,}1719+0{,}2505+0{,}2389=0{,}7388.$

Таким образом, гарантия того, что вы встретите не более трех своих учителей, составляет приблизительно 74%.

Упражнения

124. Чему равна вероятность того, что среди 100 случайных прохожих окажутся 32 женщины (предполагаем, что количество мужчин в городе равно количеству женщин)?

125. Допустим, что с вероятностью 0,6 изготовленная деталь будет забракована. Сколько бракованных деталей из 1000 можно ожидать с вероятностью 0,01?

126. Предполагаем, что вероятность выздоровления больного в результате применения нового способа лечения равна 0,8. Сколько вылечившихся из 100 больных можно ожидать с вероятностью 0,75?

127. Баскетболист *A* забрасывает штрафной примерно с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что все 20 его бросков будут удачные?

128. Бросаем монету. Какова вероятность того, что при 10 бросаниях ни разу не появится герб?

Найдите ответ с помощью формулы Бернулли и формулы Муавра — Лапласа. Определите погрешность, которая получается, применяя формулу (6.11).

129. Два мальчика играют в кости. Каждый бросает 2 кости. Мальчик *A* выигрывает партию, если при 20 бросках 2 раза появляется в сумме 11 очков, мальчик *B* — если при 10 бросках 2 раза появляется в сумме 9 очков. Чья удача более вероятна?

130. Бросаем монету 40 раз. Чему равна вероятность того, что герб появится 25 раз?

131. По данным телевизионного ателье, в течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 12% кинескопов. Какова вероятность того, что из 46 наугад выбранных кинескопов 36 проработают гарантийный срок?

132. Вероятность рождения мальчика 0,515. Чему равна вероятность того, что среди 80 новорожденных 42 мальчика?

133. Вероятность попадания в мишень примерно 0,3. Какова вероятность того, что при 30 выстрелах произойдет 8 попаданий?

134. При проведении некоторого испытания вероятность появления события *A* равна 0,5. Сколько раз предполагается ожидать появление *A* с вероятностью 0,048 при 100 испытаниях?

3. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Когда p близко к 0 или 1, формула Муавра — Лапласа дает результаты, которые значительно отклоняются от результатов, полученных по формуле (6.4). Рассмотрим случай, когда при возрастании n вероятность p появления интересующего нас события убывает, а $np=k$ — постоянное число.

Именно такая ситуация возникает, когда имеем дело с редко происходящими событиями.

По формуле (6.4) и условию $q=1-p$ имеем:

$$P(S_n=m)=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}\cdot p^m(1-p)^{n-m}.$$

Поскольку $p=\frac{k}{n}$, то

$$P(S_n=m)=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^m\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-m}=$$

$$=\frac{k^m}{m!}\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^m}.$$

Если обозначим

$$\alpha_n=\left(1-\frac{k}{n}\right)^n,\ \beta_n=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^m},\ \text{то}$$

$$P(S_n=m)=\frac{k^m}{m!}\alpha_n\beta_n. \tag{6.13}$$

Установим предельные значения α_n и β_n при неограниченном возрастании n. Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=1,\ \alpha_n=\left(1-\frac{k}{n}\right)^n=\left(\left(1+\left(-\frac{k}{n}\right)\right)^{-\frac{n}{k}}\right)^{-k}.$$

Обозначим $h=-\frac{n}{k}$. Тогда

$$\alpha_n=\left(\left(1+\frac{1}{h}\right)^h\right)^{-k}.$$

Поскольку $k\geqslant 0$, то при $n\to\infty$, $h\to-\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{h\to-\infty}\left(\left(1+\frac{1}{h}\right)^h\right)^{-k}=\left(\lim_{h\to-\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)^h\right)^{-k}=$$

$$=\left(\lim_{h\to-\infty}\left(\frac{h+1}{h}\right)^h\right)^{-k}=\left(\lim_{h\to-\infty}\left(\frac{h+1-1}{h+1}\right)^{-h}\right)^{-k}=$$

$$=\lim_{h\to-\infty}\left(\left(1-\frac{1}{h+1}\right)^{-h-1}\cdot\left(1-\frac{1}{h+1}\right)\right)^{-k}.$$

Пусть $h+1=-x$, тогда при $h\to-\infty$, $x\to\infty$. Получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \left(\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right) \right)^{-k} = e^{-k}.$$

Значит, если n велико, то

$$\alpha_n \approx e^{-k}, \ \beta_n \approx 1.$$

Подставляя эти значения в (6.13), находим формулу Пуассона:

$$P(S_n = m) \approx \frac{k^m}{m!} e^{-k}. \qquad (6.14)$$

Примеры

1. Какова вероятность того, что среди 500 наугад выбранных человек двое родилось 1 мая?

Естественно считать, что день рождения незнакомого человека может быть с равной вероятностью любым днем года.

Нам предстоит вычислить $P(S_{500} = 2)$. Так как $n = 500$, $m = 2$, $p = \frac{1}{365}$, то $k = \frac{500}{365} \approx 1{,}3699$. По формуле (6.14)

$$P(S_{500} = 2) \approx \frac{1{,}3699^2}{2!} e^{-1{,}3699} \approx 0{,}2385.$$

При вычислении этого и подобных выражений полезно пользоваться таблицей 3. Полезно также запомнить, что

$$\lg e^{-k} = -k \cdot 0{,}4342945.$$

2. Среди 1000 человек приблизительно 8 левшей. Какова вероятность того, что среди сотни наугад выбранных человек не окажется ни одного левши?

В этом случае $n = 100$, $m = 0$, $p = 0{,}008$. Отсюда $k = 0{,}8$.

$$P(S_{100} = 0) \approx \frac{0{,}8^0}{0!} e^{-0{,}8} \approx 0{,}4493.$$

Упражнения

135. Какова вероятность того, что среди 500 наугад выбранных лиц:

а) пятеро родились 8 марта;

б) трое родились 10 июня;

в) ни один не родился 17 сентября?

136. В городе 1900 жителей. Какова вероятность того, что в году есть 4 дня, когда ни один житель города не отмечает свой день рождения?

137. Вероятность попадания в мишень примерно 0,001. Какова вероятность того, что при 5000 выстрелов будет не меньше двух попаданий?

138. Прядильщица обслуживает 800 веретен. Вероятность обрыва нитки на одном веретене в течение часа примерно 0,005. Какова вероятность того, что в течение часа нитка оборвется не больше чем на 10 веретенах?

139. Некачественные сверла составляют 2% всей продукции фабрики. Изготовленные сверла упаковывают в ящики по 100 штук. Какова вероятность того, что:

а) в ящике не окажется некачественных сверл;

б) в ящике окажется не больше 3 некачественных сверл?

Сколько сверл необходимо упаковать в ящик, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 в ящике было 100 доброкачественных сверл?

140. Частные конторы страхования жизни в капиталистических странах заинтересованы в получении прибыли за счет своих клиентов. В одной такой конторе застраховано 10 000 клиентов одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти клиента в течение года примерно 0,006. Каждый клиент 1 января вносит 12 долларов. Если в течение года он умрет, то контора обязана выплатить его родственникам 1000 долларов. Чему равна вероятность того, что:

а) контора разорится;

б) контора получит не менее 40 000 долларов прибыли?

4. ФОРМУЛА ЛАПЛАСА

Решим следующую задачу:

З а д а ч а. Какова вероятность того, что при n испытаниях событие A произойдет не менее a и не более b раз?

Используя правило сложения вероятностей, имеем:

$$\boldsymbol{P}(a \leqslant S_n \leqslant b) = \boldsymbol{P}(S_n = a) + \boldsymbol{P}(S_n = a+1) + \ldots + \boldsymbol{P}(S_n = b-1) + \boldsymbol{P}(S_n = b). \qquad (6.15)$$

Отсюда приступаем к доказательству интегральной теоремы Лапласа, которая гласит:

Пусть:

1) событие A при отдельном испытании может произойти с вероятностью p, а не произойти с вероятностью $q = 1 - p$;

2) проведено n независимых испытаний.

Если n и m таковы, что при n, стремящемся к бесконечности:

а) $\frac{m}{n} - p \to 0$;

б) $\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ есть ограниченная величина, то

$$\boldsymbol{P}(a \leqslant S_n \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (6.16)$$

где $\Phi(x)$ — первообразная функция от $\varphi(x)$, которая задана формулой (6.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

По определению первообразной функции $\Phi(x)$ имеет место равенство

$$\Phi'(x) = \varphi(x).$$

Пусть $\frac{1}{\sqrt{npq}}=\Delta x=x_{i+1}-x_i$ для всех $i=1, 2, 3, \ldots, k-1$.

Условия теоремы а) и б) позволяют воспользоваться формулами (6.11) и (6.12). По этим формулам

$$P(S_n=a)\approx\frac{\varphi(x_1)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } x_1=\frac{a-np}{\sqrt{npq}},$$

$$P(S_n=a+1)\approx\frac{\varphi(x_2)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } x_2=\frac{a+1-np}{\sqrt{npq}},$$

. . . .

$$P(S_n=b-1)\approx\frac{\varphi(x_{k-1})}{\sqrt{npq}}, \text{ где } x_{k-1}=\frac{b-1-np}{\sqrt{npq}},$$

$$P(S_n=b)\approx\frac{\varphi(x_k)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } x_k=\frac{b-np}{\sqrt{npq}}.$$

Тогда

$$P(a\leqslant S_n\leqslant b)\approx\varphi(x_1)\,\Delta x+\varphi(x_2)\,\Delta x+\ldots+\varphi(x_{k-1})\,\Delta x+\varphi(x_k)\,\Delta x. \tag{6.17}$$

Но поскольку $\Phi'(x)=\varphi(x)$, то по формуле конечных приращений

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_1)\Delta x\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1);\\
&\varphi(x_2)\,\Delta x\approx\Phi(x_3)-\Phi(x_2);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi(x_{k-1})\,\Delta x\approx\Phi(x_k)-\Phi(x_{k-1}).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Подставляя (6.18) в соотношение (6.17), получаем:

$$P(a\leqslant S_n\leqslant b)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)+\Phi(x_3)-\Phi(x_2)+\ldots+\Phi(x_k)-$$
$$-\Phi(x_{k-1})+\varphi(x_k)\,\Delta x.$$

Читатель понимает, что после сокращения подобных членов получим:

$$P(a\leqslant S_n\leqslant b)\approx\Phi(x_k)-\Phi(x_1)+\varphi(x_k)\,\Delta x.$$

Но поскольку $\Delta x\to 0$, $x_k=\frac{b-np}{\sqrt{npq}}$ и $x_1=\frac{a-np}{\sqrt{npq}}$, то

$$P(a\leqslant S_n\leqslant b)\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

что и требовалось доказать.

В таблице 4 приводится значение функции

$$y=\Phi(x).$$

Примеры

1. Какова вероятность того, что при 200-кратном бросании монеты число появления герба S_{200} удовлетворяет неравенству

$$95\leqslant S_{200}\leqslant 105?$$

В этом случае $n=200$, $a=95$, $b=105$, $q=p=\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\frac{a-np}{\sqrt{npq}}=\frac{95-200\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{200\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\approx -0{,}7070,$$

$$\frac{b-np}{\sqrt{npq}}=\frac{105-200\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{200\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}\approx 0{,}7070.$$

Теперь, используя формулу (6.16) и таблицу 4, находим:

$$\boldsymbol{P}(95\leqslant S_{200}\leqslant 105)\approx\Phi(0{,}7070)-\Phi(-0{,}7070)=$$
$$=2\Phi(0{,}7070)=2\cdot 0{,}2612=0{,}5224.$$

2. Вероятность получения по лотерее проигрышного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 500 наугад купленных билетов не менее 48 и не более 55 безвыигрышных?

Здесь $n=500$, $a=48$, $b=55$, $p=0{,}1$, $q=0{,}9$. Тогда

$$\frac{a-np}{\sqrt{npq}}=\frac{48-500\cdot 0{,}1}{\sqrt{500\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\approx -0{,}298,$$

$$\frac{b-np}{\sqrt{npq}}=\frac{55-500\cdot 0{,}1}{\sqrt{500\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9}}\approx 0{,}745,$$

$$\boldsymbol{P}(48\leqslant S_{500}\leqslant 55)\approx\Phi(0{,}745)+\Phi(0{,}298)=0{,}3913.$$

3. Как установить вероятность того, что наугад выбранный десятиклассник собирает марки? Можно опросить некоторое число произвольно выбранных десятиклассников. Если среди n опрошенных окажется S_n коллекционеров марок, то искомая вероятность $p\approx\frac{S_n}{n}$. Сколько десятиклассников необходимо опросить, чтобы погрешность вычисления вероятности не превосходила бы 0,005, если желаем получить правильный результат с вероятностью 0,95?

Согласно условию задачи

$$\boldsymbol{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\leqslant 0{,}005\right)=0{,}95.$$

В силу (6.16) получаем:

$$\boldsymbol{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\leqslant 0{,}005\right)=\boldsymbol{P}\left(-0{,}005\leqslant\frac{S_n}{n}-p\leqslant 0{,}005\right)=$$
$$=\Phi(x)-\Phi(-x)=0{,}95.$$

Поэтому $2\Phi(x)=0{,}95$, и по таблице 4, которая на сей раз применяется в обратном порядке, находим $x=1{,}96$. Тогда

$$0{,}005\geqslant 1{,}96\sqrt{\frac{pq}{n}},\quad n\geqslant 392^2pq.$$

Приближенно $n \geqslant 160\,000pq$. Так как $0 \leqslant p \leqslant 1$ и $0 \leqslant q \leqslant 1$, то $pq \leqslant \frac{1}{4}$. Поэтому $n \geqslant 40\,000$.

Упражнения

141. Телефонная станция A, обслуживающая 2000 абонентов, соединяет их со станцией B. Устанавливать 2000 проводов от A до B нерационально. Сколько линий проводов необходимо провести от A до B, чтобы только один из сотни абонентов станции A, наугад выбравший момент разговора с абонентом станции B, нашел бы все линии занятыми? Вероятность того, что при случайном звонке линия занята, равна $\frac{1}{30}$.

142. 10 000 деталей произвольно распределяются по 9 ящикам. Какова вероятность того, что в первом ящике не менее 1100 и не более 1200 деталей?

143. Игральную кость бросаем 12 000 раз. Какова вероятность того, что шестерка появится не менее 1900 и не более 2100 раз?

144. Найдите такое число k, чтобы при 1000-кратном бросании монеты число появлений герба S_{1000} удовлетворяло условию $470 \leqslant S_{1000} \leqslant k$ с вероятностью 0,9.

145. Из 10 винтовок 4 не проверены в прицельной стрельбе. Вероятность попадания в мишень из проверенной винтовки приближенно 0,9, из непроверенной 0,3. Из наугад выбранной винтовки выпущено по мишени 200 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий S_{200} удовлетворяет неравенству $120 \leqslant S_{200} \leqslant 150$?

146. Найдите такое число k, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы утверждать, что среди 900 новорожденных более k мальчиков. Вероятность рождения мальчика 0,515.

147. 80% изделий, поступающих в магазин со склада, высшего сорта. Сколько изделий придется наугад взять со склада для контрольной проверки, чтобы с вероятностью 0,99 можно было бы утверждать: в магазине изделий высшего сорта от 75% до 85%?

148. В каждом из 1000 ящиков 5000 белых и столько же черных пуговиц. Из каждого ящика наугад вынимаются по 3 пуговицы. Какова вероятность, что число ящиков, из которых вынуты 3 пуговицы одного цвета, не меньше чем 220 и не больше чем 260?

149. 70% продукции объединения «Вилия» высшего сорта. Какова вероятность того, что среди 1000 изделий этого объединения высшего сорта будет не менее 682 и не более 760 изделий?

150. Вероятность рождения мальчика 0,515. Какова вероятность того, что среди 1000 новорожденных не меньше 480 и не больше 540 мальчиков?

151. Вероятность того, что саженец ели прижился и будет успешно расти, примерно равна 0,8. Посажено 400 саженцев ели. Какова вероятность того, что нормально вырастут не меньше 250 деревьев?

152. При 10 000-кратном бросании монеты герб появился 6000 раз. Можно ли считать монету симметричной? С какой вероятностью?

153. В научно-исследовательском институте земледелия проверяется всхожесть кукурузы. Сколько семян необходимо посеять с вероятностью всхожести 0,99, чтобы частота всхожести отличалась бы от 0,95 меньше чем на 0,01?

154. Вероятность того, что смерть человека произойдет на 21-м году жизни, примерно 0,006. Застраховано 1000 двадцатилетних. Годовой взнос 15 р. с каждого. В случае смерти застрахованного его родственникам выплачивается 1200 р. Какова вероятность того, что в конце года выплата по страховкам превысит сумму страховых взносов?

VII. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Одно из самых важных понятий в теории вероятностей — случайная величина. Рассмотрим следующие примеры:

1. При наблюдении движения городского транспорта заметили, что число машин, проезжающих за 1 ч через некоторый перекресток, под влиянием случайных обстоятельств принимает случайные значения.

2. Наблюдая стрельбу из одного и того же орудия при одном и том же прицеле, заметили, что расстояние места разрыва снаряда от орудия по неизвестным причинам принимает различные случайные значения.

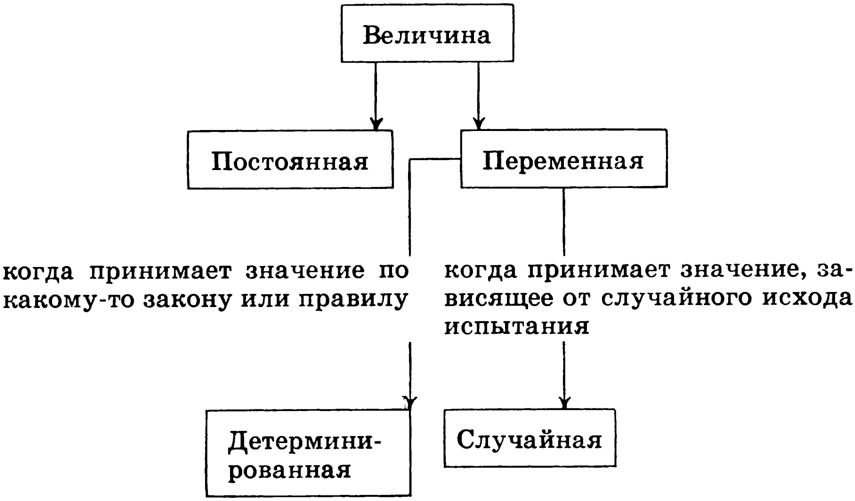
3. Учет числа писем, поступающих в некоторое почтовое отделение, показывает, что ежедневное количество писем принимает различные случайные значения.

Эти примеры отличаются по конкретному содержанию, но у них есть общие черты:

1. В каждом примере речь идет о величине, которая характеризует случайное событие.

2. Каждая из этих величин может принимать соответствующее значение в зависимости от случайного исхода испытания.

Чтобы можно было представить себе, какое место занимает случайная величина во всем роду величин, полезно ознакомиться с такой схемой:



Из схемы следует определение понятия:

Случайной величиной называется переменная величина, значения которой зависят от случайного исхода некоторого испытания.

Это понятие можно истолковать и наглядно.

Пусть мишень (рис. 26) установлена так, что может вращаться вокруг оси (O).

При достаточно большой угловой скорости вращения стрелок не в состоянии различить секторы мишени. Он вынужден стрелять наугад.

Пусть событие A_i представляет попадание в i-й сектор ($i=1, 2, 3, 4, 5$) и приносит стрелку x_i очков. Значит, число очков, которые стрелок может выбить одним выстрелом, есть случайная величина ξ, зависящая от того, какое из случайных событий A_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) произошло. ξ может принимать значения x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Пусть случайная величина ξ зависит от последовательности событий A_1, A_2, A_3, ..., которые заданы на пространстве элементарных событий E. Это пространство можно рассматривать как область тех элементарных событий, которые обусловливают появление некоторого значения случайной величины ξ. Поэтому верно утверждение:

Случайная величина ξ есть функция на пространстве элементарных событий.

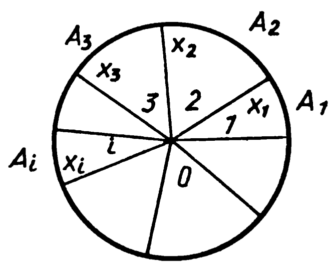
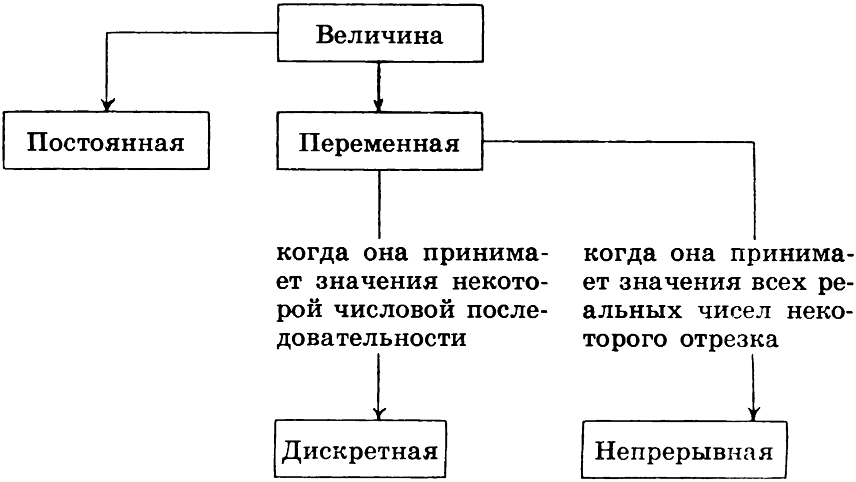


Рис. 26

2. ДИСКРЕТНОСТЬ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Из традиционного курса математики учащиеся знают конечные и бесконечные числовые последовательности и реальные числа, поэтому можно развить схему из параграфа 1.



Из схемы следует определение понятия:

Дискретной называется случайная величина, которая может принимать значения некоторой конечной или бесконечной числовой последовательности.

Примеры 1, 3 и пример с мишенью именно и представляют дискретные случайные величины, которые могут принимать значения последовательности натуральных чисел. Практически эти последовательности можно считать ограниченными, хотя установить число, ограничивающее, например, число машин, которые пересекают данный перекресток, не так уж просто.

Полезно ознакомиться с примерами дискретных случайных величин, принимающих значения бесконечных числовых последовательностей. Вот один из таких примеров.

Импровизированная игра состоит в подбрасывании монеты. Если герб впервые выпадает при k-м бросании, игрок получает k призовых очков. Пусть ξ — количество призовых очков, возможных заполучить игроком. ξ может принимать значения 1, 2, 3, ... бесконечной последовательности, если игроку хватит сил и времени все-таки добиться выигрыша.

Из вышеуказанной схемы также следует определение непрерывной случайной величины:

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать значения всех действительных чисел некоторого промежутка.

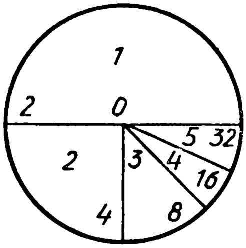


Рис. 27

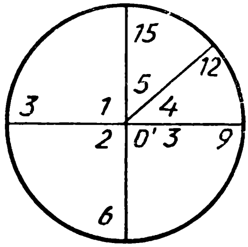


Рис 28

Пример 2 из параграфа 1 служит примером такой случайной величины. Примером непрерывной случайной величины также будет координата точки, наудачу брошенной на числовую ось или на некоторый отрезок этой оси. Дополнительные сведения о непрерывной случайной величине читатель найдет на с. 112.

3. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим такой пример.

Мишени A (рис. 27) и B (рис. 28) установлены так, что могут вращаться вокруг осей (O и O'). При достаточно больших скоростях вращения стрелки не могут различать секторы мишеней. Они вынуждены стрелять наугад. При попадании в i-й сектор мишени A стрелок получает 2^i призовых очка, а при попадании в i-й сектор мишени B — $3i$ очка. Пусть возможным выигрышем при попадании одним выстрелом в мишень A будет случайная величина X, а в мишень B — случайная величина Y. Чем отличаются эти случайные величины? Во-первых, совокупностью тех значений, которые в результате выстрела они могут принимать. Так, например, X может принимать значения 2, 4, 8, 16, 32, а Y — 3, 6, 9, 12, 15. Во-вторых, совокупностью вероятностей, с которыми эти значения принимаются.

Это значит, что для однозначного определения закона распределения дискретной случайной величины необходима двоякая информация об этой величине: необходимо знать, какие значения и с какими вероятностями эта величина может принимать.

Про величину X имеющаяся информация может быть представлена таблицей

Возможные значения X	2	4	8	16	32
Вероятности P	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

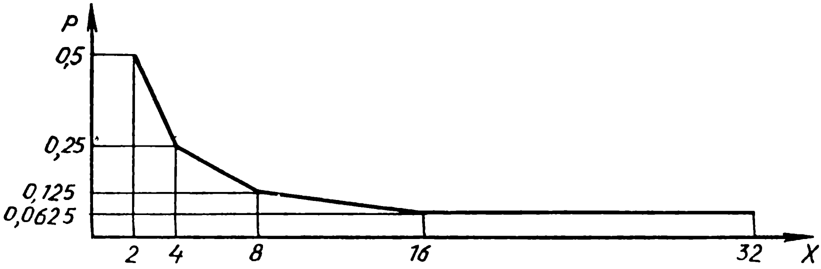


Рис. 29

и отображена графиком (рис. 29), который назовем полигоном распределения случайной величины X.

Про величину Y имеющаяся информация может быть представлена таблицей

Возможные значения Y	3	6	9	12	15
Вероятности P	0,25	0,25	0,25	0,125	0,125

и отображена графиком (рис. 30), который представляет полигон распределения случайной величины Y.

Закон распределения дискретной случайной величины ξ представляет таблица, показывающая, какие численные значения и с какими вероятностями может при данном испытании принимать случайная величина ξ:

Возможные значения ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Вероятности P	p_1	p_2	p_3	...	p_k

Ясно, что

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

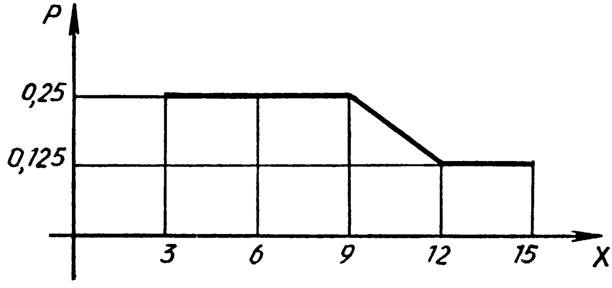


Рис. 30

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

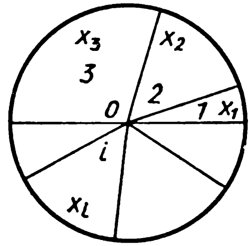


Рис. 31

Формирование этого понятия начнем с наглядного примера.

Мишень установлена так (рис. 31), что может вращаться вокруг оси (O). При достаточно большой угловой скорости вращения стрелок не может различить секторы мишени. Он вынужден стрелять наугад. При попадании в i-й сектор он выигрывает x_i рублей. Стоит ли ему участвовать в такой игре, если за право на выстрел он должен платить в кассу тира a рублей и уверен, что непопадание в мишень вообще исключено?

Если все $x_i < a$, то, разумеется, не стоит. Если все $x_i > a$, то непременно стоит. Но как быть, если некоторые из этих x_i больше a, некоторые меньше, а вероятности попадания в соответствующие секторы неодинаковые? В этих сложных условиях возникает необходимость определить, какого среднего выигрыша, соответствующего одному выстрелу, следует ожидать при многократном участии в игре. Как подступиться к решению этой задачи?

Пусть $S(i)$ — площадь i-го сектора, а $S(E)$ — площадь всей мишени. Тогда

$$p_i = \frac{S(i)}{S(E)} \text{ — вероятность попадания в } i\text{-й сектор.}$$

Представим себе, что после n выстрелов получились такие результаты:

Величина выигрыша	x_1	x_2	x_3	...	x_k
Количество попаданий	m_{1n}	m_{2n}	m_{3n}	...	m_{kn}

Значит, общий выигрыш, соответствующий n выстрелам, равен $x_1m_{1n}+x_2m_{2n}+\ldots+x_km_{kn}$, а арифметическое среднее выигрыша, соответствующее одному выстрелу, равно:

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{n}(x_1m_{1n}+x_2m_{2n}+\ldots+x_km_{kn}) =$$
$$= x_1\frac{m_{1n}}{n} + x_2\frac{m_{2n}}{n}+\ldots+x_k\frac{m_{kn}}{n},$$

где $\frac{m_{in}}{n}$ $(i=1, 2, 3, \ldots, k)$ — статистическая частота события «$X=x_i$» при n испытаниях.

Известно, что при возрастании n статистические частоты сосредоточиваются около соответствующих вероятностей, т. е. с возрастанием числа выстрелов n:

частоты $\frac{m_{1n}}{n}$ сосредоточиваются около вероятности p_1,

частоты $\frac{m_{2n}}{n}$ сосредоточиваются около вероятности p_2,

. . . .

частоты $\frac{m_{kn}}{n}$ сосредоточиваются около вероятности p_k.

Следовательно, арифметические средние выигрыша $\tilde{x}_n$ с возрастанием n сосредоточиваются около постоянного числа

$$x_1p_1+x_2p_2+...+x_kp_k=M(X).$$

Это число представляет средний выигрыш, соответствующий одному выстрелу в бесконечно долгой игре, и может быть названо математическим ожиданием выигрыша.

Теперь ясно, что если $a>M(X)$, то в данной игре участвовать не стоит: если же $a<M(X)$ — стоит.

Подходим к абстрактному определению понятия.

Пусть ξ — дискретная случайная величина распределена по закону

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
P	p_1	p_2	p_3	...	p_k

При проведении n испытаний арифметическое среднее значений x_1, x_2, x_3, ..., x_k, которые принимала случайная величина ξ соответственно m_{1n}, m_{2n}, m_{3n}, ..., m_{kn} раз, равно:

$$\tilde{x}_n=x_1\frac{m_{1n}}{n}+x_2\frac{m_{2n}}{n}+x_3\frac{m_{3n}}{n}+...+x_k\frac{m_{kn}}{n}.$$

При возрастании n статистические частоты $\frac{m_{in}}{n}$ наступления событий «$\xi=x_i$» ($i=1, 2, 3, ..., k$) сосредоточиваются около соответствующих вероятностей $P(\xi=x_i)=p_i$, а значения $\tilde{x}_n$ — около постоянной величины

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{k} x_ip_i.$$

Получается такой граф. Рассуждаем так:

1. Проводятся n испытаний, результаты которых позволяют определить арифметическое среднее наступивших значений случайной величины ξ:

$$\tilde{x}_n=\sum_{i=1}^{k} x_i\cdot\frac{m_{in}}{n}\ (i=1, 2, 3, ..., k).$$

2. При возрастании n статистические частоты $\frac{m_{in}}{n}$ сосредоточиваются около соответствующих вероятностей p_i.

3. В результате этого значения $\tilde{x}_n$ сосредоточиваются около постоянного числа

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{k} x_i p_i, \tag{7.1}$$

которое назовем математическим ожиданием.

Из условия $\sum_{i=1}^{k} p_i=1$ непосредственно следует, что математическое ожидание постоянной величины a равно этой величине, т. е. $M(a)=a$.

Пусть дискретная случайная величина $\xi=x+y$, где x и y тоже случайные величины. Случайная величина x принимает значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а случайная величина y — значения $b_1, b_2, \ldots, b_m$ соответственно с вероятностями $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Тогда по формуле (7.1)

$$\begin{aligned} M(x)&=a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_np_n,\\ M(y)&=b_1q_1+b_2q_2+\ldots+b_mq_m. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Случайная величина $\xi=x+y$ может принимать значения $a_1+b_1, a_1+b_2, \ldots, a_1+b_m, a_2+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_2+b_m, \ldots, a_n+b_1, a_n+b_2, \ldots, a_n+b_m$ соответственно с вероятностями $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1m}, p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2m}, \ldots, p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nm}$, где p_{ij} — вероятность того, что x принимает значение a_i, а y — значение b_j.

По формуле (7.1)

$$\begin{aligned} M(x+y)&=(a_1+b_1)p_{11}+(a_1+b_2)p_{12}+\ldots+(a_1+b_m)p_{1m}+\\ &+(a_2+b_1)p_{21}+(a_2+b_2)p_{22}+\ldots+(a_2+b_m)p_{2m}+\ldots+\\ &+(a_n+b_1)p_{n1}+(a_n+b_2)p_{n2}+\ldots+(a_n+b_m)p_{nm}=\\ &=(a_1(p_{11}+p_{12}+\ldots+p_{1m})+a_2(p_{21}+p_{22}+\ldots+p_{2m})+\\ &+\ldots+a_n(p_{n1}+p_{n2}+\ldots+p_{nm}))+(b_1(p_{11}+p_{21}+\ldots+p_{n1})+\\ &+b_2(p_{12}+p_{22}+\ldots+p_{n2})+\ldots+b_m(p_{1m}+p_{2m}+\ldots+p_{nm})). \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} &p_{11}+p_{12}+\ldots+p_{1m}=p_1, \quad p_{11}+p_{21}+\ldots+p_{n1}=q_1,\\ &p_{21}+p_{22}+\ldots+p_{2m}=p_2, \quad p_{12}+p_{22}+\ldots+p_{n2}=q_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &p_{n1}+p_{n2}+\ldots+p_{nm}=p_n, \quad p_{1m}+p_{2m}+\ldots+p_{nm}=q_m. \end{aligned}$$

Тогда

$$M(x+y)=(a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_np_n)+(b_1q_1+b_2q_2+\ldots+b_mq_m),$$

или в силу равенств (7.1) и (7.2)

$$M(x+y)=M(x)+M(y). \tag{7.3}$$

Получили правило:

Математическое ожидание суммы случайных величин равняется сумме математических ожиданий этих величин.

Условимся называть случайные величины x и y независимыми, если они являются численными характеристиками независимых случайных событий. Если величины x и y взаимно независимы, то $p_{ij}=p_iq_j$, где p_iq_j — вероятность совместного появления событий $x=x_i$ и $y=b_j$, p_i — вероятность события $x=x_i$, q_j — вероятность появления события $y=y_j$.

Пусть случайная величина η представляет произведение двух независимых случайных величин x и y. Величина $\eta=xy$ примет значения

$$a_1b_1,\ a_1b_2,\ \ldots,\ a_1b_m,\ a_2b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_2b_m,\ \ldots,\ a_nb_1,\ a_nb_2,\ \ldots,\ a_nb_m$$

вследствие независимости x и y соответственно с вероятностями

$$p_1q_1,\ p_1q_2,\ \ldots,\ p_1q_m,\ p_2q_1,\ p_2q_2,\ \ldots,\ p_2q_m,\ \ldots,\ p_nq_1,\ p_nq_2,\ \ldots,\ p_nq_m.$$

Поэтому по формуле (7.1)

$$\begin{gathered}M(xy)=a_1b_1p_1q_1+a_1b_2p_1q_2+\ldots+a_1b_mp_1q_m+a_2b_1p_2q_1+\\+a_2b_2p_2q_2+\ldots+a_2b_mp_2q_m+\ldots+a_nb_1p_nq_1+a_nb_2p_nq_2+\ldots+\\+a_nb_mp_nq_m=a_1p_1(b_1q_1+b_2q_2+\ldots+b_mq_m)+\\+a_2p_2(b_1q_1+b_2q_2+\ldots+b_mq_m)+\ldots+a_np_n(b_1q_1+b_2q_2+\\+\ldots+b_mq_m)=(a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_np_n)\cdot(b_1q_1+b_2q_2+\ldots+b_mq_m),\end{gathered}$$

т. е. получаем:

$$M(xy)=M(x)\cdot M(y), \tag{7.4}$$

иначе говоря:

математическое ожидание произведения независимых случайных величин равняется произведению математических ожиданий этих величин.

В силу формулы (7.4) и того, что $M(a)=a$,

$$M(a\xi)=aM(\xi), \tag{7.5}$$

что означает:

постоянный множитель случайной величины можно вынести перед знаком математического ожидания.

Примеры

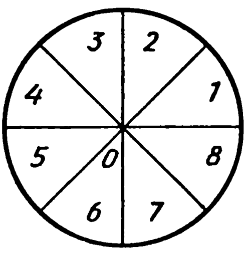


Рис. 32

1. Мишень (рис. 32) установлена так, что может вращаться вокруг оси (O). При достаточно большой угловой скорости вращения стрелок не в состоянии различать цифры, выписанные по одной на секторах. Он вынужден стрелять наугад. При попадании в сектор 1 стрелок выигрывает 1 р., в сектор 2 — 2 р., в сектор 3 — 3 р. и т. д., в сектор 8 — 8 р. Стоит ли ему участвовать в такой игре, если за право стрелять один раз надо платить 5 р.?

Поскольку мишень вращается, то способности стрелка здесь не имеют никакого значения: попадание — чистая случайность. Случайная величина ξ выражает возможные выигрыши. Она может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Так как все секторы одинаковые, то каждое из этих значений — случайная величина — принимает с одинаковой вероятностью $\frac{1}{8}$. Значит, по формуле (7.1)

$$M(\xi)=1\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{8}+5\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{8}+7\cdot\frac{1}{8}+$$
$$+8\cdot\frac{1}{8}=4{,}5 \text{ (р.)}.$$

Итак, математическое ожидание выигрыша 4,5 р., а стоимость выстрела 5 р. Стрелять много раз явно невыгодно. На основании подобных расчетов в капиталистических странах организуются разнообразные азартные игры, приводящие игроков к разорению.

2. Найти математическое ожидание случайной величины, распределенной по биноминальному закону распределения.

Непосредственное применение формулы (7.1) приводит к большим осложнениям. Поэтому задачу мы будем решать иначе.

Случайная величина ξ, распределенная по биноминальному закону, определяется числом появлений события A при n испытаниях. Вероятность появления такого события — p, непоявления — $q=1-p$.

Пусть ξ_i — число появлений события A при i испытании. Ясно, что ξ_i может принять только 2 значения: 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью q. Тогда

$$M(\xi_i)=1\cdot p+0\cdot q=p.$$

Но $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=\xi$.

По формуле (7.3)

$$M(\xi)=M(\xi_1)+M(\xi_2)+\ldots+M(\xi_n)=np.$$

3. Случайная величина ξ распределена по закону:

ξ	1	2	3	...	n	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...

Найти $M(\xi)$.

Согласно формуле (7.1)

$$M(\xi)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots+n\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)+\ldots=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Упражнения

155. Вероятность того, что с конвейера сойдет k бракованных деталей, равна $0{,}3^k$. Тогда закон распределения случайной величины таков:

k	1	2	3	...	x	...
P	0,3	$0{,}3^2$	$0{,}3^3$	...	$0{,}3^x$	...

Найдите математическое ожидание k.

156. У охотника 4 патрона. Он стреляет по зайцу, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Найдите математическое ожидание количества выстрелов, если вероятность попадания примерно 0,25.

157. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует регулировки, примерно 0,9, второй — 0,8, третий — 0,75, четвертый — 0,7. Найдите математическое ожидание числа станков, которые в течение часа не потребуют регулировки.

158. Монету подбрасываем 7 раз. Сколько раз в среднем может появиться герб?

159. Игральная кость бросается 12 раз. Сколько раз в среднем может появиться шестерка?

160. У дежурного гостиницы в кармане 8 разных ключей от разных комнат. Вынув наугад ключ, он пробует открыть дверь ближайшей комнаты. Сколько раз в среднем ему придется пробовать открывать эту комнату, если:

1) проверенный ключ кладется обратно в карман;

2) проверенный ключ не кладется обратно в карман?

161. Стрельба по мишени ведется до второго попадания. Найдите математическое ожидание числа выстрелов, если вероятность попадания одним выстрелом близка к 0,2.

162. Автомобиль встретит 4 светофора, каждый из которых пропустит его с вероятностью 0,5. Найдите математическое ожидание числа светофоров до первой остановки машины.

163. Стрельба по мишени ведется до k-го попадания. Запасы патронов не ограничены. Вероятность попадания p. Вычислите, сколько в среднем патронов будет израсходовано.

164. Закон распределения случайной величины x такой:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

а величины y такой:

y	1	2	3	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Найдите математическое ожидание случайных величин $\xi = x + y$, $\eta = x - y$, $\lambda = xy$, где x и y — независимые случайные величины.

165. Мишень (рис. 33) установлена так, что может вращаться вокруг оси (O). При достаточно большой угловой скорости вращения стрелок не может различить секторы мишени. Он вынужден стрелять наугад. При попадании в первый сектор стрелок выигрывает 1 р., во второй — проигрывает 2 р., в третий — выигрывает 3 р., в четвертый — проигрывает 4 р., а в пятый — выигрывает 5 р. Стоит ли участвовать в такой игре? Почему?

166. Мишени (рис. 34 и 35) установлены так, что могут вращаться вокруг оси (O). Стрелок вынужден стрелять наугад.

При попадании в первый сектор первой мишени стрелок выигрывает 1 р., во второй сектор — проигрывает 2 р., в третий — выигрывает 3 р., а в четвертый — проигрывает 4 р. При попадании в первый сектор второй мишени стрелок проигрывает 1 р., во второй — проигрывает 2 р., а в третий — проигрывает 3 р., в четвертый — выигрывает 4 р., в пятый — не

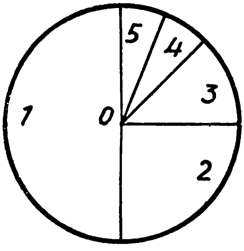


Рис. 33

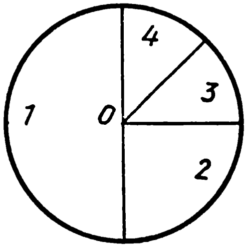


Рис. 34

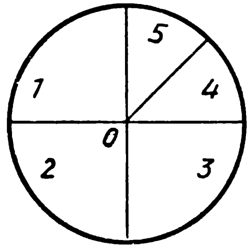


Рис. 35

выигрывает и не проигрывает. Стоит ли участвовать в такой игре? Почему?

167. Пусть ξ — сумма очков, получаемая при бросании двух игральных костей. Постройте закон распределения ξ и найдите $M(\xi)$.

168. Пусть ξ — число гербов, выпавших при бросании 10 монет. Постройте закон распределения ξ и найдите $M(\xi)$.

169. Баскетболист забрасывает штрафной мяч в корзину с вероятностью, близкой к 0,5. Сколько в среднем штрафных он может забросить подряд?

5. ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

К понятию дисперсии подойдем от сравнения геометрической интерпретации распределения двух случайных величин, у которых одинаковые математические ожидания. Например, таких: ξ, распределенного по закону:

ξ	-10	-6	-2	1	3	5	8	10
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

и η, распределенного по закону:

η	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Можно непосредственно убедиться, что

$$M(\xi)=M(\eta)=\frac{7}{8}.$$

Обратите внимание на любопытный результат: распределения случайных величин ξ и η различные, а математические ожидания одинаковые. В чем же скрывается причина их различия?

Геометрическая интерпретация этих распределений, построенная по единому масштабу (рис. 36), дает ответ на поставленный вопрос: различие скрывается в неодинаковом разбросе значений случайной величины около ее математического ожидания. Характер этого разброса очень важная информация о случайной величине: чем меньше этот разброс, тем теснее арифметические средние $\tilde{x}_n$ возможных значений случайной величи-

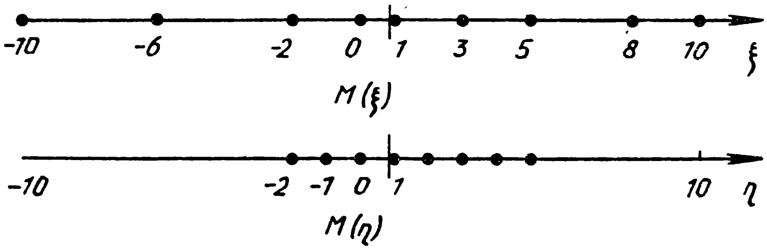


Рис. 36

ны ξ, о которых шла речь в предыдущем параграфе, сосредоточиваются около математического ожидания $M(\xi)$.

Как измерить этот разброс? Если $M(\xi)=a$, то отклонение случайной величины ξ от этого a есть тоже случайная величина $x=\xi-a$. Так может разброс измерить математическим ожиданием этой случайной величины? Наши знания уже позволяют убедиться в непригодности такой меры. Из результата $M(\xi-a)=M(\xi)-M(a)=a-a=0$ это видно.

Удобной мерой разброса возможных значений случайной величины оказалось математическое ожидание случайной величины, представляющей квадрат отклонения $\xi-M(\xi)$, т. е.

$$D(\xi)=M(\xi-M(\xi))^2.$$

Такая мера разброса называется дисперсией случайной величины.

Все вышеизложенное можно обобщить такой схемой:

1. На основании закона распределения случайной величины

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_k
P	p_1	p_2	p_3	...	p_k

определяем математическое ожидание

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{k} x_i p_i=a.$$

2. Строим закон распределения случайной величины $(\xi-a)^2$:

$(\xi-a)^2$	$(x_1-a)^2$	$(x_2-a)^2$	$(x_3-a)^2$	...	$(x_k-a)^2$
P	p_1	p_2	p_3	...	p_k

3. По формуле (7.1) определяем меру разброса значений случайной величины ξ около $M(\xi)=a$:

$$D(\xi)=\sum_{i=1}^{k} (x_i-a)^2 p_i. \qquad (7.6)$$

Можно получить и более удобную формулу:

$$\boldsymbol{D}(\xi)=\boldsymbol{M}(\xi-\boldsymbol{M}(\xi))^2=\boldsymbol{M}(\xi^2-2\xi\boldsymbol{M}(\xi)+\boldsymbol{M}^2(\xi)).$$

Применяя правило математического ожидания суммы и постоянного, получаем:

$$\boldsymbol{D}(\xi)=\boldsymbol{M}(\xi^2)-2\boldsymbol{M}(\xi\,\boldsymbol{M}(\xi))+\boldsymbol{M}^2(\xi)=$$
$$=\boldsymbol{M}(\xi^2)-2\boldsymbol{M}(\xi)\cdot\boldsymbol{M}(\xi)+\boldsymbol{M}^2(\xi)=\boldsymbol{M}(\xi^2)-\boldsymbol{M}^2(\xi).$$

Итак,

$$\boldsymbol{D}(\xi)=\boldsymbol{M}(\xi^2)-\boldsymbol{M}^2(\xi). \tag{7.7}$$

По этой формуле удобнее всего вычислять значения дисперсии.

Если $\boldsymbol{D}(\xi)$ — сравнительно малое число, то в этом случае значения случайной величины ξ близки к ее математическому ожиданию $\boldsymbol{M}(\xi)$. Если же $\boldsymbol{D}(\xi)$ — большое число, то значения ξ сильно рассредоточены около $\boldsymbol{M}(\xi)$.

По формуле (7.7) получаем:

$$\boldsymbol{D}(c)=\boldsymbol{M}(c^2)-\boldsymbol{M}^2(c)=c^2-c^2=0, \tag{7.8}$$

откуда следует, что *дисперсия постоянной величины равняется нулю.*

Применяя формулу (7.7), нетрудно также найти дисперсию случайной величины $c\xi$, где c — постоянный сомножитель. Действительно,

$$\boldsymbol{D}(c\xi)=\boldsymbol{M}(c^2\xi^2)-\boldsymbol{M}^2(c\xi)=c^2\boldsymbol{M}(\xi^2)-c^2\boldsymbol{M}^2(\xi)=$$
$$=c^2(\boldsymbol{M}(\xi^2)-\boldsymbol{M}^2(\xi))=c^2\boldsymbol{D}(\xi),\text{ т. е. }\boldsymbol{D}(c\xi)=c^2\boldsymbol{D}(\xi).$$

Если ξ и η — независимые случайные величины, то по формуле (7.7) $\boldsymbol{M}(\xi\eta)=\boldsymbol{M}(\xi)\cdot\boldsymbol{M}(\eta)$.

$$\boldsymbol{D}(\xi+\eta)=\boldsymbol{M}(\xi+\eta)^2-\boldsymbol{M}^2(\xi+\eta)=$$
$$=\boldsymbol{M}(\xi^2+2\xi\eta+\eta^2)-(\boldsymbol{M}(\xi)+\boldsymbol{M}(\eta))^2=$$
$$=\boldsymbol{M}(\xi^2)+2\boldsymbol{M}(\xi)\cdot\boldsymbol{M}(\eta)+\boldsymbol{M}(\eta^2)-\boldsymbol{M}^2(\xi)-2\boldsymbol{M}(\xi)\cdot\boldsymbol{M}(\eta)-\boldsymbol{M}^2(\eta)=$$
$$=(\boldsymbol{M}(\xi^2)-\boldsymbol{M}^2(\xi))+(\boldsymbol{M}(\eta^2)-\boldsymbol{M}^2(\eta)),$$

или

$$\boldsymbol{D}(\xi+\eta)=\boldsymbol{D}(\xi)+\boldsymbol{D}(\eta), \tag{7.9}$$

что означает:

дисперсия суммы независимых случайных величин равняется сумме их дисперсий.

Заметим также, что

$$\boldsymbol{D}(\xi-\eta)=\boldsymbol{D}(\xi)+\boldsymbol{D}(\eta), \tag{7.10}$$

ибо $\boldsymbol{D}(-\eta)=(-1)^2\boldsymbol{D}(\eta)=\boldsymbol{D}(\eta)$.

Примеры

1. Случайная величина ξ распределена по закону:

ξ	2	4	6	8	10
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Найти $D(\xi)$.

Сначала находим $M(\xi)$. Согласно формуле (7.1)

$$M(\xi)=2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+6\cdot\frac{1}{4}+8\cdot\frac{1}{8}+10\cdot\frac{1}{4}=6.$$

Теперь можно выразить закон распределения случайной величины $(\xi-M(\xi))^2=(\xi-6)^2$:

$(\xi-M(\xi))^2$	16	4	0	4	16
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Наконец, используя формулу (7.6),

$$D(\xi)=M(\xi-6)^2=16\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+16\cdot\frac{1}{4}=9.$$

Эту же задачу можно решать другим путем.

Используя формулу $D(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)$, представим распределение случайной величины ξ^2 с помощью таблицы:

ξ^2	4	16	36	64	100
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

По формуле (7.1)

$$M(\xi^2)=4\cdot\frac{1}{4}+16\cdot\frac{1}{8}+36\cdot\frac{1}{4}+64\cdot\frac{1}{8}+100\cdot\frac{1}{4}=45.$$

Тогда $D(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=45-6^2=45-36=9.$

Сравните, какой способ требует меньше вычислительной работы.

2. Случайная величина ξ распределена так:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,01	0,1	0,2	0,3	0,08	0,2	0,1	0,01

Случайная величина η распределена так:

η	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2	0,01	0,08	0,01

Найти дисперсию случайной величины $x=\xi+\eta$, где ξ, η — независимые случайные величины.

Согласно формуле (7.9) $D(x)=D(\xi)+D(\eta)$.

Так как

$$M(\xi)=1\cdot 0{,}01+2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+5\cdot 0{,}08+ \\ +6\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}01=4{,}39,$$

то распределение случайной величины $(\xi-4{,}39)^2$ имеет вид:

$(\xi-4{,}39)^2$	11,4921	5,7121	1,9321	0,1521	0,3721	2,5921	6,8121	21,0321
P	0,01	0,1	0,2	0,3	0,08	0,2	0,1	0,01

Поэтому

$$D(\xi)=11{,}4921\cdot 0{,}01+5{,}7121\cdot 0{,}1+1{,}9321\cdot 0{,}2+ \\ +0{,}1521\cdot 0{,}3+0{,}3721\cdot 0{,}08+ \\ +2{,}5921\cdot 0{,}2+6{,}8121\cdot 0{,}1+13{,}0321\cdot 0{,}01=2{,}47789.$$

Поскольку

$$M(\eta)=1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}2+6\cdot 0{,}01+ \\ +7\cdot 0{,}08+8\cdot 0{,}01=3{,}1,$$

то распределение случайной величины $(\eta-3{,}1)^2$ можно записать:

$(\eta-3{,}1)^2$	4,41	1,21	0,01	0,81	3,61	8,41	15,21	24,01
P	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2	0,01	0,08	0,01

Находим:

$$D(\eta)=4{,}41\cdot 0{,}3+1{,}21\cdot 0{,}2+0{,}01\cdot 0{,}1+0{,}81\cdot 0{,}1+3{,}61\cdot 0{,}2+ \\ +8{,}41\cdot 0{,}01+15{,}21\cdot 0{,}08+24{,}01\cdot 0{,}1=3{,}91.$$

Значит, $D(x)=2{,}47789+3{,}91=6{,}38789$.

3. Найти дисперсию случайной величины, распределенной по биноминальному закону.

Случайная величина ξ, распределенная по биноминальному закону, представляет число событий A при n независимых испытаниях, когда вероятность появления события A есть p, а непоявления — $q=1-p$.

Пусть ξ_i — число событий A при i-м испытании. ξ_i может принять два значения: 1 с вероятностью p (A произошло) и 0 с вероятностью q (A не произошло). Тогда

$$M(\xi_i^2)=1^2\cdot p+0^2\cdot q=p.$$

По формуле (7.10) находим:

$$D(\xi_i)=M(\xi_i^2)-M^2(\xi_i)=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

Поскольку $\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ и ξ_i — независимые случайные величины, то

$$D(\xi)=D(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=D(\xi_1)+D(\xi_2)+\ldots+D(\xi_n)=npq.$$

Программа на языке Бейсик для вычисления математического ожидания и дисперсии:

```
ø7 REM ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЕНИЯ
ø8 REM МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ
ø9 REM И ДИСПЕРСИИ
1ø DIM X (1øø), P(1øø)
2ø INPUT "ВВЕДИТЕ ЧИСЛО К", K
3ø FOR I=1 TO K
4ø INPUT "ВВЕДИТЕ ЧИСЛА X, P", X(I), P(I)
5ø NEXT I
6ø GOSUB 3øø
7ø GOSUB 4øø
8ø PRINT "МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ M(X)="; A
9ø PRINT "ДИСПЕРСИЯ D(X)="; D
1øø STOP
27ø REM ВЫЧИСЛЕНИЕМ M(X)
3øø A=ø
31ø FOR I=1 TO K
32ø Al=X(I)*P(I)
33ø A=A+A1
34ø NEXT I
35ø RETURN
37ø REM ВЫЧИСЛЕНИЕ D(X)
4øø D=ø
41ø FOR I=1 TO K
42ø D1=(X(I)-A)¬2
43ø D1=D1*P(I)
44ø D=D+D1
45ø NEXT I
46ø RETURN
47ø END
```

6. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА И ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Пусть математическое ожидание случайной величины ξ равно a. Распределение ξ выразится с помощью таблицы:

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

Дисперсия случайной величины ξ определяется из формулы

$$D(\xi)=(x_1-a)^2 p_1+(x_2-a)^2p_2+\ldots+(x_n-a)^2p_n. \qquad (7.11)$$

Вычислим теперь вероятность события $|\xi-a|\geqslant\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — наперед заданное число. Пусть x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_m} — те значения ξ, для которых имеет место $|x_{k_i}-a|\geqslant\varepsilon$, $i=1, 2, \ldots, m$. Тогда ясно, что $D(\xi)\geqslant(x_{k_1}-a)^2 p_{k_1}+(x_{k_2}-a)^2 p_{k_2}+\ldots+(x_{k_m}-a)^2 p_{k_m}$, ибо это неравенство получается путем отбрасывания из правой части неравенства (7.11) тех слагаемых, для которых $|\xi-a|<\varepsilon$. Тем более

$$D(\xi)\geqslant\varepsilon^2p_{k_1}+\ldots+\varepsilon^2p_{k_2}+\ldots+\varepsilon^2p_{k_m}=\varepsilon^2(p_{k_1}+p_{k_2}+\ldots+p_{k_m}).$$

Но

$$p_{k_1}+p_{k_2}+\ldots+p_{k_m}=P(|\xi-a|\geqslant\varepsilon),$$

поэтому

$$D(\xi)\geqslant\varepsilon^2P(|\xi-a|\geqslant\varepsilon),$$

$$P(|\xi-a|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}. \qquad (7.12)$$

Это — знаменитое неравенство Чебышева. Оно позволяет оценить вероятность отклонения случайной величины ξ от ее математического ожидания. С помощью неравенства Чебышева выведем закон больших чисел, который впервые был сформулирован Я. Бернулли.

Допустим, что $\xi=\frac{S_n}{n}$, где S_n — число появления события A при n независимых испытаниях. Обозначим $P(A)=p$. Нами доказано, что $M(S_n)=np$ и $D(S_n)=npq$. Используя эти результаты, находим:

$$M\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot M(S_n)=\frac{1}{n}\cdot np=p,$$

$$D\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D(S_n)=\frac{1}{n^2}\cdot npq=\frac{pq}{n}.$$

Теперь в силу неравенства (7.12)

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

При $n \to \infty$ $\frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0$, поэтому при любом $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geqslant \varepsilon \right) \to 0.$$

Этому равносильно

$$P\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \to 1, \tag{7.13}$$

где $\frac{S_n}{n}$ — частота появления события A при n независимых испытаниях, p — вероятность события A в отдельном испытании. (7.13) — не что иное, как запись закона больших чисел:

С вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе независимых испытаний статистическая частота появления наблюдаемого события как угодно мало отличается от его вероятности при отдельном испытании.

То, о чем догадывались интуитивно, теперь стало для нас оформленным научно.

Примеры

1. $M(\xi) = a$, $D(\xi) = \sigma^2$. Применяя неравенство Чебышева, оценить $P(|\xi - a| < 3\sigma)$.

Согласно формуле (7.12) при $\varepsilon = 3\sigma$ имеем:

$$P(|\xi - a| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}.$$

Поскольку

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) + P(|\xi - a| \geqslant 3\sigma) = 1,$$

то $P(|\xi - a| < 3\sigma) \geqslant 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, т. е.

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) \geqslant \frac{8}{9}.$$

Это значит, что независимо от закона распределения случайной величины ξ не меньше восьми шансов из девяти, что случайная величина ξ не появится за пределами промежутка $[a - 3\sigma;\ a + 3\sigma]$.

2. Доказать, что $P\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geqslant 0{,}5 \right) \leqslant \frac{1}{n}$.

Согласно неравенству $P\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ имеем:

$$P\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geqslant 0{,}5 \right) \leqslant \frac{pq}{n \cdot 0{,}25}.$$

Поскольку при условии $p + q = 1$ $\max pq = 0{,}25$, то

$$P\left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geqslant 0{,}5 \right) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Упражнения

170. Распределение случайной величины ξ имеет вид:

ξ	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0,15	0,2	0,15	0,1	0,15	0,05	0,15	0,05

а распределение величины η:

η	9	8	7	6	5	4	3	2
P	0,15	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1

Найдите дисперсии случайных величин ξ и η.

Найдите дисперсию $x=\xi+\eta$ и убедитесь в существовании закона $D(\xi+\eta)=D(\xi)+D(\eta)$.

171. Закон распределения случайной величины ξ имеет вид:

ξ	x_1	x_2	x_3
P	0,5	0,3	0,2

Найдите x_1, x_2, x_3, если известно, что $M(\xi)=1{,}7$, $D(\xi)=0{,}61$, а x_1, x_2, x_3 представляют возрастающую арифметическую прогрессию.

172. Взвешивание одной и той же детали прибором A дало такие результаты (в мг):

7,88; 7,89; 8,01; 8,02; 8,04; 8,01; 8,03; 7,95; 7,96; 8,21, а взвешивание той же самой детали прибором B:

7,91; 7,89; 8,01; 8,01; 8,02; 8,01; 8,03; 7,97; 7,97; 8,18.

Который из приборов более точный?

173. Импровизированная игра состоит в следующем: игрок получает m выигрышных очков, когда при подбрасывании игральной кости шестерка впервые выпадает при m-м бросании. Пусть ξ — ожидаемый выигрыш. Найдите $M(\xi)$, $D(\xi)$ и, применяя неравенство Чебышева, оцените $P(\xi<15)$.

174. Пусть ξ — число белых шаров среди трех наугад вынутых из ящика, в котором 5 белых и 7 черных шаров. Найдите $D(\xi)$.

175. Случайная величина ξ принимает значения 1, 2, 3, ..., n, каждое с вероятностью $\frac{1}{n}$. Докажите, что

$$M(\xi)=\frac{n+1}{2},\ D(\xi)=\frac{n^2-1}{12}.$$

176. Производятся 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания примерно 0,4. Пусть ξ — число попаданий. Найдите $D(\xi)$.

177. Рабочий подбирает ключ из набора ключей разных размеров. Вероятность сразу найти нужный ключ примерно 0,6. Пусть ξ — число проб подбора ключа до нужного размера. Найдите среднее стандартное отклонение $\sigma(\xi)$.

178. Найдите дисперсию случайной величины X, представляющей собой число появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X)=1{,}2$.

179. Из всей выпускаемой заводом продукции 95% составляют стандартные изделия. Наугад отобрано 6 деталей. Пусть ξ — число стандартных деталей среди шести отобранных. Найдите $D(\xi)$.

180. Человек находится в начале системы координат. Он подбрасывает монету. При появлении герба делает шаг направо, при появлении цифры — шаг налево. Пусть ξ — абсцисса положения человека после n бросаний. Какой вид имеет распределение случайной величины ξ? Найдите $M(\xi)$ и $D(\xi)$.

181. Пронумерованы n одинаковых карточек. Затем эти карточки наугад поменяли местами. Пусть S_n — число карточек, которые и после перестановки остались на своих местах (например, карточка с номером 7 осталась на седьмом месте от начала). Найдите $M(S_n)$ и $D(S_n)$.

182. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Вероятность того, что «$X=x_1$», равна 0,6. Постройте закон распределения величины X, если $M(X)=1{,}4$ и $D(X)=0{,}24$.

183. Дети затеяли интересную игру. В одной из трех совершенно одинаковых шкатулок спрятан красивый значок. Желающий отгадать наугад выбирает шкатулку и проверяет, есть ли в ней значок. Если значка в ней не оказалось, он должен отвернуться. За его спиной шкатулки переставляются местами. Ему предлагают попытать счастье еще раз. Игра продолжается до обнаружения значка. Пусть ξ — число попыток до отгадывания. Найдите $M(\xi)$ и $D(\xi)$. Применяя неравенство Чебышева, оцените $P(\xi<6)$.

184. Дискретная случайная величина X принимает только три возможных значения: $x_1=1$, x_2 и x_3, причем $x_1<x_2<x_3$. Вероятности того, что X примет значения x_1 и x_2, соответственно равны 0,3 и 0,2. Постройте закон распределения величины X, зная, что $M(X)=2{,}2$ и $D(X)=0{,}76$.

185. Пусть событие A — появление двух гербов при бросании трех монет. Производится n-кратное бросание трех монет. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин ξ и η, где ξ — число появления события A при n испытаниях, $\eta=\frac{\xi}{n}$ — частота события A.

186. Пара противоположных граней куба красного цвета отмечена цифрами 1, другая пара — цифрами 6, третья — цифрами 8. Противоположные грани куба голубого цвета отмечены цифрами 3, 5, 7. Оба куба бросают одновременно. Пусть ξ — число случаев, когда подряд выигрывает красный куб. Найдите $M(\xi)$ и $D(\xi)$.

187. В ящике a белых и b черных шариков. Наугад вынимают k шариков ($k \leqslant a+b$). Найдите математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шариков.

7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Формула Пуассона (6.14) служила удобным приближением для биноминального распределения в случае большого n и малого p. Существуют также и другие распределения вероятностей, которые приводят в пределе к формуле Пуассона. Мы сталкиваемся здесь с проявлением того факта, что существует несколько распределений большой общности, встречающихся в разнообразных задачах. Тремя чаще всего встречающимися распределениями являются биноминальное (оно нами рассмотрено в главе VI), нормальное и распределение Пуассона, которое мы теперь рассмотрим более основательно.

Будем говорить, что случайная величина ξ распределена по закону Пуассона, если она принимает значения m ($m=0, 1, 2, 3, \ldots$) с вероятностями

$$P(\xi=m)=\frac{k^m}{m!}e^{-k}. \tag{7.14}$$

Рассмотрим такие последовательности случайных событий, примерами которых могут служить вызовы, поступающие на телефонную станцию, заходы судов в порт, испускание α-частиц радиоактивным веществом и т. д. Каждое событие можно изобразить точкой на оси времени, тогда получаем случайное распределение точек. Покажем, что на величину

$$\frac{k^m}{m!}e^{-k}$$

можно смотреть, как на вероятность иметь m точек (m событий) внутри интервала определенной длины.

Пусть условия опыта остаются неизменными во времени и неперекрещивающиеся промежутки времени независимы в том смысле, что число событий на одном промежутке не зависит от числа событий на других промежутках.

Представим единичный промежуток времени, разделенный на n промежутков (n — большое число), длина каждого из которых $\frac{1}{n}$. Пусть любой из промежутков либо пуст, либо содержит по крайней мере одну случайную точку, т. е. промежуток не пуст. Пусть событие A — «промежуток не пуст». Поскольку длина всех промежутков одинакова, то для любого из промежутков вероятность события A должна быть одной и той же. Обозначим $P(A)=p_n$. Пусть $np_n \to k$ при неограниченном возрастании n. Тогда по формуле (6.6) вероятность того, что среди n неперекрещивающихся промежутков непустых

$$P(S_n=m)\approx\frac{k^m}{m!}e^{-k}. \qquad (7.15)$$

Здесь, конечно, m не означает число случайных точек на единичном промежутке, либо в любом из непустых промежутков мы можем иметь несколько случайных точек. Однако естественно ввести дополнительно допущение, что вероятностью появления двух или более событий в течение очень короткого промежутка времени можно в пределе пренебречь. Таким образом, вероятность иметь в единичном промежутке времени m случайных точек получается как предел $P(S_n=m)$ при $n\to\infty$. Если эту вероятность обозначим $p(m;\ k)$, то

$$p(m;\ k)=\lim_{n\to\infty} P(S_n=m)=\frac{k^m}{m!}e^{-k}. \qquad (7.16)$$

Если вместо единичного промежутка мы возьмем произвольный промежуток длиной t и снова воспользуемся разбиением на промежутки длиной $\frac{1}{n}$, то получим испытания Бернулли с той же самой вероятностью p_n, но количество испытаний будет равно уже не n, а ближайшему к nt целому числу. Переход к пределу такой же, только вместо k мы получим kt. Это приводит к истолкованию величины

$$p(m;\ kt)=\frac{(kt)^m}{m!}e^{-kt} \qquad (7.17)$$

как вероятности иметь m случайных точек на фиксированном промежутке длиной t. В частности, вероятность того, что на промежутке длиной t не будет ни одной точки, равна

$$p(0;\ kt)=e^{-kt}. \qquad (7.18)$$

Параметр k определяет плотность точек на оси t. Из формулы (7.17) видно, что, чем больше k, тем меньше вероятность события, состоящего в том, что промежуток $(0;\ t)$ пуст. Формула (7.18) может быть применена при решении различных задач.

Примеры

1. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 540 вызовов. Какова вероятность того, что в данную минуту она получит ровно 20 вызовов?

Так как вызовы независимы друг от друга, число вызовов за промежуток времени $\Delta t=1$ мин распределяется по закону Пуассона. Произведение kt мы можем рассматривать как среднее число точек, приходящееся на интервал времени длиной t. Таким образом, по условию задачи

$$kt=\frac{540}{60}=9.$$

По формуле (7.17), зная, что $m=20$, находим:

$$p(20;\ 9)=\frac{9^{20}}{20!}e^{-9}.$$

По таблице 3

$$p(20;\ 9)=0{,}000617.$$

2. В аэропорту производят посадку в среднем 3 самолета в минуту. Какова вероятность того, что в течение 2 мин произведут посадку не меньше 4 самолетов?

Пусть событие A — «произвели посадку не меньше 4 самолетов». Противоположное ему событие A — «произвели посадку меньше 4 самолетов». Обозначим события:

A_0 — «не было ни одной посадки»,

A_1 — «состоялась одна посадка»,

A_2 — «состоялось две посадки»,

A_3 — «состоялось три посадки».

Понятно, что

$$\bar{A}=A_0\cup A_1\cup A_2\cup A_3.$$

Поскольку события A_0, A_1, A_2, A_3 несовместимы, то

$$P(A)=P(A_0)+P(A_1)+P(A_2)+P(A_3).$$

Соответственно условию задачи $t=2$, $k=3$, $m=0$, 1, 2, 3. Поэтому по формуле (7.17) и таблице 3

$$P(A_0)=p(0;\ 3\cdot 2)=p(0;\ 6)=0{,}002479,$$
$$P(A_1)=p(1;\ 3\cdot 2)=p(1;\ 6)=0{,}014873,$$
$$P(A_2)=p(2;\ 3\cdot 2)=p(2;\ 6)=0{,}044618,$$
$$P(A_3)=p(3;\ 3\cdot 2)=p(3;\ 6)=0{,}089235.$$

Получаем $P(\bar{A})=0{,}151205$. Поскольку $P(A)=1-P(\bar{A})$, то

$$P(A)=0{,}848795.$$

3. На прядильной фабрике работница обслуживает по нескольку сотен внешне практически ничем не отличимых веретен. При вращении веретена пряжа из-за неравномерности натяжения и по другим причинам рвется в случайные моменты времени. Для производства важно знать, как часто могут происходить обрывы пряжи в зависимости от тех или иных условий (сорт пряжи, скорость вращения веретен и т. д.).

Пусть работница обслуживает 800 веретен и вероятность обрыва пряжи в течение одной минуты примерно 0,0005. Найти вероятность того, что в течение 10 мин произойдет не более 2 обрывов.

Пусть событие A — «произойдет не более 2 обрывов». Обозначим события:

A_0 — «обрывов не произошло»,

A_1 — «произошел один обрыв»,

A_2 — «произошли два обрыва».

Ясно, что $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$. Согласно условию задачи $t = 10$, $k = 800 \cdot 0{,}0005 = 0{,}4$, $m = 0, 1, 2$.

По формуле (7.17) и таблице 3

$$\boldsymbol{P}(A_0) = p(0;\ 0{,}4 \cdot 10) = p(0;\ 4) = 0{,}018316,$$
$$\boldsymbol{P}(A_1) = p(1;\ 0{,}4 \cdot 10) = p(1;\ 4) = 0{,}073263,$$
$$\boldsymbol{P}(A_2) = p(2;\ 0{,}4 \cdot 10) = p(2;\ 4) = 0{,}146525.$$

Поскольку $\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A_0) + \boldsymbol{P}(A_1) + \boldsymbol{P}(A_2)$, то

$$\boldsymbol{P}(A) = 0{,}238104.$$

VIII. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В разделе VII мы уже коснулись понятия непрерывной случайной величины. Здесь продолжим о ней разговор.

Как было подчеркнуто в предыдущем разделе, дискретная случайная величина может принимать значения некоторой числовой последовательности — конечной или бесконечной.

Дискретность случайной величины, принимающей эти значения, будет состоять в том, что между любыми значениями x_i и x_j будет только конечное число членов этой последовательности, и в случае необходимости мы можем все эти промежуточные значения записать.

Это позволит строить закон распределения дискретной случайной величины в форме таблицы, в которой по порядку перечислены все или сколько угодно много возможных значений этой случайной величины.

В случае непрерывной случайной величины ξ, которая принимает все реальные значения некоторого промежутка реальных чисел, между любыми двумя такими значениями x' и x'' имеется бесконечно много реальных чисел, и все эти числа записать не представляется возможным. Как ни пробовать, например, эти числа пронумеровать, между любыми из них опять существует бесконечно много реальных чисел. Так что процесс нумерования окажется бесконечным, а это и обусловливает отсутствие возможности закон распределения непрерывной случайной величины представить в форме, аналогичной той, которая применяется в случае дискретной случайной величины.

1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим величину $P(\xi < x)$.

Поскольку каждому значению x соответствует один и только один промежуток $(-\infty;\ x]$, а каждому такому промежутку — одно и только одно событие «$-\infty < \xi < x$», вероятность которого $P(\xi < x)$, то выходит, что каждому значению x соответствует одно и только одно значение $P(\xi < x)$.

Значит, между x и $P(\xi < x)$ существует функциональная зависимость в том смысле, как это изложено в традиционном курсе математики. Логично $P(\xi < x)$ обозначить привычным для нас символом $F(x)$ и назвать функцией распределения непрерывной случайной величины. Итак:

$\boxed{\text{Функция}}$

когда она определяет $P(\xi < x)$

↓

$\boxed{\text{Функция распределения непрерывной случайной величины}}$

Определение:

Функцией распределения непрерывной случайной величины называется вероятность того, что ξ примет значение меньше x.

Очевидны следующие свойства $F(x)$:

1. $F(x)$ — неубывающая функция.

Действительно, пусть $x_1 < x_2$.

Событие «$\xi < x_2$» представляет собой объединение событий «$\xi < x_1$» и «$x_1 \leqslant \xi < x_2$». Поэтому в силу несовместимости их

$$P(\xi < x_2) = P(\xi < x_1) + P(x_1 \leqslant \xi < x_2).$$

Поскольку $P(x_1 \leqslant \xi < x_2) \geqslant 0$, то

$$P(\xi < x_1) \leqslant P(\xi < x_2), \text{ т. е.}$$

$$F(x_1) \leqslant F(x_2).$$

2. $F(x)$ — непрерывная слева функция.

Выберем какую-нибудь возрастающую последовательность $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$, сходящуюся к x. Пусть A_n — событие «$x_n \leqslant \xi < x$». Тогда в силу свойства 1

$$P(A_n) = P(\xi < x) - P(\xi < x_n) = F(x) - F(x_n).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(F(x) - F(x_n)) = F(x) - \lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) - F(x_n - 0)$, что и требовалось доказать.

3. $F(\infty) = 1$.

Событие «$\xi < \infty$» достоверное, поэтому

$$P(\xi < \infty) = F(\infty) = 1. \tag{8.1}$$

4. $F(-\infty) = 0$.

Событие «$\xi < -\infty$» невозможное, поэтому

$$P(\xi < -\infty) = F(-\infty) = 0.$$

Примечание. Когда известно, что случайная величина может принимать только значения промежутка $[a;\ b)$, то достоверным событием является событие «$\xi < b$», а невозможным — «$\xi < a$». В таком случае

$$\begin{aligned} P(\xi < b) &= F(b) = 1, \\ P(\xi < a) &= F(a) = 0. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Когда известна функция распределения $F(x)$, можно найти вероятность попадания случайной величины на заданный интервал. Именно:

Вероятность попадания случайной величины на заданный интервал равна приращению функции распределения на этом интервале, т. е.

$$P(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a). \tag{8.3}$$

Доказать это нетрудно. В результате несовместимости событий «$\xi < a$» и «$a \leqslant \xi < b$»

$$P(\xi < b) = P(\xi < a) + P(a \leqslant \xi < b), \text{ т. е.}$$

$F(b) = F(a) + P(a \leqslant \xi < b)$, откуда и следует (8.3).

Примеры

1. Функция распределения случайной величины ξ (рис. 37)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -1, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{при } -1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение, заключенное в промежутке $[0;\ 1)$.

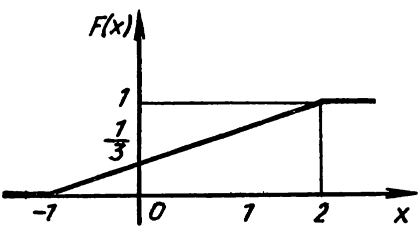


Рис. 37

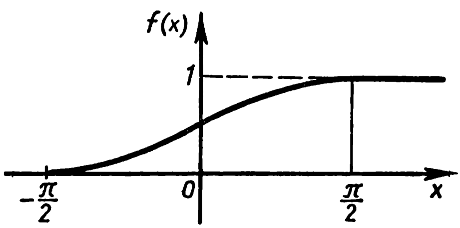


Рис. 38

По формуле (8.3)

$$P(0 \leqslant \xi < 1) = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)_{x=1} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)_{x=0} = \frac{1}{3}.$$

2. Функция распределения случайной величины ξ (рис. 38)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}(\sin x + 1) & \text{при } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение в промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right)$.

По формуле (8.3)

$$P\left(0 \leqslant \xi < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3. Доказать, что

$$P(a \leqslant \xi < b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \leqslant b) = P(a \leqslant \xi \leqslant b). \quad (8.4)$$

$P(a \leqslant \xi < b) = P(\xi = a) + P(a < \xi < b)$. Но $P(\xi = a) = 0$, поэтому

$$P(a \leqslant \xi < b) = P(a < \xi < b).$$

Также $P(\xi = b) = 0$, поэтому

$$P(a < \xi \leqslant b) = P(a < \xi < b) + P(\xi = b) = P(a < \xi < b).$$

Наконец, $P(a \leqslant \xi \leqslant b) = P(\xi = a) + P(a < \xi < b) + P(\xi = b) = P(a < \xi < b)$.

Равенство вероятностей (8.4) полезно запомнить для изучения следующих разделов книги.

2. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

У читателя, возможно, мог возникнуть вопрос: каким путем, наблюдая случайные значения ξ, построить функцию распределения $F(x)$? Оказывается, что к этой функции практически проще подходить через другую функцию.

Исходной точкой наших дальнейших рассуждений мы примем понятие производной.

По формуле (8.3)

$$P(x_0 \leqslant \xi < x_0 + \Delta x) = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0). \quad (8.5)$$

Из школьного курса математики известна формула

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \approx F'(x_0). \quad (8.6)$$

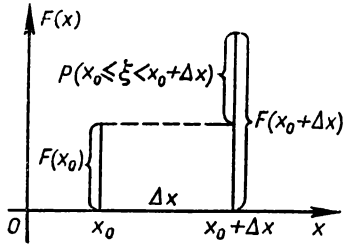


Рис. 39

Она и поможет нам дальнейшие рассуждения провести так, чтобы само понятие «плотность» имело смысл, адекватный смыслу плотности вообще.

Действительно,

$$\frac{P(x_0 \leqslant \xi < x_0 + \Delta x)}{\Delta x} -$$

это доля вероятности $P(x_0 \leqslant \xi < x_0 + \Delta x)$, соответствующая единице измерения длины отрезка Δx (рис. 39), т. е. плотность этой вероятности на Δx.

Но в силу (8.6)

$$\frac{P(x_0 \leqslant \xi < x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \approx F'(x_0).$$

Тогда плотность этой вероятности в точке x_0 будет равна:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 \leqslant \xi < x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = F'(x_0) = p(x_0).$$

Для произвольной точки

$$p(x) = F'(x). \tag{8.7}$$

Итак:

Плотностью вероятностей $p(x)$ называется производная функции распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины.

Следовательно, функция распределения $F(x)$ представляет собой первообразную от плотности $p(x)$. Поэтому содержание формулы (8.3) может быть расширено:

$$P(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x)\,dx. \tag{8.8}$$

Из этой формулы следует:

1. Если все возможные значения ξ принадлежат промежутку $[a;\ b)$, то «$a \leqslant \xi < b$» — достоверное событие, и поэтому

$$\int_a^b p(x)\,dx = 1.$$

Это значит: *площадь, ограниченная кривой плотности и осью Ox при всех значениях, которые может принимать случайная величина* ξ, *равна единице*. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1.$$

2. $$P(\xi < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt, \qquad (8.9)$$

так как известно, что $F(-\infty) = 0$.

3. $$P(a \leqslant \xi < \infty) = F(\infty) - F(a) = \int_{a}^{\infty} p(t)\,dt = 1 - F(a), \qquad (8.10)$$

так как $F(\infty) = 1$.

В тех случаях, когда имеем дело с определенными интегралами типа $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$, $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ или $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, где $F(x)$ — первообразная от $f(x)$, то будем их понимать в таком смысле:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)\,dx = F(a) - \lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha);$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to \infty} \int_{a}^{\alpha} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to \infty} F(\alpha) - F(a); \qquad (8.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{\alpha \to -\infty \\ \beta \to \infty}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to \infty} F(\beta) - \lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha).$$

Очень важно подчеркнуть, что плотность вероятностей непрерывной случайной величины — это исходная точка для получения всех ее характеристик. А к самой плотности и ее геометрической интерпретации можно подойти от практических наблюдений случайной величины.

Допустим, $\xi \in [a; b)$. Разделим этот промежуток на m равных частей длиной $h = \frac{b-a}{m}$.

Пусть в результате n наблюдений мы установили, что:

в промежуток $[a; x_1)$ ξ попала k_{1n} раз;

в промежуток $[x_1; x_2)$ ξ попала k_{2n} раз;

. . . .

в промежуток $[x_{m-1}; b)$ ξ попала k_{mn} раз.

Статистические частоты попадания в соответствующий интервал будут $\frac{k_{1n}}{n}$, $\frac{k_{2n}}{n}$, ..., $\frac{k_{mn}}{n}$,

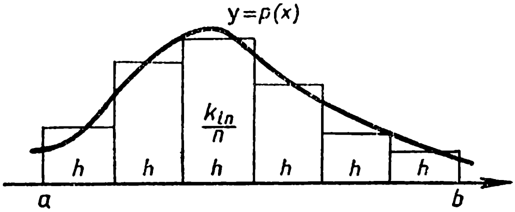


Рис. 40

а плотности этих статистических частот

$$\frac{k_{1n}}{nh},\ \frac{k_{2n}}{nh},\ \ldots,\ \frac{k_{mn}}{nh}.$$

Строим диаграмму распределения этих плотностей частот (рис. 40). Такая диаграмма называется гистограммой. На ее основании будем подходить к геометрической интерпретации плотности вероятностей $p(x)$, аналитическое выражение которой нам неизвестно.

Можно рассуждать так.

Для каждого $i=1, 2, 3, \ldots, m$:

1. $\frac{k_{in}}{n}$ — площадь i-го прямоугольника гистограммы, представляющая статистическую частоту попадания значений ξ в i-й интервал.

2. С возрастанием n эти статистические частоты сосредоточиваются около вероятности

$$P(x_{i-1} \leqslant \xi < x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}).$$

3. В силу формулы (8.6) эта вероятность приближенно должна быть равна

$$p(x_{i-1}) \cdot h,$$

где $p(x)$ — предполагаемая плотность.

Поскольку это выражение представляет площадь прямоугольника с основанием h, то значение предполагаемой плотности

$$p(x_{i-1})$$

представляет высоту некоторого прямоугольника, у которого то же самое основание и площадь которого близка к $\frac{k_{in}}{n}$.

Вывод:

Последовательность значений предполагаемого $p(x)$

$$p(x_0);\ p(x_1);\ \ldots;\ p(x_{m-1})$$

представляет высоты прямоугольников, по площади близких к значениям статистических частот

$$\frac{k_{1n}}{n};\ \frac{k_{2n}}{n};\ \ldots;\ \frac{k_{mn}}{n}.$$

Следовательно, предполагаемая плотность представляет собой некоторую кривую, которая огибает гистограмму статистических частот.

Примеры

1. Плотность распределения случайной величины ξ

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin x & \text{при } 0<x\leqslant\pi, \\ 0 & \text{при } x>\pi. \end{cases}$$

Найти вероятность попадания ξ на промежуток $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

По формуле (8.9)

$$P\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\xi<\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2. Плотность распределения случайной величины ξ

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}\cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что $\xi\leqslant\frac{\pi}{6}$.

По формуле (8.9)

$$P\left(\xi\leqslant\frac{\pi}{6}\right)=P\left(-\infty<\xi\leqslant\frac{\pi}{6}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}}p(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{6}}0\cdot dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}.$$

3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Пусть непрерывная случайная величина ξ распределена на интервале $[a;\ b)$ с плотностью $p(x)$. Разделим промежуток $[a;\ b)$ на n необязательно равных частей $[a;\ x_1)$; $[x_1;\ x_2)$; ...; $[x_{n-1};\ b)$.

Случайная величина ξ принимает:

значения из промежутка $[a;\ x_1)$ с вероятностью $P(a \leqslant \xi < x_1)$;

значения из промежутка $[x_1;\ x_2)$ » » $P(x_1 \leqslant \xi < x_2)$;

значения из промежутка $[x_2;\ x_3)$ » » $P(x_2 \leqslant \xi < x_3)$;

. . . .

значения из промежутка $[x_{n-1};\ b)$ с вероятностью $P(x_{n-1}) \leqslant \xi < b)$.

Тогда по аналогии с формулой (7.1) математическое ожидание случайной величины ξ приближенно равно:

$$M(\xi) \approx \sum_{i=0}^{n-1} x_i P(x_i \leqslant \xi < x_{i+1}).$$

Разумеется, что

$$M(\xi) = \lim_{\max(x_{i+1} - x_i) \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} x_i P(x_i \leqslant \xi < x_{i+1})$$

при $n \to \infty$. Обозначим $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, а $\max_i \Delta x_i = \lambda$. Тогда

$$M(\xi) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} x_i P(x_i \leqslant \xi < x_{i+1}).$$

В силу формулы (8.3)

$$M(\xi) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} x_i (F(x_{i+1}) - F(x_i)).$$

По известной формуле приращения функции

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) \approx F'(x_i)\,\Delta x_i = p(x_i)\,\Delta x_i,$$

следовательно,

$$M(\xi) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} x_i p(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b x p(x)\,dx. \qquad (8.12)$$

В случаях, когда область распределения ξ не указана,

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\,dx, \qquad (8.13)$$

где интеграл понимается в смысле определений (8.11).

Примеры

1. Случайная величина ξ распределена на промежутке $[0;\ 2)$ с плотностью $p(x) = 1 - \frac{x}{2}$. Найти $M(\xi)$.

По формуле (8.12)

$$M(\xi) = \int_0^2 x\left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \int_0^2 x dx - \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

2. Случайная величина ξ распределена с плотностью

$$p(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin x \text{ при } 0<x\leqslant\pi, \\ 0 \text{ при } x>\pi. \end{cases}$$

Найти $M(\xi)$.

По формуле (8.13)

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x\sin x dx+\int_{\pi}^{\infty} x\cdot 0\cdot dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} x\sin x dx.$$

Непосредственно убедимся, что первообразная от $f(x)=$ $=x\sin x$ есть $F(x)=-x\cos x+\sin x$.

Действительно, $F'(x)=(-x\cos x+\sin x)'=x\sin x$.

Поэтому по формуле Ньютона — Лейбница

$$M(\xi)=\frac{1}{2}(-x\cos x+\sin x)\Big|_{0}^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

4. ДИСПЕРСИЯ

Согласно формулам (7.7) и (8.12), когда все возможные значения ξ принадлежат промежутку $[a;\ b)$,

$$D(\xi)=\int_{a}^{b} x^2 p(x)\,dx-\left(\int_{a}^{b} xp(x)\,dx\right)^2. \qquad (8.14)$$

В случаях, когда область возможных значений ξ не указана,

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx\right)^2, \qquad (8.15)$$

где эти интегралы понимаются в смысле понятий (8.11).

Примеры

1. Плотность распределения случайной величины

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant 0, \\ 2x^2 & \text{при } 0<x\leqslant 1, \\ 0 & \text{при } x>1. \end{cases}$$

Найти $D(\xi)$.

По формуле (8.15)

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx\right)^2=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\cdot dx+\int_{0}^{1} x^2\cdot 2x^2\cdot dx+$$

$$+\int_{1}^{\infty} x^2\cdot 0\cdot dx-\left(\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx+\int_{0}^{1} x\cdot 2x^2\cdot dx+\int_{1}^{\infty} x\cdot 0\cdot dx\right)^2=$$

$$=2\int_{0}^{1} x^4 dx-\left(2\int_{0}^{1} x^3 dx\right)^2=2\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{0}^{1}-\left(2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1}\right)^2=\frac{3}{20}.$$

2. Случайная величина ξ распределена на промежутке $[0;\ 2)$ по закону Симпсона:

$$p(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0\leqslant x<1,\\ 2-x & \text{при } 1\leqslant x<2\end{cases}$$

(рис. 41).

Доказать, что

$$P(0{,}5<\xi<1{,}5)>\frac{1}{3}.$$

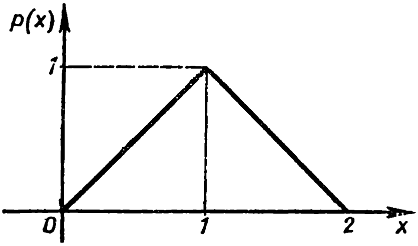


Рис. 41

Для достижения выдвинутой нами цели будем применять неравенство Чебышева. Следовательно, нам необходимо знать $M(\xi)$ и $D(\xi)$.

По формуле (8.12)

$$M(\xi)=\int_0^1 x\cdot x\cdot dx+\int_1^2 x(2-x)\,dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2x-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+2\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{1}{3}+4-1-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

По формуле (8.14)

$$D(\xi)=\int_0^1 x^2\cdot x\cdot dx+\int_1^2 x^2(2-x)\,dx-1^2=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2-$$

$$-\frac{x^4}{4}\Big|_1^2-1=\frac{1}{4}+2\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)-4+\frac{1}{4}-1=\frac{1}{6}.$$

По неравенству Чебышева

$$P(|\xi-1|<0{,}5)=P(1-0{,}5<\xi<1+0{,}5)=$$

$$=P(0{,}5<\xi<1{,}5)>1-\frac{\frac{1}{6}}{(0{,}5)^2}=\frac{1}{3}.$$

5. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В формулировках теорем Муавра — Лапласа мы уже ознакомили читателя с функцией

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{8.16}$$

и ее первообразной

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \tag{8.17}$$

Значения этих функций представлены в таблицах 2 и 4. График $y=\varphi(x)$ представлен на рисунке 3.

Нам также известно, что вероятность

$$P(\alpha \leqslant \xi < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\,dx$$

представляет собой площадь фигуры, образованной кривой $y=p(x)$, прямыми $x=\alpha$ и $x=\beta$ и осью Ox. Когда всевозможные значения принадлежат некоторому промежутку $[a;\ b)$, то, разумеется,

$$P(a \leqslant \xi < b)=\int_{a}^{b} p(x)\,dx=1.$$

Имеет место и обратное: если площадь фигуры, образованной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=\alpha$ и $x=\beta$ и осью Ox, равна 1, то $f(x)$ можно считать плотностью вероятностей некоторой непрерывной случайной величины.

Методами, пока для нашего читателя недоступными, Пуассоном доказано, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=1,$$

и поэтому $\varphi(x)$ представляет плотность распределения некоторой непрерывной случайной величины.

Поскольку функция $y=\varphi(x)$ максимальное значение $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ принимает в точке $x=0$, причем в результате четности функции ее график симметричен относительно оси y, то, разумеется, $M(\xi)=0$.

По формуле (8.15) при условии $M(\xi)=0$

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \tag{8.18}$$

Поскольку $\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)'=e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$, т. е.

$$x^2e^{-\frac{x^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}-\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)',$$

то первообразная от $x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$ равна первообразной от $e^{-\frac{x^2}{2}}-\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)'$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Как известно, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

$$\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\beta \to \infty} \frac{\beta}{e^{\frac{\beta^2}{2}}} - \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{\alpha}{e^{\frac{\alpha^2}{2}}} = 0.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}. \tag{8.19}$$

Подставляя (8.19) в (8.18), получаем $D(\xi) = 1$.

В результате четности функции $y = \varphi(x)$ ее колоколообразный график будет симметричен. Поэтому точкой максимума является $M(\xi) = 0$. Естественными, т. е. нормальными, особенностями интуитивно нам кажутся такие:

а) равные вероятности одинаковых отклонений ξ в обе стороны от $M(\xi) = 0$;

б) убывание вероятности по мере увеличения отклонения от $M(\xi) = 0$.

Это как бы подводит к мысли сам закон распределения ξ называть нормальным. Поскольку числовые характеристики ξ стандартные: $M(\xi) = 0$, $D(\xi) = 1$, то данный нормальный закон распределения можно называть стандартным. Итак, будем считать, что случайная величина ξ распределена по стандартному нормальному закону, когда ее плотность распределения вероятностей $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, и, следовательно, $M(\xi) = 0$, $D(\xi) = 1$.

Попробуем построить плотность распределения случайной величины $\eta = \sigma\xi + a$, где ξ — случайная величина распределена по стандартному нормальному закону, σ и a — некоторые константы, причем $\sigma > 0$.

Пусть $\Phi(x)$ — первообразная от $\varphi(x)$, т. е. функция нормального стандартного распределения.

Поскольку $\Phi(x) = P(\xi < x)$, то

$$P(\sigma\xi + a < x) = P\left(\xi < \frac{x-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{8.20}$$

Такой функции распределения соответствует плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{8.21}$$

Выясним, что собой представляют константы a и σ^2.

Поскольку $M(\xi) = 0$, то $M(\eta) = a$.

Поскольку $D(\xi) = 1$ и $D(a) = 0$, то $D(\eta) = \sigma^2$.

Значит, (8.21) представляет собой плотность вероятностей случайной величины, распределенной по нормальному закону, когда ее $M(\eta)=a$, $D(\eta)=\sigma^2$.

Из (8.20) следует, что для такой случайной величины имеет место

$$P(\alpha \leqslant \eta \leqslant \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \tag{8.22}$$

Поскольку значения функции $y=\Phi(x)$ заданы в таблице 4, то вычисление таких вероятностей не вызывает никаких затруднений.

График плотности такого нормального распределения также представляет собой колоколообразную кривую.

Точкой максимума плотности является $M(\eta)=a$, высота «колокола» равна $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Полезно запомнить следующие зависимости:

1. Если при равных дисперсиях $M(x)=a<M(y)=b$, то графики плотностей распределения случайных величин x и y по форме и высоте одинаковые, но график плотности распределения y правее (рис. 42).

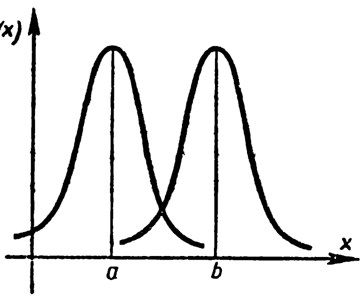


Рис. 42

2. Если при равных математических ожиданиях $D(x)<D(y)$, то графики плотностей максимумов достигают в одной и той же точке, но график плотности распределения одной из них будет и ниже и шире (рис. 43).

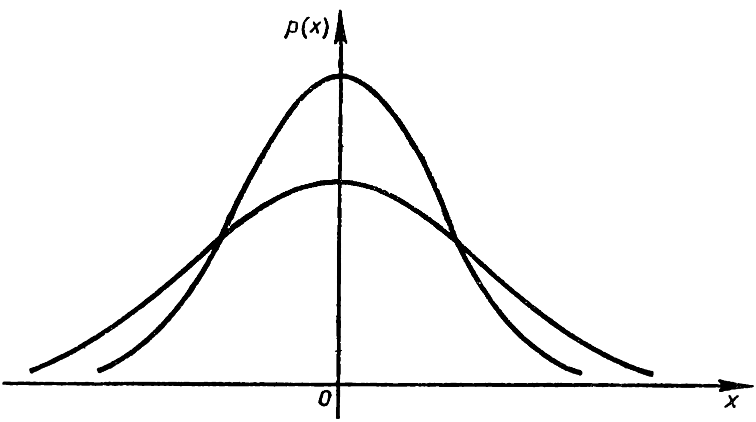


Рис. 43

Примеры

1. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону. $M(\xi)=40$, $D(\xi)=100$. Найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее промежутку $[20;\ 60)$.

По формуле (8.22)

$$P(20\leqslant\xi<60)=\Phi\left(\frac{60-40}{\sqrt{100}}\right)-\Phi\left(\frac{20-40}{\sqrt{100}}\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)=$$
$$=\Phi(2)+\Phi(2)=2\Phi(2).$$

По таблице 4 $\Phi(2)=0{,}4772$. Отсюда искомая вероятность

$$P(20\leqslant\xi<60)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$$

2. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону. $M(\xi)=a$, $D(\xi)=\sigma^2$. Найти вероятность того, что ξ примет значение, принадлежащее промежутку $[a-3\sigma;\ a+3\sigma)$.

По формуле (8.22)

$$P(a-3\sigma\leqslant\xi<a+3\sigma)=\Phi\left(\frac{a+3\sigma-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-3\sigma-a}{\sigma}\right)=$$
$$=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3).$$

По таблице 4 $\Phi(3)=0{,}49865$. Отсюда $P(a-3\sigma\leqslant\xi<a+3\sigma)=$ $=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973$, что равносильно

$$P(|\xi-a|\leqslant 3\sigma)=0{,}9973.$$

Нами доказано так называемое правило трех сигм: *если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего стандартного отклонения. Такое событие происходит почти наверняка.*

6. ПОНЯТИЕ О ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА

Мы уже упомянули, что нормально распределенные случайные величины широко встречаются на практике. Чем это объяснить? Выдающимся русским математиком А. М. Ляпуновым была доказана центральная предельная теорема теории вероятностей, из которой вытекает следующее следствие: *если случайная величина ξ представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то ξ имеет распределение, близкое к нормальному.*

Примеры

1. Производится измерение некоторой физической величины. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины, так как на результат измерения оказывают влияние многие независимые между собой факторы (влажность, слой пыли на приборе, температура, вибрация

прибора и т. д.). В результате влияния каждого из этих факторов рождается ничтожная случайная ошибка. Поскольку число этих факторов велико, совокупное их действие порождает уже заметную суммарную ошибку. Эту суммарную ошибку мы можем рассматривать как сумму большого числа взаимно независимых ошибок, т. е. суммарную ошибку ξ можем рассматривать как случайную величину, которая распределена по закону, близкому к нормальному. Практически это значит, что

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b-M(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-M(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}}\right).$$

Примером практического применения вышеизложенного следствия теоремы Ляпунова может служить такая задача:

Известно, что среднее значение случайной погрешности весов $\bar{x}=0{,}03$ кг, дисперсия $\sigma^2=0{,}0016$.

1. Какова вероятность того, что при очередном взвешивании погрешность показания весов $|\alpha| \leqslant 0{,}04$?

Пусть ξ — случайная погрешность. Можно считать, что ξ распределена по закону, близкому к нормальному. Поэтому

$$P(-0{,}04 \leqslant \xi \leqslant 0{,}04) \approx \Phi\left(\frac{0{,}04-0{,}03}{\sqrt{0{,}0016}}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}04-0{,}03}{\sqrt{0{,}0016}}\right) =$$
$$= \Phi(0{,}25) - \Phi(-1{,}75) = \Phi(0{,}25) + \Phi(1{,}75).$$

По таблице 4 $\Phi(0{,}25)=0{,}0987$, а $\Phi(1{,}75)=0{,}4599$. Поэтому

$$P(-0{,}04 \leqslant \xi \leqslant 0{,}04) \approx 0{,}5586.$$

Пусть нам дана случайная величина ξ, математическое ожидание которой $M(\xi)=a$. Рассмотрим соотношение

$$P(|\xi-a|<\varepsilon) = P(a-\varepsilon<\xi<a+\varepsilon) = \gamma.$$

Это выражение можно изложить словами так: **вероятность того, что ξ не выйдет за пределы промежутка $[a-\varepsilon;\ a+\varepsilon]$, равна γ. Принято этот интервал называть доверительным интервалом случайной величины ξ с уровнем достоверности** γ.

Пример построения доверительного интервала приводим на основе условия вышеизложенной задачи.

2. Найти доверительный интервал погрешности этих весов с гарантией 95%.

На второй вопрос ответ находим так:

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = \Phi\left(\frac{b-0{,}03}{\sqrt{0{,}0016}}\right) - \Phi\left(\frac{a-0{,}03}{\sqrt{0{,}0016}}\right) = 0{,}95.$$

Поскольку a и b симметричны в отношении 0,03, то $a=0{,}03-\varepsilon$, а $b=0{,}03+\varepsilon$. Значит, $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}04}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon}{0{,}04}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}04}\right) = 0{,}95.$

Отсюда $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,04}\right)=0,475$. Такому значению $\Phi(x)$ в таблице 4 соответствует $x=1,96$. Таким образом, $\frac{\varepsilon}{0,04}=1,96$ и $\varepsilon=0,0784$. Тогда $a=0,03-0,0784=-0,0484$, $b=0,03+0,0784=0,1084$. Значит, с гарантией 95% доверительный интервал случайной погрешности весов $[-0,0484;\ 0,1084]$.

Упомянутое следствие теоремы Ляпунова позволяет также оценить вероятность события по экспериментальным данным.

Пусть исследователь при проведении n независимых испытаний обнаружил, что его интересующий факт A имел место в m случаях. Он фиксирует, что статистическая частота появления факта A равна $\frac{m}{n}$. Но исследователя интересует сама вероятность появления факта A при одном испытании. Он знает, что $p\approx\frac{m}{n}$. Но какая тут степень приближенности?

Частота $\frac{m}{n}$ есть случайная величина ξ, математическое ожидание которой $M(\xi)=p$, а дисперсия $D(\xi)=\frac{p(1-p)}{n}=\sigma^2$. При достаточно большом n ($n\geqslant 30$) ξ распределено по закону, близкому к нормальному, поэтому согласно формуле (8.22)

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \quad (8.23)$$

Последняя формула может быть использована для решения ряда практических задач. Несколько из них представляем читателю.

1. 15% продукции фабрики представляют изделия второго сорта. Магазин получил 1000 изделий. Какова вероятность того, что в полученной партии продукция второго сорта составит $15\%\pm 2\%$?

По условию задачи $p=0,15$, $\varepsilon=0,02$, $n=1000$. Пусть α — ожидаемая доля продукции второго сорта. Находим $\sigma^2=\frac{p(1-p)}{n}=\frac{0,15(1-0,15)}{1000}=0,0001275$. Следовательно, $\sigma=\sqrt{0,0001275}=0,0113$. Тогда

$$P(|\alpha-0,15|\leqslant 0,02)\approx 2\Phi\left(\frac{0,02}{0,0113}\right)=2\Phi(1,77).$$

По таблице 4 $\Phi(1,77)=0,4616$, поэтому

$$P(|\alpha-0,15|\leqslant 0,02)\approx 0,9239.$$

Ответ можно сформулировать и так: с гарантией 92% в полученной партии изделия второго сорта составят $15\%\pm 2\%$.

2. Исследованиями установлено, что 20% школьников не знают правил уличного движения. В случайной выборке 1600 учеников. Сколько учеников знают правила уличного движения с гарантией 95%?

По условию задачи $n=1600$, $p=0{,}8$. Пусть α — доля учащихся этой «выборки», знающих правила уличного движения. Тогда $P(|\alpha-0{,}8|\leqslant\varepsilon)\approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=0{,}95$.

$$\sigma=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\sqrt{\frac{0{,}8(1-0{,}8)}{1600}}=0{,}01, \text{ поэтому}$$

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}01}\right)=0{,}95,\ \Phi\left(\frac{\varepsilon}{0{,}01}\right)=0{,}475.$$

По таблице 4 значению 0,475 соответствует $x=1{,}96$, т. е. $\frac{\varepsilon}{0{,}01}=1{,}96$ и $\varepsilon=0{,}0196$. Значит,

$$0{,}8-0{,}0196\leqslant\alpha\leqslant 0{,}8+0{,}0196,$$

$$0{,}7804\leqslant\alpha\leqslant 0{,}8196,$$

или приближенно $0{,}78\leqslant\alpha\leqslant 0{,}82$. Но 0,78 от 1600 составляет 1248, а 0,82 от 1600 — 1312. Значит, с гарантией 95% число учеников, знающих правила уличного движения, принадлежит промежутку [1248; 1312].

Пример 2 — это задача на определение доверительного интервала выборочной числовой характеристики случайной величины ξ, которая представляет собой долю случайно обследованных объектов, обладающих некоторым признаком.

3. При массовом производстве обуви брак составляет 4% выпускаемой продукции. Сколько изделий нужно отобрать для проверки качества продукции, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы утверждать, что в случайном наборе обуви доля брака по абсолютной величине отличается от 4% не более чем на 1%?

По условию задачи $p=0{,}04$, $\varepsilon=0{,}02$, n неизвестно. Пусть α — доля брака в случайной партии изделий. Случайная величина α распределена по закону, близкому к нормальному, поэтому

$$P(|\alpha-0{,}04|\leqslant 0{,}01)\approx 2\Phi\left(\frac{0{,}01}{\sigma}\right)=0{,}9.$$

Отсюда

$$\Phi\left(\frac{0{,}01}{\sigma}\right)=0{,}45, \text{ и по таблице 4 } \frac{0{,}01}{\sigma}=1{,}65.$$

Но $\sigma^2=\frac{p(1-p)}{n}=\frac{0{,}04(1-0{,}04)}{n}=\frac{0{,}04\cdot 0{,}96}{n}$ и $\sigma=\sqrt{\frac{0{,}04\cdot 0{,}96}{n}}$. Подстановкой σ в предыдущее уравнение находим

$$\frac{0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}04\cdot 0{,}96}{n}}}=1{,}65, \text{ откуда } n=1045.$$

Упражнения

188. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины ξ равно 10, а дисперсия 4. Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение из промежутка [12; 14).

189. Стрельба из орудия ведется вдоль определенного направления. Средняя дальность полета снаряда 10 000 м. Предполагая, что дальность полета d распределена по нормальному закону с дисперсией 1600 м^2, найдите, какой процент выпускаемых снарядов дает перелет от 100 до 200 м.

190. При средней длине некоторой детали в 20 см найдено, что отклонения, превосходящие $\pm 0{,}5$ см, встречаются в среднем 4 раза на 100 деталей. Считая, что длина детали распределена по нормальному закону, определите ее среднее стандартное отклонение.

191. Для замера напряжений используются специальные тензодатчики. Определите среднюю стандартную ошибку тензодатчика, если он систематических ошибок не имеет, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы $\pm 0{,}2$ мк.

192. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика ξ есть случайная величина с такими числовыми характеристиками: $M(\xi) = \frac{d_1 + d_2}{2}$, $D(\xi) = \frac{(d_2 - d_1)^2}{16}$. Определите вероятность p того, что шарик будет забракован.

193. При массовом производстве 5% выпускаемой продукции выходит в брак. Сколько изделий нужно отобрать для проверки качества, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что в случайной партии изделий брак составляет $5\% \pm 2\%$?

194. Какой величины должно быть поле допуска зубчатого колеса, чтобы с вероятностью не более 0,003 изготовленное колесо с контролируемым размером оказалось вне поля допуска? Случайные отклонения размера ξ от середины поля допуска подчинены закону нормального распределения с характеристиками $M(\xi) = 0$ и $D(\xi) = 25$ мк^2.

7. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Допустим, в момент времени $x = 0$ включается мотор сложного механизма. В результате износа его узлов по истечению времени x вероятность исправности механизма следует считать монотонно убывающей. Как известно, для $x \geqslant 0$ удобной моделью убывающей плотности вероятностей может служить показательная функция

$$p(x)=ka^{-bx}, \tag{8.24}$$

где k, a и b — положительные константы, причем $a>1$.

Выясним суть этих констант, используя в данном случае известное свойство плотности

$$\int_0^\infty p(x)\,dx=1.$$

Итак, k, a и b должны быть такими, чтобы

$$\int_0^\infty ka^{-bx}dx=1.$$

Нетрудно показать, что $H(x)=-\frac{k}{b\ln a}a^{-bx}$ представляет собой первообразную от $h(x)=ka^{-bx}$. Действительно, $H'(x)=$ $=-\frac{k}{b\ln a}(a^{-bx})'=-\frac{k}{b\ln a}\cdot a^{-bx}\ln a\cdot(-bx)'=-\frac{k}{b}a^{-bx}(-b)=$ $=ka^{-bx}$. Значит,

$$\int_0^\infty ka^{-bx}dx=-\frac{k}{b\ln a}a^{-bx}\Big|_0^\infty=\frac{k}{b\ln a}.$$

Из условия $\frac{k}{b\ln a}=1$ следует $\ln a=\frac{k}{b}$, откуда $a=e^{\frac{k}{b}}$, где $e=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Подставляя полученное значение a в формулу (8.24), получаем:

$$p(x)=k\left(e^{\frac{k}{b}}\right)^{-bx}=ke^{-kx}. \tag{8.25}$$

Это есть плотность показательного распределения вероятностей.

Напоминаем, что с возрастанием x плотность $p(x)$ убывает. Это значит, что x можно представить как время, а $p(x)$ — как вероятность безотказной работы какого-нибудь устройства: со временем эта вероятность в результате износа устройства постепенно убывает.

Согласно формуле (8.8) вероятность того, что случайная величина ξ, распределенная по показательному закону, примет значение из интервала $[a;\ b)$, равна:

$$\int_a^b ke^{-kx}dx=F(b)-F(a), \tag{8.26}$$

где $F(x)$ — первообразная от функции ke^{-kx}.

Покажем, что

$$F(x)=-e^{-kx}. \tag{8.27}$$

Действительно, $F'(x)=(-e^{-kx})'=-e^{-kx}\cdot(-kx)'=ke^{-kx}$, откуда следует (8.27).

Значит,

$$\int_a^b ke^{-kx}dx=e^{-ka}-e^{-kb}. \tag{8.28}$$

По этой формуле

$$P(0<\xi<T)=1-e^{-kT} \tag{8.29}$$

означает, что отказ наступит до момента времени T.

Поскольку

$$P(\xi<T)+P(\xi\geqslant T)=1,$$

то

$$P(\xi\geqslant T)=1-P(\xi<T)=e^{-kT}.$$

Последняя формула означает вероятность того, что отказ до момента T не наступит, поэтому логично $P(\xi\geqslant T)=e^{-kT}$ называть функцией надежности. Итак,

$$R(T)=P(\xi\geqslant T)=e^{-kT}. \tag{8.30}$$

Какой смысл константы k?

Чем k больше, тем надежности меньше. Поэтому k и называется интенсивностью отказов.

Примеры

1. Вероятность того, что некий прибор проработает 1 ч, равна 0,9. Какова вероятность того, что прибор безотказно проработает сутки?

Мы сразу могли бы дать ответ по формуле (8.30), если бы знали k. Как определить значение этого параметра? Очень просто!

По условию задачи

$$R(1)=P(\xi\geqslant 1)=e^{-k\cdot 1}=0{,}9.$$

Тогда из уравнения $e^{-k}=0{,}9$ получаем:

$$k=-\ln 0{,}9=0{,}1054.$$

Опять по формуле (8.30)

$$R(24)=P(\xi\geqslant 24)=e^{-0{,}1054\cdot 24}=0{,}0797.$$

2. 98% топливных насосов дизельных тракторов выходит из строя после 3000 моточасов. Какова вероятность того, что насос выйдет из строя в интервале времени от 2000 до 2500 моточасов?

Пусть ξ — время безотказной работы насоса. По условию задачи $P(\xi\geqslant 3000)=R(3000)=e^{-3000k}=0{,}98$.

Из этого уравнения находим $k=0{,}0000067$. Значит, плотность распределения равна $p(x)=0{,}0000067e^{-0{,}0000067x}$. По формуле (8.28) $P(2000\leqslant\xi\leqslant 2500)=0{,}0033$.

Упражнения

195. Вероятность того, что радиолампа безотказно проработает сутки, равна 0,99. Какова вероятность того, что она проработает год (364 дня)?

196. Опытами установлено, что в течение года выходит из строя 0,02% электрических лампочек типа «α». Человек купил 3 лампочки. Какова вероятность того, что в течение 5 лет ему не понадобится новая лампочка?

197. Вероятность того, что фотоэлемент не выйдет из строя 100 ч, $p=0{,}135$. Какова вероятность, что он проработает 1 ч после первого включения?

198. Блок прибора построен из трех независимо действующих элементов: основного и двух вспомогательных. Плотность распределения времени исправности элементов одинакова: $p(x)=\frac{1}{300}e^{-\frac{x}{300}}$. Какова вероятность того, что блок безотказно проработает 600 ч?

199. Вероятность того, что топливный насос трактора проработает до 2500 моточасов, равна 0,9. Какова вероятность того, что насос проработает 6000 моточасов?

200. По данным страховых агентств некоторого государства, вероятность того, что гражданин этой страны доживет до 70 лет, равна 0,87. Какова вероятность того, что случайный новорожденный этой страны доживет до свадьбы (до 22 лет)?

IX. НЕМНОЖКО СТРАННО, НО ИНТЕРЕСНО

1. УМНАЯ ИГЛА (ЗАДАЧА БЮФФОНА)

Читателю, конечно, известна формула длины окружности $C=2\pi R$, где π — трансцендентное число, значение которого с точностью до сотых равно 3,14. Известны многие способы определения числа π с большой точностью. Один из этих способов использует обыкновенную швейную иглу.

Проведем на листе бумаги ряд параллельных прямых, соблюдая следующие правила:

1) расстояние между этими параллельными одинаковое;

2) расстояние между двумя соседними параллельными больше длины иглы;

3) построенный чертеж, похожий на бумагу в линейку, достаточно большой, чтобы случайно брошенная игла не упала за пределы чертежа (рис. 44).

Пусть расстояние между параллельными прямыми равно a и длина иглы l $(l<a)$. Положение случайным образом бро-

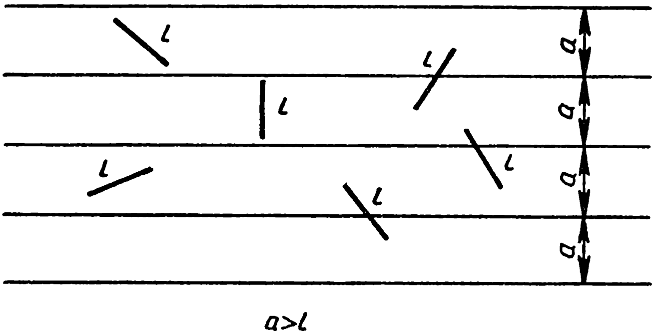


Рис. 44

шенной иглы на чертеж определяется расстоянием x от ее середины до ближайшей прямой и углом φ, который игла образует с перпендикуляром, опущенным из середины иглы на ближайшую прямую (рис. 45).

Ясно, что $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Изобразим графически функцию $x = \frac{1}{2} l \cos \varphi$ (рис. 46).

Определим вероятность события A — «брошенная случайно на чертеж игла пересекает одну из параллельных прямых»:

$$P(A) = \frac{r}{m},$$

где m — общее «число» возможных положений брошенной иглы, а r — «число» тех возможных положений, когда игла пересекает одну из параллельных прямых. Ни m, ни r непосредственно сосчитать не можем: таких положений бесконечно много. Но в случае пересечения иглой одной из параллелей должно иметь место неравенство

$$x \leqslant \frac{1}{2} l \cos \varphi.$$

Такому условию удовлетворяют координаты тех точек, которые принадлежат фигуре BEA. Вместе с тем всевозможные

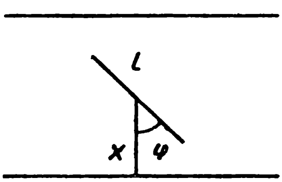


Рис. 45

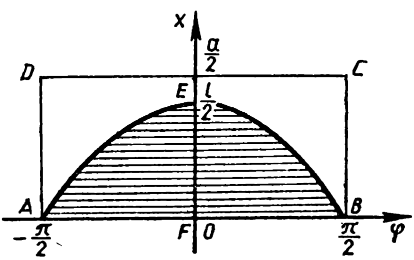


Рис. 46

расположения иглы характеризуются точками, которые принадлежат прямоугольнику $ABCD$ (рис. 46).

Таким образом, вспомнив, как вычисляют геометрические вероятности, находим, что

$$\boldsymbol{P}(A)=\frac{S_{BEA}}{S_{ABCD}}.$$

Но $S_{ABCD}=\frac{a\pi}{2}$, а $S_{BEA}=\frac{1}{2}l\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{2}l\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=l.$

Тогда

$$S_{BEA}=l$$

и

$$\boldsymbol{P}(A)=\frac{2l}{a\pi},$$

откуда

$$\pi=\frac{2l}{a\boldsymbol{P}(A)}.$$

Но вероятность $\boldsymbol{P}(A)$ можно приблизительно определить многократным бросанием иглы. Если, например, иглу бросали на чертеж s раз и k раз она упала, пересекая одну из параллелей, то при достаточно большом s

$$\boldsymbol{P}(A)\approx\frac{k}{s},$$

откуда

$$\pi\approx\frac{2ls}{ak}.$$

Мы нашли формулу, позволяющую определить число π. Известны такие опыты:

Ученый-испытатель	Год проведения испытаний	Число бросаний иглы	Полученное значение
Вольф	1850	5000	3,1596
Фокс	1895	1120	3,1419
Лазаринни	1901	3408	3,1416

Предлагаем читателю самому убедиться в «мудрости» иглы.

Способ определения значений различных величин с помощью испытаний носит название метода Монте-Карло (от игрального казино Монте-Карло). Суть метода формулируется так: метод, когда значение некоторой величины, которая представляет собой компоненту формулы, применяемой для вычисления вероятности некоторого случайного события, приближенно определяется путем замены этой вероятности статистической частотой события, получаемой при серии испытаний.

2. ЗАДАЧА ШЕВАЛЬЕ ДЕ МЕРЕ

В средние века среди феодальной знати были широко распространены азартные игры. Большим любителем азартных игр был француз шевалье де Мере, которому посчастливилось дружить с замечательным математиком Б. Паскалем. Де Мере не только играл в кости, но и подмечал некоторые закономерности, объяснить которые не мог, и в таких случаях обращался к Б. Паскалю.

Де Мере предлагал партнерам следующие условия игры: он будет бросать 2 кости 24 раза и выиграет, если хоть один раз появятся 2 шестерки. Его соперник бросает 4 кости один раз и выиграет, если появится хотя бы одна шестерка.

С первого взгляда кажется, что шевалье де Мере схитрил, избрав себе более благоприятные условия: все-таки бросает 24 раза, а его соперник только один раз. Но он чаще проигрывал, нежели выигрывал. Удивленный де Мере обратился к Б. Паскалю.

Разберемся и мы с вами в том, что ответил Б. Паскаль.

Пусть событие A — «одновременное появление хотя бы од ной пары шестерок при 24-кратном бросании 2 костей».

Пусть событие B — «появление хотя бы одной шестерки при однократном бросании 4 костей».

Событию A противоположно событие $\bar{A}$ — «ни разу не появилась пара шестерок при 24-кратном бросании 2 костей».

Обозначим событие $\bar{A}_i$ — «не появилась пара шестерок при i-м бросании». Ясно, что

$$\bar{A}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\ldots\cap\bar{A}_{24}.$$

Поскольку события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_{24}$ независимы в совокупности, то

$$P(A)=P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\ldots\cap\bar{A}_{24})=P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_{24}).$$

Также ясно, что

$$P(\bar{A}_1)=P(\bar{A}_2)=\ldots=P(\bar{A}_{24}),$$

поэтому вероятность $P(\bar{A})$ может быть выражена так:

$$P(A)=(P(A_1))^{24}.$$

Вычислим $P(A_1)$. При бросании двух костей может произойти

$n=36$ разных событий. Событию A_1 благоприятствуют $m=35$ событий. Поэтому

$$P(\bar{A}_1)=\frac{35}{36},\ P(\bar{A})=\left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Вероятность удачи шевалье де Мере:

$$P(A)=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 0{,}491404.$$

Вычислим вероятность удачи соперника. Пусть событию B противоположно событие $\bar{B}$ — «не появилась ни одна шестерка при однократном бросании 4 костей».

Пусть событие $\bar{B}_i$ — «не появилась шестерка на i-й кости». Тогда $\bar{B}=\bar{B}_1\cap\bar{B}_2\cap\bar{B}_3\cap\bar{B}_4$.

Поскольку события $\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, $\bar{B}_3$, $\bar{B}_4$ независимы в совокупности, то

$$P(\bar{B})=P(\bar{B}_1\cap\bar{B}_2\cap\bar{B}_3\cap\bar{B}_4)=P(\bar{B}_1)\cdot P(\bar{B}_2)\cdot P(\bar{B}_3)\cdot P(\bar{B}_4).$$

Ясно, что $P(\bar{B}_1)=P(\bar{B}_2)=P(\bar{B}_3)=P(\bar{B}_4)$, $P(\bar{B})=(P(\bar{B}_1))^4$. При бросании одной кости может произойти $n=6$ разных событий. Событию $\bar{B}_1$ благоприятствуют $m=5$ событий. Тогда

$$P(\bar{B}_1)=\frac{5}{6},\ P(\bar{B})=\left(\frac{5}{6}\right)^4.$$

Таким образом, вероятность удачи соперника

$$P(B)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0{,}517747.$$

Оказывается, что $P(A)<P(B)$. Действительно, наблюдение получило научное объяснение.

3. ОТДАЙТЕ МОЮ ШАПКУ

В один из январских вечеров члены общества охотников собрались обсудить итоги прошедшего сезона. В помещении было прохладно, и они заходили в зал в пальто, а шапки оставляли в гардеробе.

Собрание длилось до сумерек, и вдруг погас свет. Пришлось расходиться, но в темноте трудно узнать свою шапку. Председатель собрания предложил каждому надеть наугад любую шапку, а на завтра каждому вернуться за своей шапкой. Все с этим предложением согласились, а один охотник в утешение собравшимся сказал: «Надеюсь, одному из нас и сегодня досталась своя шапка». Разберемся, насколько обоснованным является его предположение.

Пронумеруем участников собрания: 1, 2, 3, ..., n. Пусть событие A_i — «i-й участник собрания надел свою шапку». Тогда событие

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

означает — «по крайней мере один участник надел свою шапку». Поскольку события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не являются несовместимыми, то вычисление $P(A)$ осложняется.

Пусть A_1 и A_2 — совместимые события, тогда по формуле (5.2)

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Если A_1, A_2 и A_3 — совместимые события, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - \\ - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Сравнение $P(A_1 \cup A_2)$ и $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ подсказывает, что

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = S_{1n} - S_{2n} + S_{3n} - S_{4n} + \ldots \pm S_{nn}, \qquad (9.1)$$

где $S_{1n} = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$,

$$S_{2n} = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + \ldots + P(A_{n-1} \cap A_n),$$

$$S_{3n} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n),$$

. . . .

$$S_{nn} = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n).$$

Проверим истинность предположения методом математической индукции. Допустим, что формула (9.1) справедлива, и определим:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}).$$

Пусть событие $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Тогда

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) = P(B \cup A_{n+1}) = \\ = P(B) + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1}) = S_{1n} - S_{2n} + \ldots \\ \ldots \pm S_{nn} + P(A_{n+1}) - P(B \cap A_{n+1}) = (S_{1n} + P(A_{n+1})) - \\ - (S_{2n} + P(A_1 \cap A_{n+1}) + P(A_2 \cap A_{n+1}) + \\ + \ldots + P(A_n \cap A_{n+1})) + (S_{3n} + P(A_1 \cap A_2 \cap A_{n+1}) + \\ + P(A_1 \cap A_3 \cap A_{n+1}) + \ldots + P(A_{n-1} A_n A_{n+1})) - \\ - \ldots \pm P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) = \\ = S_{1,\,n+1} - S_{2,\,n+1} + S_{3,\,n+1} - S_{4,\,n+1} + \ldots \mp S_{n+1,\,n+1},$$

что и доказывает справедливость формулы (9.1).

Поскольку n шапок могут быть надеты на n голов $n!$ способами, то в случае, если i-й участник надевает свою шапку, остальные $n-1$ шапки могут быть надеты на $n-1$ голову $(n-1)!$ способами. Поэтому

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Если же два участника (i-й и j-й) надевают свои шапки, то остальные шапки могут быть переставлены $(n-2)!$ способами. Следовательно,

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Соответственно

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = \frac{1}{n!}.$$

Сумма S_{1n} имеет n членов, поэтому

$$S_{1n} = \frac{1}{n} \cdot n = 1.$$

Сумма S_{2n} имеет C_n^2 членов, поэтому

$$S_{2n} = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{1}{2!}.$$

Аналогично $\quad S_{3n} = \frac{1}{3!}$; $S_{4n} = \frac{1}{4!}$; ...; $S_{nn} = \frac{1}{n!}$.

Подставляя полученные значения в формулу (9.1), находим:

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots \pm \frac{1}{n!}.$$

Какова зависимость $P(A)$ от n?

n	3	4	5	6	7	100
$P(A)$	0,66667	0,62500	0,63333	0,63196	0,63214	0,63212

Результаты неожиданные; вероятность, что свою шапку получил хотя бы один из 3, почти такая же, как и вероятность, что свою шапку получит хотя бы один из 100. И в том и в другом случае вероятность около $\frac{2}{3}$. Так что надеяться, что хотя бы одному охотнику досталась его собственная шапка, действительно можно было.

4. ЧТОБЫ ПОКУПАТЕЛИ БЫЛИ ДОВОЛЬНЫ

Колхоз продает огурцы в ящиках, по 100 огурцов в каждом ящике. Выяснилось, что в каждой партии из 1000 огурцов приблизительно 15 некачественных: гнилые, лопнувшие и т. д.

Перед правлением колхоза встал вопрос, сколько огурцов надо положить в каждый ящик, чтобы с вероятностью 0,8 удовлетворить запросы покупателя, иначе говоря, чтобы в ящике было не менее 100 хороших огурцов с вероятностью 0,8.

По условию вероятность того, что купленный наудачу огурец окажется некачественным, 0,015. Находим постоянную Пуассона:

$$k = 100 \cdot 0{,}015 = 1{,}5.$$

По формуле (6.14) вероятность, что среди 100 наугад отобранных некачественных огурцов не встретится, равна $e^{-1,5} \approx \approx 0{,}22313$. Допустим, что $100+x$ является тем числом огурцов, при котором покупатель с вероятностью 0,8 получит 100 хороших. Пусть событие A — «среди $100+x$ огурцов 100 качественных». Пусть событие A_k — «среди $100+k$ огурцов ни одного не качественного». Тогда

$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_x.$$

По формуле Пуассона (6.14)

$$P(A_k) = e^{-1,5} \cdot \frac{(1{,}5)^k}{k!}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ x.$$

Поскольку

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_x),$$

то

$$P(A) = e^{-1,5}\left(1 + \frac{1{,}5}{1!} + \frac{(1{,}5)^2}{2!} + \ldots + \frac{(1{,}5)^x}{x!}\right).$$

Переменная x должна удовлетворять неравенству

$$e^{-1,5}\left(1 + \frac{1{,}5}{1!} + \frac{(1{,}5)^2}{2!} + \ldots + \frac{(1{,}5)^x}{x!}\right) \geqslant 0{,}8.$$

Ясно, что левая часть неравенства возрастает с ростом x. Испытаем некоторые конкретные значения x.

При $x=1$ $P(A) = e^{-1,5} \cdot 2{,}5 \approx 0{,}56$, а это меньше 0,8.

При $x=2$ $P(A) = e^{-1,5}\left(1 + \frac{1{,}5}{1!} + \frac{(1{,}5)^2}{2!}\right) \approx e^{-1,5} \cdot 3{,}63 \approx 0{,}809$.

Поскольку $0{,}809 > 0{,}8$ для $x=2$, покупатели останутся удовлетворены, если в каждый ящик упакованы 102 огурца.

Принцип решения данной задачи может широко использоваться для расчета запасов промышленных товаров, продуктов питания и т. д.

5. ПАРАДОКС БЕРТРАНА

Начертим окружность. Положив лист с чертежом на стол, бросим на него достаточно длинный стержень так, чтобы дуга окружности отсекла от стержня хорду (рис. 47).

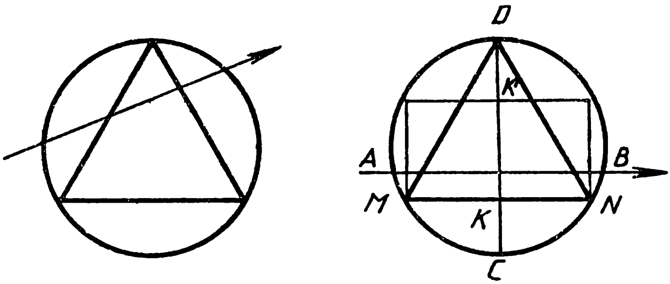


Рис. 47—48

Вычислим вероятность того, что отсеченная хорда окажется длиннее стороны вписанного правильного треугольника. Парадокс Бертрана проявится в том, что при разных способах решения получим разные ответы.

Первый способ решения.

Допустим, дуга окружности отсекает от стержня хорду AB. Построим диаметр CD, перпендикулярный к этой хорде. Построим также параллельно хорде сторону правильного вписанного треугольника $|MN|$ (рис. 48). Те хорды, которые пройдут через точки отрезка диаметра KK', длиннее $|MN|$:

$$|CK| = \frac{1}{4}|CD|, \text{ а } |KK'| = \frac{1}{2}|CD|.$$

Следовательно, вероятность, что случайная хорда длиннее стороны вписанного треугольника, равна $\frac{1}{2}$. Это первый ответ.

Второй способ решения.

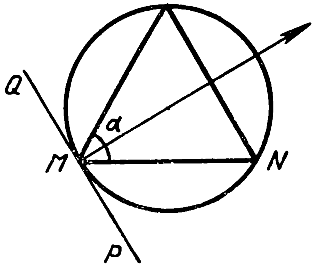
Допустим, что один конец стержня прикреплен к точке M окружности. Те хорды, которые дуга отсекает при попадании во внутреннюю область угла α (рис. 49), будут длиннее стороны MN правильного треугольника.

Можно предположить, что все хорды, которые можно провести через точку M, одинаково «плотно» распределены по углу $QMP = \pi$. Поскольку $\alpha = \frac{\pi}{3}$, то вероятность, что случайная хорда превышает по длине сторону вписанного правильного треугольника, равна $\frac{1}{3}$.

Как видите, второй ответ не совпадает с первым.

Третий способ решения.

Чтобы установить положение хорды, достаточно знать положение ее середины. Понятно, что хорды, середины которых расположены в круге, вписанном в данный треугольник, пре-



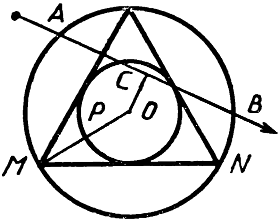


Рис. 49—50

вышают по длине сторону вписанного правильного треугольника (рис. 50).

Если случайно брошенный стержень упадет так, что середина C хорды AB окажется внутри меньшего круга, то хорда оказывается больше MN. Таким образом множество хорд, длина которых больше MN, может быть представлено площадью меньшего круга, а множество всех хорд, пересекающих данный круг,— площадью большего круга.

Поскольку $OP = \frac{1}{2} OM$, то площадь меньшего круга составляет $\frac{1}{4}$ площади большего круга. При этом способе решения находим: вероятность, что случайная хорда длиннее стороны правильного вписанного треугольника, равна $\frac{1}{4}$.

Три разных способа решения одной задачи и три разных ответа.

Вот вам и парадокс!

Казалось бы, во всех случаях мы рассуждали правильно, а все-таки вероятность одного и того же события оказывалась каждый раз иной!

Как объяснить этот парадокс?

Разные результаты мы получили потому, что по-разному конкретизировали понятие проведения хорды наудачу. Фактически мы решали каждый раз новую задачу. Нам только казалось, что это прежняя задача.

6. СЛУЧАЙНОСТЬ ИЛИ СИСТЕМА?

Некий рассеянный гражданин N был оштрафован за переход улицы в неположенном месте 12 раз. Известно, что это всегда происходит либо во вторник, либо в четверг. Объясняется ли это случайностью или в эти дни милиция усиливает контроль уличного движения?

Пусть событие A — «гражданин N был оштрафован 12 раз по вторникам или четвергам случайно». Если событие A_k —

«гражданин N случайно оштрафован во вторник или четверг k-й раз» ($k=1, 2, 3, \ldots, 12$), то

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_{12}).$$

Но $P(A_k)=\frac{2}{7}$, ибо 2 дня из 7 для гражданина неудачные. Поскольку

$$P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_{12})=\frac{2}{7}, \text{ то}$$

$$P(A)=\left(\frac{2}{7}\right)^{12}\approx 0{,}0000003.$$

Теперь сформулируем событие B — «гражданина N случайно оштрафовали повторно в одни и те же 2 дня недели 12 раз». Это событие является суммой таких событий: «гражданин N случайно был оштрафован 12 раз по понедельникам или по вторникам», «гражданин N случайно был оштрафован 12 раз по понедельникам и по средам», ..., «гражданин N был случайно оштрафован 12 раз по субботам или по воскресеньям».

Вероятности всех этих событий, так же как и вероятность $P(A)$, равны 0,0000003. Поскольку таких событий может быть $C_7^2=21$, то $P(B)=21\cdot 0{,}0000003\approx 0{,}000006$. Видно, что обе вероятности $P(A)=0{,}0000003$ и $P(B)=0{,}000006$ очень незначительны. Это показывает, что как в одном, так и в другом случае вероятность быть оштрафованным случайно ничтожно мала. Видимо, в эти дни работники милиции с большей требовательностью следят за соблюдением правил уличного движения.

7. ПРЕСТУПЛЕНИЕ РАСКРЫТО

В отдел уголовного розыска поступило сообщение о том, что 5 неизвестных лиц взломали сейф кассы колхоза и похитили крупную сумму денег. Свидетели успели заметить, что грабители сели в автобус, следующий по маршруту в соседний город. Об этом сразу же была поставлена в известность милиция. Как только автобус остановился на автовокзале, к его дверям подошел инспектор уголовного розыска и запретил кондуктору открывать дверь автобуса. Тот сообщил инспектору, что в автобусе 40 пассажиров. Обыск может привести к значительной задержке автобуса. Инспектор успокоил кондуктора: «Мне достаточно проверить человек 6 пассажиров, и сможете ехать дальше». Он предложил шестерым наугад выбранным пассажирам зайти в кабинет начальника вокзала.

Один преступник был сразу обнаружен — в его кармане нашли пачку денег. Он назвал сообщников, и дело было закончено.

Что руководило инспектором: риск или трезвый расчет? К этому вопросу мы вернемся после решения следующей задачи.

Пусть в ящике имеется n шаров: m белых и $n-m$ черных. Какова вероятность того, что среди r наудачу вынутых шаров окажется k белых?

Среди r шаров окажется k белых и $r-k$ черных. Поскольку белых шаров m, то k белых наугад может быть отобрано C_m^k способами. Соответственно из $n-m$ черных $r-k$ черных шаров может быть отобрано C_{n-m}^{r-k} способами. Число выборок, благоприятствующих исследуемому событию, равно $C_m^k \cdot C_{n-m}^{r-k}$. Поскольку из n элементов группы по r элементов могут быть образованы C_n^r способами, то по формуле (4.1)

$$P\,(\text{«среди } r \text{ шариков } k \text{ белых»}) = \frac{C_m^k \cdot C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}. \tag{9.2}$$

Это так называемое гипергеометрическое распределение. Использование его поможет объяснить действия инспектора по раскрытию преступления. Пусть событие A — «среди случайно вызванных 6 пассажиров есть хотя бы один преступник». Пусть событие A_i — «среди случайно вызванных 6 пассажиров есть i преступников» ($i=1, 2, 3, 4, 5$). Тогда

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5.$$

Ясно, что

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5).$$

По формуле (9.2)

$$P(A_1) = \frac{C_5^1 \cdot C_{35}^5}{C_{40}^6} \approx 0{,}4192,$$

$$P(A_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_{35}^4}{C_{40}^6} \approx 0{,}1364,$$

$$P(A_3) = \frac{C_5^3 \cdot C_{35}^3}{C_{40}^6} \approx 0{,}017,$$

$$P(A_4) = \frac{C_5^4 \cdot C_{35}^2}{C_{40}^6} \approx 0{,}0008,$$

$$P(A_5) = \frac{C_5^5 \cdot C_{35}^1}{C_{40}^6} \approx 0{,}00001.$$

Значит, $P(A) \approx 0{,}5734$. Вероятность, что среди 6 пассажиров окажется по крайней мере один преступник, оказывается больше $\frac{1}{2}$.

По-видимому, инспектор умел пользоваться в необходимых случаях теорией вероятностей.

Гипергеометрическое распределение может с успехом использоваться во многих практических ситуациях: при исследовании распространения инфекционных заболеваний, при контроле качества изделий и т. д.

8. «СРАЖЕНИЕ»

Два мальчика играют в «сражение». У каждого из них 40 спичек. Бросается монета. При появлении герба откладывает в сторону спичку Толя — погиб первый солдат, при появлении цифры то же самое делает Боря — погиб его солдат. Игра продолжается до тех пор, пока у одного из них не погибнет последний солдат.

Какова вероятность того, что при поражении одного из мальчиков у второго останется 20 спичек?

Это так называемая конкретизированная задача Банаха, которую для широкого круга читателей в свое время опубликовал известный польский математик Штейнгауз. Решим эту задачу Банаха в общем виде.

Пусть в двух коробках имеется по n спичек. Бросаем монету. При появлении герба удаляем одну спичку из 1-й коробки, при появлении цифры — одну спичку из 2-й коробки. Какова вероятность того, что при полном опустошении 1-й коробки во 2-й останется m спичек?

Пусть событие A — «при опустошении 1-й коробки во 2-й осталось m спичек».

Обозначим события::

B_1 — «спичка удалена из 1-й коробки»,

B_2 — «спичка удалена из 2-й коробки».

Поскольку подбрасываемая монета симметричная, $P(B_1)= =P(B_2)=\frac{1}{2}$. Если при опустошении 1-й коробки во 2-й осталось m спичек, то при $2n-m$ бросаниях монеты n раз появился герб, $n-m$ раз цифра. Значит, событие B_1 произошло n раз при $2n-m$ испытаниях. По формуле (6.4)

$$P(A)=C_{2n-m}^{n}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^{n-m}}=C_{2n-m}^{n}\cdot\frac{1}{2^{2n-m}}.$$

По условиям игры мальчиков

$$P(A)=C_{60}^{40}\cdot\frac{1}{2^{60}}\approx 0{,}01.$$

Как видно, шансов выиграть сражение с меньшими, чем у противника, потерями немного. Кстати, история не спичечных, а настоящих войн это подтверждает.

9. В ГОСТИ К ДЕДУШКЕ

В городе имеется 24 квартала (рис. 51). Вводим буквенные обозначения:

S — вокзал, B — студенческое общежитие и D — дом дедушки. Из вагона вышел выпускник средней школы, мечтающ иистать студентом вуза. Город ему незнаком, но он знает,

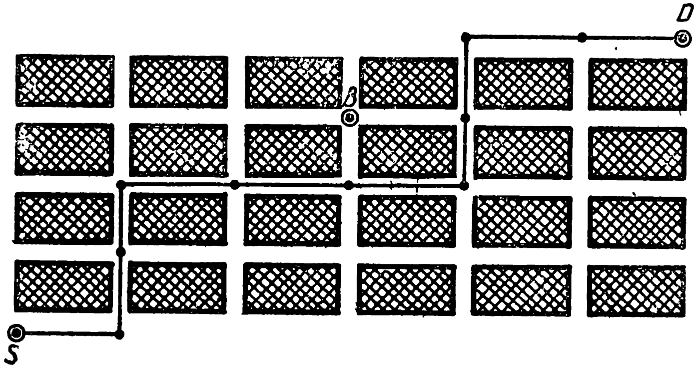


Рис. 51

что следует идти только вперед и повернуть можно только направо, тогда он попадет либо в общежитие, либо в дом дедушки. И в том и в другом случае ночлег обеспечен.

Какова вероятность того, что по пути к дедушке он пройдет и мимо общежития, если с одинаковой вероятностью может пойти прямо либо направо?

Решим задачу в общем виде.

Пусть в городе nk кварталов. Общежитие в плане города находится на перекрестке m-й горизонтали и l-й вертикали. Если событие A — «юноша нашел общежитие», то

$$P(A)=\frac{a}{b},$$

где b — число всевозможных маршрутов, по которым юноша может добраться до дедушкиного дома, a — число тех маршрутов, которые проходят мимо общежития.

Какой бы путь ни избрал наш знакомый, все равно ему придется пройти $n+k$ перекрестков (включая точку S, но не включая D). На каждом перекрестке он решает, идти ему прямо или повернуть направо. Те перекрестки, от которых он идет прямо, закодируем цифрой 1, а те, от которых направо,— цифрой 0. Тогда любой из маршрутов будущего студента будет закодирован выборкой из k единиц и n нулей. Указанному маршруту соответствует выборка

$$0110001100.$$

Число маршрутов от S до D — число перестановок с повторениями

$$b=P_{k,\,n}=\frac{(n+k)!}{n!k!}.$$

Число маршрутов, проходящих мимо общежития, равно произведению числа маршрутов от S до B и числа маршрутов от B до D.

Тогда

$$a = P_{l,\,m} \cdot P_{n-l,\,k-m} = \frac{(m+l)!\,(n+k-l-m)!}{m!\,l!\,(n-l)!\,(k-m)!}.$$

Поэтому

$$P(A) = \frac{(m+l)!\,(n+k-l-m)!\,n!\,k!}{(n+k)!\,m!\,l!\,(n-l)!\,(k-m)!}.$$

В нашем случае $n=4$, $k=6$, $l=3$, $m=3$. Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{6!4!4!6!}{10!3!3!1!3!} = \frac{8}{21}.$$

10. КАК СТАТЬ РЕКОРДСМЕНОМ?

Чтобы стать рекордсменом, велогонщику необходимо сложную трассу, состоящую из k этапов, преодолеть за время $t < T$.

Поскольку отдельные этапы трассы неодинаковой трудности, то ему придется придерживаться такой тактики:

Δt_1 часов идти со скоростью v_1,

Δt_2 часов идти со скоростью v_2,

Δt_3 часов идти со скоростью v_3,

. . . .

Δt_k часов идти со скоростью v_k.

Возникает вопрос: какие значения должны принимать v_1, v_2, ..., v_k, чтобы велогонщик стал рекордсменом?

Пусть v_1, v_2, ..., v_k — реализации случайной величины v. Согласно формуле (4.4) и ее геометрической интерпретации (рис. 52) вероятность того, что случайная величина v принимает значение v_i,

$$p_i = \frac{\Delta t_i}{t}. \qquad (9.3)$$

Поскольку длина всей гоночной трассы $S = \sum_{i=1}^{k} v_i \Delta t_i$, то средняя скорость велогонщика согласно формуле (9.3)

$$M(v) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} v_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot \frac{\Delta t_i}{t} = \sum_{i=1}^{k} v_i p_i. \qquad (9.4)$$

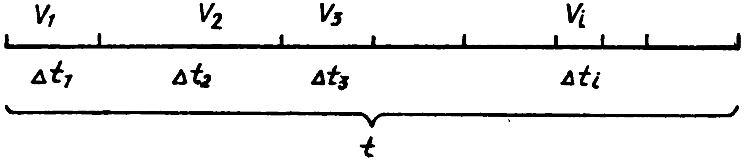


Рис. 52

Из формулы (9.4) читатель, конечно, узнал математическое ожидание случайной величины.

Итак:

1) гонщик знает, что длина всей гоночной трассы S;

2) он принял решение i-й этап преодолеть за время Δt_i;

3) всю трассу ему надо преодолеть за время $t < T$, т. е. он может, подобрав конкретное значение t чуть меньше T, определить численные значения

$$p_i = \frac{\Delta t_i}{t}.$$

Из соотношения (9.4) следует, что $v_1, v_2, \ldots, v_k$ должны быть такими, чтобы

$$M(v) = \sum_{i=1}^{k} v_i p_i > \frac{S}{T}. \qquad (9.5)$$

Соотношение (9.5) позволяет ему составить такой план распределения скоростей, который обеспечит рекордный пробег.

11. ИСПРАВНА ЛИ АВТОМАТИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ?

Автоматическая линия производит детали, номинальная длина которых должна быть 50 см, а дисперсия длин $\sigma^2 = 0{,}64$.

Контролер, измерив длину сотни случайно попавших деталей, установил, что среднее арифметическое длин этих деталей $\tilde{x}_0 = 50{,}8$ см. Это случайность или линия стала выпускать детали длиннее номинала?

Чтобы ответить на этот вопрос, нам необходимо знать, в каких пределах может меняться среднее арифметическое длин сотни деталей по причине случайности, скажем, с вероятностью 0,95.

Пусть $\tilde{x}$ — среднее арифметическое длин достаточно большого числа n случайно выбранных деталей, т. е.

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}. \qquad (9.6)$$

Разумеется, $\tilde{x}$ — случайная величина: для одной выборки объема n она может принимать одно значение, для другой — другое и т. д. Поскольку эта случайная величина $\tilde{x}$ сама является суммой достаточно большого числа независимых случайных величин

$$\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, \ldots; \frac{x_n}{n},$$

то согласно теореме Ляпунова она распределена по закону, близкому к нормальному. Иными словами, если $M(\tilde{x})$ — математическое ожидание, а $\sigma(\tilde{x})$ — среднее квадратическое отклонение этой случайной величины, то согласно формуле (8.13)

$$P(\alpha \leqslant \tilde{x} \leqslant \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - M(\tilde{x})}{\sigma(\tilde{x})}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - M(\tilde{x})}{\sigma(\tilde{x})}\right). \tag{9.7}$$

Согласно формулам (7.3) и (7.5)

$$M(\tilde{x}) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n} M\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(x_i), \tag{9.8}$$

но $M(x_i) = \bar{x}$ — номинальная длина, поэтому из (9.8) следует

$$M(\tilde{x}) = \frac{1}{n} \cdot n\bar{x} = \bar{x}. \tag{9.9}$$

Согласно формуле (7.7) и соотношению $D(c\xi) = c^2 D(\xi)$

$$D(\tilde{x}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(x_i). \tag{9.10}$$

Но $D(x_i) = \sigma^2$ — номинальная дисперсия длин деталей, поэтому из (9.10) следует:

$$D(\tilde{x}) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

откуда

$$\sigma(\tilde{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{9.11}$$

Подставляя результаты формул (9.9) и (9.11) в формулу (9.7), получаем:

$$P(\alpha \leqslant \tilde{x} \leqslant \beta) \approx \Phi\left(\frac{(\beta - \bar{x})\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\alpha - \bar{x})\sqrt{n}}{\sigma}\right). \tag{9.12}$$

С применением последней формулы теперь рассмотрим вероятность события «$\bar{x} - \varepsilon \leqslant \tilde{x} \leqslant \bar{x} + \varepsilon$». Согласно (9.12)

$$P(\bar{x} - \varepsilon \leqslant \tilde{x} \leqslant \bar{x} + \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right). \tag{9.13}$$

В нашем случае $\bar{x} = 50$ см, $n = 100$, $\sigma = \sqrt{0,64} = 0,8$, поэтому

$$P(50 - \varepsilon \leqslant \tilde{x} \leqslant 50 + \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{100}}{0,8}\right) = 2\Phi(12,5\varepsilon).$$

Мы также условились, что желаем определить доверительный интервал случайного $\tilde{x}$ с достоверностью 0,95, поэтому потребуем, чтобы

$$P(50 - \varepsilon \leqslant \tilde{x} \leqslant 50 + \varepsilon) \approx 2\Phi(12,5\varepsilon) = 0,95.$$

Отсюда $\Phi(12,5\varepsilon) = 0,475$. По таблице 4 значению $\Phi(x) = 0,475$ соответствует $x = 1,96$, т. е. $12,5\varepsilon = 1,96$, откуда $\varepsilon = 0,16$ см.

Таким образом установлено, что с достоверностью 0,95 (с гарантией 95%) случайный $\tilde{x}$ должен попасть в промежуток

$[50-0{,}16;\ 50+0{,}16]$, т. е. $[49{,}84;\ 50{,}16]$. Поскольку $\tilde{x}_0 = 50{,}8$ см выходит за рамки этого интервала, имеем право заявить с достоверностью 0,95: автоматическая линия неисправна!

12. ЧТОБЫ ОЧЕРЕДИ БЫЛИ КОРОЧЕ

Посетители магазина, случайно подходящие к прилавку, за которым их обслуживают, обычно выстраиваются в очередь. Возникают вопросы: как определить время, которое затратит в среднем один покупатель в очереди, если известны данные о частоте появления новых покупателей, о времени обслуживания одного покупателя; в течение какого времени очередь будет состоять более чем из 10 человек; какой эффект даст добавление еще одного продавца; какой процент покупателей останется необслуженным, если в определенный момент прекратить работу магазина?

Различные аналоги такой задачи возникают при исследовании эксплуатационных признаков комплекса станков, при решении вопроса о количестве контрольных автоматов, которые следует установить на станции метро, при проектировании оборудования, необходимого для телефонных линий или ЭВМ, и даже при проектировании портовых причалов и посадочных полос аэродромов. Подобные примеры — задачи теории массового обслуживания. Это сложная теория, но мы попробуем ознакомить читателя хотя бы с ее азбукой.

Директор универмага рассуждал так: «Аппарат продавщиц универмага может в среднем за час обслужить μ посетителей; в среднем в течение 1 ч обслуживания может быть не больше λ посетителей. Поскольку $\lambda < \mu$, то все в порядке: в магазине очередей не будет».

Люди, знающие теорию вероятностей, определили: при условии $\lambda < \mu$ вероятность того, что в данный момент времени в очереди стоят и ожидают обслуживания n посетителей, равна:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right). \qquad (9.14)$$

Рассмотрим два случая:

а) когда $\frac{\lambda}{\mu} = 0{,}25$;

б) когда $\frac{\lambda}{\mu} = 0{,}95$.

В случае а):
$p_0 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$;
$p_1 = 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}1875$;
$p_2 = 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 = 0{,}0469$;
$p_3 = 0{,}25^3 \cdot 0{,}75 = 0{,}0117$;
$p_4 = 0{,}25^4 \cdot 0{,}75 = 0{,}0029$.

P («в очереди более 4 посетителей») $= 1 - P$ («в очереди не более 4 посетителей») $= 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 1 - (0{,}75 + 0{,}1875 + 0{,}0469 + 0{,}0117 + 0{,}0029) = 0{,}001$.

Таким образом, когда пропускная способность системы обслуживания в 4 раза превышает потребности, вероятность появления длинной очереди небольшая.

В случае б):

$p_0 = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$;
$p_1 = 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 0{,}0475$;
$p_2 = 0{,}95^2 + 0{,}05 = 0{,}0451$;
$p_3 = 0{,}95^3 \cdot 0{,}05 = 0{,}0429$;
$p_4 = 0{,}95^4 \cdot 0{,}05 = 0{,}0407$.

P («в очереди более 4 посетителей») $= 1 - P$ («в очереди не более 4 посетителей») $= 1 - (p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 1 - (0{,}05 + 0{,}0475 + 0{,}0451 + 0{,}0429 + 0{,}0407) = 0{,}7738$, почти 8 шансов из 10, что в очереди будет более чем 4 посетителя.

Обращаем внимание на факт: соотношение $\frac{\lambda}{\mu}$ увеличилось только на $\frac{0{,}95}{0{,}25} = 3{,}8$ раза, а вероятность того, что в очереди будет более 4 посетителей, увеличилась на $\frac{0{,}7738}{0{,}001} = 773{,}8$ раза.

Рассмотрим наш пример еще с другой точки зрения. За основу рассуждений возьмем вариант б). Допустим, в ситуации б) дирекция универмага на 10% увеличила число продавцов и поэтому пропускная способность системы обслуживания стала $\mu + 0{,}1\mu = 1{,}1\mu$. Тогда соотношение $\frac{\lambda}{\mu}$ будет $\frac{\lambda}{1{,}1\mu} \approx 0{,}86$. В этой ситуации

$$p_0 = 0{,}14;$$
$$p_1 = 0{,}86 \cdot 0{,}14 = 0{,}1204;$$
$$p_2 = 0{,}86^2 \cdot 0{,}14 = 0{,}1035;$$
$$p_3 = 0{,}86^3 \cdot 0{,}14 = 0{,}0890;$$
$$p_4 = 0{,}86^4 \cdot 0{,}14 = 0{,}0766.$$

Поэтому

P («в очереди более 4 посетителей») $= 1 - P$ («в очереди не более 4 посетителей») $= 1 - (0{,}14 + 0{,}1204 + 0{,}1035 + 0{,}0890 + 0{,}0766) = 0{,}4705$.

Любопытный факт: увеличение числа продавцов только на 10% привело к снижению вероятности появления длинной очереди почти в 2 раза.

Мы надеемся, что этот рассказ поможет еще раз понять: теория вероятностей может во многом послужить на благо человека.

ПРИЛОЖЕНИЕ

$$C_N^n = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

Таблица 1

n	N															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2		1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
3			1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560
4				1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820
5					1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368
6						1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
7							1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11 440
8								1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12 870
9									1	10	55	220	715	2002	5005	
10										1	11	66	286	1001	3003	
11											1	12	78	364	1365	
12												1	13	91	455	
13													1	14	105	
14														1	15	
15															1	

n	N								
	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	136	153	171	190	210	231	253	276	300
3	680	816	969	1140	1330	1540	1771	2024	2300
4	2380	3060	3876	4845	5985	7315	8855	10 626	12 650
5	6188	8568	11 628	15 504	20 349	26 334	33 649	42 504	53 130
6	12 376	18 564	27 132	38 760	54 264	74 613	100 947	134 596	177 100
7	19 448	31 824	50 388	77 520	116 280	170 544	245 157	346 104	480 700
8	24 310	43 758	75 582	125 970	203 490	319 770	490 314	735 471	1 081 575
9		48 620	92 378	167 960	293 930	497 420	817 190	1 307 504	2 042 975
10				184 756	352 716	646 646	1 144 066	1 961 256	3 268 760
11						705 432	1 352 078	2 496 144	4 457 400
12								2 704 156	5 200 300

n	N						
	26	27	28	29	30	31	32
0	1	1	1	1	1	1	1
1	26	27	28	29	30	31	32
2	321	351	378	406	435	465	469
3	2600	2925	3276	3654	4060	4495	4960
4	14 950	17 550	20 475	23 751	27 405	31 465	35 960
5	65 780	80 730	98 280	118 755	142 506	169 911	201 376
6	230 230	296 010	376 740	475 020	593 775	736 281	906 192
7	657 800	888 030	1 184 040	1 560 780	2 035 800	2 629 575	3 365 856
8	1 562 275	2 220 075	3 108 105	4 292 145	5 852 925	7 888 725	10 518 300
9	3 124 550	4 686 825	6 906 900	10 015 005	14 307 150	20 160 075	28 048 800
10	5 311 735	8 436 285	13 123 110	20 030 010	30 045 015	44 352 165	64 512 240
11	7 726 160	13 037 895	21 474 180	34 597 290	54 627 300	84 672 315	129 024 480
12	9 657 700	17 383 860	30 421 755	51 895 935	86 493 225	141 120 525	225 792 840
13	10 400 600	20 058 300	37 442 160	67 863 915	119 759 850	206 253 075	347 373 600
14			40 116 600	77 558 760	145 422 675	265 182 525	471 435 600
15					155 117 520	300 540 195	565 722 720
16							601 080 390

n	N				
	33	34	35	36	37
0	1	1	1	1	1
1	33	34	35	36	37
2	528	561	595	630	666
3	5456	5984	6545	7140	7770
4	40 920	46 376	52 360	58 905	66 045
5	237 336	278 256	324 632	376 992	435 897
6	1 107 568	1 344 904	1 623 160	1 947 792	2 324 784
7	4 272 048	5 379 616	6 724 520	8 347 680	10 295 472
8	13 884 156	18 156 204	23 535 820	30 260 340	38 608 020
9	38 567 100	52 451 256	70 607 460	94 143 280	124 403 620
10	92 561 040	131 128 140	183 579 396	254 186 856	348 330 136
11	193 536 720	286 097 760	417 225 900	600 805 296	854 992 152
12	354 317 320	548 354 040	834 451 800	1 251 677 700	1 852 482 996
13	573 166 440	927 983 760	1 476 337 800	2 310 789 600	3 562 467 300
14	818 809 200	1 391 975 640	2 319 959 400	3 796 297 200	6 107 086 800
15	1 037 158 320	1 855 967 520	3 247 943 160	5 567 902 560	9 364 199 760
16	1 166 803 110	2 203 961 430	4 059 928 950	7 307 872 110	12 875 774 670
17		2 333 606 220	4 537 567 650	8 597 496 600	15 905 368 710
18				9 075 135 300	17 672 631 900

n	N				
	38	39	40	41	42
0	1	1	1	1	1
1	38	39	40	41	42
2	703	741	780	820	862
3	8436	9139	9880	10 660	11 480
4	73 815	82 251	91 390	101 270	111 930
5	501 942	575 757	658 008	749 398	850 668
6	2 760 681	3 262 623	3 838 380	4 496 388	5 245 786
7	12 620 256	15 380 937	18 643 560	22 481 940	26 978 328
8	48 903 492	61 523 748	76 904 685	95 548 245	118 030 185
9	163 011 640	211 915 132	273 438 880	350 343 565	445 891 810
10	472 733 756	635 745 396	847 660 528	1 121 099 408	1 471 442 973
11	1 203 322 288	1 676 056 044	2 311 801 440	3 159 461 968	4 280 561 376
12	2 707 475 148	3 910 797 436	5 586 853 480	7 898 654 920	11 058 116 888
13	5 414 950 296	8 122 425 444	12 033 222 880	17 620 076 360	25 518 731 280
14	9 660 554 100	15 084 504 396	23 206 929 840	35 240 152 720	52 860 229 080
15	15 471 286 560	25 140 840 660	40 225 345 056	63 432 274 896	98 672 427 616
16	22 239 974 430	37 711 260 990	62 852 101 650	103 077 446 706	166 509 721 602
17	28 781 143 380	51 021 117 810	88 732 378 800	151 584 480 450	254 661 927 156
18	33 578 000 610	62 359 143 990	113 380 261 800	202 112 640 600	353 697 121 050
19	35 345 263 800	68 923 264 410	131 282 408 400	244 662 670 200	446 775 310 800
20			137 846 528 820	269 128 937 220	513 791 607 420
21					538 257 874 440

n	N			
	43	44	45	46
0	1	1	1	1
1	43	44	45	46
2	903	946	990	1035
3	12 341	13 244	14 190	15 180
4	123 410	135 751	148 995	163 185
5	962 598	1 086 008	1 221 759	1 370 754
6	6 096 454	7 059 052	8 145 060	9 366 819
7	32 224 114	38 320 568	45 379 620	53 524 680
8	145 008 513	177 232 627	215 553 195	260 932 815
9	563 921 995	708 930 508	886 163 135	1 101 716 330
10	1 917 334 783	2 481 256 778	3 190 187 286	4 076 350 481
11	5 752 004 349	7 669 339 132	10 150 595 910	13 340 783 196
12	15 338 678 264	21 090 682 613	28 760 021 745	38 910 617 655
13	36 576 848 168	51 915 526 432	73 006 209 045	101 766 230 790
14	78 378 960 360	114 955 808 528	166 871 334 960	239 877 544 005
15	151 532 656 696	229 911 617 056	344 867 425 584	511 738 760 544
16	265 182 149 218	416 714 805 914	646 626 422 970	991 493 848 554
17	421 171 648 758	686 353 797 976	1 103 068 603 890	1 749 695 026 860
18	608 359 048 206	1 029 530 696 964	1 715 884 494 940	2 818 953 098 830
19	800 472 431 850	1 408 831 480 056	2 438 362 177 020	4 154 246 671 960
20	960 566 918 220	1 761 039 350 070	3 169 870 830 126	5 608 233 007 140
21	1 052 049 481 860	2 012 616 400 080	3 773 655 750 150	6 943 526 580 276
22		2 104 098 963 720	4 116 715 363 800	7 890 371 113 950
23				8 233 430 727 600

n	N			
	47	48	49	50
0	1	1	1	1
1	47	48	49	50
2	1 081	1 128	1 176	1 225
3	16 215	17 296	18 424	19 600
4	178 365	194 580	211 876	230 300
5	1 533 739	1 712 304	1 906 884	2 118 760
6	10 737 573	12 271 512	13 983 816	15 890 700
7	62 891 499	73 629 072	85 900 584	99 884 400
8	314 457 495	377 348 994	450 978 066	536 878 650
9	1 362 649 145	1 677 106 640	2 054 455 634	2 505 433 700
10	5 178 066 751	6 540 715 896	8 217 822 536	10 272 278 170
11	17 417 133 617	22 595 200 368	29 135 916 264	37 353 738 800
12	52 251 400 851	69 668 534 468	92 263 734 836	121 399 651 100
13	140 676 848 445	192 928 249 296	262 596 783 764	354 860 518 600
14	341 643 774 795	482 320 623 240	675 248 872 536	937 845 656 300
15	751 616 304 549	1 093 260 079 344	1 575 580 702 584	2 250 829 575 120
16	1 503 232 609 098	2 254 848 913 647	3 348 108 992 991	4 923 689 695 575
17	2 741 188 875 414	4 244 421 484 512	6 499 270 398 159	9 847 379 391 150
18	4 568 648 125 690	7 309 837 001 104	11 554 258 485 616	18 053 528 883 775
19	6 973 199 770 790	11 541 847 896 480	18 851 684 897 584	30 405 943 383 200
20	9 762 479 679 106	16 735 679 449 896	28 277 527 346 376	47 129 212 243 960
21	12 551 759 587 422	22 314 239 266 528	39 049 918 716 424	67 327 446 062 800
22	14 833 897 694 226	27 385 657 281 648	49 699 896 548 176	88 749 815 264 600
23	16 123 801 841 550	30 957 699 535 776	58 343 356 817 424	108 043 253 365 600
24		32 247 603 683 100	63 205 303 218 876	121 548 660 036 300
25				126 410 606 437 572

$$y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 3

$$P_A(S_n=m)=\frac{k^m e^{-k}}{m!}$$

m	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
1	0,09484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000695	0,001227	0,002001
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035	0,000081	0,000164	0,000300
7					0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039
8								0,000002	0,000004

m	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,367879	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,183940	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,061313	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,015328	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,003066	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,000511	0,012030	0,050409	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,000073	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,000009	0,000859	0,008101	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,000001	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124007	0,131756
10		0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11		0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12		0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13			0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14			0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15			0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16				0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17				0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18					0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19					0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20						0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21						0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22							0,000003	0,000022	0,000108
23							0,000001	0,000008	0,000042
24								0,000003	0,000016
25								0,000001	0,000006
26									0,000002
27									0,000001

Таблица 4

$y = \Phi(x)$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,51	0,1950	1,02	0,3461	1,53	0,4370
0,01	0,0040	0,52	0,1985	1,03	0,3485	1,54	0,4382
0,02	0,0080	0,53	0,2019	1,04	0,3508	1,55	0,4394
0,03	0,0120	0,54	0,2054	1,05	0,3531	1,56	0,4406
0,04	0,0160	0,55	0,2088	1,06	0,3554	1,57	0,4418
0,05	0,0199	0,56	0,2123	1,07	0,3577	1,58	0,4429
0,06	0,0239	0,57	0,2157	1,08	0,3599	1,59	0,4441
0,07	0,0279	0,58	0,2190	1,09	0,3621	1,60	0,4452
0,08	0,0319	0,59	0,2224	1,10	0,3643	1,61	0,4463
0,09	0,0359	0,60	0,2257	1,11	0,3665	1,62	0,4474
0,10	0,0398	0,61	0,2291	1,12	0,3686	1,63	0,4484
0,11	0,0438	0,62	0,2324	1,13	0,3708	1,64	0,4495
0,12	0,0478	0,63	0,2357	1,14	0,3729	1,65	0,4505
0,13	0,0517	0,64	0,2389	1,15	0,3749	1,66	0,4515
0,14	0,0557	0,65	0,2422	1,16	0,3770	1,67	0,4525
0,15	0,0596	0,66	0,2454	1,17	0,3790	1,68	0,4535
0,16	0,0636	0,67	0,2486	1,18	0,3810	1,69	0,4545
0,17	0,0675	0,68	0,2517	1,19	0,3830	1,70	0,4554
0,18	0,0714	0,69	0,2549	1,20	0,3849	1,71	0,4564
0,19	0,0753	0,70	0,2580	1,21	0,3860	1,72	0,4573
0,20	0,0793	0,71	0,2611	1,22	0,3888	1,73	0,4582
0,21	0,0832	0,72	0,2642	1,23	0,3907	1,74	0,4591
0,22	0,0871	0,73	0,2673	1,24	0,3925	1,75	0,4599
0,23	0,0910	0,74	0,2703	1,25	0,3914	1,76	0,4608
0,24	0,0948	0,75	0,2734	1,26	0,3962	1,77	0,4616
0,25	0,0987	0,76	0,2764	1,27	0,3980	1,78	0,4625
0,26	0,1026	0,77	0,2794	1,28	0,3997	1,79	0,4633
0,27	0,1064	0,78	0,2823	1,29	0,4015	1,80	0,4641
0,28	0,1103	0,79	0,2852	1,30	0,4032	1,81	0,4649
0,29	0,1141	0,80	0,2881	1,31	0,4049	1,82	0,4656
0,30	0,1179	0,81	0,2919	1,32	0,4066	1,83	0,4664
0,31	0,1217	0,82	0,2939	1,33	0,4082	1,84	0,4671
0,32	0,1255	0,83	0,2967	1,34	0,4099	1,85	0,4678
0,33	0,1293	0,84	0,2995	1,35	0,4115	1,86	0,4686
0,34	0,1331	0,85	0,3023	1,36	0,4131	1,87	0,4693
0,35	0,1368	0,86	0,3051	1,37	0,4147	1,88	0,4699
0,36	0,1406	0,87	0,3078	1,38	0,4162	1,89	0,4706
0,37	0,1443	0,88	0,3106	1,39	0,4177	1,90	0,4713
0,38	0,1480	0,89	0,3133	1,40	0,4192	1,91	0,4719
0,39	0,1517	0,90	0,3159	1,41	0,4207	1,92	0,4726
0,40	0,1554	0,91	0,3186	1,42	0,4222	1,93	0,4732
0,41	0,1591	0,92	0,3112	1,43	0,4236	1,94	0,4738
0,42	0,1628	0,93	0,3238	1,44	0,4251	1,95	0,4744
0,43	0,1664	0,94	0,3264	1,45	0,4265	1,96	0,4750
0,44	0,1700	0,95	0,3289	1,46	0,4279	1,97	0,4756
0,45	0,1736	0,96	0,3315	1,47	0,4292	1,98	0,4761
0,46	0,1772	0,97	0,3340	1,48	0,4306	1,99	0,4767
0,47	0,1808	0,98	0,3365	1,49	0,4319	2,00	0,4772
0,48	0,1844	0,99	0,3389	1,50	0,4332	2,02	0,4783
0,49	0,1879	1,00	0,3413	1,51	0,4345	2,04	0,4793
0,50	0,1915	1,01	0,3438	1,52	0,4357	2,06	0,4803

Продолжение

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,08	0,4812	2,36	0,4908	2,64	0,4959	2,92	0,4982
2,10	0,4821	2,38	0,4913	2,66	0,4961	2,94	0,4984
2,12	0,4830	2,40	0,4918	2,68	0,4963	2,96	0,4985
2,14	0,4838	2,42	0,4922	2,70	0,4965	2,98	0,4986
2,16	0,4846	2,44	0,4927	2,72	0,4967	3,00	0,49865
2,18	0,4854	2,46	0,4931	2,74	0,4969	3,20	0,49931
2,20	0,4861	2,48	0,4934	2,76	0,4971	3,40	0,49966
2,22	0,4868	2,50	0,4938	2,78	0,4973	3,60	0,499841
2,24	0,4875	2,52	0,4941	2,80	0,4974	3,80	0,499928
2,26	0,4881	2,54	0,4945	2,82	0,4976	4,00	0,499968
2,28	0,4887	2,56	0,4948	2,84	0,4977	4,50	0,499997
2,30	0,4893	2,58	0,4951	2,86	0,4979	5,00	0,49999997
2,32	0,4898	2,60	0,4953	2,88	0,4980		
2,34	0,4904	2,62	0,4956	2,90	0,4981		

ОТВЕТЫ

1. B, D и E. 2. D. 3. A — достоверное событие, D — невозможное событие. 4. а) $A \subset C \subset B \subset D$; б) $A \subset B \subset C$. 5. «Попадание двумя выстрелами». 7. «Не больше 4 р.». 8. «Появление хотя бы одного герба при подбрасывании двух монет». 9. «Мишень поражена не больше чем 100 выстрелами». 10. «Появилось не меньше 4 очков». 11. U; V; U. 12. «Попадание первыми двумя выстрелами». 13. $A \cap B \cap C$ — «появление 1 очка», $A \cap B$ — «появление либо 1, либо 5 очков», $A \cap C$ — «появление либо 1, либо 3 очков», $B \cap C$ — «появление либо 1, либо 2, либо 4, либо 6 очков». 18. $A \cup B$ — «деталь либо I, либо II сорта», $\overline{A \cup C}$ — «деталь II сорта», $A \cap C = V$, $(A \cap B) \cup C = C$. 19. а) $A = B$; б) $\bar{A} = V$; в) $A = V$. 20. б) справедливо. 21. а) A; б) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$; в) B. 22. а) $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$; б) $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$; в) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup$ $\cup (\bar{A} \cap B \cap C)$; г) $A \cap B \cap C$; д) $A \cup B \cup C$; е) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$. 28. 24 360. 29. 120. 30. 15. 31. 210. 32. 303 600. 33. C_{150}^{6}. 34. 60. 35. 36. 36. 1512. 37. Один шанс из трех. 38. 125. 39. 16. 40. C_{n-k+1}^{k}. 43. 151 200. 44. 151 200. 45. 3003. 47. 55. 48. 6435. 49. 35. 50. 21. 51. 10^6. 52. 16. 53. Не больше 2^{32}. 54. 729. 55. 81. 56. 2000. 57. 31. 58. 30. 59. 267 148. 60. 1; 3; 11. 61. 25. 62. 66 660. 63. 126. 64. 17 760. 65. 2048. 66. 231. 67. 316 368. 68. C_{n-2}^{3}. 69. 231. 70. 283 824. 71. 888 889. 72. $\frac{1}{120}$. 73. $P(A) = \frac{1}{216}$; $P(B) = \frac{1}{36}$; $P(C) = \frac{5}{54}$. 74. 12 600. 75. $\frac{1}{27}$. 76. 0,5. 77. 0,42. 78. 0,46. 79. $\frac{1}{C_{32}^{8}}$. 80. $C_n^2 \cdot \frac{n!}{n^n}$. 81. $\frac{1}{55}$. 82. 0,33. 83. Неуклюжая. 84. 0,3024. 85. 0,00077. 86. $\frac{60^2-(60-\alpha)^2}{60^2}$. 87. $\frac{80}{153}$. 88. $\frac{49}{256}$. 89. $(10!)^{-2}$. 90. $\frac{1}{C_N^n} \sum_{i=1}^{n-m} C_M^{m+i} \times$ $\times C_{N-M}^{n-m-i}$. 91. $\frac{63}{64}$. 92. $1 - \frac{(n-m)!\,(n-k)!}{n!\,(n-m-k)!}$. 93. 0,106. 94. $\frac{5}{36}$. 95. $\frac{609}{625}$. 96. $\frac{256}{715}$. 97. $\frac{288}{593}$. 98. $\frac{11}{40}$. 99. а) 0,5; б) 0,333; в) 0,167. 100. а) 0,35; б) 0,5; в) 0,45; г) 0,45. 101. 0,354. 102. $2p-p^2$. 103. $\frac{6}{7}$. 104. $\frac{6}{13}$. 105. $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$. 106. а) $1-p^{10}$; б) $10p^9(1-p)$; в) $45p^8(1-p)^2$. 107. а) 0,5814; б) 0,06965; в) 0,9942. 108. 0,3024. 109. $\frac{19}{144}$. 110. $p_{11}p_{22}p_{23}+p_{21}p_{12}p_{23}+p_{21}p_{22}p_{13}$. 111. 3 из 4. 112. а) 0,1792; б) 0,468559; в) 0,03456. 113. 0,0108. 114. $C_m^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-k}$. 115. $n \geqslant 69$. 116. 0,2384. 117. 0,491. 118. 8. 119. а) 0,254; б) 0,133; в) 0,167. 120. $191 \leqslant m \leqslant 197$. 121. 0,012. 122. 23. 123. $\frac{82}{91} \leqslant p \leqslant \frac{83}{91}$. 124. 0,022. 125. 600 ± 21. 126. 80. 127. 0,013. 128. 0,0017. 129. Возможности почти равные. 130. 0,036. 131. 0,023. 132. 0,09. 133. 0,147. 134. 45 или 55. 135. а) 0,0102; б) 0,1089; в) 0,2541. 136. 0,09. 137. 0,9598.

138. 0,997. 139. а) 0,1353; б) 0,8569; 104. 140. а) $e^{-60}\sum_{k=120}^{10\,000}\frac{60^k}{k!}$; б) $e^{-60}\sum_{k=0}^{80}\frac{60^k}{k!}$. 141. 86. 142. 0,6344. 143. 0,9858. 144. 525. 145. 0,96. 146. 444. 147. 427. 148. 0,7536. 149. 0,8925. 150. 0,9297. 151. Почти 1. 152. Нет. 153. 3161. 154. 0,002. 155. $\frac{30}{49}$. 156. 2,734. 157. 3,159. 158. 3—4 раза. 159. 2 раза. 160. 8; 4—5. 161. 10. 162. 1,625. 163. $\frac{k}{p}$. 164. 8; −1; 15,75. 165. Стоит. 166. Не стоит. 167. 7. 168. 5. 169. 2. 170. 4,79; 5,24. 171. 1; 2; 3. 172. Прибор *B*. 173. 6; 30. 174. $\frac{105}{176}$. 176. 0,72. 177. 1,049. 178. 0,48. 179. 0,28. 180. 0; n. 181. 1; 1. 182. $x_1=1$; $x_2=2$; $p_1=0{,}6$; $p_2=0{,}4$. 183. 3; 6. 184. $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}2$; $p_3=0{,}5$. 185. $\frac{3n}{8}$; $\frac{15n}{64}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{15}{64n}$. 186. $\frac{45}{16}$; $\frac{315}{32}$. 187. $\frac{ak}{a+b}$; $\frac{abk(a+b-k)}{(a+b)^2(a+b-1)}$. 188. 0,1359. 189. 0,62%. 190. 0,244. 191. $\sigma=0{,}156$ мк. 192. 0,0456. 193. 456. 194. 15 мк. 195. 0,0258. 196. 0,997. 197. 0,98. 198. 0,35. 199. 0,78. 200. 0,957.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей.— 4-е изд.— М.: Наука, 1969.

2. Виленкин Н. Я. Комбинаторика.— М.: Наука, 1969.

3. Гнеденко Б. В. Математика в современном мире.— М.: Просвещение, 1980.

4. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей.— 6-е изд.— М.: Наука, 1964.

5. Ивашов-Мусатов О. С. Теория вероятностей и математическая статистика.— М.: Наука, 1979.

6. Кордемский Б. А. Математика изучает случайности.— М.: Просвещение, 1975.

7. Математика в современном мире: Сб. статей/Пер. с англ. Н. Г. Рычковой.— М.: Мир, 1967.

8. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.— М.: Наука, 1975.

9. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность.— М.: Мир, 1969.

10. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения.— М.: Наука, 1975.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Лютикас Витаутас Стяпонович

ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пособие для учащихся 9—11 классов

Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова
Редактор Л. В. Туркестанская
Младший редактор Л. И. Заседателева
Художник Е. П. Титков
Художественный редактор Е. Р. Дашук
Технический редактор Р. С. Невретдинова
Корректор Е. Г. Чапюк

ИБ № 11761

Сдано с набор 21.08.89. Подписано к печати 13.03.90. Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Бум. типогр. № 2. Гарнитура школьная. Печать высокая. Усл. печ. л. 10. Усл. кр. отт. 10,32. Уч.-изд. л. 8,55. Тираж 262 000 экз. Заказ № 610. Цена 25 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского

25 к.