А.А. Гусак
Е.А. Бричикова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Справочное пособие к решению задач

Издание 4-е, стереотипное

МИНСК
ТетраСистемс
2003

УДК 51(076.1)
ББК 22.11я73
Г96

Авторы:
кандидат физико-математических наук, профессор **А.А. Гусак**;
доцент Белорусского национального технического университета **Е.А. Бричикова**

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, профессор **А.А. Дадаян**;
кандидат физико-математических наук, доцент **В.И. Яшкин**

Гусак А.А.

Г96 Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач./ А.А. Гусак, Е.А. Бричикова. – Изд-е 4-е, стереотип.– Мн.: ТетраСистемс, 2003. – 288 с.

ISBN 985-470-138-7.

Справочное пособие предназначено для обучения студентов по учебному курсу "Теория вероятностей". Оно поможет при подготовке к практическим занятиям, зачетам и экзаменам, а студентам заочных отделений – самостоятельно выполнить контрольные работы.

В книгу включены разделы: события и вероятности; случайные величины, их распределения и числовые характеристики; некоторые законы распределения случайных величин; закон больших чисел, предельные теоремы. Пособие содержит около 350 примеров с подробными решениями.

В конце каждого параграфа помещены задачи для самостоятельного решения, ответы к ним.

Адресуется студентам и преподавателям вузов.

УДК 51(076.1)
ББК 22.11я73

ISBN 985-470-138-7

ВВЕДЕНИЕ

Справочное пособие к решению задач по высшей математике издается в четырех частях:

- Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
- Математический анализ и дифференциальные уравнения.
- **Теория вероятностей.**
- Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление.

Данная книга предназначена для обучения студентов вузов по разделу курса высшей математики "**Теория вероятностей**". Книга включает следующие разделы: события и вероятности; случайные величины, их распределение и числовые характеристики; некоторые законы распределения случайных величин; закон больших чисел, предельные теоремы; из истории возникновения и развития теории вероятностей.

Пособие имеет следующую структуру. В начале каждого параграфа приводятся теоретические сведения: определения основных понятий, формулировки теорем, соответствующие формулы. Далее следуют примеры решения типовых задач различной степени трудности. Затем предлагаются задачи для самостоятельного решения. Приведены ответы к задачам, к некоторым из них даны указания. Каждый параграф завершается вопросами теоретического характера, чтобы читатель смог проконтролировать свои знания изучаемого материала. В конце книги сообщены ответы на некоторые вопросы. Пятая глава содержит краткий очерк возникновения и развития теории вероятностей. Книгу завершает биографический словарь, в котором приведены краткие сведения о жизни и деятельности ученых, чьи научные исследования были посвящены проблемам теории вероятностей.

События и вероятности, случайные величины, законы распределения случайных величин, закон больших чисел, предельные теоремы.

Глава 1.
События и вероятности

§ 1.1. Классификация событий

Опытом, или *испытанием*, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых происходит соответствующее явление. Возможный результат опыта называют *событием*. Например, опытом является подбрасывание монеты, а событиями "герб", "цифра на верхней ее стороне" (когда монета упадет). Опытами являются стрельба по мишени, извлечение шара из ящика и т.п. События будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, \dots$

Событие называется *достоверным* в данном опыте, если оно обязательно произойдет в этом опыте. Например, если в ящике находятся только голубые шары, то событие "из ящика извлечен голубой шар" является достоверным (в ящике нет шаров другого цвета).

Событие называется *невозможным* в данном опыте, если оно не может произойти в этом опыте. Так, если в ящике находятся только красные шары, то событие "из ящика извечен голубой шар" является невозможным (таких шаров в ящике нет).

Событие называется *случайным* в данном опыте, если оно может произойти, а может и не произойти в этом опыте. Например, если в ящике находятся n голубых и m красных шаров, одинаковы по размеру и весу, то событие "из урны извлечен голубой шар" является случайным (оно может произойти, а может и не произойти, поскольку в урне имеются не только голубые, но и красные шары). Случайными событиями являются "герб" и "цифра на верхней стороне монеты при ее подбрасывании", "попадание и промах при стрельбе по мишени", "выигрыш по билету лотереи" и т.п.

Замечание. Приведенные примеры свидетельствуют о том, что одно и то же событие в некотором опыте может быть достоверным, в другом - невозможным, в третьем - случайным. Говоря о достоверности, невозможности, случайности события, имеют в виду его достоверность, невозможность, случайность по отношению к конкретному опыту, т.е. к наличию определенного комплекса условий или действий.

Два события называются *совместными* в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого в этом опыте. Так, при подбрасывании двух симметричных монет, события A - "герб на верхней стороне первой монеты" и B - "цифра на верхней стороне второй монеты" являются совместными.

Два события называются *несовместными*, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании. Например, несовместными являются попадание и промах при одном выстреле.

Несколько событий называются *несовместными*, если они попарно-несовместны.

Два события называются *противоположными*, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Так, противоположными являются события "герб" и "цифра" при одном подбрасывании симметричной монеты. Если одно из противоположных событий обозначено буквой A, то другое обозначают $\overline{A}$. Например, если A - "попадание", то $\overline{A}$ - "промах" при одном выстреле по мишени.

Множество событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называют *полной группой событий*, если они попарно-несовместны; появление одного и только одного из них является достоверным событием. Поясним понятие полной группы событий на следующем примере. Рассмотрим события, появляющиеся при подбрасывании игрального кубика (т.е. кубика, на гранях которого записаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 или изображены знаки, соответствующие этим цифрам). Когда кубик упадет, то верхней гранью окажется грань с одной из этих цифр. Событие: "верхней гранью оказалась грань с цифрой k" обозначим через A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). События A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 образуют полную группу: они попарно-несовместны; появление одного и только одного из них является достоверным событием (когда кубик упадет, то только одна из граней окажется верхней, на ней написана только одна из цифр от 1 до 6).

События считают *равновозможными*, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие. Например, при подбрасывании монеты событие A (появление цифры) и событие B (появление герба) равновозможны, так как предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не влияет на то, какая сторона монеты (герб или цифра) окажется верхней. При подбрасывании игрального кубика события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 являются равновозможными, поскольку предполагается, что кубик изготовлен из однородного материала, имеет правильную форму и наличие цифр (или очков) на гранях не влияет на то, какая из шести граней окажется верхней.

Каждое событие, которое может наступить в итоге опыта, называется *элементарным исходом* (*элементарным событием,* или *шансом*). Например, события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 - элементарные исходы при подбрасывании кубика.

Элементарные исходы, при которых данное событие наступает, называются *благоприятствующими* этому событию, или *благоприятными шансами.* Так, при подбрасывании игрального кубика элементарные исходы A_2, A_4, A_6 являются благоприятствующими событию "выпало четное число очков".

Пример 1. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитываются суммы выпавших очков (суммы числа очков на верхних гранях обоих кубиков). Сумма выпавших очков на двух кубиках может меняться от 2 до 12. Записать полную группу событий в этом опыте.

Решение. Полную группу событий образуют равновозможные элементарные исходы $(k;\ m)$, $k,\ m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, представленные в таблице 1.1. Элементарный исход $(k;\ m)$ означает, что на первом кубике выпало k очков, на втором m очков ($k,\ m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Например, (3; 4) - на первом кубике 3 очка, на втором - 4 очка.

Таблица 1.1.

(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

Пример 2. Сколько элементарных исходов благоприятствует событию "на обоих кубиках выпало одинаковое число очков" при подбрасывании двух игральных кубиков?

Решение. Этому событию благоприятствуют 6 элементарных исходов (см. табл. 1.1): (1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6).

Пример 3. Подбрасывается два игральных кубика. Какому событию благоприятствует больше элементарных исходов: "сумма выпавших очков равна 7", "сумма выпавших очков равна 8"?

Решение. Событию "сумма выпавших очков равна 7" благоприятствуют 6 исходов (см. табл. 1.1): (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1). Событию "сумма выпавших очков равна 8" благоприятствуют 5 исходов: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2). Следовательно, первому событию благоприятствует больше элементарных исходов.

Пример 4. Подбрасываются три игральных кубика, подсчитываются суммы очков, выпавших на них. Сколькими способами можно получить в сумме 5 очков, 6 очков?

Решение. Получить в сумме 5 очков можно шестью способами: (1;1;3), (1;3;1), (3;1;1), (1;2;2), (2;1;2), (2;2;1). Получить в сумме 6 очков можно десятью способами: (1;1;4), (1;4;1), (4;1;1), (1;2;3), (1;3;2), (2;1;3), (2;3;1), (3;1;2), (3;2;1), (2;2;2).

Замечание. Запись (3;2;1) означает, что на первом кубике выпало 3 очка, на втором - 2, на третьем - 1.

Задачи

1. Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт - подбрасывание симметричной монеты; события: A - "появление герба", B - "появление цифры";

б) опыт - два выстрела по мишени; события: A - "хотя бы одно попадание"; B - "хотя бы один промах".

2. Являются ли равновозможными следующие события:

а) опыт - подбрасывание симметричной монеты; события: A - "появление герба", B - "появление цифры";

б) опыт - подбрасывание погнутой монеты; события: A - "появление герба", B - "появление цифры";

в) опыт - выстрел по мишени; события: A - "попадание", B - "промах".

3. Образуют ли полную группу событий следующие события:

а) опыт - подбрасывание симметричной монеты; события: A - "герб", B - "цифра";

б) опыт - подбрасывание двух симметричных монет; события: A - "два герба", B - "две цифры".

4. Опыт - подбрасывание двух игральных кубиков. Сколько элементарных исходов благоприятствуют событию - выпало очков: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12?

5. Опыт - подбрасывание трех игральных кубиков. Сколько всего элементарных исходов? Сколько элементарных исходов благоприятствуют событию - на трех кубиках выпало очков: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12? Каково наибольшее значение суммы выпавших очков?

Ответы

1. а) да; б) нет. **2.** а) да; б) нет; в) в общем случае нет. **3.** а) да; б) нет. **4.** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1. **5.** $n = 6^3 = 216$; 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25; 18.

Вопросы

1. Что называют опытом, или испытанием?
2. Что называют событием?
3. Какое событие называют достоверным в данном опыте?
4. Какое событие называют невозможным в данном опыте?
5. Какое событие называют случайным в данном опыте?
6. Какие события называют совместными в данном опыте?
7. Какие события называют несовместными в данном опыте?
8. Какие события называют противоположными?
9. Какие события считают равновозможными?
10. Что называют полной группой событий?
11. Что называют элементарным исходом?
12. Какие элементарные исходы называют благоприятствующими данному событию?
13. Что представляет собой полная группа событий при подбрасывании одной монеты?
14. Что представляет собой полная группа событий при подбрасывании двух монет?

§ 1.2. Классическое определение вероятности

Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных исходов опыта, в котором может появиться это событие. Вероятность события A обозначают через $P(A)$ (здесь P - первая буква французского слова probabilité - вероятность). В соответствии с определением

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.2.1}$$

где m - число элементарных исходов, благоприятствующих событию A; n - число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу событий.

Это определение вероятности называют классическим. Оно возникло на начальном этапе развития теории вероятностей.

Вероятность события имеет следующие свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице. Обозначим достоверное событие буквой U. Для достоверного события $m = n$, поэтому

$$P(U) = 1. \tag{1.2.2}$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю. Обозначим невозможное событие буквой V. Для невозможного события $m = 0$, поэтому

$$P(V) = 0. \tag{1.2.3}$$

3. Вероятность случайного события выражается положительным числом, меньшим единицы. Поскольку для случайного события A выполняются неравенства $0 < m < n$, или $0 < \frac{m}{n} < 1$, то

$$0 < P(A) < 1. \tag{1.2.4}$$

4. Вероятность любого события B удовлетворяет неравенствам

$$0 \le P(B) \le 1. \tag{1.2.5}$$

Это следует из соотношений (1.2.2) - (1.2.4).

Пример 1. В урне 10 одинаковых по размерам и весу шаров, из которых 4 красных и 6 голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется голубым?

Решение. Событие "извлеченный шар оказался голубым" обозначим буквой A. Данное испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов, из которых 6 благоприятствуют событию A. В соответствии с формулой (1.2.1) получаем

$$P(A) = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Пример 2. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение. Обозначим через A событие "число на взятой карточке кратно 5". В данном испытании имеется 30 равновозможных элементарных исходов, из которых событию A благоприятствуют 6 исходов (числа 5, 10, 15, 20, 25, 30). Следовательно,

$$P(A)=\frac{6}{30}=0,2 .$$

Пример 3. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найти вероятность события B, состоящего в том, что на верхних гранях кубиков в сумме будет 9 очков.

Решение. В этом испытании всего $6^2=36$ равновозможных элементарных исходов (см. табл. 1.1). событию B благоприятствуют 4 исхода: (3;6), (4;5), (5;4), (6;3), поэтому

$$P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9} .$$

Пример 4. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?

Решение. Обозначим буквой C событие "выбранное число является простым". В данном случае $n=10$, $m=4$ (простые числа 2, 3, 5, 7). Следовательно, искомая вероятность

$$P(C)=\frac{4}{10}=0,4 .$$

Пример 5. Подбрасываются две симметричные монеты. Чему равна вероятность того, что на верхних сторонах обеих монет оказались цифры?

Решение. Обозначим буквой D событие "на верхней стороне каждой монеты оказалась цифра". В этом испытании 4 равновозможных элементарных исходов: (*Г*, *Г*), (*Г*, *Ц*), (*Ц*, *Г*), (*Ц*, *Ц*). (Запись (*Г*, *Ц*) означает, что на первой монете герб, на второй - цифра). Событию D благоприятствует один элементарный исход (*Ц*, *Ц*). Поскольку $m=1$, $n=4$, то

$$P(D)=\frac{1}{4}=0,25 .$$

Пример 6. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы?

Решение. Двузначными числами являются числа от 10 до 99; всего таких чисел 90. Одинаковые цифры имеют 9 чисел (это числа 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99). Так как в данном случае $m=9$, $n=90$, то

$$P(A)=\frac{9}{90}=0,1 ,$$

где A - событие "число с одинаковыми цифрами".

Пример 7. Из букв слова *дифференциал* наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) буквой *ч*?

Решение. В слове *дифференциал* 12 букв, из них 5 гласных и 7 согласных. Буквы *ч* в этом слове нет. Обозначим события: A - "гласная буква", B - "согласная буква", C - "буква *ч*". Число благоприятствующих элементарных исходов: $m_1 = 5$ - для события A, $m_2 = 7$ - для события B, $m_3 = 0$ - для события C. Поскольку $n = 12$, то

$$P(A) = \frac{5}{12} \approx 0{,}417; \qquad P(B) = \frac{7}{12} \approx 0{,}583; \qquad P(C) = 0.$$

Пример 8. Подбрасывается два игральных кубика, отмечается число очков на верхней грани каждого кубика. Найти вероятность того, на обоих кубиках выпало одинаковое число очков.

Решение. Обозначим это событие буквой A. Событию A благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6). Всего равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу событий, в данном случае $n = 6^2 = 36$ (см. табл. 1.1). Значит, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167.$$

Пример 9. В книге 300 страниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер, кратный 5?

Решение. Из условия задачи следует, что всех равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу событий, будет $n = 300$. Из них $m = 60$ благоприятствуют наступлению указанного события. Действительно, номер, кратный 5, имеет вид $5k$, где k - натуральное число, причем $0 < 5k \le 300$, откуда $k \le 300/5 \approx 60$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5} = 0{,}2,$$

где A - событие "страница имеет порядковый номер, кратный 5".

Пример 10. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее - получить в сумме 7 или 8?

Решение. Обозначим события: A - "выпало 7 очков", B - "выпало 8 очков". Событию A благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1), а событию B - 5 исходов: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2). Всех равновозможных элементарных исходов $n = 6^2 = 36$ (см. табл. 1.1). Значит,

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167 ; \qquad P(B) = \frac{5}{36} \approx 0{,}139 .$$

Итак, $P(A)>P(B)$; получить в сумме 7 очков - более вероятное событие, чем получить в сумме 8 очков.

Задачи

1. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что это число кратно 3?

2. В урне a красных и $в$ голубых шаров, одинаковых по размерам и весу. Чему равна вероятность того, что наудачу извлеченный шар из этой урны окажется голубым?

3. Наудачу выбрано число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что это число является делителем 30?

4. В урне a голубых и $в$ красных шаров, одинаковых по размерам и весу. Из этой урны извлекают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался красным. После этого из урны вынимают еще один шар. Найти вероятность того, что второй шар также красный.

5. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 50. Какова вероятность того, что это число является простым?

6. Подбрасывается три игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее - получить в сумме 9 или 10 очков?

7. Подбрасывается три игральных кубика, подсчитывается сумма выпавших очков. Что вероятнее - получить в сумме 11 (событие A) или 12 очков (событие B)?

Ответы

1. 1/3. **2.** $в/(a+в)$. **3.** 0,2. **4.** $(в-1)/(a+в-1)$. **5.** 0,3. **6.** $p_1 = 25/216$ - вероятность получить в сумме 9 очков; $p_2 = 27/216$ - вероятность получить в сумме 10 очков; $p_2 > p_1$. **7.** $P(A) = 27/216$, $P(B) = 25/216$, $P(A) > P(B)$.

Вопросы

1. Что называют вероятностью события?
2. Чему равна вероятность достоверного события?
3. Чему равна вероятность невозможного события?
4. В каких пределах заключена вероятность случайного события?

5. В каких пределах заключена вероятность любого события?
6. Какое определение вероятности называют классическим?

§ 1.3. Комбинаторика и вероятность

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах. Формулы комбинаторики используют при непосредственном вычислении вероятностей.

Множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками* этих элементов. Число всевозможных перестановок из n элементов обозначают через P_n; это число равно $n!$ (читается *эн-факториал*):

$$P_n = n!, \qquad (1.3.1)$$

где

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (1.3.2)$$

Замечание 1. Для пустого множества принимается соглашение: пустое множество можно упорядочить только одним способом; по определению полагают $0! = 1$.

Размещениями называют множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений определяется формулой

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1). \qquad (1.3.3)$$

Сочетаниями из n различных элементов по m называются множества, содержащие m элементов из числа n заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по m обозначают: C_n^m или $\binom{n}{m}$. Это число выражается формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.3.4)$$

Замечание 2. По определению полагают $C_n^0 = 1$.

Для числа сочетаний справедливы равенства:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}, \qquad (1.3.5)$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \qquad (1.3.6)$$

Последнее равенство иногда формулируется в виде следующей теоремы о *конечных множествах.*

Число всех подмножеств множества, состоящего их n элементов, равно 2^n.

Отметим, что числа перестановок, размещений и сочетаний связаны равенством

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Замечание 3. Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае множества с повторениями вычисляют по другим формулам.

Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями определяется формулой

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}, \tag{1.3.7}$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Число размещений по m элементов с повторениями из n элементов равно n^m, т.е.

$$(A_n^m)_{с\ повт.} = n^m. \tag{1.3.8}$$

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов равно числу сочетаний без повторений из $n + m - 1$ элементов по m элементов, т.е.

$$(C_n^m)_{с\ повт.} = C_{n+m-1}^m. \tag{1.3.9}$$

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Классическая схема подсчета вероятностей пригодна для решения ряда сугубо практических задач. Рассмотрим, например, некоторое множество элементов объема N. Это могут быть изделия, каждое из которых является годным или бракованным, или семена, каждое из которых может быть всхожим или нет. Подобного рода ситуации описываются урновой схемой: в урне имеется N шаров, из них M голубых, $(N - M)$ красных.

Из урны, содержащей N шаров, в которой находится M голубых шаров, извлекается n шаров. Требуется определить вероятность того, что в выборке объема n будет обнаружено m голубых шаров. Обозначим через A событие "в выборке объема n имеется m голубых шаров", тогда

$$P(A) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = P_{M,N}(m,n). \qquad (1.3.10)$$

Пример 1. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

Решение. Воспользуемся формулой (1.3.3). При $n = 10$, $m = 3$ получаем

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Пример 2. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

Решение. Согласно формуле (1.3.1) при $n=5$ находим

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

Решение. В соответствии с формулой (1.3.4) находим

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Пример 4. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Решение. Здесь нужно найти число перестановок с повторениями, которое определяется формулой (1.3.7). При $k = 2$, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n=6$ по этой формуле получаем

$$P_6(3;3) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Пример 5. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах: *замок*, *ротор*, *топор*, *колокол*?

Решение. В слове *замок* все буквы различны, всего их пять. В соответствии с формулой (1.3.1) получаем

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120\,.$$

В слове *ротор*, состоящем из пяти букв, буквы *р* и *о* повторяются дважды. Для подсчета различных перестановок применяем формулу (1.3.7). При $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ по этой формуле находим

$$P_5(2;2) = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 30\,.$$

В слове *топор* буква *о* повторяется дважды, поэтому

$$P_5(2) = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60\,.$$

В слове *колокол*, состоящем из семи букв, буква *к* встречается дважды, буква *о* - трижды, буква *л* - дважды. В соответствии с формулой (1.3.7) при $n = 7$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$ получаем

$$P_7(2;3;2) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 210\,.$$

Пример 6. На пяти одинаковых карточках написаны буквы *И*, *К*, *М*, *Н*, *С*. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово *МИНСК*?

Решение. Из пяти различных элементов можно составить P_5 перестановок: $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Значит, всего равновозможных исходов будет 120, а благоприятствующих данному событию - только один. Следовательно,

$$P = \frac{1}{120}\,.$$

Пример 7. Из букв слова *ротор*, составленного с помощью разрезной азбуки, наудачу последовательно извлекаются 3 буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово *тор*?

Решение. Чтобы отличить одинаковые буквы друг от друга, снабдим их номерами: $р_1$, $р_2$, $о_1$, $о_2$. Общее число элементарных исходов равно: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Слово *ротор* получится в $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ случаях ($то_1р_1$, $то_1р_2$, $то_2р_1$, $то_2р_2$). Искомая вероятность равна

$$P = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}\,.$$

При подсчете числа благоприятных случаев здесь воспользовались правилом произведения: букву *т* можно выбрать одним способом, букву *о* - двумя, букву *р* - двумя способами.

Пример 8. На шести одинаковых по форме и размеру карточках написаны буквы слова *талант* - по одной букве на каждой карточке. Карточки тщательно перемешаны. Их вынимают наудачу и располагают на столе одна за другой. Какова вероятность снова получить слово *талант*?

Решение. Занумеруем карточки с буквами:

1	2	3	4	5	6
а	а	л	н	т	т

Слово $\underset{5}{т}\underset{1}{а}\underset{3}{л}\underset{2}{а}\underset{4}{н}\underset{6}{т}$ не изменится, если буквы *а* переставить местами, но по расположению карточек получится иная комбинация: $\underset{5}{т}\underset{2}{а}\underset{3}{л}\underset{1}{а}\underset{4}{н}\underset{6}{т}$.

Если в каждой из этих двух комбинаций то же проделать с буквой *т*, то получим еще 2 различные комбинации карточек со словом *талант*. Значит, появлению слова *талант* благоприятствуют 4 элементарных исхода. Общее число равновозможных элементарных исходов равна числу перестановок из 6 элементов: $n = 6! = 720$. Следовательно, искомая вероятность

$$P = \frac{m}{n} = \frac{4}{720} = \frac{1}{180}.$$

Замечание. Эту вероятность можно найти и с помощью формулы (1.3.7), которая при $n = 6$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$, $n_4 = 2$ принимает вид: $P_6(1,1,2,2) = \dfrac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!} = 180$. Таким образом, $P = 1/180$.

Пример 9. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках *л*, на остальных трех *и*. Выкладывают наудачу эти карточки в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово *лилии*?

Решение. Найдем число перестановок из этих пяти букв с повторениями. По формуле (1.3.7) при $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ получаем

$$P_5(2;3) = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10.$$

Это общее число равновозможных исходов опыта, данному событию A - "появление слова *лилии*" благоприятствует один. В соответствии с формулой (1.2.1) получаем

$$P(A)=\frac{1}{10}=0{,}1\,.$$

Пример 10. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов (C_{10}^{6}).

Определяем число исходов, благоприятствующих событию A - "среди 6 взятых деталей 4 стандартных". Четыре стандартные детали из семи стандартных можно взять C_7^4 способами, при этом остальные $6-4=2$ детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из $10-7=3$ нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_7^4\cdot C_3^2$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A)=\frac{C_7^4\cdot C_3^2}{C_{10}^6}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}:\frac{10!}{6!\cdot 4!}=\frac{7!\cdot 6!\cdot 4!\cdot 3!}{10!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{5}{10}=0{,}5\,.$$

Замечание. Последняя формула является частным случаем формулы (1.3.10): $N=10$, $M=7$, $n=6$, $m=4$.

Пример 11. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.

Решение. Число всех равновозможных случаев распределения 5 билетов среди 25 студентов равно числу сочетаний из 25 элементов по 5, т.е. C_{25}^5. Число групп по трое юношей из 15, которые могут получить билеты, равно C_{15}^3. Каждая такая тройка может сочетаться с любой парой из десяти девушек, а число таких пар равно C_{10}^2. Следовательно, число групп по 5 студентов, образованных из группы в 25 студентов, в каждую из которых будут входить трое юношей и две девушки, равно произведению $C_{15}^3\cdot C_{10}^2$. Это произведение равно числу благоприятствующих случаев распределения пяти билетов среди студентов группы так, чтобы три билета получили юноши и два билета - девушки.

В соответствии с формулой (1.2.1) находим искомую вероятность

$$P(A)=\frac{C_{15}^{3}C_{10}^{2}}{C_{25}^{5}}=\frac{15!}{3!\cdot 12!}\cdot\frac{10!}{2!\cdot 8!}:\frac{25!}{5!\cdot 20!}=\frac{20!\cdot 15!\cdot 10!\cdot 5!}{25!\cdot 12!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 2!}=$$

$$=\frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 9\cdot 10\cdot 4\cdot 5}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 2}=\frac{13\cdot 5\cdot 3}{23\cdot 22}=\frac{195}{506}\approx 0{,}385.$$

Замечание. Последняя формула является частным случаем формулы (1.3.10): $N=25$, $M=15$, $n=5$, $m=3$.

Пример 12. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара (событие A)?

Решение. В ящике всего 30 шаров. При данном испытании число всех равновозможных элементарных исходов будет C_{30}^{6}. Подсчитаем число элементарных исходов, благоприятствующих событию A. Три красных шара из 15 можно выбрать C_{15}^{3} способами, два голубых шара из 9 можно выбрать C_{9}^{2} способами, один зеленый из 6 - C_{6}^{1} способами. Следовательно (в силу принципа произведения в комбинаторике), число исходов, благоприятствующих событию A, будет $m=C_{15}^{3}\cdot C_{9}^{2}\cdot C_{6}^{1}$. По формуле (1.2.1) находим искомую вероятность

$$P(A)=\frac{C_{15}^{3}\cdot C_{9}^{2}\cdot C_{6}^{1}}{C_{30}^{6}}=\frac{24!\cdot 15!\cdot 9!\cdot 6!\cdot 6!}{30!\cdot 12!\cdot 7!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{24}{145}\approx 0{,}17\,.$$

Пример 13. В ящике 15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Наугад выбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров 2 голубых.

Решение. Общее число элементарных исходов данного опыта равно числу сочетаний из 15 по 6, т.е.

$$C_{15}^{6}=\frac{15!}{6!\cdot 9!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=13\cdot 11\cdot 7\cdot 5=5005\,.$$

Число благоприятных исходов равно произведению

$$C_{5}^{2}\cdot C_{10}^{4}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 6!}=\frac{5!\cdot 10!}{2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 6!}=\frac{5\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=2100\,.$$

Искомая вероятность определяется формулой (1.3.10):

$$P=\frac{C_{5}^{2}\cdot C_{10}^{4}}{C_{15}^{6}}=\frac{2100}{5005}\approx 0{,}4196\,.$$

Пример 14. Игральный кубик подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом грани 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадут соответственно 2, 3, 1, 1, 1, 2 раза (событие A)?

Решение. Число исходов, благоприятных для события A, подсчитаем по формуле (1.3.7):

$$m = \frac{(2+3+1+1+1+2)!}{2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{10!}{4\cdot 6} = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\,;$$

Число всех элементарных исходов в данном опыте $n = 6^{10}$, поэтому

$$P(A) = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6^{10}} = \frac{700}{6^7} \approx 0{,}002\,.$$

Задачи

1. На 5 одинаковых карточках написаны буквы *Б*, *Е*, *Р*, *С*, *Т*. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово *БРЕСТ*?

2. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают 2 шара. Найдите вероятность того, что эти шары разного цвета.

3. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?

4. В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 5 голубых. Наудачу извлечены 3 шара. Найдите вероятность того, что все 3 шара разного цвета.

5. На пяти одинаковых карточках написаны буквы *л*, *м*, *о*, *о*, *т*. Какова вероятность того, что извлекая карточки по одной наугад, получим в порядке их выхода слово *молот*?

6. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия. Найдите вероятность того, что в полученной выборке одно изделие бракованное.

7. Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?

Ответы

1. 1/120. **2.** 5/9. **3.** 18/35. **4.** 0,25. **5.** 1/60. **6.** 21/40. **7.** 5/9.

Вопросы

1. Что называют перестановками?

2. По какой форме вычисляют число перестановок из n различных элементов?

3. Что называют размещениями?

4. По какой формуле вычисляют число размещений из n различных элементов по m элементов?

5. Что называют сочетаниями?

6. По какой формуле вычисляют число сочетаний из n элементов по m элементов?

7. Каким равенством связаны числа перестановок, размещений и сочетаний?

8. По какой формуле вычисляется число перестановок из n элементов, если некоторые элементы повторяются?

9. Какой формулой определяется число размещений по m элементов с повторениями из n элементов?

10. Какой формулой определяется число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов?

§ 1.4. Частота события. Статистическое определение вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. О равновозможности исходов опыта заключают в силу соображений симметрии (как в случае монеты или игрального кубика). Задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются редко. Во многих случаях трудно указать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы равновозможны. В связи с этим появилась необходимость введения еще одного определения вероятности, называемого *статистическим*. Чтобы дать это определение, предварительно вводят понятие относительной частоты события.

Относительной частотой события, или *частотой*, называется отношение числа опытов, в которых появилось это событие, к числу всех произведенных опытов. Обозначим частоту события A через $W(A)$, тогда по определению

$$W(A)=\frac{m}{n}, \tag{1.4.1}$$

где m - число опытов, в которых появилось событие A; n - число всех произведенных опытов.

Частота события обладает следующими свойствами.

1. Частота случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей:

$$0 < W(A) < 1 . \tag{1.4.2}$$

2. Частота достоверного события U равна единице:

$$W(U) = 1 . \tag{1.4.3}$$

3. Частота невозможного события V равна нулю:

$$W(V) = 0 . \tag{1.4.4}$$

4. Частота суммы двух несовместных событий A и B равна сумме частот этих событий:

$$W(A + B) = W(A) + W(B) . \tag{1.4.5}$$

Наблюдения позволили установить, что относительная частота обладает свойствами статистической устойчивости: в различных сериях многочленных испытаний (в каждом из которых может появиться или не появиться это событие) она принимает значения, достаточно близкие к некоторой постоянной. Эту постоянную, являющуюся объективной числовой характеристикой явления, считают вероятностью данного события.

Вероятностью события называется число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний.

Это определение вероятности называется *статистическим*.

В случае статистического определения вероятность обладает следующими свойствами: 1) вероятность достоверного события равна единице; 2) вероятность невозможного события равна нулю; 3) вероятность случайного события заключена между нулем и единицей; 4) вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Пример 1. Из 500 взятых наудачу деталей оказалось 8 бракованных. Найти частоту бракованных деталей.

Решение. Так как в данном случае $m = 8$, $n = 500$, то в соответствии с формулой (1.4.1) находим

$$W = \frac{8}{500} = 0{,}016 .$$

Пример 2. Игральный кубик подброшен 60 раз, при этом *шестерка* появилась 10 раз. Какова частота появления *шестерки*?

Решение. Из условия задачи следует, что $n = 60$, $m = 10$, поэтому

$$W = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} .$$

Пример 3. Среди 1000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков?

Решение. Поскольку в данном случае $n = 1000$, $m = 515$, то

$$W = \frac{515}{1000} = 0{,}515 .$$

Пример 4. В результате 20 выстрелов по мишени получено 15 попаданий. Какова частота попаданий?

Решение. Так как $n = 20$, $m = 15$, то

$$W = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75 .$$

Пример 5. При стрельбе по мишени частота попаданий $W = 0{,}75$. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

Решение. Из формулы (1.4.1) следует, что $m = Wn$. Так как $W = 0{,}75$, $n = 40$, то $m = 0{,}75 \cdot 40 = 30$. Таким образом, было получено 30 попаданий.

Пример 6. Частота нормального всхода семян $W = 0{,}97$. Из высеянных семян взошло 970. Сколько семян было высеяно?

Решение. Из формулы (1.4.1) следует, что $n = \dfrac{m}{W}$. Поскольку $m = 970$, $W = 0{,}97$, то $n = 970/0{,}97 = 1000$. Итак, было высеяно 1000 семян.

Пример 7. На отрезке натурального ряда от 1 до 20 найти частоту простых чисел.

Решение. На указанном отрезке натурального ряда чисел находятся следующие простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19; всего их 8. Так как $n = 20$, $m = 8$, то искомая частота

$$W = \frac{8}{20} = 0{,}4 .$$

Пример 8. Проведены три серии многократных подбрасываний симметричной монеты, подсчитаны числа появлений герба: 1) $n_1 = 4040$, $m_1 = 2048$, 2) $n_2 = 12000$, $m_2 = 6019$; 3) $n_3 = 24000$, $m_3 = 12012$. Найти частоту появления герба в каждой серии испытаний.

Решение. В соответствии с формулой (1.4.1) находим:

$$W_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{2048}{4040} = 0{,}5069;$$

$$W_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{6019}{1200} \approx 0{,}5016;$$

$$W_3 = \frac{m_3}{n_3} = \frac{12012}{24000} \approx 0{,}5005.$$

Замечание. Эти примеры свидетельствуют о том, что при многократных испытаниях частота события незначительно отличается от его вероятности. (Вероятность появления герба при подбрасывании монеты $p = 1/2 = 0{,}5$, так как в этом случае $n = 2$, $m = 1$).

Пример 9. Среди 300 деталей, изготовленных на автоматическом станке, оказалось 15, не отвечающих стандарту. Найти частоту появления нестандартных деталей.

Решение. В данном случае $n = 300$, $m = 15$, поэтому

$$W = \frac{15}{300} = 0{,}05.$$

Пример 10. Контролер, проверяя качество 400 изделий установил, что 20 из них относятся ко второму сорту, а остальные - к первому. Найти частоту изделий первого сорта, частоту изделий второго сорта.

Решение. Прежде всего, найдем число изделий первого сорта: $400 - 20 = 380$. Поскольку $n = 400$, $m_1 = 380$, то частота изделий первого сорта

$$W_1 = \frac{380}{400} = 0{,}95.$$

Аналогично находим частоту изделий второго сорта:

$$W_2 = \frac{20}{400} = 0{,}05.$$

Задачи

1. Отдел технического контроля обнаружил 10 нестандартных изделий в партии из 1000 изделий. Найдите частоту изготовления бракованных изделий.

2. Для выяснения качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 100 штук. 95 семян дали нормальный всход. Какова частота нормального всхода семян?

3. Найдите частоту появления простых чисел в следующих отрезках натурального ряда: а) от 21 до 40; б) от 41 до 50; в) от 51 до 70.

4. Найдите частоту появления цифры при 100 подбрасываниях симметричной монеты. (Опыт проводите самостоятельно).

5. Найдите частоту появления шестерки при 90 подбрасываниях игрального кубика.

6. Путем опроса всех студентов Вашего курса определите частоту дней рождения, попадающих на каждый месяц года.

7. Найдите частоту пятибуквенных слов в любом газетном тексте.

Ответы

1. 0,01. 2. 0,95; 0,05. 3. а) 0,2; б) 0,3; в) 0,2.

Вопросы

1. Что такое частота события?
2. Чему равна частота достоверного события?
3. Чему равна частота невозможного события?
4. В каких пределах заключена частота случайного события?
5. Чему равна частота суммы двух несовместных событий?
6. Какое определение вероятности называют статистическим?
7. Какими свойствами обладает статистическая вероятность?

§ 1.5. Геометрические вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов конечно. На практике встречаются опыты, для которых множество таких исходов бесконечно.

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят *геометрические вероятности - вероятности попадания точки в область*.

На плоскости задана квадрируемая область, т.е. область, имеющая площадь. Обозначим эту область буквой G, а ее площадь S_G. В области G содержится область g площади S_g (рис. 1.1). В область G наудачу брошена точка. Будем считать, что брошенная точка может попасть в некоторую часть области G с вероятностью, пропорциональной площади этой части и не зависящей от ее формы и расположения. Пусть A - попадание брошенной точки в область g, тогда геометрическая вероятность этого события определяется формулой

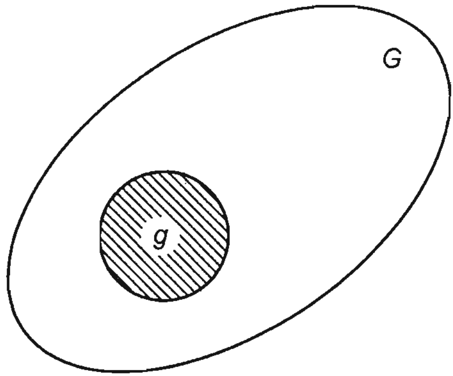


Рис. 1.1

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}. \qquad (1.5.1)$$

Аналогично вводится понятие геометрической вероятности при бросании точки в пространственную область G объема V_G, содержащую область g объема V_g:

$$P(A) = \frac{V_g}{V_G}. \qquad (1.5.2)$$

В общем случае понятие геометрической вероятности вводится следующим образом. Обозначим меру области (длину, площадь, объем) через *mes* g, а меру области G - через *mes* G (*mes* - первые три буквы французского слова *mesure*, что значит мера); обозначим буквой A событие "попадание брошенной точки в области g, которая содержится в области G". Вероятность попадания в область g точки, брошенной в область G, определяется формулой

$$P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G}. \qquad (1.5.3)$$

Пример 1. В круг вписан квадрат (рис 1.2). В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат?

Решение. Введем обозначения: R - радиус круга, a - сторона вписанного квадрата, A - попадание точки в квадрат, S - площадь круга, S_1 - площадь вписанного квадрата. Как известно, площадь круга $S = \pi R^2$. Сторона вписанного квадрата через радиус описанной окружности выражается формулой $a = \sqrt{2}R$, поэтому площадь квадрата $S_1 = 2R^2$.

Полагая в формуле (1.5.1) $S_g = S_1$, $S_G = S$, находим искомую вероятность

$$P(A) = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637 .$$

З а м е ч а н и е. Выражение стороны квадрата через радиус окружности можно получить следующим образом. Из $\Delta\, KMN$ по теореме Пифагора $KN^2 + NM^2 = KM^2$, т.е. $a^2 + a^2 = (2R)^2$, $2a^2 = 4R^2$, $a^2 = 2R^2$, $a = \sqrt{2}R$.

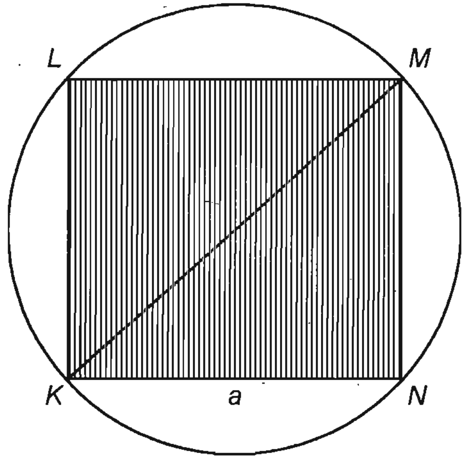


Рис. 1.2

П р и м е р 2. В квадрат (рис. 1.3) с вершинами в точках $O(0, 0)$, $K(0, 1)$, $L(1, 1)$, $M(1, 0)$ наудачу брошена точка $Q(x, y)$. Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > \dfrac{1}{2}x$.

Р е ш е н и е. Проведем прямую $y = (1/2)x$, она пересечет отрезок ML в точке $N(1; 1/2)$. Эта прямая рассекает плоскость на две полуплоскости: для координат точек первой из них (верхней) будет выполняться неравенство $y > x/2$, для второй (нижней) - неравенство $y < x/2$.

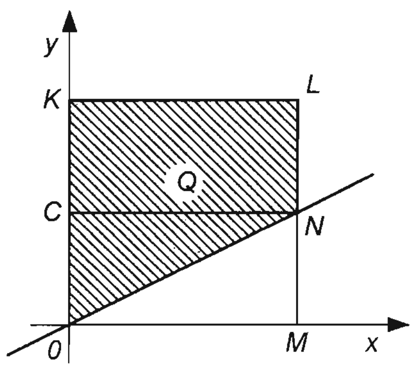


Рис. 1.3

Все точки, принадлежащие квадрату $OKLM$ и координаты которых удовлетворяют неравенству $y > x/2$, находятся в многоугольнике *OKLN*. Этот многоугольник состоит из прямоугольника *CKLN* и треугольника *OCN*, его площадь $S_1 = 1/2 + 1/4 = 3/4$. Площадь S квадрата *OKLM* равна единице: $S = 1$. В соответствии с формулой (1.5.1), приняв $S_1 = S_g$, $S = S_G$, найдем искомую вероятность

$$P(A) = \frac{S_1}{S} = \frac{3/4}{1} = 3/4 = 0{,}75.$$

Пример 3. (*Задача Бюффона*). Плоскость расчерчена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно a. На эту плоскость бросается наудачу отрезок длины $l(l < a)$. Какова вероятность того, что отрезок пересекается хотя бы с одной из прямых семейства?

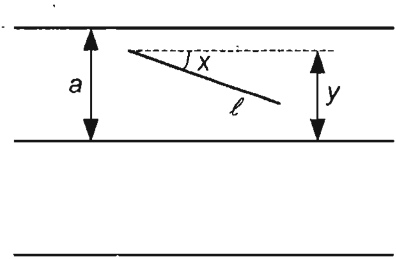


Рис. 1.4

Решение. Расстояние от верхнего конца отрезка до ближайшей снизу прямой обозначим через y (рис. 1.4). Угол между отрезком и лучом, параллельным прямым семейства, начало которого совпадает с верхним концом отрезка, обозначим через x. Очевидно, $0 \le y \le a$, $0 \le x \le \pi$. Для того, чтобы отрезок пересекал хотя бы одну из прямых семейства, необходимо и достаточно, чтобы $y = a$ или $y \le l \sin x$. Выражение "отрезок брошен наудачу" будем понимать так: точка (x, y) наудачу брошена на прямоугольник: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le a$ (рис 1.5). Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \le l \sin x$, образуют фигуру, заштрихованную на рис 1.5. Площадь этой фигуры

$$S_1 = \int_0^{\pi} l \sin x\, dx = -l \cos x \Big|_0^{\pi} = 2l.$$

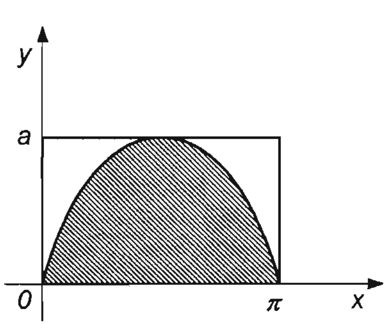


Рис. 1.5

Площадь всего прямоугольника есть $S = a\pi$. По формуле (1.5.1), приняв $S_g = S_1$, $S_G = S$, найдем искомую вероятность

$$P(A)=\frac{S_1}{S}=\frac{2l}{a\pi},$$

где A - событие "отрезок пересекается хотя бы с одной прямой".

Замечание. В случае $l=a$ вероятность такова:

$$P(A)=\frac{2}{\pi}\approx 0{,}637.$$

Пример 4. В шар вписан куб. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадет в куб.

Решение. Введем обозначения: событие A - "попадание точки в куб"; R - радиус шара, a - ребро куба, V - объем шара, V_1 - объем вписанного куба.

Как известно, $V=\frac{4}{3}\pi R^3$; поскольку $V_1=a^3$ и $a=2R/\sqrt{3}$, то $V_1=\frac{8}{3\sqrt{3}}R^3$. В соответствии с формулой (1.5.2), приняв $V_g=V_1$, $V_G=V$, получим

$$P(A)=\frac{V_1}{V}=\frac{(8/3\sqrt{3})R^3}{(4/3)\pi R^3}=\frac{2}{\pi\sqrt{3}}\approx 0{,}368.$$

Пример 5. На плоскости область G ограничена эллипсом $x^2/49+y^2/16=1$, а область g - эллипсом $x^2/25+y^2/9=1$ (рис. 1.6). В область G брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадет в область g?

Решение. Прежде всего, вычислим площадь области, ограниченной эллипсом $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, записав его параметрическое уравнения: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Поскольку эллипсис симметричен относительно координатных осей, то достаточно вычислить площадь

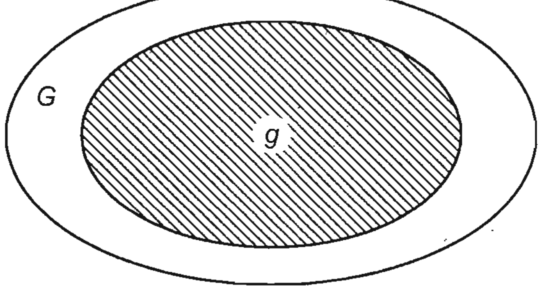


Рис. 1.6

четвертой части указанной области:

$$S = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\pi/2}^0 b\sin t(-a\sin t)dt = -4ab\int_{\pi/2}^0 \sin^2 t\,dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\int_0^{\pi/2} dt - 2ab\int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt = \pi\,ab.$$

Таким образом, площадь S области, ограниченной эллипсом $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, выражается формулой $S = \pi\,ab$, где a и b - полуоси эллипса.

В данном случае $S_G = \pi \cdot 7 \cdot 4 = 28\pi$, $S_g = \pi \cdot 5 \cdot 4 = 20\pi$. По формуле (1.5.1) находим искомую вероятность

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{20\pi}{28\pi} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7} \approx 0{,}714 .$$

Пример 6. Точка брошена в область G, ограниченную эллипсом $x^2 + 4y^2 = 8$. Какова вероятность того, что она попадет в область g, ограниченную этим эллипсом и параболой $x^2 - 4y = 0$? (На рис. 1.7 указанная область g заштрихована).

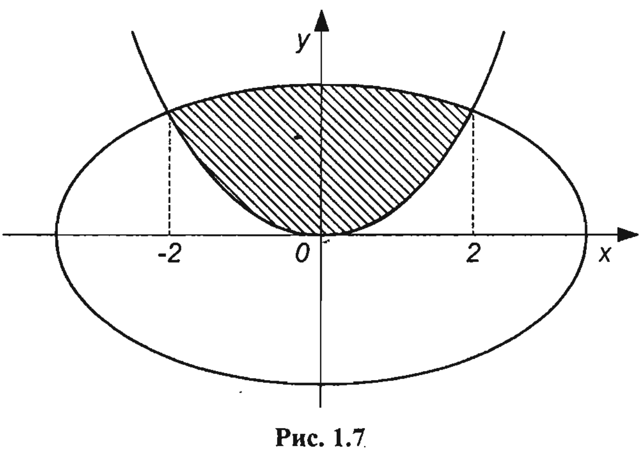


Рис. 1.7

Решение. Площадь области G, ограниченной эллипсом

$x^2+4y^2=8$, или $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$, вычислим по формуле $S_G=\pi\, ab$ (см. пример 5). Так как в данном случае $a=2\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$, то $S=4\pi$.

Для вычисления площади области g воспользуемся формулой

$$S=\int_a^b (y_2-y_1)\,dx.$$

Решая систему уравнений $x^2+4y^2=8$, $x^2=4y$, находим $x_1=-2$, $x_2=2$ - абсциссы точек пересечения заданных линий; следовательно, $a=-2,\ b=2$. Каждое из уравнений разрешаем относительно y:

$$y_1=\frac{x^2}{4},\ y_2=\frac{\sqrt{8-x^2}}{2}.$$

Находим площадь области g:

$$S_g=\int_{-2}^{2}\left(\frac{\sqrt{8-x^2}}{2}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx-\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}x^2\,dx.$$

Второй интеграл вычислим непосредственно:

$$S_2=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}x^2\,dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{1}{12}(8+8)=\frac{4}{3}.$$

Для вычисления второго интеграла применяем подстановку $x=2\sqrt{2}\sin t$; тогда $dx=2\sqrt{2}\cos t\,dt$, $\alpha=-\pi/4,\ \beta=\pi/4$.

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sqrt{8-8\sin^2 t}\cdot 2\sqrt{2}\cos t\,dt=$$

$$=2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 2t)\,dt=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\pi+2.$$

Итак,

$$S_g=S_1-S_2=\pi+2-\frac{4}{3}=\pi+\frac{2}{3}.$$

В соответствии с формулой (1.5.1) находим искомую вероятность

$$P(A)=\frac{S_g}{S_G}=\frac{\pi+2/3}{4\pi}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6\pi}\approx 0{,}303.$$

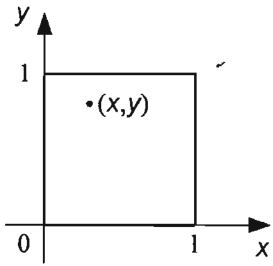


Рис. 1.8

Пример 7. На отрезок единичной длины бросают наудачу две точки. Они разбивают отрезок на три части. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник?

Решение. Заданный отрезок рассматриваем как отрезок [0;1] числовой прямой. Координаты брошенных точек обозначим через x и y; это числа из отрезка [0,1]. Числа x и y можно рассматривать как координаты точки на плоскости (рис. 1.8). Так как $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, то точки $(x; y)$ наудачу брошены в квадрат со стороной $a=1$. Чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, необходимо и достаточно выполнение неравенства треугольника для длин его сторон: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. При $x\le y$ (рис. 1.9) получаем неравенства

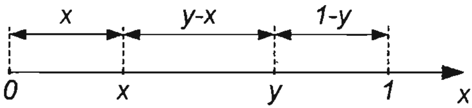


Рис. 1.9

$$x<(y-x)+(1-y),\ \ y-x<x+(1-y),\ \ 1-y<x+(y-x),$$

откуда после преобразования имеем систему неравенств

$$x<0{,}5,\quad y<x+0{,}5,\quad 0{,}5<y,\quad x\le y.$$

Эта система неравенств определяет на плоскости треугольник (рис. 1.10, верхний треугольник). При $x>y$ (рис. 1.11) получаем систему неравенств

$$x>0{,}5,\ y<0{,}5,\ y>x-0{,}5,\ x>y,$$

которая определяет на плоскости второй (нижний) треугольник (рис. 1.10). Поскольку $S_G=1$ (площадь единичного квадрата), $S_g=0{,}25$ (площадь двух треугольников, заштрихованных на рис. 1.10), то вероят-

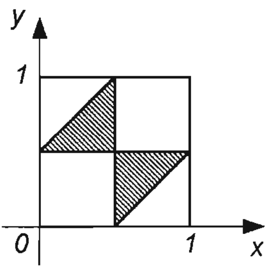


Рис. 1.10

ность получить треугольник из указанных отрезков равна 0, 25.

Пример 8. На отрезке [0;2] наудачу выбраны два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \le 4y \le 4x$.

Рис. 1.11

Решение. По условию задачи координаты точки (x, y) удовлетворяют системе неравенств

$$0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le 2.$$

Это означает, что точка (x, y) наудачу выбирается из множества точек квадрата со стороной $a = 2$ (рис. 1.12).

Точки квадрата, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$x^2 \le 4y \le 4x, \text{ или } \frac{x^2}{4} \le y \le x,$$

принадлежат фигуре, заштрихованной на рис. 1.12. Найдем площадь S_g этой фигуры

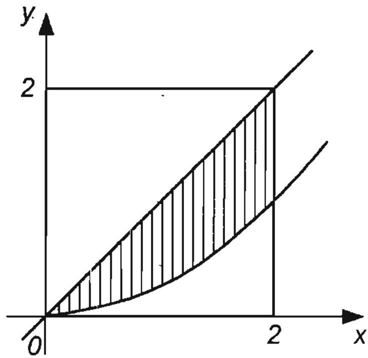


Рис. 1.12

$$S_g = \int_0^2 (x - \frac{x^2}{4})\, dx = -\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 - \frac{x^3}{12}\bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Поскольку площадь квадрата $S_G = 4$, то искомая вероятность

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{4}{3} : 4 = \frac{1}{3}.$$

Пример 9. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода равно одному часу, а второго - двум часам.

Решение. Обозначим через x и y время прибытия пароходов. Возможные значения x и y: $0 \le x \le 24$, $0 \le y \le 24$. Благоприятствующие значения $y-x\le 1$, $x-y\le 2$. Эти неравенства определяют область, заштрихованную на рис. 1.13. Площадь этой области $S_g = 24\cdot 24 - 0{,}5\cdot 23\cdot 23 - 0{,}5\cdot 22\cdot 22 = 69{,}5$. Поскольку $S_G = 24\cdot 24 = 576$, то

$$P = \frac{S_g}{S_G} = \frac{69{,}5}{576} \approx 0{,}121.$$

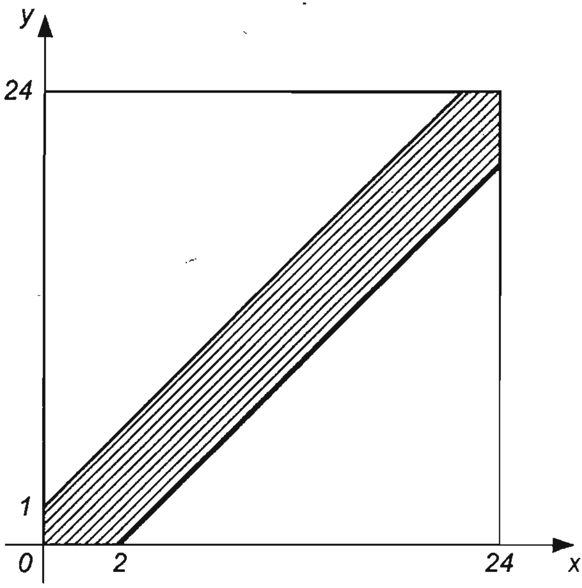


Рис. 1.13

Пример 10. Взяты наугад два положительных числа, каждое из которых не больше единицы. Какова вероятность того, что их сумма не превзойдет единицы, а произведение будет не больше 2/9?

Решение. Обозначим взятые числа через x и y. Их возможные значения удовлетворяют неравенствам: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, которые на плоскости определяют единичный квадрат с площадью $S_G = 1$. Благоприятствующие значения x и y определены условиями: $x+y\le 1$, $x\cdot y\le 2/9$; область g ограничена отрезками прямой $x+y=1$ и дугой гиперболы $x\cdot y = 2/9$. Абсциссы точек пересечения прямой и гиперболы: $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$. Прямая $x + y = 1$ делит квадрат пополам, причем область $x + y \le 1$ представляет собой нижний треугольник (рис. 1.14). Область g состоит из трапеции, криволинейной трапеции и треугольника, ее площадь

$$S_g = S_1 + S_2 + S_3,$$

причем

$$S_1 = 5/18, \; S_3 = 1/18,$$

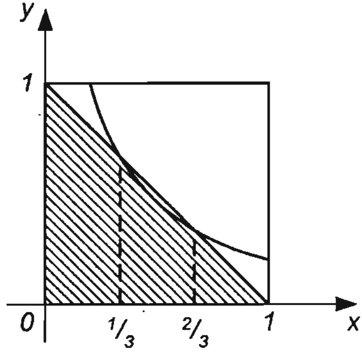


Рис. 1.14

$$S_2 = \frac{2}{9}\int_{1/3}^{2/3}\frac{dx}{x} = \frac{2}{9}\ln 2 \approx \frac{2}{9}\cdot 0{,}6931 \approx 0{,}154;$$

$$S_g = \frac{1}{3} + 0{,}154 \approx 0{,}467.$$

Следовательно, искомая вероятность

$$P = \frac{S_g}{S_G} = 0{,}467.$$

Пример 11. В прямоугольник с вершинами K (-1, 0), L(-1, 5), M(2, 5), N(2, 0) брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты (x, y) будут удовлетворять неравенствам $x^2 + 1 \le y \le x + 3$?

Решение. Точки, координаты которых удовлетворяют указанным неравенствам, принадлежат области g, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = x + 3$ (рис. 1.15). Эти линии пересекаются в точках $Q(-1, 2)$ и $M(2, 5)$. Вычислим площадь области g:

$$S_g = \int_{-1}^{2}(y_2 - y_1)\,dx = \int_{-1}^{2}(x + 3 - (x^2 + 1))\,dx = \int_{-1}^{2}(x - x^2 + 2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}\left(2^2 - (-1)^2\right) - \frac{1}{3}\left(2^3 - (-1)^3\right) + 2\left(2 - (-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3 - \frac{1}{3}\cdot 9 + 2\cdot 3 = \frac{3}{2} - 3 + 6 = 4{,}5.$$

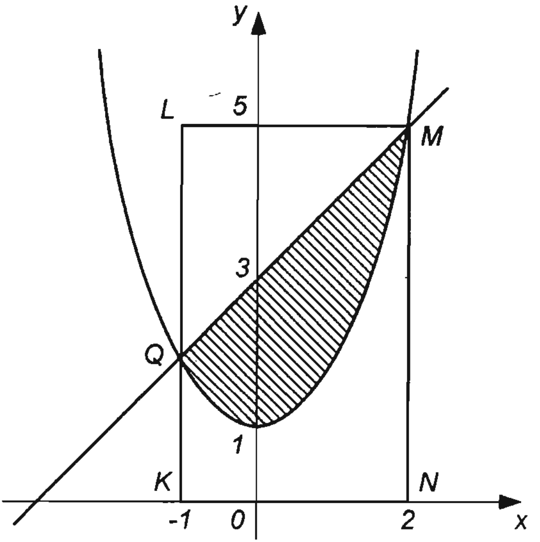


Рис. 1.15

Областью G здесь является прямоугольник с вершинами K, L, M, N. Поскольку $a = |KM| = |2-(-1)| = 3$, $h = NM = |5-0| = 5$, то площадь области G определяется формулой

$$S_G = ah = 3 \cdot 5 = 15 .$$

В соответствии с формулой (1.5.1) находим искомую вероятность события A - "попадания точки в область g":

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{4{,}5}{15} = 0{,}3 .$$

Пример 12. Область G ограничена эллипсоидом $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$, а область g - этим эллипсоидом и сферой $x^2+y^2+z^2=4$. В области G наудачу зафиксирована точка. Какова вероятность того, что она принадлежит области g (событие A)?

Решение. Объем V тела, ограниченного эллипсоидом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ выражается формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi\, abc ,$$

поэтому

$$V_G = \frac{4}{3}\pi\, 4 \cdot 3 \cdot 2 = 32\pi .$$

Объем шара радиуса R определяется формулой

$$V = \frac{4}{3}\pi\, R^3 ,$$

поэтому при $R = 2$ имеем

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi .$$

Объем области g:

$$V_G - V_1 = 32\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{96-32}{3}\pi = \frac{64}{3}\pi, \ V_G = \frac{64}{3}\pi .$$

По формуле (1.5.2.) вычисляем искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{V_g}{V_G} = \frac{2}{3} .$$

Задачи

1. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 6 и 12 см соответственно. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное указанными окружностями?

2. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник.

3. В квадрат с вершинами $O(0, 0)$, $K(0, 1)$, $L(1, 1)$, $M(1, 0)$ наудачу брошена точка $Q(x, y)$. Какова вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству $y > 2x$?

4. В шар вписана правильная треугольная пирамида. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность попадания точки в пирамиду.

5. Стержень длиной l произвольным образом сломан на три части. Какова вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник?

6. На плоскости область G ограничена эллипсом $x^2/36 + y^2/25 = 1$, а область g - этим эллипсом и эллипсом $x^2/9 + y^2/4 = 1$. В область G брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадет в область g?

7. В прямоугольник с вершинами $K(-2, 0)$, $L(-2, 5)$, $M(1, 5)$, $N(1, 0)$ брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты (x, y) будут удовлетворять неравенствам $x^2 + 1 \le y \le 3 - x$?

8. В области G, ограниченной эллипсоидом $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, наудачу зафиксирована точка. Какова вероятность того, что координаты x, y, z этой точки будут удовлетворять неравенству $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$?

9. В прямоугольник с вершинами $R(-2, 0)$, $L(-2, 9)$, $M(4, 9)$, $N(4, 0)$ брошена точка. Найти вероятность того, что ее координаты будут удовлетворять неравенствам $0 \le y \le 2x - x^2 + 8$.

10. Область G ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 25$, а область g - этой окружностью и параболой $16x - 3y^2 = 0$. В область G брошена точка. Какова вероятность того, что она попадет в область g?

Ответы

1. 0,75. **2.** $3\sqrt{3}/4\pi \approx 0{,}4137$. Указание. Сторона a треугольника через радиус R описанной окружности выражается формулой $a = \sqrt{3}R$. **3.** 0,25. **4.** $2/3\sqrt{3}\pi \approx 0{,}123$. Указание. $a = 4R/\sqrt{6}$. **5.** 0,25. **6.** 5/6. **7.** 0,3. **8.** 1/3. **9.** 2/3. **10.** $\approx 0{,}352$.

Вопросы

1. Как определяется геометрическая вероятность в общем случае?
2. Как определяется геометрическая вероятность в пространственном случае?
3. Как определяется геометрическая вероятность в плоском случае?
4. Как определяется геометрическая вероятность в линейном случае?
5. Каковы свойства геометрической вероятности?
6. Приведите собственный пример на геометрическую вероятность.

§ 1.6. Действия над событиями. Соотношения между событиями

Суммой, или *объединением*, двух событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Сумма двух событий A и B обозначается через $A+B$ или $A \cup B$. Аналогично определяется и обозначается сумма n событий - событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Сумму n событий $A_1, A_2, ..., A_n$ обозначают так:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k \text{, или } A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k .$$

Произведением, или *пересечением*, двух событий называется событие, состоящее в одновременном их появлении. Произведение двух событий A и B обозначается через AB или $A \cap B$. Аналогично определяется и обозначается произведение в случае большего числа событий. Произведение n событий $A_1, A_2, ..., A_n$ обозначают:

$$A_1 A_2 \ldots A_n \text{ или } A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n .$$

Понятия суммы и произведения событий распространяются и на бесконечные последовательности событий. В этих случаях, например, применяют соответственно обозначения:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k ,$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k .$$

Если событие A обязательно произойдет при появлении некоторого другого события B, то говорят, что событие B представляет собой *частный случай* события A, и пишут $B \subset A$, или $A \supset B$ (говорят также, что B влечет A).

Если $B \subset A$ и $A \subset B$, т.е. события A и B в данном опыте могут появиться или не появиться вместе, то их называют *равносильными*, или *эквивалентными*, и пишут $A=B$.

Операции объединения и пересечения событий обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам сложения и умножения чисел. Эти операции коммутативны:

$$A \cup B = B \cup A , \; A \cap B = B \cap A ; \tag{1.6.1}$$

ассоциативны:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup B = A \cup B \cup C ; \tag{1.6.2}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B = A \cap B \cap C \tag{1.6.3}$$

и дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C). \tag{1.6.4}$$

Указанные свойства следуют из определения действий объединения и пересечения событий.

Не все законы сложения и умножения чисел справедливы для объединения и пересечения событий. Например, для любого события A выполняются равенства

$$A \cup A = A , \; A \cap A = A . \tag{1.6.5}$$

Если U - достоверное, V - невозможное событие, A - любое событие, $\overline{A}$ - событие, противоположное A, то выполняются равенства:

$$A \cap \overline{A} = V, \text{ или } A \cdot \overline{A} = V . \tag{1.6.6}$$

$$A \cup \overline{A} = U , \text{ или } A + \overline{A} = U . \tag{1.6.7}$$

$$A \cup V = A\text{, или } A + V = A. \tag{1.6.8}$$

$$A \cap V = V\text{, или } A \cdot V = V. \tag{1.6.9}$$

$$A \cup U = U\text{, или } A + U = U. \tag{1.6.10}$$

$$A \cap U = A\text{, или } A \cdot U = A. \tag{1.6.11}$$

Из свойств операций пересечения и объединения следует, что для любых событий A и B имеем $A = AU = A(B + \overline{B}) = AB + A\overline{B}$, т.е.

$$A = AB \cup A\overline{B}\text{, или } A = AB + A\overline{B}. \tag{1.6.12}$$

Формула (1.6.12) дает разложение любого события A на сумму двух непересекающихся (несовместных) событий.

Если $B \subset A$, то $AB = B$ и формула (1.6.12) принимает вид

$$A = B \cup A\overline{B}\text{, или } A = B + A\overline{B}. \tag{1.6.13}$$

Разностью событий A и B называется событие C, которое означает, что наступает событие A и не происходит событие B. Разность событий A и B обозначается так: $A - B$, или $A \setminus B$.

Пример 1. Подбрасывается игральный кубик. Обозначим события: A - "выпадение шести очков", B - "выпадение трех очков", C - "выпадение четного числа очков", D - "выпадение числа очков, кратного трем". Каковы соотношения между этими событиями?

Решение. Если выпало шесть очков, то тем самым выпало и четное число очков, т.е. событие A влечет событие C: $A \subset C$. Рассуждая аналогично, получаем $A \subset D$, $B \subset D$, $A + B = D$, $C \cdot D = A$.

Пример 2. Опыт - подбрасывание игрального кубика. События: $A_k (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ - "выпадение k очков", A - "выпадение четного числа очков", B - "выпадение нечетного числа очков", C - "выпадение числа очков, кратного трем", D - "выпадение числа очков, большего трех". Выразить события A, B, C и D через события A_k.

Решение. Событие A наступает тогда и только тогда, когда наступает A_2, или A_4, или A_6. Это означает, что $A = A_2 + A_4 + A_6$. Рассуждая аналогичным образом, получаем: $B = A_1 + A_3 + A_5$, $C = A_3 + A_6$, $D = A_4 + A_5 + A_6$.

Пример 3. Пусть A, B, C - произвольные события. Что означают следующие события: $\overline{A}BC$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$, $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$, $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$?

Решение. В соответствии с определением $\overline{A}BC$ - произведение трех событий $\overline{A}, B, C$, которые происходят одновременно, причем $\overline{A}$ - событие, противоположное событию A. Следовательно, $\overline{A}BC$ означает, что событие A не произошло, а события B и C произошли. Рассуждая аналогично, заключаем, что: $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ - ни одно из трех данных событий не произошло, $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ - хотя бы одно из трех событий не произошло; $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$ - произошло ровно одно из трех событий; $\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$ - произошло не более одного из трех событий.

Пример 4. Опыт состоит в том, что стрелок производит 3 выстрела по мишени. Событие A_k - "попадание в мишень при k-ом выстреле (k=1, 2, 3)". Выразить через A_1, A_2, A_3 следующие события: A - "хотя бы одно попадание", B - "три попадания"; C - "три промаха"; D - "хотя бы один промах"; E - "не меньше двух попаданий"; F - "не более одного попадания"; G - "попадание после первого выстрела".

Решение. Событие A наступает тогда и только тогда, когда наступает A_1, или A_2, или A_3. Это означает, что $A = A_1 + A_2 + A_3$. Три попадания будет тогда и только тогда, когда попадание наступит при каждом выстреле, т.е. события A_1, A_2, A_3 осуществляются все вместе: $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Три промаха будет тогда и только тогда, когда промах явится результатом каждого выстрела, т.е. события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ осуществляются все вместе: $C = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$. Рассуждая аналогично, заключаем, что: $D = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$, $E = A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3$, $F = \overline{A_1}\overline{A_2} + \overline{A_1}\overline{A_3} + \overline{A_2}\overline{A_3}$, $G = \overline{A_1}(A_2 + A_3)$.

Пример 5. Опыт - извлечение детали из ящика, в котором находятся изделия трех сортов. Обозначения событий: A - "извлечена деталь первого сорта", B - "извлечена деталь второго сорта", C - "извлечена деталь третьего сорта". Что представляют собой следующие события: $A+B$; $\overline{A+C}$; AC, $AB+C$?

Решение. $A+B$ - это событие, которое происходит при наступлении хотя бы одного из событий A и B. Следовательно, $A+B$ в данном случае - деталь первого или второго сорта. Поскольку $A+C$ - деталь первого или третьего сорта, то противоположное этому событие $\overline{A+C}$ - деталь второго сорта. AC - невозможное событие, поскольку деталь одновременно не может быть и первого и третьего сорта. $AB+C$ как сумма невозможного события и события C равно C, т.е. $AB+C$ - деталь третьего сорта.

Пример 6. Доказать, что $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

Решение. Для доказательства этого равенства достаточно показать, что $\overline{A+B}\subset\overline{A}\cdot\overline{B}$ и $\overline{A}\cdot\overline{B}\subset\overline{A+B}$. Если наступило событие $\overline{A+B}$, то это означает, что произошло событие, противоположное $A+B$, т.е. наступили $\overline{A}$ и $\overline{B}$ одновременно: $\overline{A+B}\subset\overline{A}\cdot\overline{B}$. С другой стороны, если произошло событие $\overline{A}\cdot\overline{B}$, то это означает, что произошло и $\overline{A}$ и $\overline{B}$, т.е. не наступило ни одно из событий A и B: $\overline{A}\cdot\overline{B}\subset\overline{A+B}$. Итак, поскольку $\overline{A+B}\subset\overline{A}\cdot\overline{B}$ и $\overline{A}\cdot\overline{B}\subset\overline{A+B}$, то по определению $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$.

Пример 7. Доказать, что $(A+C)(B+C)=AB+C$.

Решение. Принимая во внимание равенства (1.6.1), (1.6.4),(1.6.5), (1.6.10), (1.6.11), получаем

$$(A+C)(B+C)=A(B+C)+C(B+C)=AB+AC+CB+CC=$$
$$=AB+(A+B)C+C=AB+(A+B)C+CU=AB+(A+B+U)C=$$
$$=AB+UC=AB+C.$$

(Здесь U - достоверное событие).

Пример 8. Упростить выражение $(A+B)(A+\overline{B})$.

Решение. Обозначая достоверное событие через U, невозможное событие - через V и учитывая формулы (1.6.1), (1.6.4), (1.6.5) - (1.6.8) и (1.6.11), получаем

$$(A+B)(A+\overline{B})=A(A+\overline{B})+B(A+\overline{B})=AA+A\overline{B}+BA+B\overline{B}=$$
$$=A+A(B+\overline{B})+V=A+AU+V=A+A+V=A+V=A.$$

Итак, $(A+B)(A+\overline{B})=A$.

Пример 9. Упростить выражение $(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$.

Решение. С учетом формул (1.6.1), (1.6.4), (1.6.5) - (1.6.8), (1.6.11) находим, что

$$(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}(\overline{A}+\overline{B})+B(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}\overline{A}+\overline{A}\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}=$$
$$=\overline{A}\overline{A}+\overline{A}(\overline{B}+B)+B\overline{B}=\overline{A}+\overline{A}U+V=\overline{A}+\overline{A}+V=\overline{A}+V=\overline{A}.$$

Следовательно, $(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}$.

Пример 10. Доказать, что $(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=V$.

Решение. Поскольку $(A+B)(A+\overline{B})=A$ (см. пример 8) и

$(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}$ (см. пример 9), то

$$(A+B)(A+\overline{B})(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})=\left[(A+B)(A+\overline{B})\right]\cdot\left[(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})\right]=A\overline{A}=V,$$

где V - невозможное событие.

Задачи

1. Опыт состоит в подбрасывании трех монет. Монеты занумерованы и события A_1, A_2, A_3 означают выпадение герба соответственно на первой, второй и третьей монетах. Выразите через A_1, A_2, A_3 следующие события: A - "выпадение одного герба и двух цифр"; B - "выпадение не более одного герба"; C - "число выпавших гербов меньше числа выпавших цифр"; D - "выпадение хотя бы двух гербов"; E - "на первой монете выпал герб, а на остальных - цифры"; F - "на первой монете выпала цифра и хотя бы на одной из остальных выпал герб".

2. Через произвольные события A, B, C найти выражения для следующих событий: а) произошло только событие A; б) произошло A и B, но C не произошло; в) произошли все три события; г) произошло, по крайней мере, одно из этих событий; д) произошло, по крайней мере, два события; е) произошло одно и только одно событие; ж) произошло два и только два события; з) ни одно событие не произошло; и) произошло не более двух событий.

3. Упростите выражение $(A+B)(B+C)(C+A)$.

4. Докажите, что $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A+B$ и $\overline{\overline{C}+\overline{D}}=CD$.

5. Упростите выражение $(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$.

6. Докажите, что $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

7. Докажите, что $\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}$,

$\overline{A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\ldots+\overline{A_n}$.

Ответы

1. $A=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$; $B=\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,\overline{A_3}+\overline{A_2}\,\overline{A_3}$; $C=B$; $D=A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$; $E=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$; $F=\overline{A_1}(A_2+A_3)$. **2.** а) $A\overline{B}\,\overline{C}$, б) $AB\overline{C}$, в) ABC, г) $A+B+C$, д) $AB+AC+BC$, е) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$, ж) $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}=(AB+AC+BC)-ABC$, з) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, и) $\overline{ABC}$. **3.** $AB+BC+AC$. **5.** U.

Вопросы

1. Что называют суммой, или объединением, двух событий?
2. Как обозначают сумму двух событий?

3. Приведите примеры суммы двух событий.
4. Что называют суммой, или объединением, нескольких событий?
5. Что называют произведением, или пересечением, двух событий?
6. Как обозначают произведение двух событий?
7. Что называют произведением нескольких событий?
8. Приведите примеры произведения трех событий.
9. Что называют разностью двух событий?
10. Приведите примеры разности двух событий.

§ 1.7. Аксиоматическое определение вероятности

Теорию вероятностей, как и всякую математическую науку, можно строить аксиоматическим методом. Аксиомы теории вероятностей вводятся так, чтобы вероятность обладала основными свойствами частоты.

Пространством элементарных событий называют произвольное множество Ω, а его элементы ω - *элементарными событиями*. Эти понятия являются первоначальными. В реальных опытах элементарным событиям соответствуют взаимно исключающие итоги опыта.

Событиями будем называть подмножества множества Ω и обозначать заглавными буквами латинского алфавита A, B, C и т.д. Не исключаются случаи, когда такое подмножество содержит лишь один элемент, совпадает со всем множеством Ω или является пустым. Пустое множество $\varnothing$ называют *невозможным событием*, а множество Ω - *достоверным событием*. *Случайным событием* называют любое собственное (т.е. отличное от $\varnothing$ и Ω) подмножество множества Ω.

Событие $\overline{A} = \Omega - A$ называется *противоположным* событию A; событие $\overline{A}$ означает, что событие A не произошло. События A и B называются *несовместными*, если их произведение - невозможное событие: $AB = \varnothing$. События $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу событий, если $A_i A_k = \varnothing \; (i \neq k)$ и $A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$.

Аксиомы теории вероятностей можно ввести следующим образом. Пусть Ω - произвольное пространство элементарных событий, L - некоторая система случайных событий. Система L случайных событий называется *алгеброй событий*, если выполнены условия: 1) $\Omega \in L$; 2) если $A \in L$, $B \in L$, то $AB \in L$, $(A+B) \in L$, $(A \setminus B) \in L$. Другими словами, L - алгебра событий, если вместе с любыми двумя событиями она содержит их сумму, произведение и разность, а также множество Ω. Из этих условий следует, что пустое множество $\varnothing$ также принадлежит L. Действительно, поскольку $\varnothing = \Omega - \Omega$ и $\Omega \in L$, то $\varnothing \in L$.

Алгебра событий L называется *σ-алгеброй*, или *борелевской алгеб-*

рой, если из того, что $A_n \in L$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), следует, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in L, \ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in L.$$

Введем понятие вероятности события. Числовая функция $P(A)$, определенная на алгебре событий L, называется *вероятностью*, если выполнены следующие *аксиомы*.

1. Каждому событию из L ставится в соответствие неотрицательное число $P(A)$ - его вероятность, т.е. для любого $A \in L$

$$P(A) \geq 0. \tag{1.7.1}$$

2. Вероятность достоверного события равна единице:

$$P(\Omega) = 1. \tag{1.7.2}$$

3. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1.7.3}$$

Очевидно, эти аксиомы аналогичны соответствующим свойствам частоты события (см. § 1.4).

Для решения задач, связанных с бесконечными последовательностями событий, аксиомы 1-3 требуется дополнить еще одной аксиомой (*аксиомой непрерывности*).

4. Для любой убывающей последовательности $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ событий из L такой, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0. \tag{1.7.4}$$

Тройка (Ω, L, P), в которой L является σ-*алгеброй* и P удовлетворяет аксиомам 1-4, называется *вероятностным пространством.* Таким образом, математической моделью любого случайного явления в современной теории вероятностей служит вероятностное пространство.

Приведем примеры, поясняющие введенные понятия.

1. Рассмотрим опыт с подбрасыванием игрального кубика. В этом опыте пространство элементарных событий есть множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_6\}$, где ω_k - элементарный исход опыта, заключающийся в выпадении k очков. Алгебра событий L для этого множества состоит из $2^6 = 64$ подмножеств множества G, которые содержат по одному, два, три, четыре, пять, шесть элементарных событий и пустое множество: $\varnothing$, $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_6\}; \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \ldots, \{\omega_5, \omega_6\}$,

$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \ldots, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \ldots, \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_5\}, \ldots, \Omega$.

2. Дан единичный квадрат

$$\Omega = \{(U, V) : 0 \le U \le 1,\ 0 \le V \le 1\}$$

в некоторой плоскости. Рассмотрим систему L всех квадрируемых множеств квадрата Ω, т.е. его фигур, имеющих площадь. Объединение, пересечение и разность квадрируемых фигур является квадрируемой фигурой. Следовательно, система L квадрируемых множеств квадрата Ω образует алгебру событий.

3. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, алгебра событий L состоит из всех подмножеств $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, $1 \le i_1 \le i_2 \le i_m$ $(m = 1, 2, ..., n)$ и множества Ω. Функцию $P(A)$ определим формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1.7.5)$$

Получено классическое определение вероятности. Тройка (Ω, L, P) образует вероятностное пространство.

4. Пусть Ω - любая квадрируемая область плоскости. Рассмотрим систему L квадрируемых подмножеств A множества Ω. Для любого $A \in L$ положим

$$P(A) = \frac{S_A}{S}, \qquad (1.7.6)$$

где S_A - площадь области A; S - площадь области Ω. Получено (Ω, L, P) - вероятностное пространство и геометрическое определение вероятности.

5. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\ ..., \omega_n, ...\}$ - счетное множество, L - система всех его подмножеств. Очевидно, L является σ-алгеброй. Пусть P_n (n = 1, 2, 3, ...) - последовательность неотрицательных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1. \qquad (1.7.7)$$

Для любого $A \in L$ положим

$$P(A) = \sum P_n,$$

где суммирование распространено на все n, для которых $\omega_n \in A$. Если эта сумма будет конечной, то получим определенное число; если это числовой ряд, то он сходится в силу (1.7.7). Функция $P(A)$ удовлетворяет аксиомам 1-4. Полученное вероятностное (Ω, L, P) называется *дис-*

кретным вероятностным пространством.

Пример 1. Доказать, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

Решение. Так как $A+\overline{A}=\Omega$, A и $\overline{A}$ несовместные события, то по аксиоме 3

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

Поскольку Ω - достоверное событие, то

$$P(\Omega)=1 \text{ (по аксиоме 2).}$$

Далее,

$$P(A+\overline{A})=P(\Omega).$$

С учетом двух предыдущих равенств получаем

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (1.7.8)$$

Пример 2. Доказать, что вероятность невозможного события равна нулю.

Решение. В равенстве (1.7.8) положим $A=\Omega$, $\overline{A}=\varnothing$, тогда

$$P(\Omega)+P(\varnothing)=1.$$

Поскольку по аксиоме 2 $P(\Omega)=1$, то

$$P(\varnothing)=0. \qquad (1.7.9)$$

Пример 3. Доказать, что для попарно-несовместных событий $A_1, A_2,\ldots, A_n$ справедливо равенство

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n) \qquad (1.7.10)$$

Решение. При $n=2$ это равенство выполняется (по аксиоме 3).

Предположим, что оно справедливо для $n=k-1$; докажем, что оно будет выполняться и для $n=k$. Действительно,

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_{k-1}+A_k)=P((A_1+A_2+\ldots+A_{k-1})+A_k)=$$
$$=P(A_1+A_2+\ldots+A_{k-1})+P(A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_{k-1})+P(A_k).$$

Значит, равенство (1.7.10) верно для всех n.

Пример 4. Доказать, что для любых событий A и B верна теорема сложения вероятностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.7.11)$$

Решение. Представим события $A+B$ и B в виде соответствующих сумм несовместных событий $A+B=A+B\overline{A}$, $B=B\overline{A}+BA$ (см. формулу (1.6.12). Применяя аксиому 3, получаем

$$P(A+B)=P(A)+P(B\overline{A}),\ P(B)=P(B\overline{A})+P(AB).$$

Определив $P(B\overline{A})$ из второго равенства и подставив в первое, получим формулу (1.7.11).

Пример 5. Доказать, что

$$P(A+B)\le P(A)+P(B). \qquad (1.7.12)$$

Решение. Обратимся к формуле (1.7.11). Поскольку $P(AB)\ge 0$, то $P(A+B)\le P(A)+P(B)$.

Отсюда для любых $A_1, A_2,..., A_n$ по индукции следует неравенство

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)\le P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Пример 6. Доказать, что если событие A влечет событие B $(A\subset B)$, то

$$P(A)\le P(B). \qquad (1.7.13)$$

Решение. В этом случае $B=A+\overline{A}B$ (см. формулу (1.6.13)), поэтому

$$P(B)=P(A)+P(\overline{A}B).$$

Поскольку $P(\overline{A}B)\ge 0$, то $P(B)\ge P(A)$, или $P(A)\le P(B)$.

Пример 7. Доказать, что вероятность любого события A удовлетворяет неравенствам

$$0\le P(A)\le 1. \qquad (1.7.14)$$

Решение. Поскольку $\varnothing\subset A\subset\Omega$, $P(\varnothing)=0$, $P(\Omega)=1$, то из (1.7.13) следует, что

$$P(\varnothing)\le P(A)\le P(\Omega),$$

т.е. $0\le P(A)\le 1$. Таким образом, вероятность любого события выражается неотрицательным числом, не превосходящим единицы; другими словами, все значения функции $P(A)$ принадлежат отрезку [0, 1].

Пример 8. Подбрасывают два игральных кубика. Чему равна вероятность того, что сумма очков, выпавших на обоих кубиках, не превзойдет 5?

Решение. Пусть n_1 очков выпало на первом кубике, n_2 - на втором. Пространство элементарных событий есть множество пар (n_1, n_2):

$$\Omega = \left\{(n_1, n_2) : n_1, n_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6\right\}.$$

Событие A имеет вид

$$A = \left\{(n_1, n_2) : n_1, n_2 = 1, 2, 3, 4;\ n_1 + n_2 \le 5\right\}.$$

Множество Ω содержит 36 элементов (см. табл. 1.1), множество A - 10 элементов ((1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)). В соответствии с формулой (1.7.5) получаем

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Задачи

1. Подбрасываются два игральных кубика. Найдите вероятность того, что сумма очков на обоих кубиках больше 6 (событие A)?

2. В лотерее разыгрывается 100 билетов. Выигрыш падает на 10 билетов. Некто купил 3 билета. Какова вероятность того, что хотя бы один из них выиграет?

3. В ящике находятся 6 голубых и 9 красных шаров. Из ящика извлечены три шара. Найдите вероятность того, что два из них окажутся голубыми.

4. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12 и 13. Наугад берутся две карточки. Определите вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

5. Из десяти билетов выигрышными являются два. Найдите вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) один выигрышный; б) оба выигрышных.

Ответы

1. $\frac{21}{36} = \frac{7}{12}$. **2.** $\frac{C_{100}^3 - C_{90}^3}{C_{100}^3} = 1 - \frac{C_{90}^3}{C_{100}^3} = 1 - \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}2735$. **3.** $\frac{27}{91}$. **4.** $\frac{5}{14}$.

5. а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{2}{9}$.

Вопросы

1. Что называют пространством элементарных событий?
2. Что называют элементарным событием?
3. Что называют событием?

4. Какое событие называют невозможным?
5. Какое событие называют достоверным?
6. Какое событие называют случайным?
7. Как определяют противоположные события?
8. Какие события называют несовместными?
9. Что называют полной группой событий?
10. Что называют алгеброй событий?
11. Как определяется вероятность события?
12. Каковы аксиомы вероятности?
13. Что называют вероятностным пространством?
14. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?

§ 1.8. Сложение и умножение вероятностей

Теорема сложения вероятностей двух событий

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (1.8.1)$$

Теорема сложения вероятностей двух несовместных событий

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1.8.2)$$

Замечание 1. Формула (1.8.2) получается из формулы (1.8.1), когда A и B - несовместные события; в этом случае AB - невозможное событие и $P(AB)=0$.

Теорема сложения вероятностей *n* несовместных событий

Вероятность суммы n несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \qquad (1.8.3)$$

Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1. \quad (1.8.4)$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \quad (1.8.5)$$

Если обозначить

$$P(A)=p, \ \ P(\overline{A})=q, \quad (1.8.6)$$

то формула (1.8.5) примет вид

$$p+q=1. \quad (1.8.7)$$

Вероятность события B при условии, что произошло событие A, называется *условной вероятностью* события B и обозначается так: $P(B/A)$, или $P_A(B)$.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(AB)=P(A)P(B/A), \ \ P(AB)=P(B)P(A/B). \quad (1.8.8)$$

Событие B не зависит от события A, если

$$P(B/A)=P(B), \quad (1.8.9)$$

т.е. вероятность события B не зависит от того, произошло ли событие A.

В этом случае и событие A не зависит от события B, т.е. свойство независимости событий является взаимным.

Отметим, что если A и B не зависимы, то независимы $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Теорема умножения вероятностей двух независимых событий

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB)=P(A)P(B). \quad (1.8.10)$$

Теорема умножения вероятностей *n* событий

Вероятность произведения n событий равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных, вычисленные в пред-

положении, что все предыдущие события наступили:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1A_2) ... P(A_n / A_1A_2...A_{n-1}). \quad (1.8.11)$$

В частности, для трех событий A, B, C формула (1.8.11) принимает вид

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB). \quad (1.8.12)$$

События $A_1, A_2,..., A_n$ называются *независимыми в совокупности*, или *независимыми*, если они попарно-независимы, а также независимы каждое из них и произведение k остальных ($k = 2, 3, ..., n$-1).

Замечание 2. Из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности.

Замечание 3. Если события $A_1, A_2,..., A_n$ независимы, то противоположные им события $\overline{A}_1, \overline{A}_2,..., \overline{A}_n$ также независимы.

Теорема умножения вероятностей *n* независимых событий

Если события $A_1, A_2,..., A_n$ независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2) ... P(A_n). \quad (1.8.13)$$

Замечание 4. Равенство (1.8.13) выражает необходимое и достаточное условие независимости событий $A_1, A_2,..., A_n$.

Для трех независимых событий A, B, C формула (1.8.13) принимает вид

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C). \quad (1.8.14)$$

Вычисление вероятности суммы событий можно свести к вычислению вероятности произведения противоположных событий по формуле

$$P(A_1 + A_2 +...+ A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot ... \cdot \overline{A}_n). \quad (1.8.15)$$

В частности, если события $A_1, A_2,..., A_n$ независимы, то

$$P(A_1 + A_2 +\ldots+ A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(A_n) =$$
$$= 1 - (1 - P(A_1)(1 - (A_2)\ldots(1 - P(A_n))$$

или

$$P(A_1 + A_2 +...+ A_n) = 1 - q_1q_2...q_n. \quad (1.8.16)$$

Если независимые события $A_1, A_2,..., A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий выражается формулой

$$P(A) = 1 - q^n, \qquad (1.8.17)$$

где $A = A_1 + A_2 + ... + A_n$.

В обратной задаче вероятность $P(A)$ известна и нужно определить, при каком числе n независимых событий A_i достигается заданное значение $P(A)$. Точнее говоря, задается некоторое число Q такое, что

$$P(A) = 1 - q^n \geq Q; \qquad (1.8.18)$$

из этого неравенства определяется значение n.

Пример 1. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет четное число очков?

Решение. Введем обозначения: A - выпало четное число очков; B_k - выпало k очков (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6). Событие A означает, что наступило хотя бы одно из событий: B_2, B_4, B_6, т.е. $A = B_2 + B_4 + B_6$. Поскольку события B_2, B_4, B_6 несовместны, то можно воспользоваться формулой (1.8.3) при n = 3, учитывая, что $P(B_k) = 1/6$ (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6):

$$P(A) = P(B_2) + P(B_4) + P(B_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Тот же результат получается и непосредственно по формуле $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 2. В урне 40 шариков: 15 голубых, 5 зеленых и 20 белых. Какова вероятность того, что из урны будет извлечен цветной шарик?

Решение. Извлечение цветного шарика означает появление либо голубого, либо зеленого шарика. Вероятность извлечения голубого шарика (событие A): $P(A) = 15/40 = 3/8$. Вероятность извлечения зеленого шарика (событие B): $P(B) = 5/40 = 1/8$. Так как события A и B несовместны, то по формуле (1.8.2) получаем

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

Замечание. Тот же результат получается и непосредственно по формуле $P(C) = \frac{m}{n} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$, где C - "появление цветного шара"; этому событию благоприятствует 20 элементарных исходов.

Пример 3. Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события A - "сумма выпавших очков не превосходит четырех".

Решение. Событие A есть сумма трех несовместных событий B_2, B_3, B_4, заключается в том, что сумма очков равна соответственно 2, 3, 4. Поскольку

$$P(B_2)=\frac{1}{36},\quad P(B_3)=\frac{2}{36},\quad P(B_4)=\frac{3}{36},$$

то по теореме сложения вероятностей несовместных событий получим

$$P(A)=P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Замечание. Тот же результат можно получить непосредственно. Действительно, событию A благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2). Всего же элементарных исходов, образующих полную группу событий, $n = 36$, поэтому

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Пример 4. Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на 3 сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй - 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?

Решение. События A - "попадание в первый сектор" и B - "попадание во второй сектор" несовместны (попадание в один сектор исключает попадание во второй), поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий. В соответствии с этой теоремой находим искомую вероятность:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}4+0{,}3=0{,}7.$$

Пример 5. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена 0,85, а для второго - 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен?

Решение. Введем обозначения: события A - "попадание первого спортсмена", B - "попадание второго спортсмена", C - "попадание хотя бы одного из спортсменов". Очевидно, $A + B = C$, причем события A и B совместны. В соответствии с формулой (1.8.1) получаем

$$P(C)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

или

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A)P(B),$$

поскольку A и B - независимые события, а для них верна формула (1.8.10). Подставив данные значения $P(A) = 0{,}85$, $P(B) = 0{,}8$ в формулу для $P(C)$, найдем искомую вероятность

$$P(C) = (0{,}85 + 0{,}8) - 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}97.$$

Пример 6. Симметричная монета подброшена три раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет ровно два раза?

Решение. Введем обозначения: A_k - "выпадение цифры при k-ом подбрасывании монеты (k=1, 2, 3)", A - "выпадение двух цифр при трех подбрасываниях", тогда

$$A = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3.$$

Поскольку слагаемые в правой части этого равенства попарно несовместны, то по формуле (1.8.3) при $n = 3$ получаем

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3).$$

Принимая во внимание независимость событий A_1, A_2, A_3, находим

$$P(A) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(\overline{A_3}) + P(A_1)\,P(\overline{A_2})\,P(A_3) + P(\overline{A_1})\,P(A_2)\,P(A_3) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

Пример 7. С первого станка на сборку поступило 200 деталей, из которых 190 стандартных; со второго - 300, из которых 280 стандартных. Найти вероятность события A, состоящего в том, что наудачу взятая деталь будет стандартной, и условные вероятности его относительно событий B и $\overline{B}$, если событие B состоит в том, что деталь изготовлена на первом станке.

Решение. Вероятность события A равна отношению числа всех стандартных к общему числу изготовленных на обоих станках деталей

$$P(A) = \frac{190 + 280}{200 + 300} = \frac{470}{500} = 0{,}94.$$

Условная вероятность события A относительно события B (вероятность того, что взятая наудачу деталь стандартная, если известно, что она изготовлена на первом станке)

$$P(A/B) = 190/200 = 0{,}95.$$

Условная вероятность события A относительно события $\overline{B}$, т.е. вероятность того, что взятая деталь стандартная, если известно, что она изготовлена не на первом (на втором) станке

$$P(A/\overline{B}) = \frac{280}{300} = \frac{14}{15} \approx 0{,}93.$$

Пример 8. В урне находится 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность того, что все 3 шара голубые.

Решение. Введем обозначения: A_1 - "первый шар голубой", A_2 - "второй шар голубой", A_3 - "третий шар голубой", A - "все 3 шара голубые", тогда $A = A_1A_2A_3$. Воспользуемся формулой (1.8.11), которая при $n = 3$ принимает вид

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2).$$

(см. формулу (1.8.12) в других обозначениях).

Поскольку

$$P(A_1) = \frac{6}{14},\ P(A_2/A_1) = \frac{5}{13},\ P(A_3/A_1A_2) = \frac{4}{12},$$

то

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = \frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12} = \frac{5}{91} \approx 0{,}055.$$

Замечание. Эту вероятность можно найти и непосредственным подсчетом по формуле (1.2.1).

Поскольку в данном случае

$$n = C_{14}^3 = \frac{14!}{3!\cdot 11!},\ m = C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!},\ P(A) = \frac{C_6^3}{C_{14}^3},$$

то

$$P(A) = \frac{6!}{3!\cdot 3!} : \frac{14!}{3!\cdot 11!} = \frac{6!\cdot 3!\cdot 11!}{14!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{6!\cdot 11!}{14!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{12\cdot 13\cdot 14} = \frac{5}{91}.$$

Пример 9. Три стрелка попадают в мишень соответственно с вероятностями 0,85, 0,8, 0,7. Найти вероятность того, что при одном выстреле хотя бы один из них попадет в мишень.

Решение. Введем обозначения: A - "попадание в мишень первым стрелком", B - "попадание в мишень вторым стрелком", C - "попадание в мишень третьим стрелком", D - "попадание в мишень хотя бы одним стрелком", т.е. $D = A+B+C$. Событие D является противоположным событию $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ (ни одного попадания): $D = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}}$. Поскольку события A, B, C независимы, то можно воспользоваться формулой (1.8.16), которая в данном случае принимает вид

$$P(D) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)).$$

Так как

$$1 - P(A) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15,$$
$$1 - P(B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2,$$
$$1 - P(C) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3,$$

то

$$P(D) = 1 - 0{,}15 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}991.$$

Пример 10. Найти вероятность совместного появления цифры при одном подбрасывании двух монет.

Решение. Вероятность появления цифры первой монеты (событие A) $P(A) = 1/2$; вероятность появления цифры второй монеты (событие B)- $P(B) = 1/2$.

События A и B независимы, поэтому искомую вероятность найдем по формуле (1.8.10):

$$P(AB) = P(A)P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4.$$

Пример 11. В урне 6 голубых, 5 красных и 4 белых шара. Из урны поочередно извлекают шар, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом извлечении появится голубой шар (событие A), при втором - красный (событие B), при третьем - белый (событие C).

Решение. Вероятность появления голубого шара при первом извлечении $P(A) = 6/15 = 2/5$. Вероятность появления красного шара во втором извлечении, вычисленная в предположении, что в первый раз появился голубой шар, т.е. условная вероятность $P(B/A) = 5/14$. Вероятность появления белого шара в третьем извлечении, вычисленная в предположении, что в первый раз появился голубой шар, во второй - красный, т.е. условная вероятность $P(C/AB) = 4/13$. По формуле (1.8.12) находим искомую вероятность

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{4}{91} \approx 0{,}044.$$

Пример 12. В каждом из трех ящиков находится по 30 деталей. В первом ящике 27, во втором 28, в третьем 25 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A), $P(A) = 27/30 = 9/10$. Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B) $P(B) = 28/30 = 14/15$. Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C) $P(C) = 25/30 = 5/6$. Поскольку события A, B, C независимы, то по формуле (1.8.14) получаем

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = \frac{9}{10} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{6} = 0{,}7 .$$

Пример 13. Имеются две урны с шарами трех цветов. В первой находятся 2 голубых, 3 красных, 5 зеленых, а во второй - 4 голубых, 2 красных и 4 зеленых. Из каждой урны извлекают по одному шару и сравнивают их цвета. Найти вероятность того, что цвета вынутых шаров одинаковы (событие A).

Решение. Обозначим событие, состоящее в извлечении из первой урны голубого шара, через B_1, красного - C_1, зеленого - D_1. Аналогичные события для второй урны обозначим соответственно через B_2, C_2, D_2. Событие A наступает в случае B_1 B_2, C_1 C_2 или D_1 D_2, т.е. $A = B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2$. Поскольку события B_1 B_2, C_1 C_2, D_1 D_2 несовместны, то применима формула (1.8.3) при $n = 3$:

$$P(A) = P(B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2) = P(B_1B_2) + P(C_1C_2) + P(D_1D_2) .$$

Так как независимы события: B_1 и B_2, C_1 и C_2, D_1 и D_2, то можно пользоваться формулой (1.8.10) для каждой пары событий.

$$P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2),$$
$$P(C_1C_2) = P(C_1)P(C_2),$$
$$P(D_1D_2) = P(D_1)P(D_2).$$

Следовательно,

$$P(A) = P(B_1)P(B_2) + P(C_1)P(C_2) + P(D_1)P(D_2) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}34.$$

Пример 14. Рабочий обслуживает четыре однотипных станка. Вероятность того, что любой станок в течении часа потребует внимания рабочего равна 0,6. Предполагая, что неполадки на станке независимы, найти вероятность того, что в течение часа потребуют внимания рабочего: а) все четыре станка; б) ни один станок; в) по крайней мере один станок.

Решение. Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4 события, состоящие в том, что в течение часа потребуют внимания рабочего соответственно первый, второй, третий, четвертый станки. По теореме умножения вероятностей независимых событий вероятность того, что в течение часа все станки потребуют внимания рабочего, т.е. произойдут события и A_1, и A_2, и A_3, и A_4, выразится формулой (1.8.13) при $n = 4$:

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}1296 .$$

Вероятность того, что в течение часа станок (любой) не потребует внимания рабочего, найдем по правилу вычисления вероятности противоположного события:

$$P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = P(\overline{A}_4) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 .$$

Следовательно, вероятность события B, состоящего в том, что ни один станок в течение часа не потребует внимания рабочего, т.е. произойдут события и $\overline{A}_1$, и $\overline{A}_2$, и $\overline{A}_3$, и $\overline{A}_4$, также выражается формулой (1.8.13) при $n = 4$:

$$P(B) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}0256.$$

Событие, состоящее в том, что в течение часа по крайней мере один из четырех станков потребует внимания рабочего, и событие B являются противоположными. Поскольку $P(B) = 0{,}0256$, то

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}0256 = 0{,}9744 .$$

Пример 15. Мастер обслуживает 5 станков. 10% рабочего времени он проводит у первого станка, 15% - у второго, 20% - у третьего, 25% - у четвертого, 30% - у пятого. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени он находится: 1) у первого или третьего станка; 2) у второго или пятого; 3) у первого или четвертого станка; 4) у третьего или пятого; 5) у первого или второго, или четвертого станка.

Решение. Обозначим через A, B, C, D, E - события, состоящие в том, что в наудачу выбранный момент времени мастер находится соответственно у первого, второго, третьего, четвертого, пятого станка. Из условия следует, что события A, B, C, D, E попарно несовместны и

$P(A)=0{,}10$, $P(B)=0{,}15$, $P(C)=0{,}20$, $P(D)=0{,}25$, $P(E)=0{,}30$.

Принимая во внимание определение суммы событий и теорему сложения вероятностей несовместных событий, находим:

$$P(A+C)=P(A)+P(C)=0{,}10+0{,}20=0{,}30;$$

$$P(B+E)=P(B)+P(E)=0{,}15+0{,}30=0{,}45;$$

$$P(A+D)=P(A)+P(D)=0{,}10+0{,}25=0{,}35;$$

$$P(C+E)=P(C)+P(E)=0{,}20+0{,}30=0{,}50;$$

$$P(A+B+D)=P(A)+P(B)+P(D)=0{,}10+0{,}15+0{,}25=0{,}50.$$

Пример 16. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2, или 7, или тому и другому одновременно.

Решение. Введем обозначения для событий: A - "наудачу взятое двузначное число кратно 2", B - "наудачу взятое двузначное число кратно 7". Необходимо найти $P(A+B)$. Поскольку A и B - совместные события, то следует пользоваться формулой (1.8.1). Двузначных чисел всего 90 (это числа от 10 до 99). 45 из этих чисел кратны 2 (являются четными), они благоприятствуют событию A. 13 из этих чисел кратны 7; 7 чисел кратны 2 и 7 одновременно (благоприятствуют событию AB). Таким образом,

$$P(A)=\frac{45}{90}=0{,}5,\quad P(B)=\frac{13}{90},\quad P(AB)=\frac{7}{90}.$$

Следовательно,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{45}{90}+\frac{13}{90}-\frac{7}{90}=\frac{51}{90}.$$

Пример 17. В урне 6 голубых и 4 красных шара. Из нее извлекают подряд два шара. Какова вероятность того, что оба шара голубые?

Решение. Пусть событие A - "появление голубого шара при первом извлечении", а событие B - "появление голубого шара при втором извлечении". Найдем вероятность события AB. Поскольку

$$P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},$$

$$P(B/A)=\frac{6-1}{10-1}=\frac{5}{9},$$

то

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

Пример 18. В мастерской работают два мотора, независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый мотор не потребует внимания мастера, равна 0,85, а для второго мотора эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение часа ни один из моторов не потребует внимания мастера.

Решение. Ведем обозначения для событий: A - "первый мотор не потребует к себе внимания мастера в течение часа", B - "второй мотор не потребует внимания в течение часа". Найдем вероятность события AB. Поскольку A и B независимые события, то

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}85\cdot 0{,}8 = 0{,}68.$$

Пример 19. На 30 одинаковых жетонах написаны 30 двузначных чисел от 1 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 2 или 3?

Решение. Обозначим события: A - "извлечен жетон с четным номером", B - "извлечен жетон с номером, кратным 3"; AB - "извлечен жетон с четным номером, кратным 3". Найдем вероятность события $A + B$. Поскольку A и B - совместные события, то

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) = \frac{15}{30}+\frac{10}{30}-\frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \approx 0{,}667.$$

(Событию A благоприятствуют 15 элементарных исходов, событию B - 10 исходов, событию AB - 5 исходов).

Пример 20. Из урны, содержащей 3 голубых и 2 красных шара, по схеме случайного выбора без возвращения последовательно извлекаются шары. Найти вероятность P_k того, что красный шар впервые появится при k-м испытании (k = 1, 2, 3, 4).

Решение. Ведем обозначения для событий: A_k - "появился красный шар при k-ом испытании", B_k - "впервые красный шар появился при k-ом испытании (k = 1, 2, 3, 4)". События B_k можно выразить через A_i и $\overline{A}_i$:

$B_1 = A_1$, $B_2 = \overline{A}_1 A_2$, $B_3 = \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$, $B_4 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 A_4$.

В соответствии с формулой (1.8.11) получаем

$$P(B_1) = P(A_1),\ P(B_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2/\overline{A}_1),$$

$$P(B_3) = P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2/\overline{A}_1)P(A_3/\overline{A}_1\overline{A}_2),$$

$$P(B_4)=P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2/\overline{A}_1)P(\overline{A}_3/\overline{A}_1\overline{A}_2)P(A_4/\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3).$$

По формуле (1.2.1) находим:

$$P(A_1)=\frac{2}{5},\ P(\overline{A}_1)=\frac{3}{5},\ P(\overline{A}_{i+1}/\overline{A}_1...\overline{A}_i)=\frac{3-i}{5-i},$$

$$P(A_{i+1}/\overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_i)=\frac{2}{5-i}\quad i=1,2,3.$$

Итак, искомые вероятности соответственно равны:

$$p_1=P(B_1)=\frac{2}{5}=0{,}4;\ p_2=P(B_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=0{,}3;$$

$$p_3=P(B_3)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=0{,}2;\ p_4=P(B_4)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=0{,}1.$$

Пример 21. Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1=0{,}75$, $p_2=0{,}80$, $p_3=0{,}85$. Какова вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех этих орудий?

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 - "попадание первого орудия", A_2 - "попадание второго орудия" и A_3 - "попадание третьего орудия" независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2, A_3 (т.е. вероятности промахов) соответственно равны:

$$q_1=1-p_1=1-0{,}75=0{,}25,$$
$$q_2=1-p_2=1-0{,}80=0{,}20,$$
$$q_3=1-p_3=1-0{,}85=0{,}15.$$

Искомую вероятность найдем по формуле (1.8.16), которая при $n=3$ принимает вид

$$P(A)=1-q_1q_2q_3.$$

Подставляя в последнюю формулу значения q_1, q_2, q_3, находим

$$P(A)=1-0{,}25\cdot0{,}20\cdot0{,}15=0{,}925.$$

Пример 22. Сколько раз нужно подбросить два игральных кубика, чтобы вероятность выпадения хотя бы один раз двух шестерок была бы больше 1/2? (Эту задачу впервые поставил французский математик и писатель де Мере (1610-1684), поэтому задача называется его именем).

Решение. Пусть событие A_i - "выпадение двух шестерок при i-м подбрасывании". Так как с каждой из шести граней первого кубика может выпасть любая из шести граней второго, то всего равновозможных и попарно несовместных событий $6 \cdot 6 = 36$. Только одно из них - выпадение шестерки и на первом и на втором кубике - благоприятствуют событию A_i. Следовательно,

$$P(A_i) = \frac{1}{36},$$

откуда

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

Подбрасывания игральных кубиков - независимые испытания, поэтому можно воспользоваться формулой (1.8.17), которая в данном случае принимает вид

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2},$$

или

$$\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}.$$

Из этого неравенства найдем n. Логарифмируя, получаем

$$n \ln \frac{35}{36} < \ln \frac{1}{2},$$

откуда

$$n > \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} = \frac{0{,}6931}{0{,}0284} = 24{,}4.$$

Итак, чтобы вероятность выпадения двух шестерок была больше 1/2, нужно подбросить кубик не менее 25 раз.

Пример 23. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равна 0,973. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что во всех испытаниях вероятность появления события одна и та же).

Решение. Поскольку рассматриваемые события независимы в совокупности, то применима формула (1.8.17), т.е.

$$P(A)=1-q^n.$$

По условию

$$P(A)=0{,}973,\ n=3.$$

Следовательно,

$$0{,}973=1-q^3,$$

или

$$q^3=1-0{,}973=0{,}027;$$

$$q=\sqrt[3]{0{,}027}=0{,}3.$$

Искомая вероятность

$$p=1-q=1-0{,}3=0{,}7.$$

Пример 24. В ящике 15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Из ящика последовательно вынимают 2 шара; первый шар в ящик не возвращают. Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется голубым, а второй - красным.

Решение. Обозначим через A событие "первый шар оказался голубым", через B - событие "второй шар оказался красным". Из условия следует, что

$$P(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3},\quad P(B/A)=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}.$$

В соответствии с первой из формул (1.8.8) получаем

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=\frac{5}{15}\cdot\frac{10}{14}=\frac{5}{21}\approx 0{,}238.$$

Пример 25. Слово *папаха* составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами тщательно перемешаны. Четыре карточки извлекаются по очереди и раскладываются в ряд. Какова вероятность получить таким путем слово *папа*?

Решение. Обозначим через A, B, C, D соответственно события: извлечена первая, вторая, третья и четвертая буква слова *папа* из набора в 6 букв: *а*, *а*, *а*, *п*, *п*, *х*. Найдем вероятность событий: A, B/A, C/AB, D/ABC.

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};$$

$$P(B/A)=\frac{3}{5};$$

$$P(C/AB)=\frac{1}{4};$$

$$P(D/ABC)=\frac{2}{3}.$$

В соответствии с формулой (1.8.11) при $n = 4$ получаем

$$P(ABCD)=P(A)P(B/A)P(C/AB)P(D/ABC)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{30}.$$

Задачи

1. Предприятие дает в среднем 25% продукции высшего сорта и 65% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта?

2. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,014, 0,011, 0,009, 0,006. Найти вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

3. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятность попадания в круг и кольца соответственно равны 0,35, 0,20, 0,15. Какова вероятность попадания в мишень?

4. Определить вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 9, либо тому и другому одновременно.

5. Найти вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика на верхней грани окажется четное или кратное трем число очков.

6. На десяти карточках напечатаны цифры от 0 до 9. Определить вероятность того, что три наудачу взятые и поставленные в ряд карточки составят число 357.

7. Производится 4 выстрела по мишени с вероятностью попадания 0,2 при отдельном выстреле. Попадания в мишени при различных выстрелах предполагаются независимыми событиями. Какова вероятность попадания в цель ровно три раза?

8. Вероятности появления каждого из трех независимых событий A_1, A_2, A_3 соответственно равны $p_1=0{,}9$, $p_2=0{,}8$, $p_3=0{,}7$. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

9. Все грани игрального кубика заклеены непрозрачной бумагой:

грани 1, 2, 3 - голубой, грани 4, 5, 6 - красной. При подбрасывании кубика выпала красная грань. Определить вероятность того, что на этой грани стоит четное число.

10. Слово *лотос*, составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем перемешаны и сложены в коробке. Из коробки наугад извлекаются одна за другой три буквы. Найти вероятность того, что при этом появится слово *сто*.

11. В ящике находится 10 деталей, из которых 4 первого типа и 6 - второго. Для сборки агрегата нужно сначала взять деталь первого типа, а затем - второго. Какова вероятность того, что при выборке наугад детали будут взяты в нужной последовательности.

12. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равна 0,875. Найти вероятность появления события в одном испытании.

13. Студент знает ответы на 20 вопросов из 26. Предположим, что вопросы задаются последовательно один за другим. Найти вероятность того, что три подряд заданных вопроса - счастливые.

14. В ящике находится 10 деталей, из которых 5 первого типа, 3 - второго, 2 - третьего. Какова вероятность того, что при выборе наугад первой будет взята деталь первого типа, второй - второго, третьей - третьего типа?

15. Найти вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4% всей продукции является браком, а 75% небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

16. Партия из ста деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть непринятой, если она содержит 5 % неисправных деталей.

17. Подброшены монета и игральный кубик. Найти вероятность того, что на монете выпала цифра, а на кубике - число очков, кратное трем.

18. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Ответы

1. 0,9. **2.** 0,4. **3.** 0,7. **4.** 5/9. **5.** 2/3. **6.** 1/720. **7.** 0,0256. У к а з а н и е . Событию "в цель попадают ровно 3 раза при 4 выстрелах" благоприятствуют 4 исхода: $AAA\overline{A}$, $AA\overline{A}A$, $A\overline{A}AA$, $\overline{A}AAA$, где A - попадание, $\overline{A}$ - промах (запись $AAA\overline{A}$ означает попадание при первом, втором, третьем выстрелах, промах - при четвертом выстреле). Вероятность каждого исхода одна и та же: $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}064$, где $0{,}8 = 1 - 0{,}2$ - вероятность промаха. Искомая вероятность $p = 0{,}0256 = 4 \cdot 0{,}064$. **8.** 0,092. Указание. Если обозначить $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, $B_2 = \overline{A_1}A_2\overline{A_3}$, $B_3 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$; то искомая вероятность $p = P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$. **9.** 2/3. Указание. Найдите условную вероятность $P(A/B)$, где событие A - "выпадение четного числа очков", а событие B - "выпадение числа очков, большего 3". **10.** 1/30. Указание. Найдите вероятность события $A = A_1A_2A_3$, где A_1 - "первой извлечена буква *с*", A_2 - "второй извлечена буква *т*", A_3 - "третьей извлечена буква *о*". **11.** 4/15. **12.** 0,5. Указание. Примените формулу (1.8.17). **13.** 57/115. Указание. Примените формулу (1.8.12). **14.** 1/24. **15.** 0,72. **16.** 0,23. Указание. Найдите сначала вероятность q противоположного события A, которое заключается в том, что партия деталей будет принята. Это событие является произведением пяти событий $A = A_1A_2A_3A_4A_5$, где A_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) означает, что k-я проверенная деталь является стандартной. Далее, $P(A_1) = 95/100$, $P(A_2/A_1) = 94/99$ и т.п. **17.** 1/6. **18.** $n \geq 2$.

Вопросы

1. Чему равна вероятность суммы двух событий?
2. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?
3. Сформулируйте теорему о вероятности суммы n несовместных событий.
4. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?
5. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
6. Сформулируйте теорему о вероятности произведения двух событий.
7. Как определяется независимость двух событий?
8. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?
9. Сформулируйте теорему о вероятности произведения n событий?
10. Как определяется независимость n событий?
11. Чему равна вероятность произведения n независимых событий?
12. Как найти вероятность появления хотя бы одного из n независимых событий, имеющих одинаковые вероятности?

§ 1.9. Формула полной вероятности

Рассмотрим n попарно несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, для которых известны вероятности $P(H_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, ..., n$) и событие $A \subset H_1 + H_2 + ... + H_n$, причем известны условные вероятности $P(A/H_i)$. Вероятность события A определяется формулой

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)\,. \qquad (1.9.1)$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности.* События $H_1, H_2, ..., H_n$ иногда называют *гипотезами.*

Пример 1. На фабрике изготовляющей болты, первая машина производит 30%, вторая - 25%, третья - 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что случайно выбранный болт - дефектный, а через H_1, H_2, H_3 - события, состоящие в том, что этот болт произведен соответственно первой, второй и третьей машинами. Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=0{,}30,\ P(H_2)=0{,}25,\ P(H_3)=0{,}45;$$

$$P(A/H_1)=0{,}02,\ P(A/H_2)=0{,}01,\ P(P/H_3)=0{,}03.$$

По формуле (1.9.1) при $n=3$ получаем

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)\ P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=0{,}3\cdot0{,}02+0{,}25\cdot0{,}1+0{,}45\cdot0{,}03=0{,}022.$$

Пример 2. В пяти ящиках находятся одинаковые по размерам и весу шары. В двух ящиках - по 6 голубых и 4 красных шара (это ящик состава H_1). В двух других ящиках (состава H_2) - по 8 голубых и 2 красных шара. В одном ящике (состава H_3) - 2 голубых и 8 красных шаров. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар оказался красным?

Решение. Событие "извлечен красный шар" обозначим через A.

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=\frac{2}{5}=0{,}4,\quad P(H_2)=\frac{2}{5}=0{,}4,\quad P(H_3)=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Вероятность вынуть красный шар, если известно, что взят ящик первого состава H_1,

$$P(A/H_1)=\frac{4}{10}=0{,}4.$$

Вероятность извлечь красный шар, если известно, что взят ящик второго состава,

$$P(A/H_2)=\frac{2}{10}=0{,}2.$$

Вероятность извлечь красный шар, если известно, что взят ящик третьего состава H_3,

$$P(A/H_3)=\frac{8}{10}=0{,}8.$$

В соответствии с формулой (1.9.1) при $n = 3$ находим искомую вероятность

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=0{,}4\cdot 0{,}4+0{,}4\cdot\, 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}4.$$

Пример 3. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена первым заводом, на 30% - вторым, на 50% - третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны: $q_1=0{,}01,\ q_2=0{,}005,\ q_3=0{,}006$. Найти вероятность того, что наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной.

Решение. Ведем обозначения: A - "из партии взята стандартная лампочка", H_1 - "взятая лампочка изготовлена первым заводом", H_2 - "вторым заводом", H_3 - "третьим заводом". Найдем условные вероятности $P(A/H_i)$ (i = 1, 2, 3) по формуле

$$P(A/H_i)=1-P(\overline{A}/H_i),$$

где $\overline{A}$ - событие, противоположное событию A (взята нестандартная лампочка):

$$P(A/H_1)=1-P(\overline{A}/H_1)=1-0{,}01=0{,}99,$$

$$P(A/H_2)=1-P(\overline{A}/H_2)=1-0{,}005=0{,}995,$$

$$P(A/H_3)=1-P(\overline{A}/H_3)=1-0{,}006=0{,}994.$$

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=0{,}2,\quad P(H_2)=0{,}3,\quad P(H_3)=0{,}5.$$

В соответствии с формулой (1.9.1) получаем

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=0{,}2\cdot 0{,}99+0{,}3\cdot\, 0{,}995+0{,}5\cdot 0{,}994=0{,}198+0{,}2985+0{,}4970=0{,}9935.$$

Пример 4. В группе 21 студент, в том числе 5 отличников, 10 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо. На предстоящем экзамене отличники могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена приглашается наугад один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку (событие A).

Решение. Обозначим гипотезы: H_1 - "приглашен студент-отличник", H_2 - "приглашен хороший студент", H_3 - "приглашен слабый студент".

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=\frac{5}{21},\ P(H_2)=\frac{10}{21},\ P(H_3)=\frac{6}{21}=\frac{2}{7};$$

$$P(A/H_1)=1,\ P(A/H_2)=1,\ P(A/H_3)=\frac{1}{3}.$$

По формуле (1.9.1) находим искомую вероятность

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)\ P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=\frac{5}{21}\cdot 1+\frac{10}{21}\cdot 1+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{17}{21}\approx 0{,}81.$$

Пример 5. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,1% брака, второй - 0,2%, третий - 0,3%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго - 2000 и с третьего - 3000 деталей.

Решение. Ведем обозначения: событие A - "поступила бракованная деталь"; гипотеза H_1 - "деталь изготовлена на первом автомате", H_2 - "на втором", H_3 - "на третьем".

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=\frac{1000}{6000}=\frac{1}{6},\quad P(H_2)=\frac{2000}{6000}=\frac{1}{3},\quad P(H_3)=\frac{3000}{6000}=\frac{1}{2};$$

$$P(A/H_1)=0{,}001,\quad P(A/H_2)=0{,}002,\quad P(A/H_3)=0{,}003.$$

В соответствии с формулой (1.9.1) находим искомую вероятность

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 0{,}001+\frac{1}{3}\cdot 0{,}002+\frac{1}{2}\cdot 0{,}003=\frac{14}{6000}\approx 0{,}023.$$

П р и м е р 6. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго - 0,03, для третьего - 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего в два раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?

Р е ш е н и е. Введем обозначения: событие A - "взята бракованная деталь"; гипотеза H_1 - "деталь изготовлена на первом станке", H_2 - "деталь изготовлена на втором станке", H_3 - "деталь изготовлена на третьем станке".

Пусть x - производительность второго станка, тогда $3x$ - производительность первого станка, $x/2$ - производительность третьего станка.

В соответствии с условием задачи имеем:

$$P(H_1)=\frac{3x}{3x+x+x/2}=\frac{3x}{(9/2)x}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},$$

$$P(H_2)=\frac{x}{(9/2)x}=\frac{2}{9},\quad P(H_3)=\frac{x/2}{(9/2)x}=\frac{1}{9};$$

$$P(A/H_1)=0{,}02,\quad P(A/H_2)=0{,}03,\quad P(A/H_3)=0{,}04.$$

По формуле (1.9.1) находим искомую вероятность

$$P(A)=\frac{2}{3}\cdot 0{,}02+\frac{2}{9}\cdot 0{,}03+\frac{1}{9}\cdot 0{,}04=\frac{22}{900}\approx 0{,}024.$$

П р и м е р 7. На двух автоматических станках изготовляются одинаковые детали. Известно, что производительность первого станка в два раза больше, чем второго, и что вероятность изготовления детали высшего качества на первом станке равна 0,9, а на втором - 0,81. Изготовленные за смену на обоих станках нерассортированные детали находятся на складе. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется высшего качества.

Р е ш е н и е. Обозначим через A событие, заключающееся в том, что наудачу взятая деталь окажется высшего качества. Событие A может произойти с одной из следующих гипотез: H_1 - "деталь изготовлена на первом автомате", H_2 - "деталь изготовлена на втором станке".

Поскольку производительность первого станка в два раза больше второго, то

$$P(H_1)=\frac{2}{3},\quad P(H_2)=\frac{1}{3};$$

Из условия задачи следует, что

$$P(A/H_1)=0{,}9,\quad P(A/H_2)=0{,}81.$$

В соответствии с формулой (1.9.1), которая при $n=2$ принимает вид

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)\,P(A/H_2),$$

находим

$$P(A)=\frac{2}{3}\cdot 0{,}9+\frac{1}{3}\cdot 0{,}81=0{,}6+0{,}27=0{,}87.$$

Пример 8. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60% изготовлено первым заводом и 40% - вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных первым заводом, 95 удовлетворяют стандарту, а из 100 лампочек, изготовленных вторым заводом, удовлетворяют стандарту 85. Определить вероятность того, что взятая наудачу лампочка будет удовлетворять стандарту.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что взятая наудачу лампочка является стандартной. Введем две гипотезы: H_1 - "лампочка изготовлена первым заводом", H_2 - "лампочка изготовлена вторым заводом".

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=0{,}6,\quad P(H_2)=0{,}4;$$

$$P(A/H_1)=0{,}95,\quad P(A/H_2)=0{,}85.$$

В соответствии с формулой (1.9.1) при $n=2$ получаем

$$P(A)=0{,}6\cdot 0{,}95+0{,}4\cdot 0{,}85=0{,}57+0{,}34=0{,}91.$$

Пример 9. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями: $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}5$. Вероятность того, что лампа проработает заданное число часов, для этих партий соответственно равна: 0,9; 0,8; 0,7. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.

Решение. Введем обозначения: A - событие, заключающееся в том, что лампа проработает заданное число часов; H_1, H_2, H_3 - гипотезы принадлежности лампы соответственно к первой, второй, третьей партии.

По условию задачи имеем:

$$P(H_1) = 0{,}2, \quad P(H_2) = 0{,}3, \quad P(H_3) = 0{,}5;$$

$$P(A/H_1) = 0{,}9, \quad P(A/H_2) = 0{,}8, \quad P(A/H_3) = 0{,}7.$$

Формула полной вероятности (1.9.1) при $n = 3$ принимает вид

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3).$$

В соответствии с этой формулой находим искомую вероятность

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}77.$$

Пример 10. На предприятии изготовляются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 30% изделий от общего объема их производства, на второй - 25%, на третьей - остальная часть продукции. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 97%, 98%, 96%. Определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным.

Решение. Введем обозначения: A - событие, состоящее в том, что наугад взятое изделие оказалось бракованным; H_1, H_2, H_3 - гипотезы производства изделия соответственно на первой, второй и третьей линиях.

Прежде всего, отметим, что на третьей линии производится 45% изделий от общего объема их производства. В соответствии с условием задачи имеем

$$P(H_1) = 0{,}30, \quad P(H_2) = 0{,}25, \quad P(H_3) = 0{,}45;$$

$$P(A/H_1) = 0{,}03, \quad P(A/H_2) = 0{,}02, \quad P(A/H_3) = 0{,}04.$$

Используя формулу полной вероятности (1.9.1) в случае $n = 3$, находим искомую вероятность

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= 0{,}30 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}02 + 0{,}45 \cdot 0{,}04 = 0{,}032.$$

Вероятность того, что наугад взятое изделие окажется бракованным, равна 3,2%.

Пример 11. В ящике содержатся одинаковые изделия, изготовленные двумя автоматами: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные - вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго - 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие является бракованным; а через H_1, H_2 - события, состоящие в том, что это изделие изготовлено соответственно первым, вторым автоматом.

Из условия следует, что

$$P(H_1) = 0{,}4, \quad P(H_2) = 0{,}6, \quad (P(H_2) = 1 - P(H_1));$$

$$P(A/H_1) = 0{,}03, \quad P(A/H_2) = 0{,}02.$$

Формула (1.9.1) принимает вид

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)\,P(A/H_2).$$

Подставляя в эту формулу соответствующие значения, получаем

$$P(A) = 0{,}4 \cdot 0{,}03 + 0{,}6 \cdot 0{,}02 = 0{,}024.$$

Пример 12. Имеются три урны с шарами. В первой находится 5 голубых и 3 красных шара, во второй - 4 голубых и 4 красных, в третьей - 8 голубых. Наугад выбирается одна из урн и из нее наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется красным (событие A).

Решение. Шар может быть извлечен из первой урны, либо из второй, либо из третьей. Обозначим через H_1, H_2, H_3 соответственно выбор первой, второй и третьей урны.

Поскольку имеются одинаковые шансы выбрать любую из урн, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Из условия задачи следует, что

$$P(A/H_1) = \frac{3}{8}, \quad P(A/H_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad P(A/H_3) = \frac{0}{8} = 0.$$

В соответствии с формулой (1.9.1) находим искомую вероятность

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{7}{24} = 0{,}292.$$

Задачи

1. В пяти ящиках лежат одинаковые по размерам и весу шары. В

двух ящиках (состава H_1) - по 6 голубых и 4 красных шара. В двух других ящиках (состава H_2) - по 8 голубых и 2 красных шара. В одном ящике (состава H_3) - 2 голубых и 8 красных шаров. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар оказался голубым?

2. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 30%, вторая - 25%, третья - 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный болт оказался стандартным.

3. Партия электрических лампочек на 25% изготовлена первым заводом, на 35% - вторым, на 40% - третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны: $q_1 = 0{,}03$, $q_2 = 0{,}02$, $q_3 = 0{,}01$. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется бракованной?

4. В группе 21 студент, в том числе 5 отличников, 10 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо. На предстоящем экзамене отличники могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена приглашаются наугад три студента. Найти вероятность того, что они получат оценки: отлично, хорошо, удовлетворительно (в любом порядке).

5. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,2% брака, второй - 0,3% и третий - 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 500, со второго - 1000 и с третьего - 1500 деталей.

6. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,01, для второго - 0,02, для третьего - 0,03. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в два раза больше, чем второго, а третьего в три раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь будет бракованной?

7. На фабрике изготовляются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 45% изделий, на второй - 35%, на третьей - остальная часть продукции. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности изделий: 98%, 96%, 94%. Определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным.

Ответы

1. 0,6. **2.** 0,978. **3.** 0,0185. **4.** $\approx 0{,}11$. **5.** $\approx 0{,}003$. **6.** 0,015. **7.** 0,035.

§ 1.10. Формулы Бейеса

Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ - попарно-несовместные события, вероятности которых $P(H_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, и событие $A \subset H_1 + H_2 + ... + H_n$, для которого известны условные вероятности $P(A/H_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Произведен опыт, в результате которого появилось событие A. Условные вероятности событий $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события A определяются формулами

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \quad (k = 1, 2, ..., n), \qquad (1.10.1)$$

или

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}, \qquad (1.10.2)$$

где

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$ - формула полной вероятности.

Формулы (1.10.1) называют *формулами Бейеса*.

Замечание. Вероятности $P(H_k)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ событий $H_1, H_2, ..., H_n$ до опыта называются *априорными вероятностями* (от латинского *a priori*, что означает "*сперва*", т.е. в данном случае до того, как был произведен опыт). Вероятности $P(H_k/A)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ тех же событий называются *апостериорными* (от латинского слова *a posteriori*, что означает "*после*", т.е. в данном случае после опыта).

Пример 1. В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на двух автоматах: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные - вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго - 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие является бракованным, а через H_1, H_2 - события, состоящие в том, что это изделие изготовлено соответственно первым и вторым автоматом.

Из условия следует, что

$$P(H_1)=0{,}4,\quad P(H_2)=1-P(H_1)=1-0{,}4=0{,}6;$$

$$P(A/H_1)=0{,}03,\quad P(A/H_2)=0{,}02.$$

Искомую вероятность найдем по формуле (1.10.2), предварительно определив $P(A)$ согласно формуле (1.9.1), которая в данном случае принимает вид

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2).$$

Подставляя сюда соответствующие значения, получаем

$$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}03+0{,}6\cdot 0{,}02=0{,}024.$$

В соответствии с формулой (1.10.2) находим

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}03}{0{,}024}=0{,}5.$$

Пример 2. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Известно, что объем продукции первого завода в 4 раза превышает объем продукции второго завода. Вероятность брака на первом заводе $p_1=0{,}05$, на втором заводе - $p_2=0{,}01$. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом?

Решение. Обозначим через H_1 событие, состоящее в том, что взятая деталь изготовлена на первом заводе, H_2 - на втором заводе, тогда

$$P(H_1)=\frac{4}{5}=0{,}8,\ P(H_2)=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Пусть A - событие, состоящее в том, что наудачу взятая деталь оказалась бракованной.

По условию

$$P(A/H_1)=0{,}05,\ P(A/H_2)=0{,}01.$$

В соответствии с формулой (1.10.1) в случае $n=2$ получаем

$$P(H_1/A)=\frac{0{,}8\cdot 0{,}05}{0{,}8\cdot 0{,}05+0{,}2\cdot 0{,}01}=0{,}952.$$

Пример 3. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй - 46% и третьей - 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3% , для второй - 2%, для третьей - 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что взято нестандартное изделие, через H_1, H_2, H_3 - гипотезы, состоящие в том, что взято изделие, изготовленное соответственно на первой, на второй, на третьей фабрике.

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1) = 0{,}20, \quad P(H_2) = 0{,}46, \quad P(H_3) = 0{,}34;$$

$$P(A/H_1) = 0{,}03, \quad P(A/H_2) = 0{,}02, \quad P(A/H_3) = 0{,}01.$$

Поскольку в данном случае

$$P(A) = 0{,}20 \cdot 0{,}03 + 0{,}46 \cdot 0{,}02 + 0{,}34 \cdot 0{,}01 = 0{,}0186,$$

то в соответствии с формулой (1.10.2) находим искомую вероятность

$$P(H_1/A) = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}03}{P(A)} = \frac{0{,}006}{0{,}0186} \approx 0{,}322.$$

Замечание. Аналогично находятся вероятности:

$$P(H_2/A) = \frac{0{,}46 \cdot 0{,}02}{P(A)} = \frac{0{,}0092}{0{,}0186} \approx 0{,}495,$$

$$P(H_3/A) = \frac{0{,}34 \cdot 0{,}01}{P(A)} = \frac{0{,}0034}{0{,}0186} \approx 0{,}183.$$

Пример 4. На фабрике машины a, b, c производят соответственно 20%, 35%, 45% всех изделий. В их продукции брак составляет 3%, 2%, 4%. Какова вероятность того, что случайно выбранное дефектное изделие произведено машинами a, b, c соответственно?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранное изделие является дефектным, а H_1, H_2, H_3 - события, состоящие в том, что изделие произведено машинами a, b, c соответственно. События H_1, H_2, H_3 образуют полную систему событий. Числа 0,20; 0,35; 0,45 (20%, 35%, 45%) являются вероятностями этих событий, т.е.

$$P(H_1) = 0{,}20; \quad P(H_2) = 0{,}35; \quad P(H_3) = 0{,}45.$$

Аналогично, числа 0,03; 0,02; 0,04 (3%, 2%, 4%) будут условными вероятностями события A при выполнении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно, т.е.

$$P(A/H_1)=0{,}03; \quad P(A/H_2)=0{,}02; \quad P(A/H_3)=0{,}04 .$$

Применив формулу полной вероятности, найдем

$$P(A)=0{,}20\cdot 0{,}03+0{,}35\cdot 0{,}02+0{,}45\cdot 0{,}04=0{,}031 .$$

По формулам Бейеса получаем:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}20\cdot 0{,}03}{0{,}031}=\frac{0{,}006}{0{,}031}\approx 0{,}1936 ;$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}35\cdot 0{,}02}{0{,}031}=\frac{0{,}007}{0{,}031}\approx 0{,}2258 ;$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{0{,}45\cdot 0{,}04}{0{,}031}=\frac{0{,}018}{0{,}031}\approx 0{,}5806 .$$

З а м е ч а н и е. Правильность вычислений подтверждается тем, что

$$P(H_1/A)+P(H_2/A)+P(H_3/A)=0{,}1936+0{,}2258+0{,}5806=1 .$$

П р и м е р 5. Некоторое изделие выпускается двумя заводами. При этом объем продукции второго завода в 3 раза превосходит объем продукции первого. Доля брака у первого завода составляет 2%, у второго - 1%. Изделия, выпущенные заводами за одинаковый промежуток времени, перемешали и направили в продажу. Какова вероятность того, что приобретено изделие со второго завода, если оно оказалось испорченным?

Р е ш е н и е. Обозначим через A событие, состоящее в том, что приобретено бракованное изделие, через H_1 и H_2 - события, состоящие в том, что изделие произведено первым и вторым заводом соответственно.

Поскольку объем продукции второго завода в 3 раза больше объема продукции второго, то

$$P(H_1)=\frac{1}{4}, \quad P(H_2)=\frac{3}{4} .$$

Из условия задачи следует, что

$$P(A/H_1)=0{,}02, \quad P(A/H_2)=0{,}01 .$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A)=\frac{1}{4}\cdot 0{,}02+\frac{3}{4}\cdot 0{,}01=0{,}0125 .$$

В соответствии с формулой Бейеса находим искомую вероятность

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{(1/4)\cdot 0{,}02}{0{,}0125}=0{,}4.$$

Аналогично можно найти

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{(3/4)\cdot 0{,}01}{0{,}0125}=0{,}6.$$

Пример 6. В пяти ящиках находятся одинаковые по весу и размерам шары. В двух ящиках - по 6 голубых и 4 красных шара (это ящик состава H_1). В двух других ящиках (состава H_2) - по 8 голубых и 2 красных шара. В одном ящике (состава H_3) - 2 голубых и 8 красных шаров. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Извлеченный шар оказался голубым. Какова вероятность того, что голубой шар извлечен из ящика первого состава?

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что из ящика извлечен голубой шар.

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=\frac{2}{5}=0{,}4;\quad P(H_2)=\frac{2}{5}=0{,}4;\quad P(H_3)=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Вероятность вынуть голубой шар, если известно, что взят ящик состава H_1, H_2, H_3 соответственно:

$$P(A/H_1)=\frac{6}{10}=0{,}6;$$

$$P(A/H_2)=\frac{8}{10}=0{,}8;$$

$$P(A/H_3)=\frac{2}{10}=0{,}2.$$

В соответствии с формулой полной вероятности находим

$$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}6+0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}6.$$

По формуле Бейеса найдем искомую вероятность

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{0{,}6}=0{,}4.$$

Пример 7. На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 30%

изделий от общего объема их производства, на второй - 25%, на третьей - остальная часть продукции. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности линий: 97%, 98%, 96%. Наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, оказалось бракованным. Определить вероятности того, что это изделие изготовлено на первой, второй и третьей линиях.

Решение. Введем обозначения: A - событие, состоящее в том, что наугад взятое изделие оказалось бракованным; H_1, H_2, H_3 - гипотезы, состоящие в том, что изделие изготовлено соответственно на первой, второй и третьей линиях.

В соответствии с условием задачи имеем:

$$P(H_1) = 0{,}30; \quad P(H_2) = 0{,}25; \quad P(H_3) = 0{,}45;$$

$$P(A/H_1) = 0{,}03, \quad P(A/H_2) = 0{,}02, \quad P(A/H_3) = 0{,}04\,.$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = 0{,}30 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}02 + 0{,}45 \cdot 0{,}04 = 0{,}032\,.$$

В соответствии с формулами Бейеса находим искомые вероятности:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}03}{0{,}032} = 0{,}281\,;$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}02}{0{,}032} = 0{,}156\,;$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}04}{0{,}032} = 0{,}563\,.$$

Пример 8. В первой урне 2 голубых и 6 красных шаров, во второй - 4 голубых и 2 красных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны наудачу достали один шар.

Какова вероятность того, что этот шар голубой?

Предположим, что шар, взятый из второй урны, оказался голубым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 голубых шара?

Решение. Введем обозначения: событие A - "шар, извлеченный из второй урны, голубой"; гипотезы H_1 - "из первой урны во вторую переложены два голубых шара", H_2 - "переложены два разноцветных шара", H_3 - "переложены два красных шара".

Вычислим вероятности гипотез H_i и условные вероятности $P(A/H_i)$ $(i=1, 2, 3)$:

$$P(H_1)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28},\ P(H_2)=\frac{C_2^1\cdot C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28},\ P(H_3)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28};$$

$$P(A/H_1)=\frac{3}{4},\ P(A/H_2)=\frac{5}{8},\ P(A/H_3)=\frac{1}{2}.$$

По формуле полной вероятности получим ответ на первый вопрос:

$$P(A)=\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}+\frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8}+\frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{16}.$$

Чтобы ответить на второй вопрос, воспользуемся формулой Бейеса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\left(\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}\right):\frac{9}{16}=\frac{1}{21}.$$

Задачи

1. На предприятии, изготовляющем болты, первая машина производит 30%, вторая - 25%, третья - 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найдите вероятности того, что случайно выбранный болт, произведенный первой, второй и третьей машинами, оказался дефектным.

2. Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживает дефект (если он есть), и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Случайно выбранный из партии транзистор был признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле транзистор исправен?

3. Расследуются причины неудачного запуска космической ракеты, о котором можно высказать четыре предположения (гипотезы) H_1, H_2, H_3 или H_4. По данным статистики $P(H_1)=0{,}2$, $P(H_2)=0{,}4$, $P(H_3)=0{,}3$, $P(H_4)=0{,}1$. В ходе расследования обнаружено, что произошла утечка топлива (событие A). Условные вероятности события A согласно той же статистике равны: $P(A/H_1)=0{,}9$, $P(A/H_2)=0$, $P(A/H_3)=0{,}2$, $P(A/H_4)=0{,}3$. Какая из гипотез наиболее вероятна при данных условиях?

4. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении 1:2:3, причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны 3%, 2%, 1%. Прибор, приобретенный научноисследовательским институтом, оказался бракованным. Какова вероятность того, что этот прибор произведен первым заводом (марка завода на приборе отсутствовала).

5. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый изготовил 35% всех деталей, второй - 40%, третий - всю остальную продукцию. Брак в их продукции составляет: у первого - 2%, у второго - 3%, у третьего - 4%. Случайно выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена третьим рабочим.

Ответы

1. 1) 0,272; 2) 0,113; 3) 0,614. **2.** 0,221. **3.** H_1. **4.** 0,3. **5.** 0,345.

Глава 2. Случайные величины, их распределение и числовые характеристики

§ 2.1. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины

Случайной величиной называют переменную величину, которая в зависимости от исходов испытания принимает значения, зависящие от случая.

Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется *дискретной случайной величиной*.

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной*[1].

Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита X, Y, Z ..., а их значения - строчными буквами с индексами, например, x_1, x_2, x_3, ...

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между значениями x_1, x_2, x_3, ... этой величины и их вероятностями p_1, p_2, p_3, ...

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично или аналитически (т.е. с помощью формул).

Если дискретная случайная величина X принимает конечное множество значений x_1, x_2, ..., x_n соответственно с вероятностями p_1, p_2, ..., p_n,

---

[1] Более точное определение *непрерывной случайной величины* будет дано в § 2.2.

то ее закон распределения определяется формулами

$$P(X = x_k) = p_k \quad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{2.1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{2.1.2}$$

Этот закон можно задать и таблицей (см. табл. 2.1).

Таблица 2.1

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

В этой таблице сумма вероятностей также равна единице: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. События ($X = x_k$), $k = 1, 2, \ldots, n$, образуют полную группу событий, поэтому выполняется равенство (2.1.2).

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически, для чего в прямоугольной декартовой системе координат строят точки (x_k, p_k) и соединяют их последовательно отрезками прямых. Получающаяся при этом ломаная линия называется *многоугольником распределения* случайной величины X.

Если дискретная случайная величина X принимает бесконечную последовательность значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, p_3 \ldots$, то ее закон распределения определяется формулами

$$P(X = x_k) = p_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2.1.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1. \tag{2.1.4}$$

Этот закон распределения дискретной случайной величины X, принимающей бесконечную последовательность значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$ можно задать и таблицей (см. табл 2.2).

Таблица 2.2

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n	…
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n	…

Ряд, составленный из чисел $p_1, p_2, p_3 \ldots$ таблицы 2.2 сходится и его сумма равна единице.

З а м е ч а н и е. Отличие таблицы 2.2 от таблицы 2.1 состоит в том, что во второй таблице нет последнего значения; в первой таблице оно есть.

Пример 1. Задают ли законы распределения дискретной случайной величины следующие таблицы?

а)

X	2	3	4	5
P	0,1	0,4	0,3	0,2

б)

X	6	7	8	9
P	0,1	0,2	0,3	0,5

Решение. Первая таблица задает закон распределения дискретной случайной величины, поскольку выполняется равенство (2.1.2): $0,1+0,4+0,3+0,2=1$.

Вторая таблица не задает закон распределения дискретной случайной величины, так как условие (2.1.2) не выполнено: $0,1+0,2+0,3+0,5=1,\ 1\neq 1$.

Пример 2. Задают ли следующие таблицы законы распределения дискретной случайной величины?

а)

X	$1/3$	$1/3^2$	$1/3^3$	...	$1/3^k$	...
P	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	...	$1/2^k$	...

б)

X	$1/4$	$1/4^2$	$1/4^3$	...	$1/4^k$	...
P	1	$1/2$	$1/3$	...	$1/k$	...

Решение. Первая таблица задает закон распределения дискретной случайной величины X, принимающей бесконечную последовательность значений $x_k=1/3^k$ $(k=1,2,3\ldots)$. Действительно, ряд из чисел $p_k=1/2^k$ $(k=1,2,3\ldots)$ сходится и его сумма равна единице; это геометрический ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$ с первым членом $a=1/2$ и знаменателем $q=1/2$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}=\frac{a}{1-q}\quad(|q|<1);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1/2}{1-1/2}=1.$$

Равенство (2.1.4) в данном случае выполнено.

Вторая таблица не задает закон распределения дискретной случайной величины X, так как ряд из чисел $p_k = 1/k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ не имеет конечной суммы; это гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, который, как известно, расходится. Условие (2.1.4) в этом случае не выполняется.

Пример 3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1
P	0,1	0,2	0,4	p_4	0,1

Чему равна вероятность $p_4 = P \quad (X = 0{,}8)$?

Построить многоугольник распределения.

Решение. Поскольку должно выполняться равенство (2.2.1), т.е.

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1,$$

то

$$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5) = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2,$$

$$p_4 = 0{,}2.$$

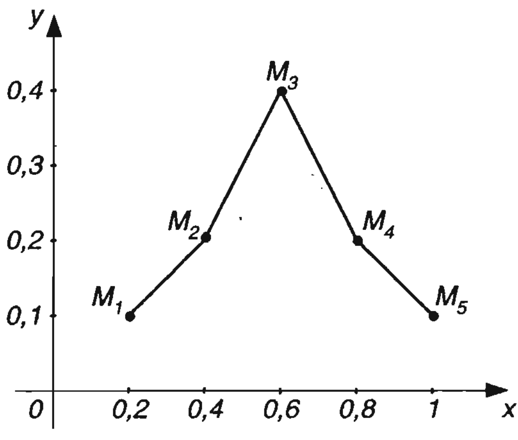


Рис. 2.1

В прямоугольной системе координат строим точки $M_1(0{,}2; 0{,}1)$, $M_2(0{,}4; 0{,}2)$, $M_3(0{,}6; 0{,}4)$, $M_4(0{,}8; 0{,}2)$, $M_5(1; 0{,}1)$; соединяем эти точки отрезками прямых (рис 2.1). Ломаная $M_1M_2M_3M_4M_5$ является многоугольником распределения данной случайной величины.

Пример 4. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

Найти вероятности $p_1 = P(X = 3)$ и $p_3 = P(X = 5)$, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1.

Решение. Так как

$$p_2 + p_4 + p_5 = 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}35 = 0{,}75,$$

то на основании равенства (2.1.2) заключаем, что

$$p_1 + p_3 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

Поскольку по условию $p_3 = 4p_1$, то

$$p_1 + p_3 = p_1 + 4p_1 = 5p_1.$$

Значит, $5p_1 = 0{,}25$, откуда $p_1 = 0{,}05$; следовательно,

$$p_3 = 4p_1 = 4 \cdot 0{,}05 = 0{,}20.$$

Итак, $p_1 = 0{,}05$; $p_3 = 0{,}20$.

Пример 5. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число гербов на обеих верхних сторонах монет. Рассматривается дискретная случайная величина X - число выпадений гербов на обеих монетах. Записать закон распределения случайной величины X.

Решение. В данном опыте четыре равновозможных элементарных исхода: (*Г*, *Г*), (*Г*, *Ц*), (*Ц*, *Г*), (*Ц*, *Ц*); запись (*Г*, *Ц*) означает, что на первой монете выпал *герб*, на второй - *цифра*; аналогичный смысл имеют остальные записи. *Герб* может выпасть 1 раз, 2 раза или не появиться ни разу. Следовательно, случайная величина X может принимать только три значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Найдем вероятности этих значений:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4} = 0{,}25; \; P(X = 1) = \frac{2}{4} = 0{,}50; \; P(X = 2) = \frac{1}{4} = 0{,}25;$$

$$p_1 = 0{,}25, \; p_2 = 0{,}50, \; p_3 = 0{,}25;$$

причем, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Таким образом, закон распределения данной случайной величины можно задать таблицей

X	0	1	2
P	0,25	0,50	0,25

П р и м е р 6. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается число очков, выпавших на обеих верхних гранях. Найти закон распределения дискретной случайной величины X - суммы выпавших очков на двух игральных кубиках.

Р е ш е н и е. В этом испытании 36 равновозможных элементарных исходов (см. табл. 1.1). Случайная величина X может принимать целые значения от 2 до 12, причем значения 2 и 12 принимает по одному разу, 3 и 11 - по 2 раза, 4 и 10 - по 3 раза, 5 и 9 - по 4 раза, 6 и 8 - по 5 раз, значение 7 - 6 раз.

Вычислим вероятности этих значений:

$$p_1 = P(X=2) = \frac{1}{36},\ p_2 = P(X=3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},\ p_3 = P(X=4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$

$$p_4 = P(X=5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},\ p_5 = P(X=6) = \frac{5}{36},\ p_6 = P(X=7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$p_7 = P(X=8) = \frac{5}{36},\ p_8 = P(X=9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},\ p_9 = P(X=10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$

$$p_{10} = P(X=11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18},\ p_{11} = P(X=12) = \frac{1}{36}.$$

Следовательно, закон распределения данной случайной величины X можно задать таблицей

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Отметим, что

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = 1,$$

т.е. выполнено равенство (2.1.2).

Пример 7. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. Найти закон распределения случайной величины X, равной числу красных карандашей в выборке.

Решение. В выборке из трех карандашей может не оказаться ни одного красного карандаша, может появиться один, два или три карандаша. Следовательно, случайная величина X может принимать только четыре значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$.

Найдем вероятности этих значений:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}; \quad p_2 = P(X = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35};$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}; \quad p_4 = P(X = 3) = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

Следовательно, данная случайная величина X имеет закон распределения:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Отметим, что $1/35+12/35+18/35+4/35=1$, т.е. выполнено равенство (2.1.2).

Пример 8. Вероятность изготовления нестандартного изделия при некотором технологическом процессе равна 0,06. Контролер берет из партии изделие и сразу проверяет его качество. Если оно оказывается нестандартным, дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, контролер берет следующее и т.д., но всего проверяет не более пяти изделий. Найти закон распределения дискретной случайной величины X - числа проверяемых изделий.

Решение. Дискретная случайная величина X может принимать пять значений: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$. Она примет значение $x_1 = 1$, т.е. будет проверено лишь одно изделие и партию задержат, если первое проверенное контролером изделие окажется нестандартным. Вероятность такого исхода испытания $P(X = 1) = 0{,}06$.

Проверяют два изделия, т.е. X=2, если первое окажется стандартным, а второе - нестандартным. Вероятность такого исхода испытания найдется по теореме умножения: $P(X=2)=0{,}94\cdot 0{,}06\approx 0{,}056$ (здесь $0{,}94 = 1 - 0{,}06$ - вероятность того, что изделие окажется стандартным).

Испытание ограничится проверкой качества трех изделий, если первые два окажутся стандартными, а третье - нестандартным. По теореме умножения вероятность такого исхода испытаний $P(X=3)=0{,}94^2\cdot 0{,}06\approx$ $\approx 0{,}053$. Аналогично находим $P(X=4)=0{,}94^3\cdot 0{,}06\approx 0{,}50$.

Проверяются пять изделий, если первые четыре окажутся стандартными, так как при любом качестве пятого изделия по условию проверка партии заканчивается. Имеем $P(X=5)=0{,}94^4\approx 0{,}781$.

Замечание. Тот же результат можно получить и другим способом. Пять изделий проверяются в двух случаях, которые являются несовместными событиями: 1) первые четыре изделия окажутся стандартными и пятое также стандартным; 2) первые четыре изделия окажутся стандартными, а пятое - нестандартным. Вероятности этих случаев по теореме умножения для независимых событий равны $0{,}94^4\cdot 0{,}94$ и $0{,}94^4\cdot 0{,}06$, а поэтому, в соответствии с теоремой сложения, вероятность того, что контролер будет проверять пять изделий, определится так:

$$P(X=5)=0{,}94^4\cdot 0{,}94+0{,}94^4\cdot 0{,}06=0{,}94^4\cdot(0{,}94+0{,}06)=0{,}94^4\approx 0{,}781.$$

Следовательно, закон распределения рассматриваемой случайной величины X можно представить в следующем виде:

X	1	2	3	4	5
P	0,06	0,056	0,053	0,050	0,781

Отметим, что $0{,}06+0{,}056+0{,}053+0{,}050+0{,}781=1$, т.е. выполнено условие (2.1.2).

Пример 9. Производится серия независимых опытов, в каждом из которых наступает событие A с одной и той же вероятностью p. Опыты продолжаются до первого появления события A. Рассматривается случайная величина X - число произведенных опытов. Составить для нее закон распределения.

Решение. Указанная случайная величина X может принимать значения $x_1=1, x_2=2, x_3=3, \ldots$. Событие $X=n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) означает, что в первых $n-1$ опытах событие A не наступает, а в n-м наступает. Вероятность такого исхода равна:

$$\underbrace{q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}_{n-1\text{ раз}}\cdot p=pq^{n-1},$$

где $q=1-p$. Следовательно, закон распределения данной случайной величины можно записать в виде следующей таблицы.

Таблица 2.3

X	1	2	3	...	n	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{n-1}	...

Замечание. Условие (2.1.4) в данном случае выполнено. Действительно, принимая во внимание условие сходимости геометрического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($|q|<1$) и формулу $S=\frac{a}{1-q}$ для его суммы, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Задачи

1. Задает ли закон распределения дискретной случайной величины каждая из следующих таблиц:

а)

X	0	1	2	3	4
P	0,05	0,15	0,20	0,25	0,35

б)

X	5	6	7	8	9
P	0,1	0,2	0,3	0,4	0,15

в)

X	S	S^2	S^3	...	$1/2^k$	...
P	2/3	$2/3^2$	$2/3^3$	...	$2/3^k$	...

г)

X	1	j	j^2	...	$1/4^k$	...
P	1	1/3	1/5	...	$1/2k-1$	...

д)

X	1	1/3	$1/3^2$	...	$1/3^k$	...
P	1	j	j^2	...	$1/4^k$	...

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	0	0,2	0,4	0,6	0,8
P	0,15	0,2	0,3	p_4	0,15

Чему равна вероятность $p_4 = P(X = 0{,}6)$? Постройте многоугольник распределения.

3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	1	2	3	4	5
P	p_1	0,15	0,30	0,25	p_5

Найдите вероятность $p_1 = P(X = 1)$ и $p_5 = P(X = 5)$, если известно, что p_5 в 2 раза больше p_1.

4. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число *цифр* на обеих верхних сторонах монет. Запишите закон распределения случайной величины X - число выпадения *цифры* на обеих монетах.

5. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, а остальные красные. Из этой урны извлекаются 3 шара. Найдите закон распределения дискретной случайной величины X - число голубых шаров в выборке.

6. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найдите закон распределения дискретной случайной величины, равной числу стандартных деталей в выборке.

7. Подбрасывается три игральных кубика, подсчитывается число очков на верхних гранях кубиков. Найдите закон распределения дискретной случайной величины, равной сумме очков, выпавших на трех кубиках.

Ответы

1. а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет. **2.** $p_4 = 0{,}2$. **3.** $p_1 = 0{,}10$, $p_3 = 0{,}20$;

7. Указание. Всего равновозможных элементарных исходов $6^3 = 216$. Число исходов, благоприятствующих суммам: 3 и 18 – 1; 4 и 17 – 3; 5 и 16 – 6; 6 и 15 – 10; 7 и 14 – 15; 8 и 13 – 21; 9 и 12 – 25; 10 и 11 – 27.

Вопросы

1. Что называют случайной величиной?
2. Какую величину называют дискретной случайной величиной?
3. Какую величину называют непрерывной случайной величиной?
4. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
5. Как задают закон распределения дискретной случайной величины,

принимающей конечное множество значений?

6. Что называют многоугольником распределения?

7. Как задают закон распределения дискретной случайной величины, принимающей счетное множество значений?

§ 2.2. Функция распределения

Функцией распределения[1] случайной величины X называется функция действительной переменной x, определяемая равенством

$$F(x) = P(X < x), \qquad (2.2.1)$$

где $P(X < x)$ - вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x. Геометрически это означает следующее: $F(x)$ - вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое изображается точкой на числовой прямой, расположенной слева от точки x (рис. 2.2).

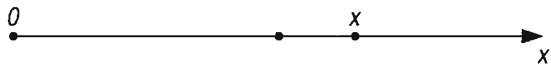


Рис. 2.2

Случайная величина называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x) = P(X < x)$ является непрерывно дифференцируемой.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение из полуинтервала $[\alpha, \beta)$, равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах этого полуинтервала:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (2.2.2)$$

Функция распределения $F(x)$ случайной величины X имеет следующие свойства.

1. Все значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку $[0, 1]$, т.е.

$$0 \leq F(x) \leq 1. \qquad (2.2.3)$$

Это следует из определения (2.2.1) и свойств вероятности.

2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей, т.е. если $x_1 < x_2$, то

$$F(x_1) \leq F(x_2). \qquad (2.2.4)$$

---

[1] *Функцию распределения* называют также *интегральной функцией*, или *интегральным законом* распределения случайной величины X.

3. Функция $F(x)$ в точке x_0 непрерывна слева, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0), \;\; F(x_0 - 0) = F(x_0). \qquad (2.2.5)$$

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то для ее функции распределения $F(x)$

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le a, \; F(x) = 1 \text{ при } x \ge b. \qquad (2.2.6)$$

5. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty, +\infty)$, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \; \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1. \qquad (2.2.7)$$

На основании свойств функции распределения $F(x)$ можно судить об особенностях ее графика (рис. 2.3 а, б).

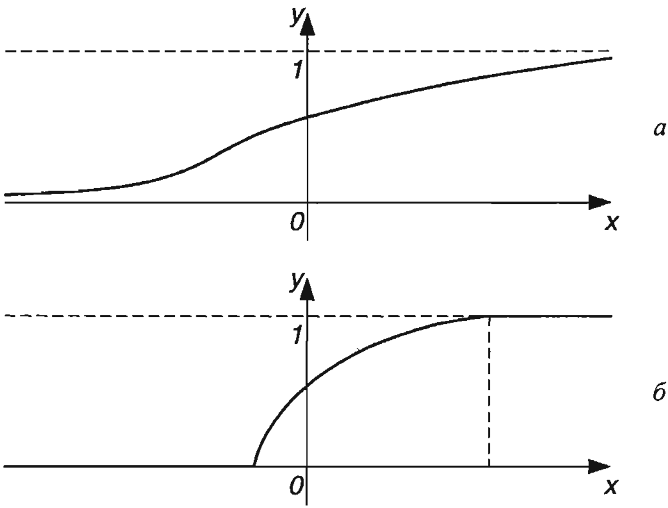


Рис. 2.3

Если X - непрерывная случайная величина, то вероятность того, что она примет одно, заданное определенное значение, равна нулю:

$$P(X = \alpha) = 0, \qquad (2.2.8)$$

поэтому выполняются равенства:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X < \beta), \qquad (2.2.9)$$

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)\,. \tag{2.2.10}$$

Функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots x_n$ с соответствующими вероятностями, имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)\,, \tag{2.2.11}$$

где символ $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x. Функция (2.2.11) является разрывной.

Пример 1. Дана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ \textit{если}\ x \le -\dfrac{\pi}{2}; \\ \cos x, \ \textit{если}\ -\dfrac{\pi}{2} < x \le 0; \\ 1, \ \textit{если}\ x > 0. \end{cases}$$

Показать, что эта функция является функцией распределения некоторой случайной величины X. Найти вероятность того, что эта случайная величина принимает значения из интервала $\left(-\dfrac{\pi}{3}; 0\right)$.

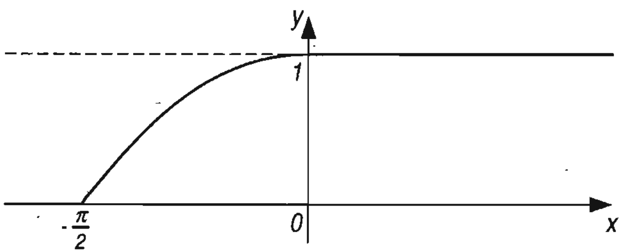


Рис. 2.4

Решение. Все значения этой величины принадлежат отрезку [0, 1], так как $|\cos x| \le 1$. Функция $F(x)$ является неубывающей: в промежутке $\left(-\infty, -\dfrac{\pi}{2}\right]$ она постоянная, равна нулю, в промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ возрастает, в промежутке $(0, +\infty)$ также постоянная, равная единице (рис.2.4).

Функция непрерывна в каждой точке x_0 области ее определения - промежутка $(-\infty, +\infty)$, поэтому непрерывна слева и справа, т.е. выполняется равенство (2.2.5). Выполняются и равенства (2.2.7).

Следовательно, функция $F(x)$ удовлетворяет всем свойствам, характерным для функции распределения. Функция $F(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины X.

Все значения случайной величины X принадлежат интервалу $(-\frac{\pi}{2}; 0)$, поэтому выполняются и равенства (2.2.6) при $a = -\frac{\pi}{2}$ и $b = 0$.

В соответствии с формулой (2.2.10) находим искомую вероятность

$$P(-\frac{\pi}{3} < X < 0) = F(0) - F(-\frac{\pi}{3}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Дана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & если\ x \le 0; \\ x^2, & если\ 0 < x \le 2; \\ 1, & если\ x > 2. \end{cases}$$

Является ли эта функция функцией распределения некоторой случайной величины?

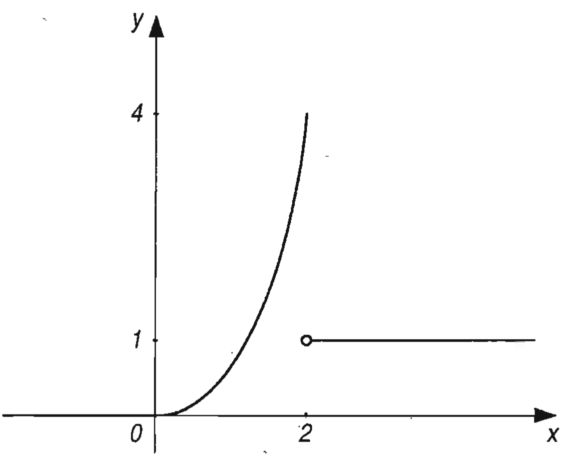


Рис. 2.5

Решение. Эта функция на промежутке $(1, 2]$, принимает значения, больше единицы. Условие (2.2.3) в данном случае не выполняется. Следовательно, указанная функция $F(x)$ не является функцией распределения случайной величины. График функции изображен на рис. 2.5.

Отметим, что равенства (2.2.7) для этой функции выполняются.

Пример 3. Является ли функцией распределения случайной величины функция

$$F(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)\,?$$

Решение. Данная функция не является функцией распределения случайной величины, так как в промежутке $(0, +\infty)$ она убывает; неравенство (2.2.4) в этом промежутке не выполняется. График функции изображен на рис. 2.6.

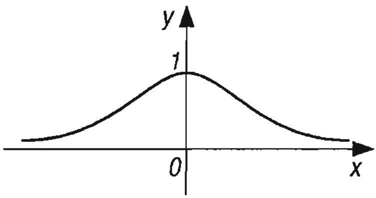


Рис. 2.6

Отметим, что все значения данной функции принадлежат промежутку $(0, 1]$, т.е. функция удовлетворяет неравенствам (2.2.3). Удовлетворяет она и первому из равенств (2.2.7); второе из этих равенств для данной функции не выполняется.

Пример 4. Случайные величины X_1 и X_2 имеют функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Доказать, что функция

$$F(x)=C_1F_1(x)+C_2F_2(x)$$

является функцией распределения некоторой случайной величины X, здесь C_1 и C_2 - неотрицательные числа, сумма которых равна единице.

Решение. Поскольку $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - функции распределения, то для них выполняются условия (2.2.3) - (2.2.5), (2.2.7).

Принимая во внимание эти условия, получаем:

$$0 \le F(x)=C_1F_1(x)+C_2F_2(x) \le C_1+C_2=1;\ \ 0 \le F(x) \le 1;$$

$$F(x_1)=C_1F_1(x_1)+C_2F_2(x_1) \le C_1F_1(x_2)+C_2F_2(x_2)=F(x_2),$$

$$F(x_1) \le F(x_2);$$

$$F(x_0-0)=C_1F_1(x_0-0)+C_2F_2(x_0-0)=C_1F_1(x_0)+C_2F_2(x_0)=F(x_0),$$

$$F(x_0-0)=F(x_0);$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=\lim_{x\to-\infty}(C_1F_1(x)+C_2F_2(x))=C_1\cdot\lim_{x\to-\infty}F_1(x)+C_2\cdot\lim_{x\to-\infty}F_2(x)=$$
$$=C_1\cdot 0+C_2\cdot 0=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(C_1F_1(x)+C_2F_2(x)) = C_1\cdot\lim_{x\to+\infty}F_1(x)+C_2\cdot\lim_{x\to+\infty}F_2(x) =$$
$$= C_1\cdot 1 + C_2\cdot 1 = C_1 + C_2 = 1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Таким образом, условиям (2.2.3) - (2.2.5), (2.2.7) удовлетворяет и функция $F(x)$. Значит, функция $F(x) = C_1F_1(x)+C_2F_2(x)$, где $C_1+C_2=1$, является функцией распределения некоторой случайной величины X.

Пример 5. Закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

X	0	1	2	3
P	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти функцию распределения этой случайной величины.

Решение. Для построения функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X пользуемся формулой (2.2.11).

1. При $x \le 0$ $\quad F(x) = \sum\limits_{x_k<0} P(X = x_k) = 0$.

2. При $x < 0 \le 1$ $\quad F(x) = \sum\limits_{x_k<1} P(X = x_k) = P(X = 0) = 0{,}2$.

3. При $1 < x \le 2$ $\quad F(x) = \sum\limits_{x_k<2} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) =$

$$= 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6.$$

4. При $2 < x \le 3$ $\quad F(x) = \sum\limits_{x_k<3} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$$= 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}9.$$

5. При $x > 3$ $\quad F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$

$$= 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1.$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 2.7.

Пример 6. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найти функцию распределения дискретной случайной величины, равной числу стандартных деталей в выборке.

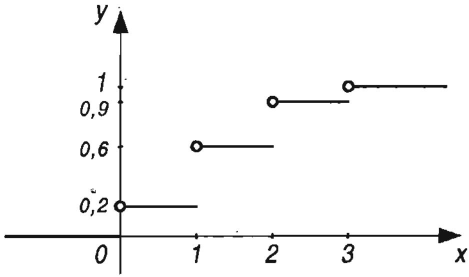


Рис. 2.7

Решение. Найдем сначала закон распределения данной случайной величины X. Эта величина может принимать три значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$. Вычислим вероятности этих значений:

$$p_1 = P(X=0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45},\ p_2 = P(X=1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45},$$

$$p_3 = P(X=2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}\ .$$

Следовательно, закон распределения данной случайной величины можно задать таблицей

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

В соответствии с формулой (2.2.11) строим функцию распределения.

1. При $x \le 0$ $\quad F(x) = \sum\limits_{x_k<0} P(X = x_k) = 0$.

2. При $0 < x \le 1$ $\quad F(x) = \sum\limits_{x_k<1} P(X = x_k) = P(X=0) = \frac{1}{45}$.

3. При $1 < x \le 2$ $\quad F(x) = \sum\limits_{x_k<2} P(X = x_k) = P(X=0) + P(X=1) =$

$$= \frac{1}{45} + \frac{16}{45} = \frac{17}{45}.$$

4. При $x > 2$ $\quad F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = 1.$

Пример 7. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ x/2 & при\ 0<x\le 2,\\ 1 & при\ x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (1, 2).

Решение. Для этого интервала $F(x)=x/2$. В соответствии с формулой (2.2.2) получаем:

$$P(1<X<2)=F(2)-F(1)=(2/2)-(1/2)=0{,}5\,.$$

Пример 8. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ x/3 & при\ 0<x\le 3,\\ 1 & при\ x>3.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (2, 3).

Решение. По формуле (2.2.2) находим:

$$P(2<x\le 3)=F(3)-F(2)=(3/3)-(2/3)=1-2/3=1/3\,.$$

Пример 9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ \sin x & при\ 0<x\le \pi/2,\\ 1 & при\ x>\pi/2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (4, 5).

Решение. Так как $P(4<X<5)=F(5)-F(4)=1-1=0$, то данная величина X таких значений не принимает.

Замечание. Этот результат можно получить и с помощью соотношений (2.2.6). Все значения этой величины принадлежат промежутку (0, ?/2).

Пример 10. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле $p_1=0{,}5$, для второго - $p_2=0{,}4$. Дискретная случайная величина X - число попаданий в мишень. Найти функцию распределению этой случайной величины. Найти вероятность события $X\ge 1$.

Решение. Найдем сначала закон распределения данной дискретной случайной величины X. Эта величина может принимать три значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$.

Введем обозначения: событие A_1 – "попадание первого стрелка", событие A_2 – "попадание второго стрелка", тогда $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ - их промахи соответственно. Из условия задачи следует, что

$$q_1 = P(\overline{A_1}) = 1 - p_1 = 0{,}5\,,$$

$$q_2 = P(\overline{A_2}) = 1 - p_2 = 0{,}6\,.$$

Значению $x_1=0$ соответствует случай, когда у обоих стрелков промахи - произошло событие $A = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$, где $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ - независимые события, поскольку A_1 и A_2 независимы.

По теореме умножения получаем

$$P(A) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3\,.$$

Значению $x_2=1$ соответствует случай, когда число попаданий равно единице: попадание у первого стрелка и промах у второго или попадание у второго и промах у первого. Это значит, что произошло событие

$$B = A_1\overline{A_2} + A_2\overline{A_1}\,,$$

где $A_1\overline{A_2}$ и $A_2\overline{A_1}$ - несовместные события, A_1 и $\overline{A_2}$, A_2 и $\overline{A_1}$ - независимые события соответственно. На основании теорем сложения и умножения находим:

$$P(B) = P(A_1\overline{A_2}) + P(A_2\overline{A_1}) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(A_2)P(\overline{A_1}) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5.$$

Значению $x_3=2$ соответствует случай, когда у обоих стрелков попадания: произошло событие $C = A_1A_2$. Следовательно,

$$P(C) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2\,.$$

Таким образом, закон распределения данной случайной величины можно задать таблицей

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Построим функцию распределения этой случайной величины. На основании формулы (2.2.11) получим:

1. При $x \le 0$ $\quad F(x) = \sum_{x_k < 0} P(X = x_k) = 0$.

2. При $0 < x \le 1$ $\quad F(x) = \sum_{x_k < 1} P(X = x_k) = P(X = 0) = 0{,}3$.

3. При $1 < x \le 2$ $\quad F(x) = \sum_{x_k < 2} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) =$

$$= 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8.$$

4. При $x > 2$ $\quad F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$$= 0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}2 = 1.$$

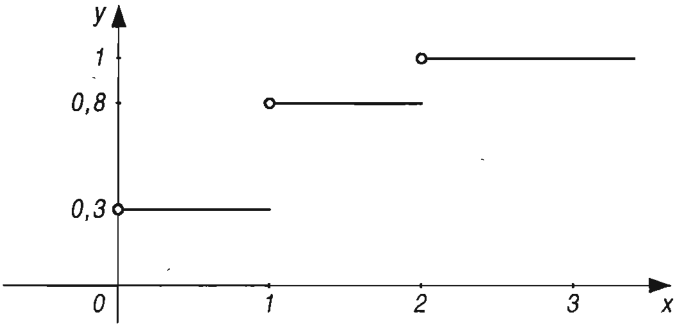


Рис. 2.8

График функции распределения изображен на рис. 2.8.

Найдем вероятность события $X \ge 1$. Это событие равно сумме двух событий $X=1$, $X=2$. Следовательно,

$$P(X \ge 1) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7.$$

Пример 11. Трижды подбрасывается симметричная монета. Найти функцию распределения случайной величины X, равной числу выпавших гербов.

Решение. Данная дискретная случайная величина может принимать четыре значения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Обозначим через A_1, A_2, A_3 события "выпал герб" при первом, втором, третьем подбрасываниях соответственно. В данном испытании

8 элементарных исходов: $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, $\overline{A}_1A_2A_3$, $A_1\overline{A}_2A_3$, $A_1A_2\overline{A}_3$, $A_1A_2A_3$.

Учитывая независимость событий A_1, A_2, A_3 и противоположных им событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$, что вероятность появления герба при одном подбрасывании равна 1/2, находим соответствующие вероятности:

$$P(X=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=\frac{1}{8},$$

$$P(X=1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8},$$

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3)=\frac{3}{8},$$

$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8}.$$

Итак, закон распределения рассматриваемой дискретной случайной величины X может быть представлен следующей таблицей:

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

В соответствии с формулой (2.2.11) находим функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ 1/8 & при\ 0<x\le 1,\\ 1/2 & при\ 1<x\le 2,\\ 7/8 & при\ 2<x\le 3,\\ 1 & при\ x>3.\end{cases}$$

Задачи

Является ли функцией распределения некоторой случайной величины каждая из следующих функций:

1. $F(x)=\begin{cases}e^{-x} & при\ x\le 0,\\ 1 & при\ x>0.\end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{при } x \le 0, \\ e^{x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$

3. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x^3 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$

4. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \cos x & \text{при } 0 < x \le \pi/2, \\ 1 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x/4 & \text{при } 0 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение из интервала (2, 4).

6. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ x & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение из интервала (5, 6).

7. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	6	8	12	15
P	0,1	3/20	0,5	0,25

Найдите функцию распределения этой случайной величины. Найдите вероятность того, что $6 < X \le 12$.

8. Подбрасываются две монеты. Случайная величина X - число выпадений герба на верхних сторонах монеты. Найдите функцию распределения случайной величины X. Постройте график этой функции.

9. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на "отлично", наугад извлекают 3 работы. Найдите функцию распределения дискретной случайной величины X, равной числу оцененных на "отлично" работ среди извлеченных. Используя функцию распределения найдите вероятность события $1 \le X \le 2$.

10. Подбрасываются три игральных кубика. Найдите функцию распределения случайной величины X, равной сумме очков на верхних гранях всех кубиков.

Ответы

1. Да. **2.** Нет. **3.** Да. **4.** Нет. **5.** S. **6.** 0. **10.** Указание. См. Указание к задаче 7 § 2.1.

Вопросы

1. Как определяется функция распределения случайной величины X?

2. Какие другие названия используют для функции распределения?

3. Как с помощью функции распределения $F(x)$ вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение из полуинтервала $[\alpha, \beta)$?

4. Какую случайную величину называют непрерывной?

5. Какими свойствами обладает функция распределения случайной величины X?

6. Какой вид имеет график функции распределения?

7. Чему равна вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно, заданное определенное значение?

8. Можно ли утверждать, что событие A является невозможным, если $P(A) = 0$?

9. Как определяется функция распределения для дискретной случайной величины?

10. Является ли непрерывной функция распределения для дискретной случайной величины?

§ 2.3. Плотность распределения

Плотностью распределения[1] вероятностей случайной величины X в точке x называется предел отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал $(x, x + \Delta x)$ к длине Δx отрезка $[x, x + \Delta x]$, когда последняя стремится к нулю:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (2.3.1)$$

---

[1] *Плотность распределения* называют также *дифференциальной функцией распределения.*

График функции $p(x)$ (плотности распределения) называется *кривой распределения*.

Интеграл от функции $p(x)$ по промежутку $(-\infty, x)$ равен значению функции распределения $F(x)$ для верхнего предела интегрирования, т.е.

$$\int_{-\infty}^{x} p(t)dt = F(x)\,. \qquad (2.3.2)$$

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (α, β) равна определенному интегралу от плотности распределения $p(x)$ по отрезку $[\alpha, \beta]$, т.е.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx\,. \qquad (2.3.3)$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами.

1. Плотность распределения $p(x)$ - неотрицательная функция, т.е.

$$p(x) \geq 0\,. \qquad (2.3.4)$$

Это следует из определения (2.3.1) и свойств вероятности.

2. В точках дифференцируемости функции распределения $F(x)$ ее производная равна плотности распределения:

$$F'(x) = p(x) \qquad (2.3.5)$$

(производная интегральной функции равна дифференциальной функции).

3. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ от плотности распределения $p(x)$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1\,. \qquad (2.3.6)$$

Если все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx = 1\,, \qquad (2.3.7)$$

так как $p(x) = 0$ вне этого отрезка.

Пример 1. Плотность распределения случайной величины X задана функцией

$$p(x)=\frac{c}{1+x^2}.$$

Найти значение параметра c.

Решение. Плотность распределения должна удовлетворять условию (2.3.6), т.е. должно выполняться равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c}{1+x^2}dx=c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=1,$$

откуда

$$c=1\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Неопределенный интеграл является табличным:

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=arc\,tg\;x.$$

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=arc\,tg\;x\Big|_{-\infty}^{0}+arc\,tg\;x\Big|_{0}^{+\infty}=$$

$$=arc\,tg\;0-arc\,tg\;(-\infty)+arc\,tg\;(+\infty)-arc\,tg\;0=0-(-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}-0=\pi.$$

Следовательно, $c=1/\pi$; плотность распределения имеет вид

$$p(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2},\quad p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Пример 2. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\; x\le 0,\\ x/2 & при\; 0<x\le 2,\\ 0 & при\; x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала $(1, 2)$.

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле (2.3.3):

$$P(1<X<2)=\int_1^2 \frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2=\frac{2^2}{4}-\frac{1^2}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=0{,}75\,.$$

Пример 3. Функция распределения случайной величина X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & при\ x>0.\end{cases}$$

Найти ее плотность распределения.

Решение. Плотность распределения $p(x)$ и функция распределения $F(x)$ связаны соотношением (2.3.5).

В соответствии с равенством (2.3.5) находим:

$$p(x)=F'(x)=\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{2x(1+x^2)-2x\cdot x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\quad при\ x>0;$$

$$p(x)=F'(x)=0\quad при\ x\le 0.$$

Итак, плотность распределения вероятностей данной случайной величины определяется функцией

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & при\ x>0.\end{cases}$$

Замечание. Эта функция удовлетворяет условиям (2.3.4) и (2.3.6). Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_0^{+\infty}\frac{2x}{(1+x^2)^2}=0+\int_0^{+\infty}\frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2}=-\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_0^{+\infty}=-(0-1)=1\,.$$

Пример 4. Найти функцию распределения случайной величины X, плотность вероятности которой определена формулой

$$p(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\quad(-\infty<x<+\infty)\,.$$

Решение. Применяя формулу (2.3.2), получаем

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dt}{\pi(1+t^2)}=\frac{1}{\pi}\,arc\,tg\,t\,\Bigg|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{\pi}[arc\,tg\,x-arc\,tg\,(-\infty)]=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,arc\,tg\,x\,.$$

З а м е ч а н и е. Полученная функция $F(x)$ удовлетворяет условиям (2.2.7):

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arc\,tg\,x\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\lim_{x\to-\infty}arc\,tg\,x=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arc\,tg\,x\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\lim_{x\to+\infty}arc\,tg\,x=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\,.$$

П р и м е р 5. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ ce^{-\alpha x} & при\ x>0\quad(\alpha>0).\end{cases}$$

При каком значении постоянной c функция $f(x)$ является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины X?

Р е ш е н и е. Прежде всего, должно быть $c\ge 0$. Для определения значения c воспользуемся условием (2.3.6):

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\,,\ \ c\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x}dx=1,\ \ -\frac{c}{\alpha}e^{-\alpha x}\Bigg|_{0}^{+\infty}=1\,,\ \ \frac{c}{\alpha}=1\,,\ c=\alpha\,.$$

Следовательно, плотность распределения имеет вид

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ \alpha e^{-\alpha x} & при\ x>0;\quad \alpha>0.\end{cases}$$

П р и м е р 6. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, плотность вероятности которой определена функцией

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0\ и\ x>2,\\ x & при\ 0<x\le 1,\\ 2-x & при\ 1<x\le 2.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Чтобы найти функцию распределения $F(x)$, воспользуемся формулой (2.3.2).

При $x \le 0$ получаем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$.

При $0 < x \le 1$ находим $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \int\limits_{0}^{x} p(t)\,dt =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{x} t\,dt = 0 + \frac{t^2}{2}\bigg|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

Когда $1 < x \le 2$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} p(t)\,dt + \int\limits_{0}^{1} p(t)\,dt + \int\limits_{1}^{x} p(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int\limits_{0}^{1} t\,dt +$$

$$+ \int\limits_{1}^{x} (2-t)\,dt = 0 + \frac{t^2}{2}\bigg|_0^1 + (2t - \frac{t^2}{2})\bigg|_1^x = \frac{1}{2} + (2x - \frac{x^2}{2}) - (2 - \frac{1}{2}) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

При $x > 2$ получаем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{2} p(t)\,dt + \int\limits_{2}^{x} p(t)\,dt =$

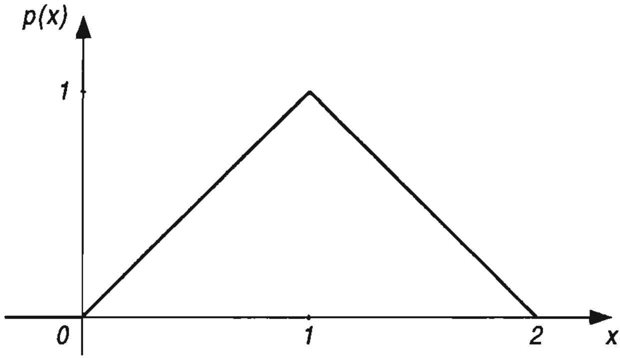


Рис. 2.9

$$= F(2) + \int\limits_{2}^{x} 0\,dt = 1.$$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0\,, \\ x^2/2 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ -x^2/2+2x-1 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

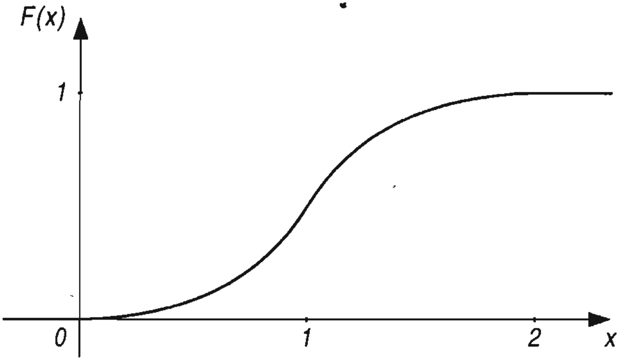


Рис. 2.10

Графики функций $p(x)$ и $F(x)$ изображены на рис. 2.9 и 2.10.

Пример 7. График плотности распределения вероятностей случайной величины X изображен на рис. 2.11.

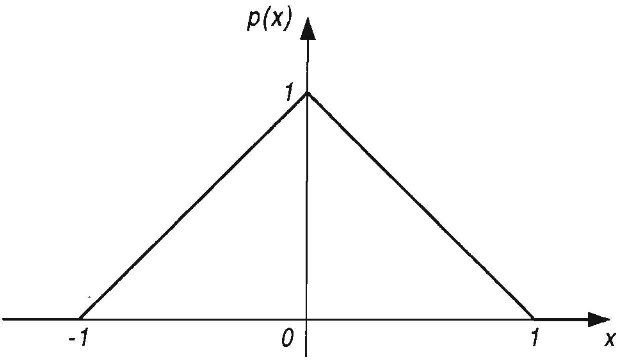


Рис. 2.11

Записать аналитическое выражение для плотности вероятностей, найти функцию распределения.

Решение. Пользуясь графиком, записываем аналитическое выражение плотности распределения вероятностей данной случайной величины:

$$p(x)=\begin{cases}0 & \textit{при } |x|>1,\\ x+1 & \textit{при } -1<x\le 0,\\ -x+1 & \textit{при } 0<x\le 1.\end{cases}$$

В соответствии с формулой (2.3.2) находим функцию распределения:

при $x\le -1$ получаем $\int\limits_{-\infty}^{x}0\,dx=0$;

при $-1<x\le 0$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{-1}0\,dt+\int\limits_{-1}^{x}(t+1)\,dt=0+\left.\frac{(t+1)^2}{2}\right|_{-1}^{x}=\frac{(x+1)^2}{2};$$

при $0<x\le 1$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{-1}0\,dx+\int\limits_{-1}^{0}(x+1)\,dx+\int\limits_{0}^{x}(-t+1)\,dt=$$

$$=\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0}-\left.\frac{(1-t)^2}{2}\right|_{0}^{x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{(1-x)^2}{2}=1-\frac{(1-x)^2}{2};$$

при $x>1$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}p(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{-1}0\,dx+\int\limits_{-1}^{0}(x+1)\,dx+\int\limits_{0}^{1}(-x+1)\,dx+\int\limits_{1}^{x}0\,dx=$$

$$=\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0}-\left.\frac{(1-x)^2}{2}\right|_{0}^{1}=\frac{1}{2}-0-(0-\frac{1}{2})=1.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \textit{при } x\le -1,\\ \dfrac{(x+1)^2}{2} & \textit{при } -1<x\le 0,\\ 1-\dfrac{(1-x)^2}{2} & \textit{при } 0<x\le 1,\\ 1 & \textit{при } x>1.\end{cases}$$

График функции распределения изображен на рис. 2.12.

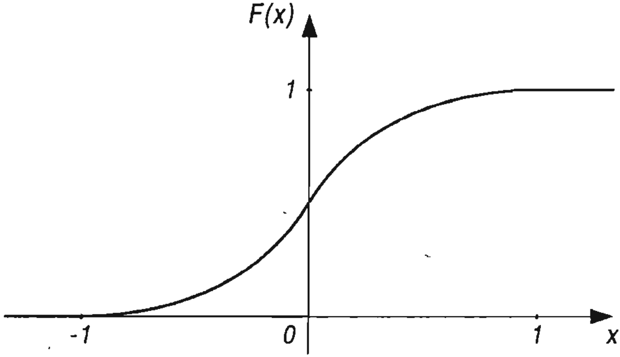


Рис. 2.12

Пример 8. Плотность распределения вероятностей случайной величины X определяется функцией

$$p(x) = ax^2 e^{-kx} \quad (k > 0, \quad 0 \le x < +\infty).$$

Найти значение коэффициента a. Найти функцию распределения $F(x)$ величины X.

Решение. Значение коэффициента a определяем из равенств:

$$\int_0^{+\infty} ax^2 e^{-kx} dx = 1,$$

$$a = 1 \Big/ \int_0^{+\infty} x^2 e^{-kx} dx.$$

Двукратным интегрированием по частям находим:

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-kx} dx = -\frac{1}{k} x^2 e^{-kx} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{k} \int_0^{\infty} x e^{-kx} dx =$$

$$= 0 - \frac{2}{k^2} x e^{-kx} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{k^2} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = -\frac{2}{k^3} e^{-kx} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{k^3}.$$

Следовательно, $a = k^3/2$ и плотность распределения задана функцией $p(x) = k^3 x^2 e^{-kx}/2$.

Функция распределения $F(x)$ имеет вид

$$F(x)=\int_0^x \frac{k^3}{2}t^2e^{-kt}dt=1-\frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}.$$

Пример 9. Задана функция $f(x)=ae^{-|x|}$. При каком значении a ее можно рассматривать как плотность распределения вероятностей некоторой случайной величины X?

Решение. Если $f(x)$ - плотность вероятности, то должно выполняться условие (2.3.6). Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a\,e^{-|x|}dx=a\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx+a\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx=ae^{x}\Big|_{-\infty}^{0}-ae^{-x}\Big|_{0}^{+\infty}=$$

$$=a(1-0)-a(0-1)=2a=1,\quad \text{т.е. } a=1/2.$$

Итак, функция $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины.

Пример 10. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{(1-\cos x)}{2} & \text{при } 0<x\le\pi,\\ 1 & \text{при } x>\pi.\end{cases}$$

Найти плотность распределения величины X. Вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $(\pi/3,\pi/2)$.

Решение. Плотность вероятности $p(x)$ и функция распределения $F(x)$ случайной величины X связаны соотношением (2.3.5), т.е. $F'(x)=p(x)$. Следовательно,

$$p(x)=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x>\pi,\ p(x)=\big((1-\cos x)/2\big)'=(\sin x)/2$$

в интервале $(0,\pi)$. По формуле (2.3.3) находим искомую вероятность

$$P\left(\frac{\pi}{3}<X<\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x}{2}dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}.$$

Пример 11. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$p(x)=\frac{c}{e^{x}+e^{-x}}.$$

Найти значение параметра c, функцию распределения $F(x)$.

Решение. В соответствии с условием (2.3.6) должно быть

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c\,dx}{e^{x}+e^{-x}}=1.$$

Вычислим этот несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c\,dx}{e^{x}+e^{-x}}=c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx=c\int_{-\infty}^{0}\frac{d(e^{x})}{1+(e^{x})^{2}}+c\int_{0}^{+\infty}\frac{d(e^{x})}{1+(e^{x})^{2}}=$$

$$=c\,arctg\,e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}+c\,arctg\,e^{x}\Big|_{0}^{+\infty}=c\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $c\cdot\frac{\pi}{2}=1$, $c=\frac{2}{\pi}$; плотность вероятности определяется функцией

$$p(x)=\frac{2}{\pi\,(e^{x}+e^{-x})}.$$

По формуле (2.3.2) находим функцию распределения данной случайной величины X:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{2\,dt}{\pi(e^{t}+e^{-t})}=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{dt}{e^{t}+e^{-t}}=\frac{2}{\pi}\,arctg\,e^{t}\Big|_{-\infty}^{x}=\frac{2}{\pi}arctg\,e^{x},$$

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\,arctg\,e^{x}.$$

Пример 12. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\; x\le -a,\\ \dfrac{(a+x)^{2}}{2\,a^{2}} & при\; -a<x\le 0,\\ 1-\dfrac{(a-x)^{2}}{2\,a^{2}} & при\; 0<x\le a,\\ 1 & при\; x>a..\end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины X.

Решение. Пользуясь равенством (2.3.5), находим функцию $p(x)$.

Так как

$$\left(\frac{(a+x)^2}{2a^2}\right)' = \frac{1}{a}+\frac{x}{a^2} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{x}{a}\right),$$

$$\left(1-\frac{(a-x)^2}{2a^2}\right)' = \frac{1}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

то плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -a, \\ \dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{x}{a}\right) & \text{при } -a < x \le 0, \\ \dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right) & \text{при } 0 < x \le a, \\ 0 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

Задачи

1. Является ли плотностью распределения некоторой случайной величины каждая из следующих функций:

а) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \text{ и } x > 1, \\ 1 & \text{при } 0 < x \le 1; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \text{ и } x > 1, \\ x(1-x) & \text{при } 0 < x \le 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1 \text{ и } x > 1, \\ 3x^2/2 & \text{при } -1 < x \le 1; \end{cases}$

г) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$?

2. Функция распределения случайной величины X задана формулами

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ cx^3 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найдите значение коэффициента c и плотность распределения вероятностей случайной величины X.

3. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при } x \le 0, \\ x^2 & \textit{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \textit{при } x > 1. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения случайной величины X. Чему равна вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (0,5; 1)?

4. Плотность распределения случайной величины X задана функцией

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при } x \le 0, \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} & \textit{при } x > 0. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что значение случайной величины X принадлежит интервалу (2, 3).

5. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \textit{при } x \le -1, \\ 1/2 & \textit{при } -1 < x \le 0, \\ (x+1)/2 & \textit{при } 0 < x \le 1, \\ 1 & \textit{при } x > 1. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения $p(x)$ этой случайной величины. Чему равна вероятность того, что значение случайной величины X принадлежит интервалу (0,5; 1)?

6. График плотности распределения вероятностей случайной величины X имеет вид, изображенный на рис. 2.13.

Запишите аналитическое выражение для плотности распределения $p(x)$. Найдите функцию распределения случайной величины X.

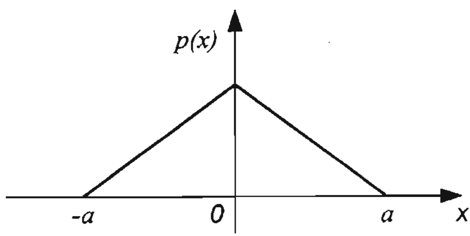


Рис. 2.13

Ответы

1. а) да; б) нет; в) да; г) нет ($f(x) < 0$ *при* $x < 0$). **2.** $c = 1$;

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 3x^2 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$ **3.** $$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 2x & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при } x > 1; \end{cases}$$ $P(0{,}5 < X < 1) = 0{,}75$.

4. 0,2. **5.** $p = 0{,}5$. **6.** Указание. См. пример 7.

Вопросы

1. Что называют плотностью распределения случайной величины?

2. Как по-другому называют плотность распределения?

3. Что называют кривой распределения?

4. Как с помощью плотности распределения найти вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (α, β)?

5. Какие свойства имеет плотность распределения?

6. Как выражается функция распределения через плотность распределения?

7. Как выражается плотность распределения через функцию распределения?

§ 2.4. Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей конечное множество значений с законом распределения

$$P(X = x_k) = p_k\,,\quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \tag{2.4.2}$$

называется сумма произведений ее значений на их соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n\,,\quad M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k\,. \tag{2.4.3}$$

Для обозначения математического ожидания используются и другие символы: EX, a, m_x.

Математическое ожидание дискретной случайной величины приближенно равно среднему арифметическому всех ее возможных значений. Вследствие этого математическое ожидание случайной величины называют ее *средним значением*.

З а м е ч а н и е. Математическое ожидание случайной величины называют также *центром распределения*. Это название заимствовано из механики и объясняется следующим: если в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ оси Ox находятся соответственно массы $p_1, p_2, ..., p_n$, то координата x центра тяжести системы материальных точек вычисляется по формуле

$$x = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k p_k\right) \Bigg/ \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right).$$

Поскольку выполняется условие (2.4.2), то

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = M(X).$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины, принимающей бесконечную последовательность значений с законом распределения

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, 3, ..., \tag{2.4.4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1, \tag{2.4.5}$$

определяется формулой

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k, \tag{2.4.6}$$

если этот ряд сходится абсолютно.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, а $p(x)$ - ее плотность вероятностей, определяется формулой

$$M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} xp(x)\, dx. \tag{2.4.7}$$

Если все значения непрерывной случайной величины X принадлежат бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$, а $p(x)$ - ее плотность вероятностей, то математическое ожидание определяется формулой

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\, dx, \tag{2.4.8}$$

когда этот несобственный интеграл сходится абсолютно.

Отметим, что математическое ожидание случайной величины есть величина постоянная.

Свойства математического ожидания случайной величины.

1. Значение математического ожидания случайной величины X заключено между ее наименьшим и наибольшим значениями:

$$a \le M(X) \le b, \tag{2.4.9}$$

где a - наименьшее, b - наибольшее значение величины X.

2. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M(C) = C \qquad (C = const). \tag{2.4.10}$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X) \qquad (C = const). \tag{2.4.11}$$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y). \tag{2.4.12}$$

Это равенство распространяется на n случайных величин:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n). \tag{2.4.13}$$

5. Математическое ожидание разности двух случайных величин равно разности их математических ожиданий:

$$M(X-Y) = M(X) - M(Y). \tag{2.4.14}$$

6. Математическое ожидание произведения двух *независимых* случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y). \tag{2.4.15}$$

Это равенство распространяется на n независимых случайных величин

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot ... \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n). \tag{2.4.16}$$

Пример 1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей

X	3	4	5	6	7
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение. В соответствии с формулой (2.4.3) находим

$$M(X)=3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}4+6\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}1=0{,}3+0{,}8+2{,}0+1{,}2+0{,}7=5\,.$$

Итак, математическое ожидание данной случайной величины равно 5. Неравенства (2.4.9) выполняются: $3<5<7$.

Пример 2. Закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей

X	-4	-2	0	2	4
P	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

Записать законы распределения случайных величин $3X$, $X/2$. Найти математические ожидания случайных величин X, $3X$, $X/2$.

Решение. Запишем законы распределения случайных величин $3X$ и $X/2$ с помощью таблиц:

$3X$	-12	-6	0	6	12
P	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

$X/2$	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

По формуле (2.4.3) вычисляем математические ожидания этих величин:

$$M(X)=-4\cdot 0{,}1+(-2)\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}15+2\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}3=0{,}9\,;$$

$$M(3X)=-12\cdot 0{,}1+(-6)\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}15+6\cdot 0{,}25+12\cdot 0{,}3=2{,}7\,;$$

$$M(X/2)=-2\cdot 0{,}1+(-1)\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}15+1\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}3=0{,}45\,.$$

Замечание. Математическое ожидание случайных величин $3X$ и $X/2$ можно вычислить, пользуясь равенством (2.4.11), при известном математическом ожидании величины X:

$$M(3X)=3M(X)=3\cdot 0{,}9=2{,}7\,;$$

$$M(\frac{1}{2}X)=\frac{1}{2}M(X)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}9=0{,}45\,.$$

Пример 3. Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y: $M(X)=3$, $M(Y)=2$.

Найти математические ожидания суммы и разности этих величин.

Решение. На основании формул (2.4.12) и (2.4.14) заключаем, что

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=3+2=5,$$

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y)=3-2=1.$$

Пример 4. Известны математические ожидания двух независимых случайных величин X и Y: $M(X)=4$, $M(Y)=5$.

Найти математическое ожидание их произведения.

Решение. Применяя формулу (2.4.15), находим

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)=4\cdot 5=20.$$

Пример 5. Найти математическое ожидание случайной величины $Y=2X+7$, если известно, что $M(X)=4$.

Решение. Пользуясь формулами (2.4.10), (2.4.11), (2.4.12), находим

$$M(Y)=M(2X+7)=M(2X)+M(7)=$$
$$=2M(X)+7=2\cdot 4+7=15.$$

Пример 6. Подбрасывается игральный кубик. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, равной числу выпавших очков.

Решение. Эта случайная величина может принимать шесть значений: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$, $x_6=6$; вероятность каждого из них одна и та же, равная 1/6. Закон распределения случайной величины X можно задать формулами

$$P(X=x_k)=1/6,\ \ k=1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

$$\sum_{k=1}^{6} p_k=1.$$

По формуле (2.4.3) находим математическое ожидание

$$M(X)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=3{,}5.$$

Пример 7. Подбрасываются два игральных кубика. Дискретная случайная величина X - сумма очков, выпавших на обоих кубиках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Решение. Данная случайная величина принимает все целые значения от 2 до 12. Закон ее распределения можно задать следующей таблицей:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

По формуле (2.4.3) находим

$$M(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+$$
$$+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=$$
$$=\frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36}=\frac{252}{36}=7.$$

З а м е ч а н и е 1. Этот результат можно получить проще. Случайную величину числа очков, выпадающих на одном кубике, обозначим через X, а на другом - через Y. Эти случайные величины имеют одинаковые законы распределения (см. пример 6). По формуле (2.4.12) получаем

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=3{,}5+3{,}5=7.$$

З а м е ч а н и е 2. Поскольку величины X и Y независимы, то можно найти и математическое ожидание случайной величины $Z=XY$ - произведения числа очков, выпавших при одновременном подбрасывании двух кубиков. По формуле (2.4.15) имеем:

$$M(Z)=M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)=3{,}5\cdot 3{,}5=12{,}25.$$

П р и м е р 8. Производятся независимые опыты, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p. Опыты продолжаются до первого появления события A. Случайная величина X - число произведенных опытов. Найти математическое ожидание случайной величины X.

Р е ш е н и е. Возможные значения этой случайной величины: $x_n=n$, $n=1, 2, 3, \ldots$. Событие $X=n$ означает, что в первых $n-1$ опытах событие A не наступает, а в $n-$м опыте наступает. Вероятность такого исхода равна

$$P(X=n)=\underbrace{qq\ldots q}_{n-1\text{ раз}}\cdot p=pq^{n-1},\quad (q=1-p).$$

Следовательно, закон распределения случайной величины X можно представить таблицей

X	1	2	3	...	n	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{n-1}	...

Находим математическое ожидание этой величины:

$$M(X)=1\cdot p+2\cdot pq^2+3\cdot pq^2+\ldots+npq^{n-1}+\ldots=$$

$$=p(1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}+\ldots).$$

Ряд, записанный в скобках, получается почленным дифференцированием геометрического ряда

$$q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots=\frac{q}{1-q}=\frac{1}{1-q}-1.$$

Следовательно,

$$M(X)=p\left(\frac{1}{1-q}-1\right)'=p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

Пример 9. Дискретная случайная величина X, которая может принимать бесконечную последовательность значений, задана следующим законом распределения

X	$1/3$	$1/3^2$	$1/3^3$	...	$1/3^k$	...
P	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	...	$1/2^k$	...

,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1.$$

Найти математическое ожидание случайной величины X.

Решение. По формуле (2.4.6) находим

$$M(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6^k}=\frac{1/6}{1-1/6}=\frac{1}{5}.$$

Пример 10. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана функцией

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 3x^2/8 & \text{при } 0<x\le 2,\\ 0 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины X.

Решение. По формуле (2.4.7) находим

$$M(X)=\int_0^2 x\cdot 3x^2/8\,dx=\int_0^2 3x^3/8\,dx=\frac{3}{8}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2=1{,}5.$$

Пример 11. Найти математическое ожидание случайной величины X, если известна функция распределения этой величины

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ x^2 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Решение. Найдем сначала плотность распределения вероятностей этой величины. Пользуясь формулой (2.3.5), получаем

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 2x & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\int_0^1 2x^2\,dx=2\int_0^1 x^2\,dx=2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

Пример 12. Найти математическое ожидание случайной величины X, плотность распределения которой задана функцией

$$p(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)}\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

Решение. В соответствии с формулой (2.4.8) находим:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{\pi(1+x^2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0-\lim_{x\to-\infty}\ln(1+x^2)\right)+\frac{1}{\pi}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x^2)-0\right)=0,$$

поскольку

$$\lim_{x\to-\infty}\ln(1+x^2)=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x^2).$$

Следовательно,

$$M(X)=0$$

для данной случайной величины.

З а м е ч а н и е. Если плотность распределения $p(x)$ - функция четная, то $xp(x)$ будет нечетной функцией и в этом случае

$$\int_{-a}^{a} xp(x)dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = 0, \quad M(X) = 0.$$

Итак, если плотность распределения $p(x)$ - функция четная, то центром распределения случайной величины X служит начало координат.

П р и м е р 1 3. Найти математическое ожидание случайной величины X, функция распределения которой имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -a, \\ \dfrac{(a+x)^2}{2a^2} & \text{при } -a < x \le 0, \\ 1 - \dfrac{(a-x)^2}{2a^2} & \text{при } 0 < x \le a, \\ 1 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Найдем сначала плотность распределения вероятностей этой случайной величины. Поскольку $p(x) = F'(x)$, то:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -a, \\ \dfrac{1}{a}\left(1 + \dfrac{x}{a}\right) & \text{при } -a < x \le 0, \\ \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{при } 0 < x \le a, \\ 0 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

С помощью формулы (2.4.7) находим искомое математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-a}^{a} xp(x)\,dx = \int_{-a}^{0} \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right)x\,dx + \int_{0}^{a} \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a}\right)x\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-a}^{0}\left(x + \frac{x^2}{a}\right)dx + \frac{1}{a}\int_{0}^{a}\left(x - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{1}{a}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{-a}^{0} +$$

$$+ \frac{1}{a}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{0}^{a} = \frac{1}{a}\left(-\frac{(-a)^2}{2} - \frac{(-a)^3}{3a}\right) + \frac{1}{a}\left(\frac{(a)^2}{2} - \frac{(a)^3}{3a}\right) = 0.$$

Задачи

1. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей:

X	1	2	3	4	5
P	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

2. Закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей:

X	3	6	9	12
P	0,1	0,2	0,3	0,4

Запишите закон распределения случайных величин $2X$, $X/3$. Найдите математические ожидания случайных величин X, $2X$, $X/3$.

3. Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y: $M(X)=7$, $M(Y)=4$. Найдите математические ожидания суммы и разности этих величин.

4. Известны математические ожидания двух независимых случайных величин X и Y: $M(X)=6$, $M(Y)=8$. Найдите математическое ожидание их произведения.

5. Найдите математическое ожидание случайной величины $Y=8X+5$, если известно, что $M(X)=1,5$.

6. Дискретная случайная величина X, которая может принимать бесконечную последовательность значений, задана следующим законом распределения

X	$1/4$	$1/4^2$	$1/4^3$	...	$1/4^k$	...
P	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	...	$1/2^k$	...

,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 .$$

Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

7. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана функцией

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при } x \le 0, \\ 3x^2 & \textit{при } 0 < x \le 1, \\ 0 & \textit{при } x > 1 . \end{cases}$$

Найдите математическое ожидание случайной величины X.

8. Найдите математическое ожидание случайной величины X, если известна функция распределения этой величины

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ x/3 & \text{при } 0<x\le 3,\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

9. Найдите математическое ожидание случайной величины X, если функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 1-e^{-\alpha x} & \text{при } x>0 \quad (\alpha>0).\end{cases}$$

Ответы

1. 2,85. **2.** 9, 18, 3. **3.** 11, 3. **4.** 48. **5.** 17. **6.** 1/7. **7.** 0,75. **8.** 4,5. **9.** $1/\alpha$.

Вопросы

1. Как определяется математическое ожидание дискретной случайной величины X, принимающей конечное множество значений?

2. Какие другие названия используют для математического ожидания? Чем объясняются эти названия?

3. Что называют математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей счетное множество значений?

4. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$?

5. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$?

6. Каковы свойства математического ожидания случайной величины?

7. Какому условию должны удовлетворять случайные величины X и Y, чтобы выполнялось равенство (2.4.15)?

8. Докажите, что математическое ожидание неотрицательной дискретной величины неотрицательно.

§ 2.5. Дисперсия случайной величины. Среднее квадратическое отклонение

Разность $X-M(X)$ называется *отклонением* случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$. Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M\big(X-M(X)\big)=0. \tag{2.5.1}$$

Дисперсией, или *рассеянием*, случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right). \tag{2.5.2}$$

Из определения и свойств математического ожидания следует, что дисперсия любой случайной величины неотрицательна, т.е.

$$D(X) \geq 0 . \tag{2.5.3}$$

Для вычисления дисперсии применяется формула

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 . \tag{2.5.4}$$

Дисперсия случайной величины обладает следующими свойствами:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0 \quad (C = const) . \tag{2.5.5}$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X) \quad (C = const) . \tag{2.5.6}$$

4. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) . \tag{2.5.7}$$

5. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) . \tag{2.5.8}$$

З а м е ч а н и е . Свойство 3 распространяется на n независимых случайных величин:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) . \tag{2.5.9}$$

Дисперсия дискретной случайной величины с законом распределения

$$P(X = x_k) = p_k \quad (k = 1, 2, \ \ldots, n),$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

определяется формулой

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X))^2 p_k \tag{2.5.10}$$

или формулой

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2 p_k\,, \qquad (2.5.10\text{ а})$$

где

$$a=M(X) \qquad (2.5.11)$$

- другое обозначение для математического ожидания. Этим обозначением будем пользоваться и в дальнейшем, в зависимости от обстоятельств.

Если дискретная случайная величина принимает бесконечную последовательность значений с законом распределения

$$P(X=x_k)=p_k \quad (k=1,2,3,\dots)\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k=1\,,$$

то ее дисперсия определяется формулой

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k-M(X_k)\right)^2 p_k \qquad (2.5.12)$$

при условии, что этот ряд сходится.

Дисперсия непрерывной случайной величины X, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha,\beta]$, определяется формулой

$$D(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-a)^2 p(x)dx\,, \qquad (2.5.13)$$

где $p(x)$ - плотность распределения вероятностей этой величины, $a=M(X)$ - ее математическое ожидание.

Дисперсию можно вычислять по формуле

$$D(X)=\int_{\alpha}^{\beta}x^2 p(x)\,dx-\left(M(X)\right)^2. \qquad (2.5.14)$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, все значения которой принадлежат отрезку $(-\infty,+\infty)$, определяется формулой

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 p(x)\,dx\,, \qquad (2.5.15)$$

если этот несобственный интеграл сходится абсолютно.

Средним квадратическим отклонением, или *стандартным отклонением*, случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,. \tag{2.5.16}$$

Это определение имеет смысл, поскольку выполнено условие (2.5.3).

Пример 1. Доказать формулы (2.5.1) и (2.5.4).

Решение. Так как математическое ожидание $M(X)$ - постоянная величина, математическое ожидание постоянной равно этой постоянной, математическое ожидание разности случайных величин равно разности их математических ожиданий, то

$$M\big(X - M(X)\big) = M(X) - M\big(M(X)\big) = M(X) - M(X) = 0\,;$$

равенство (2.5.1) доказано.

Учитывая свойства математического ожидания, получаем

$$D(X) = M\Big(\big(X - M(X)\big)^2\Big) = M\Big(X^2 - 2XM(X) + \big(M(X)\big)^2\Big) =$$
$$= M(X^2) - 2M\big(XM(X)\big) + M\Big(\big(M(X)\big)^2\Big) = M(X^2) -$$
$$- 2M(X)M(X) + \big(M(X)\big)^2 = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2\,,$$

равенство (2.5.4) доказано.

Пример 2. Доказать равенства (2.5.5) - (2.5.8).

Решение. Принимая во внимание определение дисперсии и тот факт, что математическое ожидание постоянной равно этой постоянной, получаем

$$D(C) = M\Big(\big(C - M(C)\big)^2\Big) = M\Big(\big(C - C\big)^2\Big) = M(0) = 0\,.$$

Из определения дисперсии и свойств математического ожидания следует, что

$$D(CX) = M\Big(\big(CX - M(CX)\big)^2\Big) = M\Big(\big(CX - CM(X)\big)^2\Big) =$$
$$= M\Big(C^2 \cdot \big(X - M(X)\big)^2\Big) = C^2 M\Big(\big(X - M(X)\big)^2\Big) = C^2 D(X)\,.$$

Для доказательства формулы (2.5.8) воспользуемся формулой (2.5.4):

$$D(X+Y) = M\big((X+Y)^2\big) - \big(M(X+Y)\big)^2 = M\big(X^2 + 2XY + Y^2\big) -$$
$$- \big(M(X) + M(Y)\big)^2 = M(X^2) + M(2XY) + M(Y^2) -$$
$$- \Big[\big(M(X)\big)^2 + 2M(X)M(Y) + \big(M(Y)\big)^2\Big] = M(X^2) +$$
$$+ 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - \big(M(X)\big)^2 - 2M(X)M(Y) -$$
$$- \big(M(Y)\big)^2 = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2 + M(Y^2) - \big(M(Y)\big)^2 = D(X) + D(Y)\,.$$

Равенство (2.5.8) следует из формул (2.5.6) и (2.5.7):

$$D(X-Y)=D\big(X+(-Y)\big)=D(X)+D(-Y)=D(X)+(-1)^2 D(Y)=$$
$$=D(X)+D(Y).$$

Пример 3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. По формуле (2.4.3) находим

$$M(X)=0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}2=0{,}9.$$

Запишем закон распределения квадрата отклонения этой величины, т.е. величины $(X-M(X))^2$:

$(X-M(X))^2$	$(0\text{-}0{,}9)^2$	$(1\text{-}0{,}9)^2$	$(2\text{-}0{,}9)^2$
P	0,3	0,5	0,2

По формуле (2.5.10) получаем

$$D(X)=(0-0{,}9)^2\cdot 0{,}3+(1-0{,}9)^2\cdot 0{,}5+(2-0{,}9)^2\cdot 0{,}2=$$
$$=0{,}81\cdot 0{,}3+0{,}01\cdot 0{,}5+1{,}21\cdot 0{,}2=0{,}49.$$

В соответствии с формулой (2.5.16) находим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}49}=0{,}7.$$

Замечание. Дисперсию можно вычислить и по формуле (2.5.4). Найдем для этого математическое ожидание квадрата случайной величины X, предварительно записав закон распределения случайной величины X^2:

X^2	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

По формуле (2.4.3) находим

$$M(X^2)=0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}2=1{,}3.$$

В соответствии с формулой (2.5.4) находим

$$D(X)=M(X^2)-\big(M(X)\big)^2=1{,}3-0{,}9^2=1{,}3-0{,}81=0{,}49.$$

Пример 4. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Вычислить дисперсию случайной величины X по формуле (2.5.4) и по формуле (2.5.10).

Решение. Сначала найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = -2 \cdot 0{,}1 - 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 = 0 .$$

Запишем закон распределения случайной величины $(X - M(X))^2$:

$(X-M(X))^2$	$(-2-0)^2$	$(-1-0)^2$	$(0-0)^2$	$(1-0)^2$	$(2-0)^2$
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

и найдем дисперсию случайной величины X по формуле (2.5.10):

$$D(X) = 4 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}2 .$$

Квадрат случайной величины X, т.е. X^2 - это новая случайная величина, которая с теми же вероятностями, что и случайная величина X, принимает значения, равные квадратам ее значений.

Квадраты значений случайной величины X равны: $(-2)^2 = 4$, $(-1)^2 = 1$, $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, т.е. величина X^2 принимает значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$. Закон распределения случайной величины X^2 можно записать в виде:

X^2	0	1	4
P	0,4	0,4	0,2

Вероятность 0,4 для значения $x_2 = 1$ получена по теореме сложения вероятностей, с которыми случайная величина X принимает значения -1 и 1. Аналогично получена вероятность 0,2 для значения $x_3 = 4$.

По формуле (2.4.3) находим

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}2 .$$

Следовательно, по формуле (2.5.4) имеем

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1{,}2 - 0 = 1{,}2.$$

Пример 5. Симметричная монета подбрасывается 4 раза. Случайная величина X – "число выпадений герба при этих подбрасываниях". Найти числовые характеристики случайной величины X: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Данная дискретная случайная величина X может принимать пять значений: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$.

Закон распределения случайной величины X можно задать таблицей

X	0	1	2	3	4
P	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Находим математическое ожидание $M(X)$:

$$M(X) = 0 \cdot 1/16 + 1 \cdot 4/16 + 2 \cdot 6/16 + 3 \cdot 4/16 + 4 \cdot 1/16 = 2.$$

Закон распределения случайной величины $(X - M(X))^2$ имеет вид:

$(X - M(X))^2$	$(0-2)^2$	$(1-2)^2$	$(2-2)^2$	$(3-2)^2$	$(4-2)^2$
P	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

Вычислим дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$:

$$D(X) = 4 \cdot 1/16 + 1 \cdot 4/16 + 0 \cdot 6/16 + 1 \cdot 4/16 + 4 \cdot 1/16 = 1,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 1.$$

Пример 6. Найти дисперсию дискретной случайной величины X - числа очков, выпадающих при подбрасывании игрального кубика.

Решение. Запишем сначала закон распределения этой случайной величины в виде таблицы

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Найдем математические ожидания $M(X)$ и $M(X^2)$:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6};$$

$$M(X^2)=1\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}+4^2\cdot\frac{1}{6}+5^2\cdot\frac{1}{6}+6^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}.$$

Дисперсию вычислим по формуле (2.5.4):

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{21}{6}\right)^2=\frac{91}{6}-\frac{441}{36}=\frac{105}{36}=\frac{35}{12}.$$

Пример 7. Даны все возможные значения дискретной случайной величины X: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, а также известны $M(X)=2{,}3$, $M(X^2)=5{,}9$. Найти закон распределения случайной величины X.

Решение. Запишем законы распределения дискретных случайных величин X и X^2:

X	1	2	3
P	p_1	p_2	p_3

,

X^2	1	4	9
P	p_1	p_2	p_3

,

где p_1, p_2, p_3 пока неизвестны, причем $p_1+p_2+p_3=1$.

Используя условие, получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} p_1+2p_2+3p_3=2{,}3, \\ p_1+4p_2+9p_3=5{,}9. \end{cases}$$

Поскольку $p_1+p_2+p_3=1$ и $p_3=1-p_1-p_2$, то система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} 8p_1+5p_2=3{,}1, \\ 2p_1+p_2=0{,}7, \end{cases}$$

откуда $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}3$. Поэтому $p_3=1-p_1-p_2=0{,}5$.

Итак, закон распределения случайной величины X определяется таблицей

X	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

Пример 8. Дискретная случайная величина X может принимать

только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0{,}5$, математическое ожидание $M(X) = 3{,}5$ и дисперсия $D(X) = 0{,}25$. Найти закон распределения дискретной случайной величины X.

Решение. Поскольку $p_1 + p_2 = 1$ (см. формулу (2.1.2)) и $p_1 = 0{,}5$, то $p_2 = 0{,}5$; $M(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 = 3{,}5$, откуда $x_1 + x_2 = 7$. По формуле (2.5.12) находим

$$D(X) = (x_1 - 3{,}5)^2 p_1 + (x_2 - 3{,}5)^2 p_2 = (x_1 - 3{,}5)^2 \cdot 0{,}5 + (x_2 - 3{,}5)^2 \cdot 0{,}5 = 0{,}25,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 25.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25, \end{cases}$$

и учитывая условие $x_1 < x_2$, получаем $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Следовательно,

$$P(X = 3) = 0{,}5, \quad P(X = 4) = 0{,}5.$$

Пример 9. Найти числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ 0{,}5 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Решение. Сначала находим $M(X)$ по формуле (2.4.7):

$$M(X) = \int_2^4 x \cdot 0{,}5\, dx = \frac{1}{2}\int_2^4 x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \frac{1}{4}(16 - 4) = 3, \quad M(X) = 3.$$

В соответствии с формулой (2.5.13) найдем $D(X)$:

$$D(X) = \int_2^4 (x-3)^2 \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^4 (x^2 - 6x + 9)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} - 3 \cdot 16 + 36\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 3 \cdot 4 + 18\right) = \frac{1}{3}, \quad D(X) = \frac{1}{3}.$$

По формуле (2.5.16) находим

$$\sigma(X)=\sqrt{1/3}\approx 0{,}58\,.$$

П р и м е р 1 0. Найти числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X, заданной плотностью вероятностей

$$p(x)=\begin{cases}0 & \textit{при}\ x\le 0,\\ 2x & \textit{при}\ 0<x\le 1,\\ 0 & \textit{при}\ x>1\,.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. С помощью формулы (2.4.7) находим математическое ожидание:

$$M(X)=\int_0^1 2x\cdot x\,dx=\int_0^1 2x^2\,dx=\frac{2}{3}\cdot x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}\,.$$

По формулам (2.5.13) и (2.5.16) соответственно получаем

$$D(X)=\int_0^1 (x-\frac{2}{3})^2\cdot 2x\,dx=\int_0^1\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)2x\,dx=\int_0^1\left(2x^3-\frac{8}{3}x^2+\frac{8}{9}x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{2}-\frac{8x^3}{9}+\frac{4}{9}x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{8}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{18}\,.$$

$$D(X)=\frac{1}{18},\quad \sigma(X)=\sqrt{1/18}\approx 0{,}24\,.$$

П р и м е р 1 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \textit{при}\ x\le 0,\\ x^3 & \textit{при}\ 0<x\le 1,\\ 1 & \textit{при}\ x>1\,.\end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины X: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Р е ш е н и е. Сначала найдем плотность распределения $p(x)$ с помощью формулы (2.3.5). Так как $p(x)=F'(x)$, то

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ 3x^2 & при\ 0<x\le 1,\\ 0 & при\ x>1.\end{cases}$$

По формуле (2.4.7) вычисляем математическое ожидание:

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 3x^2\,dx=3\int_0^1 x^3\,dx=3\cdot\frac{x^4}{4}=\frac{3}{4}.$$

В соответствии с формулами (2.5.13) и (2.5.16) находим дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$D(X)=\int_0^1\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\cdot 3x^2\,dx=3\int_0^1\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)x^2\,dx=$$

$$=3\int_0^1\left(x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{16}x^2\right)dx=3\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{9}{16}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\cdot\Big|_0^1=$$

$$=3\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}\right)=\frac{3}{80};\qquad D(X)=\frac{3}{80};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{3/80}\approx 0{,}19.$$

Пример 12. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ имеют одинаковые распределения, для них

$$M(X_k)=a,\ D(X_k)=D,\ \sigma(X_k)=\sigma \qquad \text{(I)}$$

при $k=1,2,\ldots,n$. Найти числовые характеристики среднего арифметического этих случайных величин, т.е. случайной величины

$$X=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}. \qquad \text{(II)}$$

Решение. С учетом формулы (2.4.13) и условия (I) находим

$$M(X)=M\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}=\frac{na}{n}=a.$$

Итак,

$$M(X)=a, \qquad \text{(III)}$$

т.е. математическое ожидание среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин равно математическому ожиданию каждой из этих величин.

Учитывая формулы (2.5.6), (2.5.9) и условие (I), получаем

$$D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)}{n^2} = \frac{nD}{n^2} = \frac{D}{n}.$$

Значит

$$D(\bar{X}) = \frac{D}{n}, \qquad \text{(IV)}$$

т.е. дисперсия среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин в n раз меньше дисперсии каждой из этих величин.

Учитывая определение и условие (I), находим

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})} = \sqrt{D/n} = \sqrt{D}/n = \sigma/\sqrt{n}. \qquad \text{(V)}$$

Таким образом, среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратического отклонения каждой величины.

Задачи

1. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

X	1	2	3	4	5
P	0,05	0,15	0,3	0,4	0,1

Найдите дисперсию случайной величины X.

2. Подбрасывается игральный кубик. Случайная величина X – "число выпавших очков". Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

3. Симметричная монета подбрасывается трижды. Случайная величина X – "число выпавших цифр". Найдите числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4. Найдите числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X, заданной законом распределения

X	– 0,1	0	0,1	0,4
P	0,3	0,15	0,3	0,25

5. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$p(x)=\begin{cases} e^x & \text{при } x \le 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найдите числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

6. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le -2, \\ 0{,}2\cdot(x+2) & \text{при } -2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найдите числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(1 < X < 5)$.

Ответы

1. 1,0275. **2.** $D(X)=35/12\approx 2{,}917$; $\sigma(X)\approx 1{,}708$. **3.** $M(X)=3/2=1{,}5$; $D(X)=0{,}75$; $\sigma(X)=0{,}866$. **4.** $M(X)=0{,}1$; $D(X)=0{,}036$; $\sigma(X)=0{,}190$. **5.** $M(X)=-1$; $D(X)=1$; $\sigma(X)=1$. **6.** $M(X)=0{,}5$; $D(X)=6{,}25/3\approx 2{,}083$; $\sigma(X)\approx 1{,}443$. $P(1<X<5)=0{,}4$.

Вопросы

1. Что называют отклонением случайной величины от ее математического ожидания?
2. Чему равно математическое ожидание отклонения?
3. Как определяется дисперсия случайной величины?
4. Что характеризует дисперсия случайной величины?
5. По какой формуле можно вычислять дисперсию?
6. Каковы свойства дисперсии случайной величины?
7. Запишите формулу для дисперсии дискретной случайной величины, принимающей конечное множество значений.
8. Какой вид имеет формула для дисперсии дискретной случайной величины, принимающей счетное множество значений?
9. По каким формулам вычисляется дисперсия непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$?
10. Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$?
11. По какой формуле можно вычислить дисперсию непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$?

12. Что такое среднее квадратическое отклонение?

13. Чему равно математическое ожидание среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин?

14. Чему равна дисперсия среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин?

15. Чему равно среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин?

§ 2.6. Моменты случайных величин

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются частными случаями более общих числовых характеристик случайных величин. Такими числовыми характеристиками являются моменты случайных величин: начальные и центральные.

Начальным моментом ν_k *порядка* k случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени ее:

$$\nu_k = M(X^k). \tag{2.6.1}$$

Если дискретная случайная величина X принимает конечное множество значений, то по определению

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i , \tag{2.6.2}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \tag{2.6.3}$$

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество значений, то

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i , \tag{2.6.4}$$

когда этот ряд сходится абсолютно, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \tag{2.6.5}$$

Начальный момент порядка k непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $p(x)$ определяется формулой

$$\nu_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)\, dx, \qquad (2.6.6)$$

если интеграл сходится абсолютно; при этом выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1. \qquad (2.6.7)$$

Центральным моментом k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-й степени отклонения этой величины от ее математического ожидания. Обозначив центральный момент k-го порядка через μ_k и положив $M(X) = a$, по определению получим

$$\mu_k = M\left((X-a)^k\right), \text{ или } \mu_k = M(X-a)^k. \qquad (2.6.8)$$

Если дискретная случайная величина X принимает конечное множество значений, то

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^k p_i, \qquad (2.6.9)$$

причем выполнено условие (2.6.3).

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество значений, то

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^k p_i \qquad (2.6.10)$$

при условии, что ряд сходится абсолютно; при этом выполняется равенство (2.6.5).

Для непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $p(x)$ центральный момент k-го порядка определяется по формуле

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k p(x)\, dx, \qquad (2.6.11)$$

если интеграл сходится абсолютно; при этом выполняется равенство (2.6.7).

Пример 1. Доказать, что начальный момент нулевого порядка равен единице, а начальный момент первого порядка случайной величины X равен ее математическому ожиданию.

Решение. Формулы (2.6.2), (2.6.4), (2.6.6) при $k = 0$ принимают соответственно вид:

$$\nu_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

$$\nu_0 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

$$\nu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1.$$

Эти равенства получены с учетом формул (2.6.3), (2.6.5), (2.6.7).

Итак, начальный момент нулевого порядка случайной величины X равен единице.

При $k = 1$ соответственно получаем

$$\nu_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = M(X),$$

$$\nu_1 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i = M(X),$$

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\; p(x)\, dx = M(X).$$

Таким образом, формулы (2.6.2), (2.6.4), (2.6.6) преобразуются в формулы (2.4.3), (2.4.6), (2.4.8), определяющие математические ожидания для соответствующих случайных величин.

Следовательно, начальный момент первого порядка случайной величины X равен ее математическому ожиданию.

Пример 2. Доказать, что центральный момент нулевого порядка равен единице; центральный момент первого порядка равен нулю; центральный момент второго порядка случайной величины X равен дисперсии этой величины.

Решение. При $k = 0$ формулы (2.6.9), (2.6.10), (2.6.11) принимают соответственно вид:

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^0 p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^0 p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^0 p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = 1,$$

что доказывает первое утверждение.

При $k = 1$ по формуле (2.6.8) получаем

$$\mu_1 = M((X - a)) = 0,$$

поскольку математическое ожидание отклонения равно нулю (см. формулу (2.5.1)).

Формулы (2.6.9), (2.6.10), (2.6.11) при $k = 2$ соответственно преобразуются в формулы (2.5.10), (2.5.12), (2.5.15), определяющие дисперсии случайных величин:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i = D(X),$$

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^2 p_i = D(X);$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 p(x)\, dx = D(X).$$

Итак, центральный момент второго порядка случайной величины X равен дисперсии этой величины.

Пример 3. Центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков выразить через начальные моменты.

Решение. Учитывая свойства математического ожидания, определения моментов и полагая $M(X) = a$, получаем

$$\mu_2 = M(X-a)^2 = M(X^2 - 2aX + a^2) = M(X^2) - 2aM(X) + M(a^2) =$$
$$= M(X^2) - 2a^2 + a^2 = M(X^2) - a^2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2, \text{ или } D(X) = \nu_2 - \nu_1^2; \qquad (2.6.12)$$

$$\mu_3 = M(X-a)^3 = M(X^3 - 3aX^2 + 3a^2X - a^3) = M(X^3) - 3aM(X^2) +$$
$$+ 3a^2M(X) - M(a^3) = M(X^3) - 3aM(X^2) + 3a^2M(X) - a^3 =$$
$$= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 3\nu_1^3 - \nu_1^3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \qquad (2.6.13)$$

$$\mu_4 = M(X-a)^4 = M(X^4 - 4aX^3 + 6a^2X^2 - 4a^3X + a^4) =$$
$$= M(X^4) - M(4aX^3) + M(6a^2X^2) - M(4a^3X) + M(a^4) =$$
$$= M(X^4) - 4aM(X^3) + 6a^2M(X^2) - 4a^3M(X) + M(a^4) =$$
$$= M(X^4) - 4aM(X^3) + 6a^2M(X^2) - 4a^3M(X) + a^4 =$$
$$= \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2 \cdot \nu_2 - 4\nu_1^3 \cdot \nu_1 + \nu_1^4,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2 \cdot \nu_2 - 3\nu_1^4. \qquad (2.6.14)$$

Отметим, что формула (2.6.12) равносильна формуле (2.5.4).

Пример 4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2
P	0,4	0,6

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядков случайной величины X.

Решение. В соответствии с определением (см. формулу 2.6.1) и формулой (2.6.2) находим сначала начальные моменты:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}6, \quad (a = 1{,}6),$$

$$\nu_2 = M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}6 = 2{,}8,$$

$$\nu_3 = M(X^3) = 1^3 \cdot 0{,}4 + 2^3 \cdot 0{,}6 = 5{,}2.$$

Вычислим центральные моменты. Выше было доказано, что $\mu_1 = 0$ (см. пример 2, $\mu_1 = M((X-a)) = 0$). Согласно формулам (2.6.12) и (2.6.13) находим:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 2{,}8 - (1{,}6)^2 = 0{,}24,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 5{,}2 - 3 \cdot 1{,}6 \cdot 2{,}8 + 2 \cdot (1{,}6)^3 = -0{,}48.$$

Замечание. Значения μ_2 и μ_3 можно найти непосредственно, в соответствии с формулами (2.6.8) и (2.6.9)

$$\mu_2 = M(X-a)^2 = (1-1{,}6)^2 \cdot 0{,}4 + (2-1{,}6)^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}36 \cdot 0{,}4 + 0{,}16 \cdot 0{,}6 = 0{,}24,$$

$$\mu_3 = M(X-a)^3 = (1-1{,}6)^3 \cdot 0{,}4 + (2-1{,}6)^3 \cdot 0{,}6 = (-0{,}216) \cdot 0{,}4 + 0{,}064 \cdot 0{,}6 = -0{,}48.$$

Пример 5. Найти моменты первого, второго и третьего порядков случайной величины X с плотностью вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ e^{-x} & при\ x > 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем начальные моменты согласно формуле (2.6.6):

$$\nu_1 = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ p(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x\ e^{-x}\ dx = \int_0^{+\infty} x\ d(-e^{-x}) =$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx = 0 - e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

$$\nu_2 = M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\ dx = \int_0^{+\infty} x^2 d(-e^{-x}) =$$

$$= -x^2 e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\ dx = 0 + 2 \cdot 1 = 2,$$

$$\nu_3 = M(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 p(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\ dx = \int_0^{+\infty} x^3 d(-e^{-x}) =$$

$$= -x^3 e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 3\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 0 + 3 \cdot 2 = 6.$$

Итак, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 6$; $\nu_1 = M(X) = a = 1$.

Вычислим центральные моменты по формуле (2.6.11):

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 p(x)\, dx = \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x}\ dx = \int_0^{+\infty} (x^2 - 2x + 1)e^{-x}\ dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}\ dx - 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\ dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx = 2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1,\ \ \mu_2 = 1.$$

$$\mu_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^3\, p(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-1)^3\, e^{-x} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\ e^{-x} dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x} dx - 3\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx + 3\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-x} dx - \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x} dx - 3\cdot 2 + 3\cdot 1 - 1 = \int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x} dx - 4\,.$$

Поскольку

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x^3 d(-e^{-x}) = -e^{-x} x^3 \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 3\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx = 0 + 3\cdot 2 = 6\,,$$

то

$$\mu_3 = 6 - 4 = 2\,.$$

Выше уже было доказано, что $\mu_1 = 0$ (см. пример 2, $\mu_1 = M(X-a) = 0$). Таким образом, найдены центральные моменты: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 2$.

Замечание 1. Центральные моменты можно вычислить и по формулам (2.6.12) и (2.6.13):

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 2 - 1^2 = 1\,,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 6 - 3\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1^3 = 2\,.$$

Замечание 2. Данная случайная величина X имеет моменты всех порядков. Интегрированием по частям находим начальный момент k-го порядка:

$$\nu_k = M(X^k) = \int\limits_{0}^{+\infty} x^k e^{-x}\, dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x^k d(-e^{-x}) =$$

$$= -x^k e^{-x}\Big|_{0}^{+\infty} + k\int\limits_{0}^{+\infty} x^{k-1} e^{-x}\, dx = k\nu_{k-1}\,,\ \nu_k = k\nu_{k-1}\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

При $k = 1$ получаем $\nu_0 = 1$ (см. пример 1). Следовательно,

$$\nu_k = k\nu_{k-1} = k(k-1)\nu_{k-2} = k(k-1)(k-2)\nu_{k-3} = \ldots k(k-1)(k-2)\ldots 1 = k!\,,$$

$$\nu_k = k!\,.$$

Пример 6. Найти начальные моменты случайной величины X с плотностью вероятностей

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 1,\\ \dfrac{5}{x^6} & при\ x>1.\end{cases}$$

Решение. Согласно формуле (2.6.6) получаем

$$\nu_k=M(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\frac{5}{x^6}\,dx=5\int_1^{+\infty}x^{k-6}dx=5\frac{x^{k-5}}{k-5}\Bigg|_1^{+\infty}.$$

Несобственный интеграл сходится при $k<5$. В этом случае

$$\nu_k=M(X^k)=5\frac{x^{k-5}}{k-5}\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{5}{5-k}.$$

Следовательно, рассматриваемая случайная величина X имеет моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков, а моментов пятого и высшего порядков не имеет.

Пример 7. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ x^2 & при\ 0<x\le 1,\\ 1 & при\ x>1.\end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первых трех порядков случайной величины X.

Решение. Прежде всего, найдем плотность распределения данной случайной величины X. Поскольку $p(x)=F'(x)$, то плотность распределения этой случайной величины определяется функцией

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ 2x & при\ 0<x\le 1,\\ 0 & при\ x>1.\end{cases}$$

Согласно формулам (2.6.6) находим начальные моменты:

$$\nu_1=M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\ p(x)\,dx=\int_0^1 x\ 2x\,dx=2\int_0^1 x^2dx=2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3},$$

$$\nu_2 = M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\,dx = \int_0^1 x^2 2x\,dx = 2\int_0^1 x^3 dx = 2\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\nu_3 = M(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 p(x)\,dx = \int_0^1 x^3 2x\,dx = 2\int_0^1 x^4 dx = 2\cdot\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{2}{5}.$$

Первый центральный момент $\mu_1 = M(X-a) = 0$ (математическое ожидание отклонения равно нулю).

По формулам (2.6.11) вычисляем центральные моменты второго и третьего порядков:

$$\mu_2 = M(X-a)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 p(x)\,dx = \int_0^1 \left(x-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 2x\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) 2x\,dx = 2\int_0^1 x^3\,dx - \frac{8}{3}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{8}{9}\int_0^1 x\,dx =$$

$$= 2\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 - \frac{8}{3}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \frac{8}{9}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1}{18},$$

$$\mu_3 = M(X-a)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^3 p(x)\,dx = \int_0^1 \left(x-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 2x\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{4}{9}x - \frac{8}{27}\right) 2x\,dx = \int_0^1 \left(2x^4 - 4x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{16}{27}x\right) dx =$$

$$= \left.\left(2\cdot\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{8}{9}x^3 - \frac{8}{27}x^2\right)\right|_0^1 = \frac{2}{5} - 1 + \frac{8}{9} - \frac{8}{27} = -\frac{1}{135}.$$

Задачи

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	3
P	0,4	0,6

Найдите начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядков случайной величины X.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найдите начальные и центральные моменты первого, второго и третьего порядков величины X.

3. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ 3e^{-3x} & при\ x>0.\end{cases}$$

Найдите начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков величины X.

4. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 1,\\ \dfrac{6}{x^7} & при\ x>1.\end{cases}$$

Найдите начальные и центральные моменты случайной величины X.

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ x^3 & при\ 0<x\le 1,\\ 1 & при\ x>1.\end{cases}$$

Найдите начальные и центральные моменты первых трех порядков случайной X.

Ответы

1. $\nu_1=2{,}6$, $\nu_2=7$, $\nu_3=19{,}4$; $\mu_1=0$, $\mu_2=0{,}24$, $\mu_3=-17{,}624$.
2. $\nu_1=3$, $\nu_2=10{,}2$, $\nu_3=36{,}8$; $\mu_1=0$, $\mu_2=1{,}2$, $\mu_3=-37$. **3.** $\nu_1=1/3$, $\nu_k=\dfrac{k\,!}{3^k}$; $\mu_2=\dfrac{1}{9}$, $\mu_3=\dfrac{2}{27}$, $\mu_4=\dfrac{1}{9}$. **4.** $\nu_k=\dfrac{6}{6-k}$ при $k<6$; не существуют при $k\ge 6$. **5.** $\nu_1=\dfrac{3}{4}$, $\nu_2=\dfrac{3}{5}$, $\nu_3=\dfrac{1}{2}$; $\mu_2=\dfrac{3}{80}$, $\mu_3=\dfrac{1}{160}$.

Вопросы

1. Что называют начальным моментом k-го порядка случайной величины?

2. По какой формуле вычисляют начальный момент k-го порядка случайной величины, принимающей конечное множество значений?

3. Какой формулой определяется начальный момент k-го порядка

случайной величины, принимающей счетное множество значений?

4. Какой формулой определяется начальный момент k-го порядка непрерывной случайной величины?

5. Что называют центральным моментом k-го порядка случайной величины?

6. По какой формуле вычисляют центральный момент k-го порядка случайной величины, принимающей конечное множество значений?

7. Какой формулой определяется центральный момент k-го порядка случайной величины, принимающей счетное множество значений?

8. Какой формулой определяется центральный момент k-го порядка непрерывной случайной величины?

9. Чему равны начальные моменты: нулевого порядка, первого порядка?

10. Чему равны центральные моменты: нулевого, первого, второго порядка?

11. Как выражается центральный момент второго порядка через начальные моменты?

12. Как выражается центральный момент третьего порядка через начальные моменты?

§ 2.7. Функции случайных величин

Если каждому возможному значению случайной величины X по определенному правилу f поставлено в соответствии одно возможное значение случайной величины Y, то Y называют *функцией случайного аргумента* X:

$$Y = f(X). \tag{2.7.1}$$

Закон распределения вероятностей функции Y по заданному закону распределения вероятностей аргумента X и математическое ожидание функции можно найти следующим образом.

Рассмотрим сначала случай, когда аргумент X - дискретная случайная величина с возможными значениями $x_1, x_2, ..., x_n$, вероятности которых соответственно равны $p_1, p_2, ..., p_n$. Очевидно, Y - также дискретная случайная величины с возможными значениями $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ..., $y_n = f(x_n)$. Так как событие "величина X приняла значение x_i влечет за собой событие "величина Y приняла значение $f(x_i)$", то вероятности возможных значений функции Y соответственно равны $p_1, p_2, ..., p_n$.

Следовательно, математическое ожидание функции $Y = f(X)$ определяется формулой

$$M(Y) = M[f(X)] = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) p_i . \qquad (2.7.2)$$

При записи закона распределения вероятностей функции Y руководствуются следующим.

1. Если различным возможным значениям аргумента X соответствуют различные возможные значения функции Y, то вероятности соответствующих значений X и Y равны между собой:

$$P(X = x_i) = P(Y = f(x_i)) = p_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) . \qquad (2.7.3)$$

2. Если различным возможным значениям X соответствуют значения Y, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений Y.

Рассмотрим непрерывную случайную величину X с плотностью распределения $p(x)$. Если $y = f(x)$ - дифференцируемая монотонная функция, обратная которой есть $x = \varphi(y)$, то плотность распределения $g(y)$ случайной величины $Y = f(X)$ определяется формулой

$$g(y) = p[\varphi(y)] \cdot |\varphi'(y)| . \qquad (2.7.4)$$

Для отыскания математического ожидания функции $Y = f(X)$ нужно сначала найти плотность распределения $g(y)$ величины Y, а затем воспользоваться формулой

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, g(y)\, dy . \qquad (2.7.5)$$

Если отыскание функции $g(y)$ является затруднительным, то можно непосредственно найти математическое ожидание функции $Y = f(X)$ по формуле

$$M[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, p(x)\, dx . \qquad (2.7.6)$$

В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

$$M[f(X)] = \int_{a}^{b} f(x)\, p(x)\, dx . \qquad (2.7.7)$$

Рассмотрим функции двух случайных аргументов.

Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y по определенному правилу f поставлено в соответствии одно возможное значение случайной величины Z, то Z называют функцией двух случайных аргументов X и Y:

$$Z = f(X, Y). \tag{2.7.8}$$

Одной из простейших функций двух случайных аргументов является функция

$$Z = X + Y. \tag{2.7.9}$$

Если X и Y - дискретные независимые случайные величины, то для записи закона распределения функции $Z = X + Y$ надо найти все возможные значения Z и их вероятности.

Если X и Y - непрерывные независимые случайные величины, то плотность распределения $g(z)$ функции (2.7.8) может быть найдена с помощью формулы

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x)\, p_2(z-x)\, dx \tag{2.7.10}$$

или с помощью равносильной формулы

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(z-y)\, p_2(y)\, dy\ , \tag{2.7.11}$$

где $p_1(x)$, $p_2(y)$ - плотности распределения аргументов.

Если возможные значения аргументов неотрицательны, то $g(z)$ находят по формуле

$$g(z) = \int_{0}^{z} p_1(x)\, p_2(z-x)\, dx\ , \tag{2.7.12}$$

или по равносильной формуле

$$g(z) = \int_{0}^{z} p_1(z-y)\, p_2(y)\, dy\ . \tag{2.7.13}$$

Плотность распределения суммы независимых случайных величин называют *композицией*.

Закон распределения вероятностей называют *устойчивым*, если композиция таких законов есть тот же закон (отличающийся, вообще говоря, параметрами).

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Записать закон распределения случайной величины $Y = X^3$.

Решение. Случайная величина Y принимает значения, равные кубам значений величины X, с теми же вероятностями, что и случайная величина X. Кубы значений случайной величины X равны:

$$y_1 = x_1^3 = 1,\ y_2 = x_2^3 = 8,\ y_3 = x_3^3 = 3^3 = 27,$$

$$y_4 = x_4^3 = 4^3 = 64,\ y_5 = x_5^3 = 5^3 = 125.$$

Закон распределения случайной величины $Y = X^3$ задается следующей таблицей:

$Y = X^3$	1	8	27	64	125
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

Найти закон распределения и математическое ожидание случайной величины $Y = X^2$.

Решение. Квадрат случайной величины X, т.е. $Y = X^2$ - это новая случайная величина, которая с теми же вероятностями, что и случайная величина X, принимает значения, равные квадратом ее значений.

Квадраты случайной величины X равны: $(-2)^2 = 4$, $(-1)^2 = 1$, $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, т.е. величина $Y = X^2$ принимает значения: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 4$. Закон распределения случайной величины $Y = X^2$ можно записать в виде:

$Y = X^2$	0	1	4
P	0,15	0,45	0,4

Вероятность 0,45 для значения $y_2 = 1$ получена по теореме сложения вероятностей, с которыми случайная величина X принимает значения $x_2 = -1$, $x_4 = 1$. Аналогично получена вероятность 0,4 для значения $y_3 = 4$.

Согласно формуле (2.7.2) находим математическое ожидание функции $Y = X^2$:

$$M(Y) = M(X^2) = 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}45 + 4 \cdot 0{,}4 = 2{,}05 .$$

Пример 3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти закон распределения случайной величины $Y = \sin\frac{\pi}{2}X + 1$.

Решение. Найдем сначала значения функции $Y = f(X) = \sin\frac{\pi}{2}X + 1$.

При $x = 0, 1, 2, 3$ получаем соответственно числа 1, 2,1, 0. Следовательно, возможными значениями случайной величины Y являются числа $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$. Подсчитаем вероятности этих значений:

$$P(Y = 0) = P(X = 3) = 0{,}2 ;$$

$$P(Y = 1) = P(X = 0) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5 ;$$

$$P(Y = 2) = P(X = 1) = 0{,}3 .$$

Итак, функция $Y = \sin\frac{\pi}{2}X + 1$ имеет закон распределения

$Y = \sin\frac{\pi}{2}X + 1$	0	1	2
P	0,2	0,5	0,3

Пример 4. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 1 & \textit{при } 1 \le x \le 2, \\ 0 & \textit{при } x < 1 \quad \textit{или} \quad x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения функции $Y = X^2$.

Решение. На отрезке возможных значений случайной величины X функция $y = x^2$ - монотонно возрастающая. Обратная ей функция $x = \sqrt{y}$ также монотонно возрастает на отрезке $[1; 4]$ - области возможных значений случайной величины Y. Находим производную обратной функции

$$x'_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Применяя формулу (2.7.4), находим

$$g(y) = \begin{cases} 1/2\sqrt{y} & \text{при } 1 \le y \le 4, \\ 0 & \text{при } y < 1 \quad \text{или} \quad y > 4. \end{cases}$$

Пример 5. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}. \qquad \text{(I)}$$

Найти плотность распределения функции $Y = X^3$.

Решение. Поскольку функция $y = x^3$ является дифференцируемой и строго монотонной, то можно применить формулу (2.7.4).

Находим функцию $x = \varphi(y)$, обратную функции $y = x^3$: $\varphi(y) = x = y^{1/3}$ и $p[\varphi(y)]$. По условию $p(x)$ определена формулой (I), поэтому

$$p[\varphi(y)] = p[y^{1/3}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}. \qquad \text{(II)}$$

Находим производную обратной функции по y:

$$\varphi'(y) = (y^{1/3})' = \frac{1}{3y^{2/3}}. \qquad \text{(III)}$$

Подставляя выражения (II) и (III) в формулу (2.7.4), получаем искомую плотность распределения функции $Y = X^3$:

$$g(y) = \frac{1}{3\sigma y^{2/3}\sqrt{2\pi}} e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}.$$

Пример 6. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $p(x)=\cos x$ в интервале $(0;\pi/2)$; вне этого интервала $p(x)=0$. Найти математическое ожидание функции $Y=X^2$.

Решение. Воспользуемся формулой (2.7.7). в данном случае $p(x)=\cos x$, $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=\pi/2$. Следовательно,

$$M(X^2)=\int_0^{\pi/2}x^2\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2}x^2 d(\sin x)=x^2\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}x\sin x\,dx=\frac{\pi^2}{4}+$$

$$+2\int_0^{\pi/2}xd(\cos x)=\frac{\pi^2}{4}+2x\cos x\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\frac{\pi^2}{4}-2\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}-2,$$

$$M(X^2)=\frac{\pi^2}{4}-2\approx 0{,}467.$$

Пример 7. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения:

X	5	6
P	0,4	0,6

,

Y	7	8
P	0,8	0,2

.

Составить закон распределения случайной величины $Z=X+Y$.

Решение. Возможные значения величины Z есть суммы каждого возможного значения X со всеми возможными значениями Y:

$$z_1=5+7=12,\ z_2=5+8=13,\ z_3=6+7=13,\ z_4=6+8=14.$$

Найдем вероятности этих возможных значений. Для того чтобы $Z=12$, достаточно, чтобы величина X приняла значение $x_1=5$ и величина Y - значение $y_1=7$. Вероятности этих возможных значений, как следует из данных законов распределения, соответственно равны 0,4 и 0,8. Аргументы X и Y независимы, поэтому события $X=5$ и $Y=7$ независимы; следовательно, вероятность их совместного появления (т.е. вероятность события $Z=5+7=12$) по теореме умножения равна $0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}32$.

Аналогично находим:

$$P(Z=5+8=13)=0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08,$$

$$P(Z=6+7=13)=0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}48,$$

$$P(Z = 6 + 8 = 14) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12 .$$

Величина Z принимает три разных значения: 12, 13, 14. Поскольку события ($Z = 5 + 8 = 13$) и ($Z = 6 + 7 = 13$) несовместны, то

$$P(Z = 13) = P(Z = 5 + 8 = 13) + P(Z = 6 + 7 = 13) = 0{,}08 + 0{,}48 = 0{,}56 .$$

Таким образом, величина Z имеет закон распределения

Z	12	13	14
P	0,32	0,56	0,12

Отметим, что $0{,}32 + 0{,}56 + 0{,}12 = 1$, как и должно быть.

Пример 8. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений

$$p(x) = \frac{1}{5} e^{-x/5} \quad (0 \le x < +\infty);$$

$$p(y) = \frac{1}{6} e^{-y/6} \quad (0 \le y < +\infty).$$

Найти композицию этих законов, т.е. плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Решение. Возможные значения аргументов X и Y неотрицательны, поэтому воспользуемся формулой (2.7.12):

$$g(z) = \int_0^z \left[\frac{1}{5} e^{-x/5}\right] \cdot \left[\frac{1}{6} e^{-(z-x)/6}\right] dx = \frac{1}{30} e^{-z/6} \int_0^z e^{-x/30}\, dx =$$

$$= \frac{1}{30} e^{-z/6} (-30)\, e^{-x/30} \Big|_0^z = \left(1 - e^{-z/30}\right) e^{-z/6} .$$

Отметим, что

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-z/30}\right) e^{-z/6} dz = \int_0^{\infty} (e^{-z/6} - e^{-z/5})\, dx =$$

$$= -6 \left(\frac{1}{e^{z/6}}\right)\Bigg|_0^{\infty} + 5 \cdot \frac{1}{e^{z/5}}\Bigg|_0^{\infty} = -6 \cdot (0 - 1) + 5 \cdot (0 - 1) = 6 - 5 = 1 .$$

Задачи

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	3	4	5
P	0,1	0,3	0,4	0,2

Найдите закон распределения случайной величины $Y = X^2$.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	–3	–2	–1	0	1
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найдите закон распределения случайной величины $Y = X^3$.

3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	0	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

Найдите закон распределения функции $Y = \cos\frac{\pi}{2}X + 2$.

4. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	1	3
P	0,3	0,7

,

Y	5	7
P	0,6	0,4

.

Найдите закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

5. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $p(x) = e^x$ в интервале $(0, 2)$; вне этого интервала $p(x) = 0$. Найдите математическое ожидание функции $Y = X^2$.

6. Независимые случайные величины X и Y заданы плотностями распределений

$$p(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2} \quad (0 \le x < +\infty);$$

$$p(y) = \frac{1}{3}e^{-y/3} \quad (0 \le y < +\infty).$$

Найдите композицию этих законов, т.е. плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$.

Ответы

5. $2(e^2 - 1) \approx 12{,}776$. **6.** $p(z) = \begin{cases} e^{-z/3}(1 - e^{-z/6}) & \text{при } z \ge 0, \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$

Вопросы

1. Что называют функцией случайного аргумента?

2. По какой формуле вычисляется математическое ожидание функции $Y = f(X)$, когда X принимает конечное множество значений?

3. Какой формулой определяется плотность распределения случайной величины $Y = f(X)$?

4. Какими формулами определяется математическое ожидание функции $Y = f(X)$?

5. Что называют функцией двух случайных аргументов?

6. Какими формулами определяется плотность распределения функции $Z = f(X, Y)$, где X, Y - непрерывные независимые величины?

§ 2.8. Двумерные случайные величины

Упорядоченная пара (X, Y) случайных величин X и Y называется *двумерной случайной величиной*, или *случайным вектором двумерного пространства*.

Двумерная случайная величина (X, Y) называется также *системой случайных одномерных величин* X и Y.

Множество всех возможных значений дискретной двумерной случайной величины с их вероятностями называется *законом распределения этой случайной величины*.

Дискретная двумерная случайная величина (X, Y) считается заданной, если известен ее закон распределения:

$$P(X = x_i\ , Y = y_k) = p_{i\,k} \qquad (i = 1, 2, ..., m\ ;\ k = 1, 2, ..., n)\,.$$

Этот закон можно записать в виде таблицы с двойным входом:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_k	...	y_n	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1k}	...	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2k}	...	p_{2n}	p_2
...	...	...	...	...	...	...	...
x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ik}	...	p_{in}	p_i
...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mk}	...	p_{mn}	p_m
$\sum$	q_1	q_2	...	q_k	...	q_n	1

События ($X = x_i$, $Y = y_k$) образуют полную группу событий, поэтому сумма всех вероятностей p_{ik} $(i = 1, 2, ..., m;\ k = 1, 2, ..., n)$, указанных в таблице, равна 1, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} p_{ik} = 1 . \qquad (2.8.1)$$

По теореме сложения получаем

$$\sum_{k=1}^{n} P(x_i, y_k) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = p_i = P(X = x_i) , \qquad (2.8.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} P(x_i, y_k) = \sum_{i=1}^{m} p_{ik} = q_k = P(X = y_k) . \qquad (2.8.3)$$

Если известен закон распределения двумерной случайной величины (*X*, *Y*), то можно найти законы распределения составляющих *X* и *Y*. Действительно, возможные значения $x_1, x_2, ..., x_m$ величины *X* и $y_1, y_2, ..., y_n$ величины *Y* содержатся в таблице, а вероятности этих значений определяются по формулам (2.8.2) и (2.8.3). Из формул видно, что для определения вероятностей $P(X = x_i) = p_i$ надо в таблице пронумеровать вероятности в *i*-й строке, а для определения вероятности $P(Y = y_k) = q_k$ - просуммировать вероятности в *k*-ом столбце.

Если для любой пары возможных значений $X = x_i$ $Y = y_k$ справедливо равенство

$$P(X = x_1, Y = y_k) = P(X = x_i)P(Y = y_k) , \qquad (2.8.4)$$

то случайные величины называются *независимыми*. Равенство (2.8.4) выражает необходимое и достаточное условие независимости случайных величин *X* и *Y*.

По тереме умножения

$$P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i)P(Y = y_k / X = x_i) ,$$

$$P(X = x_i, Y = y_k) = P(Y = y_k)P(X = x_i / Y = y_k) ,$$

откуда

$$P(Y = y_k / X = x_i) = \frac{P(X = x_1, Y = y_k)}{P(X = x_i)} . \qquad (2.8.5)$$

$$P(X = x_i / Y = y_k) = \frac{P(X = x_1, Y = y_k)}{P(Y = y_k)}. \qquad (2.8.6)$$

Условным законом распределения дискретной случайной величины X при $Y = y_k$ называется множество значений x_i $(i = 1, 2, ..., m)$ и условных вероятностей $P(x_1 / y_k), P(x_2 / y_k), ..., P(x_m / y_k)$, вычисленных в предположении, что событие $Y = y_k$ уже наступило.

Аналогично определяется условный закон распределения дискретной случайной величины Y при $X = x_i$. Этот закон задается формулой (2.8.6).

Условный закон распределения дискретной случайной величины X при $Y = y_k$ задается формулой (2.8.5).

Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называют функцию $F(x, y)$ двух действительных переменных x и y, определяемую равенством

$$F(x, y) = P(X < x, \ Y < y) \qquad (2.8.7)$$

Геометрический смысл этого равенства: функция $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x, y), так что точка (X, Y) будет ниже и левее указанной вершины (рис. 2.14).

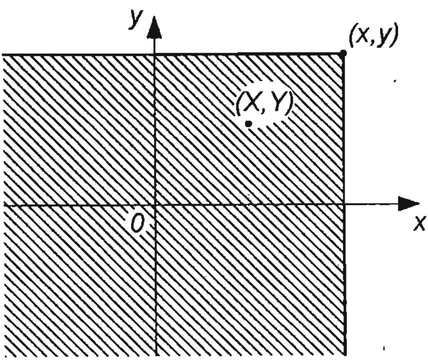


Рис. 2.14

Функция распределения $F(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. Все значения функции распределения $F(x, y)$ принадлежат отрезку $[0; 1] : 0 \le F(x, y) = 1$.

2. Функция распределения $F(x, y)$ монотонно возрастает по обеим переменным: если $x_1 < x_2$, то $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$; если $y_1 < y_2$, то $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$.

3. Выполняются равенства:

$$F(-\infty, y) = 0, \quad F(x, -\infty,) = 0, \quad F(-\infty, -\infty) = 0, \qquad (2.8.8)$$

$$F(+\infty, +\infty) = 1, \qquad (2.8.9)$$

$$F(x, +\infty) = P(X < x) = F_1(x), \quad F(+\infty, y) = P(Y < y) = F_2(y), \quad (2.8.10)$$

где

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} F(x, y), \quad \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = F(x, -\infty,),$$

$$F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y).$$

Двумерная случайная величина (X, Y) называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x, y)$ имеет непрерывную смешанную производную второго порядка: $F''_{xy} = F''_{yx}$.

Плотность распределения вероятностей $p(x, y)$ непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) определяется формулой

$$p(x, y) = F''_{xy}(x, y). \qquad (2.8.11)$$

В этом случае

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u, v)du\, dv \qquad (2.8.12)$$

С помощью плотности распределения $p(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) можно найти вероятность попадания ее значений в прямоугольник $S = (a \le X < b, c \le Y < d)$ (рис. 2.15):

$$P(a \le X < b, c \le Y < d) = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} p(x, y)dx\, dy. \qquad (2.8.13)$$

Эта формула является частным случаем более общей формулы

$$P\big((x, y) \in G\big) = \iint_G p(x, y)dx\, dy. \qquad (2.8.14)$$

Формула (2.8.14) означает следующее: вероятность того, что двумерная случайная величина (X, Y) с плотностью распределения $p(x, y)$ принимает значения из области G, равна двойному интегралу от функции $p(x, y)$ по этой области.

Вероятность попадания значений двумерной случайной величины (X, Y) в прямоугольник $S = [a, b;\ c, d]$ можно найти и с помощью ее функции распределения $F(x, y)$ по формуле

$$P(a \le X < b, c \le Y < d) = \left[F(b, d) - F(a, d)\right] - \left[F(b, c) - F(a, c)\right]. \quad (2.8.15)$$

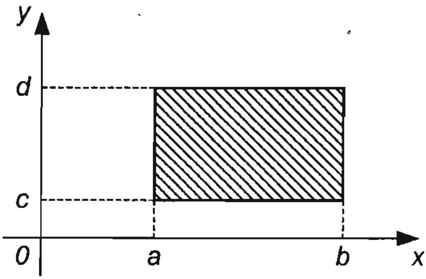


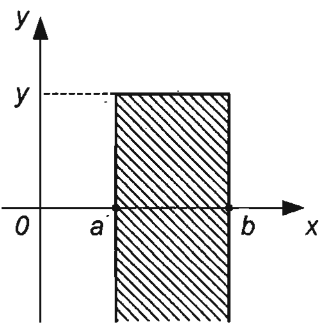
Рис. 2.15

Эта формула получается из двух формул для вероятности попадания значений (X, Y) в вертикальную или горизонтальную полуполосу.

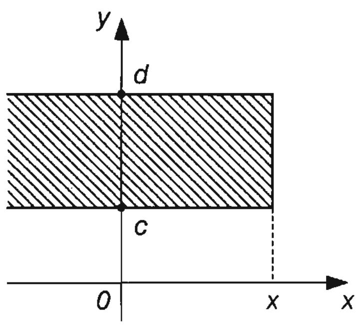
Вероятность того, что значения величины (X, Y) попадут в полуполосу $a < X < b$, $Y < y$ (рис. 2.16 а) выражается формулой

$$P(a \le X < b, Y < y) = F(b, y) - F(a, y). \quad (2.8.16)$$

Вероятность того, что значение случайной величины (X, Y) попадает в полуполосу $X < x$, $c < Y < d$ (рис 2.16 б) выражается формулой



а



б

Рис. 2.16

$$P(X < x, c \le Y < d) = F(x, d) - F(x, c). \quad (2.8.17)$$

Таким образом, вероятность попадания значений двумерной случайной величины (X, Y) в полуполосу равна приращению функции распределения по одному из аргументов.

Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если для любых x и y выполняется равенство

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y). \qquad (2.8.18)$$

Необходимое и достаточное условие независимости случайных величин X и Y выражается равенством

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y), \qquad (2.8.19)$$

где $F(x, y)$ - функция распределения двумерной случайной величины (X, Y), $F_1(x), F_2(y)$ - функции распределения составляющих X и Y; а также равенством

$$p(x, y) = p_1(x)\ p_2(y), \qquad (2.8.20)$$

где $p(x, y)$ - плотность распределения двумерной случайной величины (X, Y), $p_1(x)$, $p_2(y)$ - плотности распределения данных величин X и Y.

Ковариацией двух случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения их отклонений:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M\big((X - M(X))(Y - M(Y))\big). \qquad (2.8.21)$$

После преобразований правой части эта формула принимает вид

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M(X, Y) - M(X)M(Y). \qquad (2.8.22)$$

Если случайные величины X и Y независимы, то их ковариация равна нулю:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = 0. \qquad (2.8.23)$$

Коэффициент корреляции $r(X, Y)$ случайных величин X и Y определяется формулой

$$r(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}. \qquad (2.8.24)$$

Пример 1. Двумерная дискретная величина (X, Y) задана законом распределения:

$X \backslash Y$	2	3	4
2	0,3	0,15	0,05
3	0,15	0,10	0,05
4	0,05	0,05	0,05
5	0,05	0	0

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение. Применяя формулу (2.8.2) т.е. суммируя вероятности в i-ой строке, находим

$$P(X = x_i) = p_i \quad (i = 1, 2, 3, 4):$$

$$P(X = 2) = 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}50, \quad P(X = 3) = 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}30,$$

$$P(X = 4) = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}15, \quad P(X = 5) = 0{,}05.$$

Равенство (2.8.1) выполняется: $0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1$.

Применяя формулу (2.8.3), т.е. суммируя вероятности в k-ом столбце, находим

$$P(Y = y_k) = q_k \quad (k = 1, 2, 3):$$

$$P(Y = 2) = 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}55,$$

$$P(Y = 3) = 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}30,$$

$$P(Y = 4) = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}15.$$

Равенства (2.8.1) также выполняются: $0{,}55 + 0{,}3 + 0{,}15 = 1$.

Законы распределения X и Y имеют вид:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,50	0,30	0,15	0,05

,

y_k	2	3	4
q_k	0,55	0,30	0,15

.

Пример 2. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

X \ Y	1	2	3	4
0	0,04	0,08	0,06	0,02
1	0,15	0,20	0,12	0,03
2	0,01	0,22	0,02	0,05

Найти условный закон распределения величины Y при $X = 1$. Являются ли независимыми величины X и Y?

Решение. Вероятности значений величины Y при $X = 1$ найдем с помощью формулы (2.8.5).

Поскольку

$$P(X=1)=0{,}15+0{,}20+0{,}12+0{,}03=0{,}5\,,$$

то по формуле (2.8.5) получаем

$$P(Y=1/X=1)=\frac{0{,}15}{0{,}5}=0{,}3\,,\quad P(Y=2/X=1)=\frac{0{,}2}{0{,}5}=0{,}4\,,$$

$$P(Y=3/X=1)=\frac{0{,}12}{0{,}5}=0{,}24\,,\quad P(Y=4/X=1)=\frac{0{,}03}{0{,}5}=0{,}06\,.$$

Итак, при условии, что $X=1$, величина Y имеет следующий условный закон распределения

y_k	1	2	3	4
t_k	0,3	0,4	0,24	0,06

Безусловный закон распределения имеет вид

y_k	1	2	3	4
q_k	0,2	0,5	0,2	0,1

(Вероятности q_k $(k=1,2,3,4)$ получены суммированием по столбцам вероятностей первой таблицы: q_1=0,04 + 0,15 + 0,01 = 0,2 и т.д.).

Так как условный и безусловный законы распределения не совпадают, то величина X и Y зависимы. Действительно, условие (2.8.4) не выполняется; например,

$$P(X=0,Y=2)=0{,}08\,,\quad P(X=0)=0{,}2\,,\quad P(Y=2)=0{,}5\,;$$

$$P(X=0,Y=2)\neq P(X=0)\cdot P(Y=2)\,.$$

Пример 3. Задана функция распределения двумерной случайной величины (X,Y)

$$F(x,y)=(1-e^{-x})(1-e^{-y})\quad (x\geq 0\quad y\geq 0)\,.$$

Найти вероятность того, что в результате испытания составляющие X и Y примут значения соответственно $X<2$, $Y<4$.

Решение. По формуле (2.8.7) находим

$$P(X<2\,,\ Y<4)=F(2,4)=(1-e^{-2})(1-e^{-4})\approx 0{,}849\,.$$

Пример 4. Найти плотность вероятности $p(x,y)$ двумерной случайной величины (X,Y) по известной функции распределения

$$F(x, y)=\left(\frac{1}{\pi} arctg\ x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\pi} arctg\ y+\frac{1}{2}\right).$$

Решение. Поскольку

$$F'_x(x, y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\left(\frac{1}{\pi} arctg\ y+\frac{1}{2}\right),$$

$$F''_{xy}(x, y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+y^2},$$

то по формуле (2.8.11) получаем

$$p(x, y)=\frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Пример 5. Дана плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (X, Y)

$$p(x, y)=0{,}5\sin(x+y)\quad\left(0\le x\le\frac{\pi}{2},\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right).$$

$$p(x, y)=0\quad \text{вне квадрата}\quad S=\left[0,\ \frac{\pi}{2};0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Найти функцию распределения $F(x, y)$ этой величины. Вычислить вероятность того, что X и Y примут значения: $X<\frac{\pi}{6},\ Y<\frac{\pi}{6}$.

Решение. По формуле (2.8.12) получаем

$$F(x, y)=\int_0^x\int_0^y 0{,}5\sin(u+v)\,du\,dv=\int_0^x\left[\int_0^y 0{,}5\sin(u+v)\,dv\right]du=$$

$$\int_0^x (-0{,}5\cos(u+v)\Big|_{v=0}^{v=y}du=-0{,}5\int_0^x\left[\cos(u+y)-\cos u\right]du=$$

$$=-0{,}5\int_0^x\cos(u+y)\,du+0{,}5\int_0^x\cos u\,du=-0{,}5\sin(u+y)\Big|_{u=0}^{u=x}+$$

$$+0{,}5\sin u\Big|_{u=0}^{u=x}=-0{,}5\left[\sin(x+y)-\sin y\right]+0{,}5\sin x.$$

Итак,

$$F(x, y) = 0{,}5\left[\sin x + \sin y - \sin(x+y)\right].$$

В соответствии с формулой (2.8.7) находим

$$P\left(X < \frac{\pi}{6}, Y < \frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}5\left[\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\right] \approx 0{,}67.$$

Пример 6. Независимые случайные величины X и Y имеют соответственно плотности:

$$p_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1 \text{ или } x > 1, \\ 0{,}5 & \text{при } -1 < x \le 1. \end{cases}$$

$$p_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0 \text{ или } y > 2, \\ 0{,}5 & \text{при } 0 < y \le 2. \end{cases}$$

Найти: 1) функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$;

2) плотность распределения вероятностей системы (X, Y);

3) функцию распределения системы (X, Y).

Решение. Функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ найдем с помощью формулы (2.3.2)

Если $x \le -1$, то $\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$; $F_1(x) = 0$.

Если $-1 < x \le 1$, то

$$F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int\limits_{-1}^{x} 0{,}5\,dt = 0{,}5\,t\Big|_{-1}^{x} = 0{,}5(x+1).$$

При $x > 1$

$$F_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int\limits_{-1}^{1} 0{,}5\,dt + \int\limits_{1}^{x} 0\,dt = \int\limits_{-1}^{1} 0{,}5\,dt = 0{,}5\,t\Big|_{-1}^{1} = 1.$$

Следовательно,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ 0{,}5\,(x+1) & \text{при } -1 < x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Аналогично находим

$$F_2(y)=\begin{cases}0 & \text{при } y\le 0\ ,\\ 0{,}5\,y & \text{при } 0<y\le 2\ ,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

Поскольку случайные величины X и Y независимы, то должно выполняться равенство (2.8.19), с помощью которого, находя произведение $F_1(x)\cdot F_2(y)$, получим функцию распределения $F(x, y)$ случайной величины (X, Y):

$$F(x, y)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -1 \text{ или } y\le 0,\\ 0{,}25\,(x+1)y & \text{при } -1<x\le 1\ ,\ 0<y\le 2,\\ 0{,}5(x+1) & \text{при } -1<x\le 1,\ y>2,\\ 0{,}5\,y & \text{при } x>1,\ 0<y\le 2\ ,\\ 1 & \text{при } x>1\ \ y>2\ .\end{cases}$$

Так как случайные величины X и Y независимы, то должно выполняться и равенство (2.8.20), с помощью которого, находя произведение $p_1(x)\cdot p_2(y)$, получаем плотность распределения случайной величины (X, Y):

$$p(x, y)=\begin{cases}0 & \text{при } x<-1 \ \text{ или } \ x>1,\ \ y<0 \ \text{ или } \ y>2\ ,\\ 0{,}25 & \text{при } -1<x\le 1\ ,\ 0<y\le 2\ .\end{cases}$$

Пример 7. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения $p(x, y)$ и функцию распределения $F(x, y)$, указанные в примере 6.

Найти вероятность события $(-1\le x<0\ ,\ 0\le y<1)$ двумя способами: а) с помощью функции $p(x, y)$, б) с помощью функции $F(x, y)$.

Решение. Эту вероятность можно найти с помощью формул (2.8.7) и (2.8.13). Поскольку для указанных значений x и y функция $F(x, y)$ примера 6 имеет вид

$$F(x, y)=0{,}25(x+1)y \quad \text{при } \ -1<x\le 1\ ,\ 0<y\le 2\ ,$$

то по формуле (2.8.7) получаем

$$P(X<0, Y<1)=F(0, 1)=0{,}25(0+1)\cdot 1=0{,}25\ .$$

Согласно формуле (2.8.13) находим

$$P(-1 \le X < 0,\ 0 \le Y < 1) = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} 0{,}25\, dx\, dy = 0{,}25\, x\Big|_{-1}^{0} \cdot y\Big|_{0}^{1} = 0{,}25\,.$$

Задачи

1. Двумерная случайная величина (X, Y) задана законом распределения:

X \ Y	3	4	5
0	0,02	0,12	0,06
1	0,03	0,18	0,09
2	0,05	0,30	0,15

Найдите законы распределения составляющих X и Y. Найдите условный закон распределения величины Y при $X = 0$.

2. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

X \ Y	-1	0	1
1	0,15	0,3	0,35
2	0,05	0,05	0,1

Найдите законы распределения составляющих X и Y. Вычислите вероятности $P(X = 2, Y = 0)$, $P(X > Y)$. Установите, зависимы или нет составляющие X и Y.

3. Задана функция двумерной случайной величины (X, Y)

$$F(x, y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) \ \ (x \ge 0 \quad y \ge 0).$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания составляющие X и Y примут значения соответственно $X < 1$, $Y < 3$.

4. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения вероятностей

$$p(x, y) = \frac{c}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Требуется: 1) определить величину c; 2) найти функцию распределения $F(x, y)$; 3) вычислить вероятность того, что X и Y примут соответственно значения: $X < 4$, $Y < 5$.

5. Найдите плотность совместного распределения $p(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) по известной функции распределения

$$F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \quad (0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2).$$

6. Найдите вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник с вершинами

$$A(\pi/6; \pi/4),\ B(\pi/6; \pi/3),\ C(\pi/2; \pi/3),\ D(\pi/2; \pi/4),$$

если известна функция распределения

$$F(x, y) = \sin x \cdot \sin y \quad (0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2).$$

Ответы

3. 0,601. **4.** $c = 20$; $F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} arctg\, \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi} arctg\, \frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right)$; $p = 9/16$.
5. $P(x, y) = \cos x \cdot \cos y \quad (0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2)$. **6.** 0,08.

Вопросы

1. Что такое двумерная случайная величина?

2. Какие другие названия используют для двумерной случайной величины?

3. Что такое закон распределения дискретной двумерной случайной величины?

4. В каком виде можно записать закон распределения дискретной двумерной случайной величины?

5. Что дает таблица совместного распределения двух дискретных случайных величин?

6. Как, зная закон распределения дискретной двумерной случайной величины, найти законы распределения составляющих?

7. Каким образом по таблице совместного распределения двух дискретных случайных величин можно вычислить математическое ожидание и дисперсию каждой из этих величин?

8. Что называют условным законом распределения дискретной случайной величины X при $Y = y_k$?

9. Как условный закон распределения связан с безусловным законом распределения?

10. Как определяется функция распределения двумерной случайной величины?

11. Каковы свойства функции распределения двумерной случайной величины?

12. Как определяется плотность распределения двумерной случайной величины?

13. Как выражается функция распределения двумерной случайной величины через ее плотность распределения?

14. По каким формулам можно вычислить вероятность попадания значений двумерной случайной величины в заданный прямоугольник?

15. По какой формуле можно вычислить вероятность попадания значений двумерной случайной величины в заданную область?

16. Как определяется независимость двух случайных величин?

17. Как выражается необходимое и достаточное условие независимости двух случайных величин?

18. Что можно сказать о взаимной связи случайных величин X и Y, зная их числовые характеристики $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$?

19. Что такое ковариация двух случайных величин?

20. Что называют коэффициентом корреляции?

21. Каковы свойства коэффициента корреляции?

22. Какая связь существует между равенством нулю коэффициента корреляции и независимостью случайных величин?

Глава 3. Некоторые законы распределения случайных величин

§ 3.1. Формула Бернулли

Производятся испытания, в каждом из которых может появиться событие A или событие $\overline{A}$. Если вероятность события A в одном испытании не зависит от появления его в любом другом, то испытания называются *независимыми* относительно события A. Будем считать, что испытания происходят в одинаковых условиях и вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же. Обозначим эту вероятность через p, а вероятность появления события $\overline{A}$ через q ($q = 1 - p$).

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A появится ровно k раз (и не появится $n-k$ раз), обозначим через $P_n(k)$,тогда

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{3.1.1}$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \quad . \tag{3.1.2}$$

Формула (3.1.1) называется *формулой Бернулли.*

Правая часть формулы (3.1.1) представляет собой общий член разложения бинома Ньютона:

$$(q+p)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (3.1.3)$$

Поскольку $p+q=1$, то из формулы (3.1.3) следует, что сумма всех биномиальных вероятностей равна единице:

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1, \quad (3.1.4)$$

Число k_0, которому при заданном n соответствует максимальная биномиальная вероятность $P_n(k_0)$, называется *наивероятнейшим* числом появления события A. При заданных n и p это число определяется неравенствами

$$np - q \le k_0 \le np + p. \quad (3.1.5)$$

Если число $np+p$ не является целым, то k_0 равно целой части этого числа $\left(k_0 = [np+p]\right)$; если же $np+p$ – целое число, то k_0 имеет два значения $k_0' = np - q$, $k_0'' = np + p$.

Вероятность того, что в n опытах схемы Бернулли событие A появится от k_1 до k_2 раз $(0 \le k_1 \le k_2 \le n)$ обозначим через $P_n(k_1 \le k \le k_2)$, тогда

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (3.1.6)$$

Вероятность $P_n(1 \le k \le n)$ того, что в n опытах событие A появится хотя бы один раз, определяется формулой

$$P_n(1 \le k \le n) = 1 - q^n. \quad (3.1.7)$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, находят соответственно по формулам:

$$P(A) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1); \quad (3.1.8)$$

$$P(A) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n); \quad (3.1.9)$$

$$P(A) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n); \qquad (3.1.10)$$

$$P(A) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k). \qquad (3.1.11)$$

Производится n независимых опытов, каждый из которых имеет $m (m \geq 2)$ попарно несовместных и единственно возможных исходов A_1, A_2, ... , A_m с вероятностями $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, …, $p_m = P(A_m)$, одинаковыми во всех опытах $(p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1)$. Для произвольных целых неотрицательных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$ обозначим через $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ вероятность того, что в n опытах исход A_1 наступит k_1 раз, исход A_2 – k_2 раз, ... , исход A_m – k_m раз, тогда

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}. \qquad (3.1.12)$$

Формула (3.1.12) определяет *полиномиальное распределение* вероятностей. Биномиальное распределение (3.1.1) является частным случаем полиномиального распределения при $m = 2, p_2 = 1 - p_1 = q_1$.

Пример 1. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка 0,7 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.

Решение. Поскольку $p = 0{,}7$, то $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. По условию $n = 5$, $k = 2$, по формуле (3.1.1) находим

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \cdot (0{,}7)^2 \cdot (0{,}3)^3 = 10 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}027 = 0{,}1323.$$

Пример 2. Подбрасывается 5 симметричных монет. Найти вероятность того, что: выпало ровно 2 герба; выпало более одного герба.

Решение. Обозначим через X число гербов, выпавших при этих подбрасываниях. В данном случае $p = 1/2$ и $q = 1/2$.

$$P(X=2) = P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16} = 0{,}3125.$$

Случайная величина X может принимать следующие значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$. Поскольку $P(x > 1) = 1 - P(x \leq 1) =$ $= 1 - P_5(0) - P_5(1)$, то

$$P(x > 1) = 1 - C_5^0 p^0 q^{5-0} - C_5^1 p q^{5-1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} = 0{,}8125.$$

Пример 3. Всхожесть семян данного растения равна 90 %. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

Решение. Искомые вероятности находим с помощью формулы Бернулли.

В первом случае $n=4$, $k=3$, $p=0{,}9$, $q=1-p=0{,}1$, поэтому

$$P_4(3)=C_4^3p^3q=4\cdot 0{,}729\cdot 0{,}1=0{,}2916.$$

Во втором случае событие A состоит в том, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. По теореме сложения вероятностей $P(A)=P_4(3)+P_4(4)$. Поскольку $P_4(4)=C_4^4p^4q^0=(0{,}9)^4=0{,}6561$, то

$$P(A)=0{,}2916+0{,}6561=0{,}9477.$$

Пример 4. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 5 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

Решение. Пользуемся неравенствами (3.1.5) и пояснением к ним.

Поскольку $np+p=5\cdot 0{,}8+0{,}8=4{,}8$ – не целое число, то $k_0=[4{,}8]=4$. Вероятность $P_5(4)$ находим по формуле Бернулли:

$$P_5(4)=C_5^4(0{,}8)^4\cdot 0{,}2=0{,}4096.$$

Пример 5. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 30 %. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий.

Решение. По условию $n=75$, $p=0{,}3$, поэтому $q=1-p=0{,}7$. Составляем двойное неравенство (3.1.5):

$$75\cdot 0{,}3-0{,}7\le k_0\le 75\cdot 0{,}3+0{,}3;\quad 21{,}8\le k_0\le 22{,}8.$$

отсюда следует, что $k_0=22\quad \left(k_0=[22{,}8]\right)$.

Пример 6. Вероятность того, что станок в течение часа потребует внимания рабочего, равна 0,6. Предполагая, что неполадки в станках независимы, найти вероятность того, что в течение часа внимания рабочего потребует какой-либо станок из четырех, обслуживаемых им.

Решение. Вероятность данного события найдем по формуле (3.1.1) при $n=4$, $k=1$, $p=0{,}6$ и $q=1-p=0{,}4$:

$$P_4(1)=C_4^1\cdot 0{,}6\cdot(0{,}4)^{4-1}=4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}64=0{,}1536.$$

Пример 7. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми машин, а имеется их десять. Вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день.

Решение. Автобаза будет работать нормально (событие D), если на линию выйдут или восемь (событие A), или девять (событие B), или все десять (событие C) автомашин. По теореме сложения вероятностей

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10).$$

Каждое слагаемое найдем по формуле Бернулли.

Поскольку вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1, то вероятность выхода автомашины на линию будет равна 0,9, т.е. $p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$. Из условия следует, что $n = 10$, $k = 8, 9, 10$. Следовательно,

$$P(D) = C_{10}^{8} \cdot (0{,}9)^{8} \cdot (0{,}1)^{2} + C_{10}^{9} \cdot (0{,}9)^{9} \cdot 0{,}1 + C_{10}^{10} \cdot (0{,}9)^{10} \cdot (0{,}1)^{0} \approx$$

$$\approx 0{,}1937 + 0{,}3874 + 0{,}3487 = 0{,}9298.$$

Пример 8. Всхожесть семян составляет в среднем 80 %. Найти наивероятнейшее число всхожих среди девяти семян.

Решение. Число k_0 определим с помощью неравенств (3.1.5). Поскольку $n = 9$, $p = 0{,}8$, и $q = 0{,}2$, то $9 \cdot 0{,}8 - 0{,}2 \le k_0 \le 9 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 = 8$.

Получено целое число; значит существует два наивероятнейших числа всхожих семян: 8 и 7. Вероятности их наибольшие и равны между собой.

Действительно,

$$P_9(7) = C_9^7 p^7 q^{9-7} = C_9^7 \cdot (0{,}8)^7 \cdot (0{,}2)^2 = 36 \cdot 0{,}2097 \cdot 0{,}04 \approx 0{,}302,$$

$$P_9(8) = C_9^8 p^8 q^{9-8} = C_9^8 \cdot (0{,}8)^8 \cdot 0{,}2 = 9 \cdot 0{,}1678 \cdot 0{,}2 \approx 0{,}302.$$

Пример 9. Монета подброшена 10 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) от 4 до 6 раз; б) хотя бы один раз.

Решение. По формуле (3.1.6) при $n = 10$, $k_1 = 4$, $k_2 = 6$, $p = q = 0{,}5$ находим

$$P_{10}(4 \le k \le 6) = P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) = \frac{210}{1024} + \frac{252}{1024} + \frac{210}{1024} = \frac{21}{32}.$$

Согласно формуле (3.1.7) получим

$$P_{10}(1 \le k \le 10) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}.$$

Пример 10. Сколько раз надо подбросить игральный кубик, чтобы наивероятнейшее число выпадений двойки было равно 32?

Решение. В данном случае $k_0 = 32$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$. Неравенства $np - q \le k_0 \le np + p$ принимают вид

$$n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le 32 \le n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6},$$

или

$$n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \le 32; \quad n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \ge 32.$$

Из первого неравенства следует, что $n \le 197$, а из второго, что $n \ge 191$. Таким образом, необходимо провести от 191 до 197 независимых испытаний.

Пример 11. Какова вероятность наступления события A в каждом испытании, если наивероятнейшее число наступлений события A в 120 испытаниях равно 32?

Решение. По условию $n = 120$, $k_0 = 32$. Неравенства (3.1.5) принимают вид

$$120p - (1 - p) \le 32 \le 120p + p,$$

или

$$120p - (1 - p) \le 32, \quad 120p + p \ge 32.$$

Решая эту систему неравенств, находим, что

$$\frac{32}{121} \le p \le \frac{33}{121}.$$

Пример 12. Какое минимальное число опытов достаточно провести, чтобы с вероятностью, не меньшей, чем $\alpha (0 < \alpha < 1)$, можно было бы ожидать наступление события A хотя бы один раз, если вероятность события A в одном опыте равна p.

Решение. Потребуем, чтобы вероятность наступления события A хотя бы один раз в n опытах (см. формулу (3.1.7)) была не меньше, чем α:

$$1 - q^n \ge \alpha, \text{ или } (1 - (1 - p)^n) \ge \alpha.$$

Решив это неравенство относительно n, получим неравенство

$$n \ge \frac{\lg(1 - \alpha)}{\lg(1 - p)}.$$

Отсюда заключаем, что минимальное число опытов n_0, удовлетворяющее условию примера, определяется формулой

$$n_0 = \left[\frac{\lg(1-\alpha)}{\lg(1-p)}\right] + 1,$$

где квадратными скобками обозначена целая часть числа.

В частности, если $p = 0{,}02$ и $\alpha = 0{,}98$, то по последней формуле получаем $n_0 = 80$.

Пример 13. Мишень состоит из 3 попарно непересекающихся зон. При одном выстреле по мишени вероятность попадания в первую зону для данного стрелка равна 0,5. Для второй и третьей зон эта вероятность равна соответственно 0,3 и 0,2. Стрелок производит 6 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что при этом окажется 3 попадания в первую зону, 2 попадания во вторую и 1 попадание в третью зону.

Решение. Чтобы найти искомую вероятность, воспользуемся формулой (3.1.12).

Так как в данном случае $n = 6,\ k_1 = 3,\ k_2 = 2,\ k_3 = 1,\ p_1 = 0{,}5,\ p_2 = 0{,}3,\ p_3 = 0{,}2$, то

$$P_6(3,2,1) = \frac{6!}{3!2!1!}(0{,}5)^3 \cdot (0{,}3)^2 \cdot 0{,}2 = 60 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}2 = 0{,}135.$$

Пример 14. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 90 % случаев. Какова вероятность того, что из 5 больных поправятся не менее 4?

Решение. Будем пользоваться формулой (3.1.10), которая в данном случае принимает вид $P(A) = P_5(4) + P_5(5)$, где A означает событие: "из 5 больных выздоровеет не менее 4".

Поскольку

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 = 5 \cdot 0{,}6561 \cdot 0{,}1 = 0{,}328\,,$$

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}9^5 \cdot (0{,}1)^0 = 0{,}9^5 = 0{,}590,$$

то

$$P(A) = P_5(4) + P_5(5) = 0{,}328 + 0{,}590 = 0{,}918.$$

Пример 15. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

Решение. Поскольку играют равносильные шахматисты, то вероятность выигрыша $p = 1/2$; следовательно, вероятность проигрыша q также равна 1/2. Во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, поэтому применима формула Бернулли.

Пользуясь формулами (3.1.1) и (3.1.10), находим указанные вероятности:

$$P_2(1) = C_2^1 pq = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{3}{8},$$

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16},$$

$$P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16};$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{5}{16},$$

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q = 5 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32},$$

$$P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = 1 \cdot \frac{1}{2^5} \cdot 1 = \frac{1}{32},$$

$$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{5}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{8}{16}.$$

Так как $P_2(1) = \frac{1}{2}$, $P_4(2) = \frac{3}{8}$ и $P_2(1) > P_4(2)$, то вероятнее выиграть одну партию из двух.

Поскольку $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = \frac{11}{16}$, $P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{8}{16}$ и $\frac{11}{16} > \frac{8}{16}$, то вероятнее выиграть не менее двух партий из четырех.

З а м е ч а н и е. Вероятность выиграть не менее двух партий из четырех можно вычислить и другим способом: $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - \left[P_4(0) + P_4(1)\right]$.

Поскольку $P_4(0)=\dfrac{1}{16}$, $P_4(1)=\dfrac{1}{4}$, то

$$P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{16}.$$

Пример 16. Проверка качества выпускаемых деталей показала, что в среднем брак составляет 7,5 %. Найти наиболее вероятное число стандартных деталей в партии из 39 штук, отобранных наудачу.

Решение. Извлечение стандартной детали (событие A) и извлечение нестандартной детали (событие $\overline{A}$) – противоположные события. Из условия следует, что $q=0{,}075$, поэтому $p=1-0{,}075=0{,}925$. Поскольку в данном случае $n=39$, то формула (3.1.5) для определения наивероятнейшего числа появления события A принимает вид

$$39\cdot 0{,}925-0{,}075\le k_0\le 39\cdot 0{,}925+0{,}925,$$

откуда $36\le k_0\le 37$. Наивероятнейшее число стандартных деталей равно 36 или 37.

Пример 17. При стрельбе по мишени вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. При каком числе выстрелов наивероятнейшее число попаданий равно 16?

Решение. Обращаемся к формуле (3.1.5). В данном случае $p=0{,}7$, $q=0{,}3$, $k_0=16$; число n неизвестно, его потребуется найти. Формула (3.1.5) принимает вид

$$0{,}7n-0{,}3\le 16\le 0{,}7n+0{,}7.$$

Из этих неравенств следует, что

$$0{,}7n\le 16{,}3,\quad 7n\le 163,\quad n\le 23\frac{2}{7};$$

$$0{,}7n\ge 15{,}3,\quad 7n\ge 153,\quad n\ge 21\frac{6}{7}.$$

Итак, $n_1=22$ и $n_2=23$, т.е. число всех выстрелов здесь может быть 22 или 23.

Пример 18. Найти вероятность того, что при 10 подбрасываниях монеты герб выпадет 5 раз.

Решение. Воспользуемся формулой (3.1.1). В данном случае $n=10$, $k=5$, $p=1/2$, $q=1-p=1/2$.

В соответствии с формулой (3.1.1) получаем

$$P_{10}(5)=C_{10}^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-5}=\frac{10!}{5!\cdot 5!}\cdot\frac{1}{2^{10}}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{2^{10}}=$$

$$=\frac{3\cdot 3\cdot 7}{2^8}=\frac{63}{256}\approx 0{,}246.$$

Пример 19. Монетку подбрасывают 5 раз. Случайная величина X – число выпадений цифры. Возможные значения величины X: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$. Записать закон распределения случайной величины X.

Решение. Вероятности указанных значений $P(x=x_k)$ найдем с помощью формулы Бернулли, приняв во внимание то, что в данном случае $p=1/2$, $q=1/2$.

$$P_5(0)=C_n^0p^0q^{n-0}=C_5^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32},$$

$$P_5(1)=C_5^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32},\quad P_5(2)=C_5^2\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{10}{32},$$

$$P_5(3)=C_5^3\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{10}{32},\quad P_5(4)=C_5^4\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32},\quad P_5(5)=C_5^5\cdot\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{2^0}=\frac{1}{32}.$$

Следовательно, закон распределения случайной величины X можно записать в виде таблицы

X	0	1	2	3	4	5
P	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Пример 20. Увеличится или уменьшится вероятность $P_n(k)$, определяемая формулой Бернулли, если к общему числу испытаний добавить еще два испытания, а вероятность p появления события A в одном испытании останется неизменной?

Решение. Поскольку

$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k},$$

то

$$P_{n+2}(k)=C_{n+2}^kp^kq^{n+2-k}=\frac{(n+2)!}{k!(n+2-k)!}p^kq^{n+2-k},$$

Найдем отношение $P_{n+2}(k)$ к $P_n(k)$:

$$\frac{P_{n+2}(k)}{P_n(k)}=\frac{(n+2)!}{k!(n+2-k)!}p^k q^{n+2-k} : \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=$$

$$=\frac{(n+2)!\,k!(n-k)!\,p^k q^{n+2-k}}{n!\,k!(n+2-k)!\,p^k q^{n-k}}=\frac{(n+1)(n+2)q^2}{(n+1-k)(n+2-k)}.$$

Так как

$$\frac{P_{n+2}(k)}{P_n(k)}=\frac{(n+1)(n+2)q^2}{(n+1-k)(n+2-k)},$$

то $P_{n+2}(k)=P_n(k)$ при $(n+1)(n+2)q^2=(n+1-k)(n+2-k)$;

$P_{n+2}(k)>P_n(k)$ при $(n+1)(n+2)q^2>(n+1-k)(n+2-k)$;

$P_{n+2}(k)<P_n(k)$ при $(n+1)(n+2)q^2<(n+1-k)(n+2-k)$.

Задачи

1. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадет ровно 3 раза?

2. Найдите вероятность того что среди взятых наугад пяти деталей две стандартные, если вероятность детали быть стандартной равна 0,9.

3. Определите наиболее вероятное число выпадений герба при 25 подбрасываниях монеты.

4. Чему равно наивероятнейшее число нестандартных среди 500 деталей, если вероятность для каждой из них быть нестандартной равна 0,035?

5. Вероятность того, что покупателю необходима мужская обувь 41-го размера, равна 0,25. Найдите вероятность того, что из шести покупателей по крайней мере двум необходима обувь 41-го размера.

6. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 80 % случаев. Какова вероятность того, что из 5 больных поправятся 4?

7. Производится 6 независимых испытаний. При каждом испытании событие A появляется с одной и той же вероятностью $p = 2/3$. Найдите вероятности для каждого $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Полученные результаты запишите в виде таблицы.

8. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 40 %. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 120 изделий?

9. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле $p=0,7$. Найдите вероятность наивероятнейшего числа попаданий, если произведено 9 выстрелов.

10. Вероятность рождения мальчиков равна 0,515. Найдите наивероятнейшее число девочек из 600 новорожденных.

Ответы

1. 15/128. **2.** $P_5(2) = C_5^2 \cdot (0,9)^2 \cdot (0,1)^3 = 0,081$. **3.** 12, 13. **4.** $k_0 = 17$. **5.** 0,466. **6.** 0,74. **8.** $k_0 = 48$. **9.** 0,267. **10.** $n_0 = 291$.

Вопросы

1. Какими должны быть испытания, чтобы можно было применять формулу Бернулли?

2. Какой вид имеет формула Бернулли?

3. Как запишется закон распределения дискретной случайной величины x-количества появившихся гербов на двух новеньких монетах, случайно оброненных на пол?

4. Какими свойствами коэффициентов бинома Ньютона можно воспользоваться для доказательства следующего утверждения: при нескольких подбрасываниях монеты вероятность выпадения герба четное число раз равно вероятности выпадения герба нечетное число раз?

5. Что называют наивероятнейшим числом появления события в n независимых испытаниях? Как находится это число?

6. Какой вид имеет формула, определяющая вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится от k_1 до k_2 раз $(0 \le k_1 \le k_2 \le n)$?

7. Как найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится хотя бы один раз?

8. Как вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз?

§ 3.2. Биномиальное распределение

Предположим, что в одинаковых условиях производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может появиться событие A с вероятностью p или противоположное событие $\overline{A}$ с вероятностью q $(q = 1 - p)$. В каждой серии из n испытаний событие A может либо не появиться, либо появиться 1 раз, 2 раза, ... , n раз. Введем в рассмотрение дискретную случайную величину X - "число появлений события A при n испытаниях". Найдем закон распределения этой случайной величины. Величина X может принимать следующие значения: $x_0 = 0$, $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n$.

Вероятность p_k того, что случайная величина X принимает значение x_k, вычисляется по формуле Бернулли

$$p_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n), \qquad (3.2.1)$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ или } C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}.$$

Закон распределения дискретной случайной величины, определяемый формулой Бернулли, называется *биномиальным*. Постоянные n и p, входящие в формулу (3.2.1), называются *параметрами биномиального распределения* ($q = 1 - p$).

Название *биномиальное распределение* объясняется тем, что правую часть равенства (3.2.1) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона $(q + p)^n$:

$$(q+p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + p^n. \qquad (3.2.2)$$

Поскольку $p + q = 1$, то

$$q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + p^n = 1, \qquad (3.2.3)$$

т.е.

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1, \qquad (3.2.4)$$

Первый член q^n в правой части разложения (3.2.3.) означает вероятность того, что в n испытаниях событие A не появится ни разу, второй член $C_n^1 pq^{n-1} = npq^{n-1}$ - вероятность того, что событие A появится один раз, третий член $C_n^2 p^2 q^{n-2}$ - вероятность того, что событие A появится два раза, наконец, последний член $C_n^n p^n = p^n$ - вероятность того, что событие A появится n раз.

Биномиальный закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде следующей таблицы

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Пример 1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, имеющей биномиальное распределение.

Решение. Случайную величину X - "число появления события A в n

независимых испытаниях" можно представить в виде суммы $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, где X_k - число появления события A в k-м испытании ($k = 1, 2, ..., n$). В соответствии с формулой (2.4.13) имеем

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

Случайная величина X_k – число появлений события A в одном испытании - может принимать только два значения: $x_1 = 1$ (событие A наступило) с вероятностью p и $x_2 = 0$ (событие A не наступило) с вероятностью q ($q = 1 - p$). Следовательно, $M(X_k) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$,

$$M(X_k) = p \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, $M(X) = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n) = p + p + \ldots p = np$,

$$M(X) = np. \qquad (3.2.5)$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p, равно произведению параметров.

Пример 2. Найти дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону.

Решение. Случайную величину X - "число появления события A при n испытаниях" можно представить как сумму $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, где X_k - "число появления события A при k-м испытании ($k = 1, 2, ..., n$)". В соответствии с формулой (2.5.9) имеем

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

С помощью формулы (2.5.10) вычислим $D(X_k)$ для $k = 1, 2, \ldots, n$. Случайная величина X_k принимает лишь два значения: $x_1 = 1$ с вероятностью p и $x_2 = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$. Случайная величина $(X_k - M(X_k))^2$ также принимает только два значения: $(1 - p)^2 = q^2$ с вероятностью p и $(0 - p)^2 = p^2$ с вероятностью q. Принимая во внимание равенства $M(X_k) = p$ (см. пример 1), по формуле (2.5.10), получаем

$$D(X_k) = M((X_k - M(X_k))^2) = q^2 p + p^2 q = pq(p + q) = pq,$$

$$D(X_k) = pq \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно,

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n) = pq + pq + \ldots + pq,$$

$$D(X) = npq. \tag{3.2.6}$$

Таким образом, дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону с параметром n и p равна произведению npq.

Пример 3. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по биномиальному закону.

Решение. Принимая во внимание определение среднего квадратического отклонения (см. формулу (2.5.16)) и формулу (3.2.6) (см. пример 2), получаем

$$G(X) = \sqrt{npq}. \tag{3.2.7}$$

Пример 4. Вероятность попадания в цель составляет при отдельном выстреле $p = 0{,}8$. Найти вероятность пяти попаданий при шести выстрелах.

Решение. Применяем формулу (3.2.1). Так как по условию $n = 6$, $k = 5$, $p = 0{,}8$, следовательно, $q = 1 - p = 0{,}2$, то

$$P_6(5) = C_6^5 p^5 q^1 = \frac{6!}{5!1!} \cdot (0{,}8)^5 \cdot (0{,}2)^1 = 6 \cdot (0{,}8)^5 \cdot 0{,}2 =$$

$$= 6 \cdot 0{,}32768 \cdot 0{,}2 = 0{,}3934.$$

Пример 5. Всхожесть семян данного сорта растений составляет 80 %. Какова вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдет не меньше 4.

Решение. В соответствии с условием $p = 0{,}8$, поэтому $q = 0{,}2$. Далее, $n = 5$, $k \geq 4$, т.е. k принимает значения или 4 или 5. Событие, вероятность которого следует определить, обозначим через A, тогда $P(A) = P_5(4) + P_5(5)$. Согласно формуле Бернулли находим вероятности $P_5(4)$, $P_5(5)$ и их сумму

$$P(A) = P_5(4) + P_5(5) = \frac{5!}{4!1!} \cdot (0{,}8)^4 \cdot 0{,}2 + (0{,}8)^5 =$$

$$= 5 \cdot 0{,}4096 \cdot 0{,}2 + 0{,}32768 = 0{,}73728.$$

Пример 6. По данным ОТК на 100 металлических брусков, подготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из случайно взятых 7 брусков окажется без дефектов не более 2?

Решение. Обозначим через A событие "на бруске отсутствуют зазубрины", тогда $P(A) = 0{,}7$ и $P(\overline{A}) = 0{,}3$, т.е. $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Число испытаний $n = 7$, k ? 2, т.е. k может принимать значения 0, 1, 2. Найдем искомую вероятность:

$$P(k \le 2) = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2) = C_7^0 p^0 q^7 + C_7^1 p q^6 + C_7^2 p^2 q^2 =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (0{,}3)^7 + \frac{7!}{1!6!} \cdot 0{,}7 \cdot (0{,}3)^6 + \frac{7!}{2!5!} \cdot (0{,}7)^2 \cdot (0{,}3)^2 =$$

$$= (0{,}3)^7 + 7 \cdot 0{,}7 \cdot (0{,}3)^6 + 21 \cdot (0{,}7)^2 \cdot (0{,}3)^5 =$$

$$= (0{,}3)^5 \left[(0{,}3)^2 + 7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 21 \cdot (0{,}7)^2 \right] =$$

$$= (0{,}3)^5 \cdot (0{,}09 + 1{,}47 + 10{,}29) = (0{,}3)^5 \cdot 11{,}85 = 0{,}0288.$$

Пример 7. Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 штук в среднем. Составить биномиальное распределение вероятностей числа пригодных деталей из взятых наудачу 6 деталей.

Решение. Из условия задачи следует, что $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $n = 6$. В соответствии с формулой Бернулли находим:

$$P_6(0) = 1 \cdot (0{,}25)^6 \approx 0{,}0002; \quad P_6(1) = 6 \cdot (0{,}75) \cdot (0{,}25)^5 \approx 0{,}004;$$

$$P_6(2) = 15 \cdot (0{,}75)^2 \cdot (0{,}25)^4 \approx 0{,}033; \quad P_6(3) = 20 \cdot (0{,}75)^3 \cdot (0{,}25)^3 \approx 0{,}132;$$

$$P_6(4) = 15 \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 \approx 0{,}297; \quad P_6(5) = 6 \cdot (0{,}75)^5 \cdot (0{,}25) \approx 0{,}356;$$

$$P_6(6) = 1 \cdot (0{,}75)^6 \approx 0{,}178.$$

Закон распределения данной случайной величины X - "числа стандартных деталей из 6 взятых наудачу" можно задать следующей таблицей:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,000	0,004	0,033	0,132	0,297	0,356	0,178

Убедимся в том, что выполнено равенство (3.2.4), т.е. сумма всех вероятностей равна единице:

$$0{,}004 + 0{,}033 + 0{,}132 + 0{,}297 + 0{,}356 + 0{,}178 = 1.$$

Графическое представление этого биномиального представлений дано на рис. 3.1.

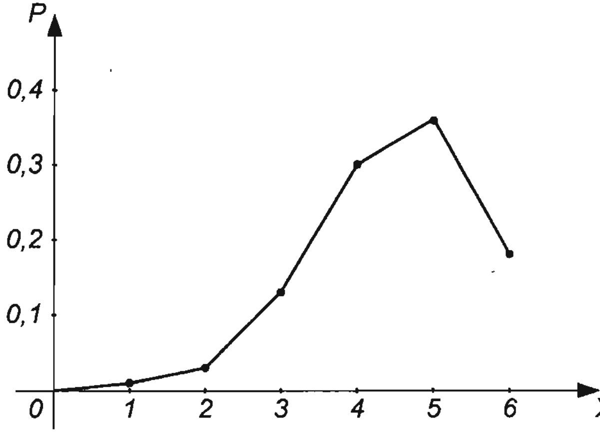


Рис. 3.1

Пример 8. Производится 9 независимых испытаний. При каждом испытании событие A появляется с одной и той же вероятностью $p = 2/3$. Записать в виде таблицы закон распределения случайной величины X - "числа появлений события A при этих испытаниях".

Решение. С помощью формулы Бернулли вычисляем вероятности $P_9(k)$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$:

$$P_9(0) = C_9^0 p^0 q^9 = \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 0{,}0000;$$

$$P_9(1) = C_9^1 p^1 q^8 = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 0{,}0009;$$

$$P_9(2) = C_9^2 p^2 q^7 = 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = 0{,}0073;$$

$$P_9(3) = C_9^3 p^3 q^6 = 84 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 0{,}0341.$$

Продолжая аналогичные вычисления, получаем $P_9(4) = 0{,}1024$; $P_9(5) = 0{,}2049$; $P_9(6) = 0{,}2733$; $P_9(7) = 0{,}2341$; $P_9(8) = 0{,}1170$; $P_9(9) = 0{,}0260$.

Закон распределения данной случайной величины записываем в виде таблицы

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,0000	0,0009	0,0073	0,0341	0,1024	0,2049	0,2733	0,2341	0,1170	0,0260

Непосредственный подсчет показывает, что

$$\sum_{k=0}^{9} P_n(k) = 1,$$

т.е. выполняется равенство (3.2.4).

Пример 9. Доказать рекуррентную формулу для биномиальных вероятностей:

$$P_n(k+1) = \frac{p}{q}\frac{n-k}{k+1}P_n(k) \qquad (3.2.8)$$

Решение. Поскольку

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k},$$

то

$$P_n(k+1) = C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-(k+1)} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}p^{k+1}q^{n-k-1}.$$

Преобразуем последнее выражение:

$$P_n(k+1) = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\cdot p\cdot p^k\cdot\frac{q^{n-k}}{q} =$$

$$= \frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!}\cdot\frac{p}{q}p^k q^{n-k} = \frac{p}{q}\cdot\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}.$$

Итак,

$$P_n(k+1) = \frac{p}{q}\cdot\frac{n-k}{k+1}C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{p}{q}\cdot\frac{n-k}{k+1}P_n(k).$$

Задачи

1. Найдите математическое ожидание случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами $n = 100$, $p = 0,3$.

2. Найдите дисперсию случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами $n = 50$, $p = 0,6$.

3. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами $n = 100$, $p = 0,8$.

4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Какова вероятность того, что из 5 выстрелов ровно 3 будут удачными?

5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,9. Какова вероятность того, что из 5 выстрелов не менее 3 будут удачными?

6. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того что герб при этом выпадет ровно 4 раза?

7. Вероятность того, что лампа останется исправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Найдите вероятность того, что из пяти ламп не менее трех останутся исправными после 1000 часов работы.

8. В урне находятся 6 голубых и 9 красных шаров. Из урны извлекают шар, фиксируют его цвет, после чего возвращают шар обратно в урну. Этот опыт повторяют трижды. Найдите вероятность того, что из трех вынутых шаров ровно два окажутся голубыми.

9. В урне находятся 6 голубых и 9 красных шаров. Из урны последовательно извлекают три шара и не возвращают их. Найдите вероятность того, что из трех извлеченных шаров два окажутся голубыми.

10. Производится 8 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 2/3. Найдите вероятности возможных исходов. Постройте многоугольник распределения вероятностей.

11. Производятся независимые испытания, в каждом из которых может появиться событие A с вероятностью $p = 1/365$. Найдите вероятность того, что при 500 испытаниях событие A появится k раз: $k = 0, 1, 2, 3$.

12. В урне находятся 8 белых, 5 красных и 2 голубых шара. Производится 5 извлечений с возвращением по одному шару. Рассматриваются события: A - "появился следующий состав шаров: 3 белых и по одному остальных цветов"; B - "появилось ровно 3 белых шара"; C - "появилось 3 белых шара и по одному остальных цветов, причем белые шары появились подряд". Найдите вероятности событий A, B, C.

Ответы

1. 30. **2.** 12. **3.** 4. **4.** 0,073. **5.** 0,99. **6.** 105/512. **7.** 0,06. **8.** 36/125. **9.** 27/91. Указание. Воспользуйтесь классической схемой вычисления вероятности: $p = \dfrac{C_6^2 \cdot C_9^1}{C_{15}^3}$. **10.** $P_8(0) = 0$; $P_8(1) = 0{,}002$; $P_8(2) = 0{,}017$; $P_8(3) = 0{,}068$; $P_8(4) = 0{,}171$; $P_8(5) = 0{,}274$; $P_8(6) = 0{,}274$; $P_8(7) = 0{,}156$; $P_8(8) = 0{,}038$. **11.** $p_0 = 0{,}2537$; $p_1 = 0{,}3485$; $p_2 = 0{,}2389$; $p_3 = 0{,}1089$. Указание. При вычислении p_1, p_2, p_3 можно воспользоваться формулой (3.2.8). **12.** $P(A) = 0{,}1348$, $P(B) = 0{,}3304$, $P(C) = 0{,}0404$. Указание. При вычислении $P(A)$ и $P(C)$ воспользуйтесь формулой (3.1.12). Например,

$$P(A) = P_5(3,1,1) = \frac{5!}{3!1!1!}\left(\frac{8}{15}\right)^3 \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} = \frac{8}{9} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 \approx 0{,}1348.$$

Вопросы

1. Какое распределение вероятностей называется биномиальным?

2. Чем объясняется слово "биномиальный" в названии распределения?

3. Чему равно математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p?

4. Чему равна дисперсия случайной величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p?

5. Чему равно среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p?

6. Запишите биномиальный закон распределения вероятностей случайной величины в виде таблицы.

7. Какой вид имеет рекуррентная формула для биномиальных вероятностей?

8. Как определяется полиномиальное распределение вероятностей случайной величины?

9. Какова связь между биномиальным распределением и полиномиальным распределением?

§ 3.3. Распределение Пуассона

В одинаковых условиях производится n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A с вероятностью p или событие $\overline{A}$ с вероятностью q ($q = 1 - p$). Вероятность того, что при n испытаниях событие A появится k раз (и не появится $n - k$ раз) определяется формулой Бернулли (см. формулу (3.1.1)).

Рассмотрим случай, когда n является достаточно большим, а p - достаточно малым; положим $np = a$, где a - некоторое число.

Распределением Пуассона[1] называется распределение вероятностей дискретной случайной величины, определяемое формулой

$$P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!}. \tag{3.3.1}$$

Постоянную

$$a = np, \tag{3.3.2}$$

[1] Пуассон Симон Дени (1781-1840) - французский математик, механик и физик.

входящую в формулу (3.3.1), называют *параметром распределения Пуассона.*

Закон распределения Пуассона можно записать в виде следующей таблицы:

X	0	1	2	...	k	...
P	e^{-a}	ae^{-a}	$\dfrac{a^2e^{-a}}{2!}$	...	$\dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$	...

Пример 1. Доказать, что распределение Пуассона является предельным случаем биномиального распределения.

Решение. Из равенства (3.3.2) определим p и q:

$$p=\frac{a}{n},\quad q=1-\frac{a}{n}$$

и подставим в формулу Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^k\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}$$

Переходя к пределу при $n>\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}P_n(k)=\frac{a^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-k}=\frac{a^k}{k!}\cdot 1\cdot e^{-a}\cdot 1=\frac{a^k e^{-a}}{k!},$$

$$\lim_{n\to\infty}P_n(k)=\frac{a^k e^{-a}}{k!} \qquad (3.3.3)$$

Итак, формула (3.3.1), определяющая распределение Пуассона, является предельным случаем формулы Бернулли, которой определяется биномиальное распределение.

Пример 2. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k e^{-a}}{k!}=1. \qquad (3.3.4)$$

Решение. Принимая во внимание разложение функции $f(x)=e^x$ в степенной ряд

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots$$

и вытекающее отсюда равенство

$$e^a = 1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\ldots+\frac{a^k}{k!}+\ldots,$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k e^{-a}}{k!} = e^{-a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!} = e^{-a}\left(1+\frac{a}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\ldots+\frac{a^k}{k!}+\ldots\right) = e^{-a}e^{a} = 1.$$

Таким образом, ряд из вероятностей распределения Пуассона сходится и его сумма равна единице, т.е. выполняется условие (2.1.4) в определении закона распределения дискретной случайной величины.

Пример 3. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона.

Решение. На основании таблицы, определяющей закон распределения, и формулы (2.4.6) находим

$$M(X) = 0\cdot e^{-a}+1\cdot\frac{a}{1!}e^{-a}+2\cdot\frac{a^2}{2!}e^{-a}+\ldots+k\frac{a^k}{k!}e^{-a}+\ldots=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{(k-1)!}e^{-a} = ae^{-a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = ae^{-a}e^{a} = a,$$

$$M(X)=a. \qquad (3.3.5)$$

Итак, математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равно числу a - параметру этого распределения.

Пример 4. Найти дисперсию дискретной случайной величины, имеющей распределение Пуассона.

Решение. Дисперсию вычислим по формуле (2.5.4), для чего вначале найдем математическое ожидание квадрата данной величины:

$$M(X^2) = 0^2\cdot e^{-a}+1^2\cdot\frac{a}{1!}e^{-a}+2^2\cdot\frac{a^2}{2!}e^{-a}+\ldots+k^2\frac{a^k}{k!}e^{-a}+\ldots=$$

$$=1\cdot\frac{a}{0!}e^{-a}+2\cdot\frac{a^2}{1!}e^{-a}+\ldots+k\frac{a^k}{(k-1)!}e^{-a}+\ldots$$

Положив $k-1=m$, получим

$$M(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{a^k}{(k-1)!}e^{-a}=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{a^{m+1}}{m!}e^{-a}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{a^{m+1}}{m!}e^{-a}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{m+1}}{m!}e^{-a}=$$

$$=a^2e^{-a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a^{m-1}}{(m-1)!}+ae^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}=a^2e^{-a}e^a+ae^{-a}e^a=a^2+a.$$

По формуле (2.5.4) находим дисперсию:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=a^2+a-a^2=a.$$

Таким образом,

$$D(X)=a, \tag{3.3.6}$$

т.е. дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна числу a - параметру этого распределения.

Пример 5. Доказать, что сумма двух независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметрами a и b, также распределена по закону Пуассона с параметром $a+b$.

Решение. По условию для случайных величин X и Y

$$P(X=k)=\frac{a^k}{k!}e^{-a},\quad P(Y=k)=\frac{b^k}{k!}e^{-b}.$$

Поскольку случайные величины X и Y независимы, то случайные события $(X=m)$ и $(Y=k-m)$ независимы при любых целых неотрицательных k и m, $0\le m\le k$, поэтому

$$P((X=m)\cap(Y=k-m))=P(X=m)P(Y=k-m)=$$

$$=\frac{a^m}{m!}e^{-a}\cdot\frac{b^{k-m}}{(k-m)!}e^{-b}=\frac{a^mb^{k-m}}{m!(k-m)!}e^{-(a+b)}$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P((X+Y)=k)=\sum_{m=0}^{k}P(X=m)\cdot P(Y=k-m)=$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{a^mb^{k-m}}{m!(k-m)!}e^{-(a+b)}=\frac{e^{-(a+b)}}{k!}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!a^kb^{k-m}}{m!(k-m)!}=$$

$$= \frac{e^{-(a+b)}}{k!} \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^k b^{k-m} = \frac{e^{-(a+b)}}{k!} (a+b)^k.$$

Таким образом,

$$P((X+Y)=k) = \frac{(a+b)^k}{k!} e^{-(a+b)}, \tag{3.3.7}$$

т.е. случайная величина $(X+Y)$ распределена по закону Пуассона с параметром $a+b$.

Замечание. Формула (3.3.7) распространяется на n независимых величин, распределенных по закону Пуассона.

Пример 6. Случайная величина X распределена по закону Пуассона. Найти $P(X=3)$, если $a=4$, а также математическое ожидание и дисперсию величины X.

Решение. По формуле (3.3.1) находим

$$P(X=3) = \frac{4^3}{3!} e^{-4} = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{e^4} = 10{,}6667 \cdot 0{,}0183 = 0{,}1952.$$

Согласно формулам (3.3.5) и (3.3.6) получаем

$$M(X)=4, \quad D(X)=4.$$

Пример 7. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p=0{,}002$. Какова вероятность того, что при 1000 испытаниях событие A появится 5 раз?

Решение. Воспользуемся формулой (3.3.1). По условию $n=1000$, $p=0{,}002$, $k=5$. Так как $a=np=1000 \cdot 0{,}002=2$ (см. формулу (3.3.2)), то

$$P_{1000}(5) = \frac{2^5}{5!} e^{-2} = \frac{4}{15} \cdot \frac{1}{e^2} = 0{,}2667 \cdot 0{,}1354 = 0{,}0361.$$

Пример 8. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром $a=3$, случайная величина Y распределена по закону Пуассона с параметром $b=2$; эти случайные величины независимы. Найти закон распределения их суммы.

Решение. В соответствии с формулой (3.3.7) получаем

$$P((X+Y)=k) = \frac{(3+2)^k}{k!} e^{-(3+2)} = \frac{5^k}{k!} e^{-5}.$$

Пример 9. Вероятность изготовления нестандартной детали $p=0{,}004$. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных.

Решение. Здесь $n = 1000$, $p = 0{,}004$, $a = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4$. По формуле (3.3.1) находим

$$P_{1000}(5) = \frac{4^5}{5!} e^{-4} = \frac{128}{15} \cdot \frac{1}{e^4} = 8{,}5333 \cdot 0{,}0183 = 0{,}1562.$$

Пример 10. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин. равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение 1 мин. обрыв произойдет более чем на трех веретенах.

Решение. В соответствии с условием имеем: $n = 1000$, $p = 0{,}002$, $a = np = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$, $k > 3$.

$$P_n(k > 3) = 1 - P_n(k \le 3) = 1 - P_n(0) - P_n(1) - P_n(2) - P_n(3).$$

Применяя формулу (3.3.1), находим:

$$P_n(k > 3) = 1 - e^{-2}\frac{2^0}{0!} - e^{-2}\frac{2}{1!} - e^{-2}\frac{2^2}{2!} - e^{-2}\frac{2^3}{3!} =$$

$$= 1 - 0{,}1353 - 0{,}2707 - 0{,}2707 - 0{,}1805 = 0{,}1428.$$

Пример 11. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью, равной 0,001. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях событие A появится не менее двух и не более четырех раз.

Решение. Из условия задачи следует, что $n = 2000$, $p = 0{,}001$, $a = np = 2000 \cdot 0{,}001 = 2$, $2 \le k \le 4$. Следовательно

$$P_n(2 \le k \le 4) = P_n(2) + P_n(3) + P_n(4) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} + \frac{2^4}{4!}e^{-2} \approx 0{,}541.$$

Пример 12. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Какова вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия?

Решение. Из условия следует, что $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $a = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$. Согласно формуле (3.3.1) имеем

$$P_{5000}(3) = \frac{1^3}{3!}e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}0613.$$

Пример 13. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух элементов? Какова вероятность отказа не менее двух элементов за год?

Решение. Здесь требуется найти вероятности: 1) $P_{1000}(2)$; 2) $P_{1000}(k \geq 2)$. По условию $n = 1000$, $p = 0{,}001$, $a = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$.

Вероятность отказа ровно двух элементов:

$$P_{1000}(2) = \frac{a^2}{2!}e^{-a} = \frac{1}{2e} \approx 0{,}1831.$$

Вероятность отказа не менее двух элементов:

$$P_{1000}(k \geq 2) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k = 1 - p_0 - p_1 = 1 - e^{-a}(1+a) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}2642.$$

Пример 14. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятности следующих событий: "в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию"; "в течение часа не более 4 абонентов позвонят на станцию"; "в течение часа не менее 3 абонентов позвонят на станцию".

Решение. Согласно условию $n = 400$, $p = 0{,}01$, тогда $a = np = 400 \cdot 0{,}01 = 4$.

В соответствии с формулой (3.3.1) находим

$$P_{400}(5) = \frac{4^5}{5!}e^{-4} \approx 0{,}1563;$$

$$P_{400}(0 \leq k \leq 4) = P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) + P_{400}(3) + P_{400}(4) \approx$$

$$\approx 0{,}0183 + 0{,}0733 + 0{,}1465 + 0{,}1954 + 0{,}1954 = 0{,}6289.$$

$$P_{400}(3 \leq k \leq 400) = 1 - P_{400}(0 \leq k \leq 2) = 1 - P_{400}(0) - P_{400}(1) - P_{400}(2) =$$

$$= 1 - 0{,}0183 - 0{,}0733 - 0{,}1465 = 0{,}7619.$$

Пример 15. Производятся независимые испытания, в каждом из которых может появиться событие A с вероятностью $p = 0{,}01$. Найти вероятность того, что при 100 испытаниях событие A появится соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6 раз, не появится ни разу.

Решение. При подсчете искомых вероятностей будем пользоваться рекуррентной формулой

$$P_n(k+1) = \frac{a}{k+1}P_n(k), \tag{3.3.8}$$

которая получается следующим образом:

$$P_n(k+1)=\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}e^{-a}=\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a^k}{k!}e^{-a}=\frac{a}{k+1}P_n(k).$$

При $a=1$ эта формула принимает вид

$$P_n(k+1)=\frac{1}{k+1}P_n(k). \qquad (3.3.9)$$

Если известна вероятность $P_n(0)$, то по формуле (3.3.9) можно вычислить $P_n(1)$, $P_n(2)$, $P_n(3)$ и т.д.

Из условия задачи следует, что $n=100$, $p=0{,}01$, поэтому $a=np=$ $=100\cdot 0{,}01=1$. По формуле (3.3.1) находим

$$P_{100}(0)=e^{-1}=0{,}3679; \quad P_{100}(1)=\frac{1^1}{1!}e^{-1}=e^{-1}=0{,}3679.$$

Пользуясь формулой (3.3.9) последовательно получаем:

$$P_{100}(2)=\frac{1}{2}P_{100}(1)=0{,}1839; \quad P_{100}(3)=\frac{1}{3}P_{100}(2)=0{,}0613;$$

$$P_{100}(4)=\frac{1}{4}P_{100}(3)=0{,}0153; \quad P_{100}(5)=\frac{1}{5}P_{100}(4)=0{,}0031;$$

$$P_{100}(6)=\frac{1}{6}P_{100}(5)=0{,}0005.$$

Пример 16. На факультете обучается 500 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно для k студентов данного факультета? Вычислить эту вероятность для значений $k=0$, 1, 2, 3.

Решение. Поскольку $n=500$ является достаточно большим, а $p=1/365$ - достаточно малым, то можно считать, что случайное число X студентов, родившихся 1 сентября, подчиняется закону распределения Пуассона с параметром $a=np=500/365=1{,}36986$.

По формуле (3.3.1) получаем $p_0=P(X=0)=e^{-a}\approx 0{,}2541$. Пользуясь формулой (3.3.8), последовательно находим:

$$p_1=P(X=1)=\frac{a}{1!}e^{-a}=ap_0\approx 0{,}3481;$$

$$p_2=P(X=2)=\frac{a^2}{2!}e^{-a}=\frac{a}{2}p_1\approx 0{,}2385;$$

$$p_3 = P(X = 3) = \frac{a}{3} p_2 \approx 0{,}1089.$$

Пример 17. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99 % случаев. Какова вероятность того, что из 1000 вакцинированных детей заболеет соответственно 1, 2, 3, 4 ребенка?

Решение. Вероятность заболеть $p = 0{,}0001$, число испытаний $n = 10\,000$, поэтому $a = np = 1$. По формуле (3.3.1) находим

$$P(1) = \frac{1}{1!} e^{-1} = 0{,}3679.$$

В соответствии с формулой (3.3.8) получаем:

$$P(2) = \frac{1^2}{2!} e^{-1} = \frac{1}{2} P(1) = 0{,}1839, \quad P(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{3} P(2) = 0{,}0613,$$

$$P(4) = \frac{e^{-1}}{4!} = \frac{1}{4} P(3) = 0{,}0153.$$

Задачи

1. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью $p = 0{,}0015$. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях событие A появится 3 раза?

2. Независимые случайные величины X и Y распределены по закону Пуассона: величина X - с параметром $a = 4$, величина Y - с параметром $b = 3$. Найдите закон распределения их суммы.

3. Известно, что в принятой для сборки партии из 1000 деталей имеются 4 дефектных. Найдите вероятность того, что среди 50 наугад взятых деталей нет дефектных.

4. Завод отправил на базу 5000 качественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна 0,0002. Найдите вероятность того, что среди 5000 изделий в пути будет повреждено: а) ровно 3 изделия; б) ровно одно изделие; в) не более 3 изделий; г) более 3 изделий.

5. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найдите вероятность того, что магазин получит: а) хотя бы одну; б) менее 2; в) ровно 2; г) более 2 разбитых бутылок.

6. Независимые случайные величины X, Y, Z распределены по закону Пуассона соответственно с параметрами $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Найдите закон распределения их суммы.

7. Независимые случайные величины X, Y, Z распределены по закону Пуассона, причем $M(X) = a$, $M(Y) = b$, $M(Z) = c$. Найдите закон распределения их суммы и $M(X+Y+Z)$.

8. Независимые случайные величины X_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ распределены по закону Пуассона, причем $M(X_k) = a_k$. Запишите закон распределения их суммы.

Ответы

1. 0,2242. **2.** $7^k e^{-7}/k!$ **3.** 0,8187. **4.** а) 0,06313; б) 0,367879; в) 0,981011; г) 0,018989. **5.** а) 0,95; б) 0,1992; в) 0,224; г) 0,577. **6.** $\dfrac{6^k e^{-6}}{k!}$.

7. $\dfrac{(a+b+c)^k e^{-(a+b+c)}}{k!}$. **8.** $\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\right)^m e^{-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k}}{m!}$.

Вопросы

1. Почему закон распределения Пуассона называют законом редких событий?
2. При каких условиях можно применять закон распределения Пуассона?
3. Запишите формулу Пуассона и объясните смысл каждого символа.
4. Что является случайной величиной в законе Пуассона?
5. Каковы общие условия, необходимые для применимости закона распределения Пуассона и закона биномиального распределения?
6. Как связаны между собой биномиальное распределение и распределение Пуассона?
7. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона?
8. Какая из величин в законе Пуассона больше: математическое ожидание или число независимых испытаний?
9. Исследуется распределение Пуассона. Что вероятнее: событие A появится ровно один раз или ни разу?

§ 3.4. Равномерное распределение

Распределение вероятностей случайной величины X называется *равномерным на отрезке* $[\alpha, \beta]$, если плотность вероятностей этой величины постоянна на данном отрезке и равна нулю вне этого отрезка:

$$p(x) = \begin{cases} c & \text{при } \alpha \le x \le \beta, \\ 0 & \text{при } x < \alpha \text{ или } x > \beta. \end{cases} \qquad (3.4.1)$$

С равномерным распределением встречаются всякий раз, когда по условиям опыта величина X принимает значения в конечном промежутке $[\alpha, \beta]$. Все значения из этого промежутка возможны в *одинаковой степени*, причем ни одно из значений не имеет преимуществ перед другими. Вот примеры такого рода: 1) X - время ожидания на стоянке автобуса (величина X равномерно распределена на отрезке $[0, l]$, где l - интервал движения между автобусами); 2) X - ошибка при взвешивании случайно выбранного предмета, получающаяся от округления результата взвешивания до ближайшего целого числа (величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-0,5; 0,5]$, где за единицу принята цена деления шкалы).

Двумерная случайная величина (X, Y) называется *равномерно распределенной в области* G, если плотность распределения этой величины постоянна в данной области и равна нулю вне ее:

$$p(x,y) = \begin{cases} C & \text{при } (x,y) \in G, \\ 0 & \text{при } (x,y) \notin G. \end{cases} \quad (3.4.2)$$

Пример 1. Найти значение c в формуле (3.4.1), определяющей равномерное распределение.

Решение. Поскольку для плотности распределения $p(x)$ должно выполняться условие (2.3.6), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} c dx = 1, \quad \int_{\alpha}^{\beta} c dx = cx\Big|_{\alpha}^{\beta} = c(\beta - \alpha) = 1, \quad c = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Следовательно, формула (3.4.1) принимает вид

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{при} \quad \alpha \le x \le \beta, \\ 0 & \text{при} \quad x < \alpha \text{ или } x > \beta. \end{cases} \quad (3.4.3)$$

Пример 2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[\alpha, \beta]$. Найти вероятность попадания ее значений в интервал (γ, δ), принадлежащий отрезку $[\alpha, \beta]$.

Решение. Пользуясь формулой (2.3.3), находим

$$P(\gamma < X < \delta) = \int_{\gamma}^{\delta} p(x)dx = \int_{\gamma}^{\delta} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\gamma}^{\delta} dx = \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha},$$

$$P(\gamma < X < \delta) = \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}. \quad (3.4.4)$$

Поскольку $\delta-\gamma$ - длина интервала (γ, δ), и $\beta-\alpha$ - длина отрезка $[\alpha, \beta]$, то формула (3.4.4) выражает вероятность попадания в интервал (γ, δ) точки, брошенной в отрезок $[\alpha, \beta]$, т.е. геометрическое определение вероятности (см. формулу (1.5.3)).

З а м е ч а н и е 1. Выражение "выберем наудачу точку x на отрезке $[\alpha, \beta]$" означает, что координата точки x представляет случайную величину с равномерным распределением вероятностей на этом отрезке.

П р и м е р 3. Найти значение C в формуле (3.4.2), определяющей равномерное распределение двумерной случайной величины (X, Y) в области G.

Р е ш е н и е. Вероятность попадания точки (X, Y) в любую область g, лежащую внутри области G, пропорциональна площади S_g области g:

$$P((X,Y)\in g)=C\cdot S_g.$$

Поскольку попадание в область G - достоверное событие, то

$$P((X,Y)\in G)=C\cdot S_G=1,$$

откуда $C=1/S_G$. Подставляя это значение в первую формулу, получаем

$$P((X,Y)\in g)=\frac{S_g}{S_G}. \qquad (3.4.5)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (1.5.1), заключаем, что получено геометрическое определение вероятности.

З а м е ч а н и е 2. Двумерная случайная величина (X, Y), где X, Y - координаты точки, наугад брошенной в область G, является равномерно распределенной в этой области.

П р и м е р 4. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, имеющей равномерное распределение.

Р е ш е н и е. Принимая во внимание формулу (2.3.2) и формулу (3.4.3) получаем: при $x\le\alpha$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=0;$$

при $\alpha<x<\beta$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{\alpha}p(x)dx+\int_{\alpha}^{x}p(t)dt=\int_{\alpha}^{x}\frac{dt}{\beta-\alpha}=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha};$$

при $x\ge\beta$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)dt=\int_{-\infty}^{\alpha}p(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}p(x)dx+\int_{\beta}^{x}p(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\beta-\alpha}=1.$$

Итак, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le\alpha,\\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{при} \quad \alpha<x<\beta,\\ 1 & \text{при} \quad x\ge\beta.\end{cases} \tag{3.4.6}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 3.2.

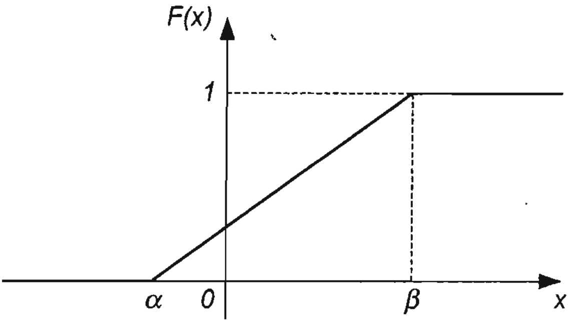


Рис. 3.2

Пример 5. Найти математическое ожидание случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Решение. Пользуясь формулой (2.4.8) и принимая во внимание формулу (3.4.3), находим

$$M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)=\int_{-\infty}^{\alpha}xp(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}xp(x)dx+\int_{\beta}^{+\infty}xp(x)dx=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{xdx}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{\alpha}^{\beta}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\beta+\alpha}{2},$$

$$M(X)=\frac{\beta+\alpha}{2}. \tag{3.4.7}$$

Следовательно, математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке, есть середина этого отрезка.

Пример 6. Найти дисперсию случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Решение. Пользуясь формулой (2.5.15) и принимая во внимание формулы (3.4.3) и (3.4.7), находим

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2p(x)dx=\int_{-\infty}^{\alpha}(x-a)^2p(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}(x-a)^2p(x)dx+$$

$$+\int_{\beta}^{+\infty}(x-a)^2p(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(x-a)^2}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{(x-a)^3}{3}\Bigg|_{\alpha}^{\beta}=$$

$$=\frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3}{3(\beta-\alpha)}\Bigg|_{\alpha}^{\beta}=\frac{\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3-\left(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3}{3(\beta-\alpha)}=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Итак,

$$D(X)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}. \qquad (3.4.8)$$

Пример 7. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [2, 7]. Записать плотность распределения $p(x)$ этой случайной величины.

Решение. Плотность распределения $p(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$, определяется формулой (3.4.3). В данном случае $\alpha = 2$, $\beta = 7$, $\beta - \alpha = 5$; следовательно,

$$p(x)=\begin{cases}1/5 & \text{при} \quad 2\le x\le 7;\\ 0 & \text{при} \quad x<2 \text{ или } x>7.\end{cases}$$

Пример 8. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-3, 2]$. Найти функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

Решение. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$, определяется формулой (3.4.6). Из условия задачи следует, что $\alpha = -3$, $\beta = 2$, $\beta - \alpha = 2-(-3) = 5$; значит,

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le -3,\\ \dfrac{x+3}{5} & \text{при} \quad -3<x<2,\\ 1 & \text{при} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

Пример 9. Найти математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [2, 8].

Решение. Математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$, определяется формулой (3.4.7). Поскольку в данном случае $\alpha = 2$, $\beta = 8$, то

$$M(X) = \frac{8+2}{2} = 5.$$

Пример 10. Найти дисперсию случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [4, 6].

Решение. Дисперсия случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$, вычисляется по формуле (3.4.8). Так как в данном случае $\alpha = 4$, $\beta = 6$, то

$$D(X) = \frac{(6-4)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3}, \quad D(X) = \frac{1}{3}.$$

Задачи

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [3, 8]. Запишите плотность распределения $p(x)$ этой случайной величины.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [– 4, 1]. Найдите функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

3. Найдите математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [– 3, 3].

4. Найдите дисперсию случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [7, 10].

5. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке [– 2, 7].

Ответы

1. $p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 3, \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 3 \le x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 8. \end{cases}$ **2.** $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -4, \\ 0{,}2(x+4) & \text{при} \quad -4 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

3. 0. **4.** 0,75. **5.** $3\sqrt{3}/2$.

Вопросы

1. Какое распределение вероятностей называют равномерным на отрезке $[\alpha, \beta]$?

2. Как записать плотность распределения $p(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$?

3. Какой вид имеет функция распределения $F(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$?

4. Чему равно математическое ожидание случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$?

5. Чему равна дисперсия случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$?

6. Чему равно среднее квадратическое отклонение случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha, \beta]$?

7. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[\alpha, \beta]$. Как найти вероятность попадания ее значений в интервал (γ, δ), принадлежащий данному отрезку?

8. Какое распределение двумерной случайной величины (X, Y) называется равномерным в данной области?

§ 3.5. Нормальное распределение

Нормальным распределением, или *распределением Гаусса*, называется распределение с плотностью вероятностей

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma > 0). \tag{3.5.1}$$

Постоянные a и σ $(\sigma > 0)$ называются *параметрами нормального распределения.*

О случайной величине X, плотность распределения которой определяется функцией (3.5.1) говорят, что она распределена нормально с параметрами a и σ, и кратко называют ее *нормальной*. График функции (3.5.1) называют *нормальной кривой*. На рис. 3.3 изображена нормальная кривая при $a = 3$ и $\sigma = 1$.

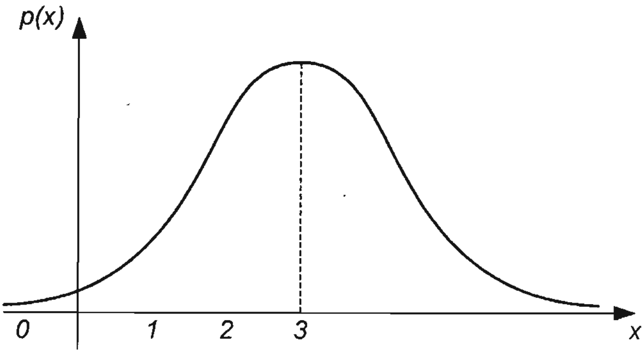


Рис. 3.3

Вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в интервал (α, β) определяется формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (3.5.2)$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \qquad (3.5.3)$$

С помощью функции Лапласа определяется и вероятность отклонения нормальной случайной величины, или вероятность неравенства $|X - a| < \delta$, где a - математическое отклонение нормально распределенной величины X:

$$P(|X - a| < \sigma) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \qquad (3.5.4)$$

или

$$P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t), \qquad (3.5.5)$$

где

$$\frac{\delta}{\sigma} = t, \quad \delta = \sigma t. \qquad (3.5.6)$$

Если $t = 3$, т.е. $\sigma t = 3\sigma$ то $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}49865 =$ $= 0{,}9973$,

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 0{,}9973. \qquad (3.5.7)$$

Замечание 1. Значение $\Phi(3)$ найдено с помощью таблицы значений функции Лапласа.

Последнее равенство означает, что событие, состоящее в осуществлении неравенства $|X - a| < 3\sigma$, имеет вероятность, близкую к единице, т.е. является почти достоверным.

Формула (3.5.7) выражает *правило трех сигм*: если случайная величина распределена по нормальному закону, то модуль ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

Независимые нормальные случайные величины имеют сумму, также распределенную по нормальному закону.

Замечание 2. В случае $a = 0$, $\sigma = 1$ функция (3.5.1) принимает вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{3.5.8}$$

Распределение вероятностей непрерывной случайной величины, определяемое функцией (3.5.8), называется *нормированным* или *стандартным*. График функции (3.5.8) называется *нормированной кривой*. На рис. 3.4 изображена нормированная кривая.

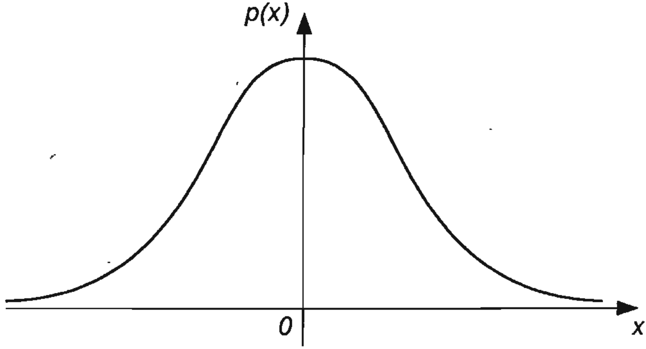


Рис. 3.4

Пример 1. Доказать, что функция (3.5.1), определяющая плотность нормального распределения, удовлетворяет условию (2.3.6), т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$$

Решение. В интеграле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx$$

перейдем к новой переменной t по формуле

$$t = \frac{x-a}{\sigma}. \tag{3.5.9}$$

Тогда $x = a + \sigma t, dx = \sigma dt$. Поскольку новые пределы интегрирования равны старым, то

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = 1.$$

Здесь принято во внимание, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}. \qquad (3.5.10)$$

Итак,

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx = 1\,.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины X, распределенной по нормальному закону.
Решение. В соответствии с формулой (2.4.8) получаем

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx.$$

Введем новую переменную t по формуле (3.5.9) и преобразуем этот интеграл:

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+\sigma t)e^{-t^2/2}\sigma dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2/2}dt.$$

Первый из полученных интегралов равен $\sqrt{2\pi}$ (см. формулу (3.5.10)), второй равен нулю:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2/2}dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\left(e^{-t^2/2}\right) = -e^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0\,.$$

Следовательно,

$$M(X) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} + 0 = a,$$

$$M(X) = a\,. \qquad (3.5.11)$$

Таким образом, параметр a входящий в функцию (3.5.1), является математическим ожиданием нормальной случайной величины.

Пример 3. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение нормальной случайной величины.

Решение. Учитывая формулы (2.5.15) и (3.5.11) получаем

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 p(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx.$$

Переходя к новой переменной t по формуле (3.5.9), получаем

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\sigma^2 e^{-t^2/2}\sigma dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2 e^{-t^2/2}dt.$$

Применяем метод интегрирования по частям. Положим $t=u$, $te^{-t^2/2}dt=dv$, тогда $du=dt$, $v=-e^{-t^2/2}$, (ибо $dv=d\left(-e^{-t^2/2}\right)$). Поэтому

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot te^{-t^2/2}dt=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}td\left(e^{-t^2/2}\right)=$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(te^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt\right)=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}te^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt=$$

$$=0+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=\sigma^2.$$

(Здесь также принято во внимание равенство (3.5.10)).

Итак,

$$D(X)=\sigma^2, \tag{3.5.12}$$

$$\sigma=\sqrt{D(X)} \tag{3.5.13}$$

Следовательно, параметр σ, входящий в функцию (3.5.1) является средним квадратическим отклонением нормальной случайной величины.

Пример 4. Доказать, что функция Лапласа является нечетной.

Решение. Действительно,

$$\Phi(-x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-x}e^{-t^2/2}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-u^2/2}du=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x}e^{-t^2/2}dt=-\Phi(x).$$

Здесь с помощью замены переменной по формуле $u=-t$ от первого интеграла перешли ко второму; во втором интеграле переменную интегрирования обозначили буквой t и получили третий интеграл.

Таким образом,

$$\Phi(-x) = -\Phi(x),$$

т.е. функция Лапласа является нечетной.

Пример 5. Доказать, что для функции Лапласа выполняется равенство

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \frac{1}{2}. \qquad (3.5.14)$$

Решение. Принимая во внимание определение несобственного интеграла и формулу (3.5.3), получаем

$$\lim_{x \to +\infty} \Phi(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Здесь использовано равенство

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

которое получается из равенства (3.5.10). Поскольку $e^{-t^2/2}$ - четная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt, \quad \text{но} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Пример 6. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, распределенной по нормальному закону.

Решение. В соответствии с формулой (2.3.2) и определением нормального распределения (3.5.1) получаем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2} dt.$$

Переходим к новой переменной $u = \dfrac{t-a}{\sigma}$, тогда $t = a + u\sigma$, $dt = \sigma du$.

Поэтому

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-u^2/2} \sigma du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2} du +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-u^2/2}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-u^2/2}du=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \qquad (3.5.15)$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, определяемая формулой (3.5.3).

Замечание. Здесь принято во внимание, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2}du=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

Это равенство следует из равенства (3.5.10). Действительно, $e^{-u^2/2}$ - четная функция, поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du=2\int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2}du, \text{ но } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}du=\sqrt{2\pi}.$$

Пример 7. Вычислить центральные моменты случайной величины, распределенной по нормальному закону.

Решение. В соответствии с определением (см. формулу (2.6.7)) и формулой (3.5.1) получаем

$$\mu_k=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^k e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx.$$

Переходим к новой переменной t по формуле $t=\dfrac{x-a}{\sigma}$, тогда $x=a+\sigma t$, $dx=\sigma dt$, и

$$\mu_k=\frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^k e^{-t^2/2}dt.$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда k - нечетное число и k - четное число. Пусть $k=2l+1$ - нечетное число, тогда

$$\mu_{2l+1}=\frac{\sigma^{2l+1}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^{2l+1}e^{-t^2/2}dt=\frac{\sigma^{2l+1}}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}t^{2l+1}e^{-t^2/2}dt+\int_{0}^{+\infty}t^{2l+1}e^{-t^2/2}dt\right).$$

Замена переменной $z=t^2$ в обоих интегралах приводит к равенству

$$\mu_{2l+1}=\frac{\sigma^{2l+1}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{0}z^{l}e^{-z/2}dz+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}z^{l}e^{-z/2}dz\right]=$$

$$=\frac{\sigma^{2l+1}}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}z^{l}e^{-z/2}dz+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}z^{l}e^{-z/2}dz\right]=0.$$

Итак, все центральные моменты нечетных порядков случайной величины, распределенной по нормальному закону, равны нулю.
Если $k = 2l$ - четное число, то

$$\mu_{2l}=\frac{\sigma^{2l}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^{2l}e^{-t^2/2}dt=\frac{2\sigma^{2l}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}t^{2l}e^{-t^2/2}dt,$$

поскольку в этом случае подынтегральная функция четная.

Применяя метод интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_{0}^{+\infty}t^{2l}e^{-t^2/2}dt=(2l-1)\int\limits_{0}^{+\infty}t^{2l-2}e^{-t^2/2}dt.$$

С помощью этой формулы последовательно находим:

$$\mu_{2l}=\frac{2\sigma^{2l}}{\sqrt{2\pi}}(2l-1)\int\limits_{0}^{+\infty}t^{2l-2}e^{-t^2/2}dt=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^{2l}(2l-1)(2l-3)\cdot\int\limits_{0}^{+\infty}e^{2l-4}e^{-t^2/2}dt=\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^{2l}(2l-1)(2l-3)\ldots3\cdot1\cdot\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt=$$

$$=\sigma^{2l}(2l-1)(2l-3)\ldots3\cdot1\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=1\cdot3\ldots(2l-1)\sigma^{2l},$$

т.е.

$$\mu_{2l}=1\cdot3\ldots(2l-1)\sigma^{2l}.$$

В частности, центральный момент четвертого порядка случайной величины, распределенной по нормальному закону, $\mu_4=1\cdot3\cdot\sigma^4=3\sigma^4$.

Пример 8. Определить закон распределения случайной величины X, если ее плотность распределения вероятностей задана функцией:

$$1)\quad p(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/50};\qquad 2)\quad p(x)=\frac{1}{\sqrt{18\pi}}e^{-(x+2)^2/18}.$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения случайной величины X.

Решение. Поскольку в первом случае

$$p(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/2\cdot5^2},$$

то сравнив эту функцию с функцией (3.5.1), заключаем, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 1$ и $\sigma = 5$.

В соответствии с формулами (3.5.11) и (3.5.13) находим, что

$$M(X)=1,\quad \sigma(x)=5,\quad D(X)=25.$$

Согласно формуле (3.5.15) определяем, что

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-1}{5}\right).$$

Во втором случае преобразуя функцию $p(x)$ к виду

$$p(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-(x+2)^2/2\cdot3^2}$$

и сравнивая с формулой (3.5.1), заключаем, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = -2$ и $\sigma = 3$, причем

$$M(X)=-2,\quad \sigma(x)=3,\quad F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x+2}{3}\right).$$

Пример 9. Записать плотность распределения вероятностей и функцию распределения нормальной случайной величины X, если $M(X)=3,\quad D(X)=4.$

Решение. Из условия следует, что $a=M(X)=3, \sigma(x)=\sqrt{D(X)}=$ $=2$. Подставляя эти значения в формулу (3.5.1), находим плотность распределения данной случайной величины X:

$$p(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-3)^2/2\cdot2^2}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-3)^2/8}.$$

Согласно формуле (3.5.15) записываем функцию распределения этой случайной величины X.

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

Пример 10. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$, $D(X)=4$. Найти:

$$1)P(12<X<14);2)P(8<X<12).$$

Решение. Из условия следует, что $a=10$, $\sigma(x)=\sqrt{D(X)}=2$. В соответствии с формулой (3.5.2) находим:

$$P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(1)=$$

$$=0{,}477250-0{,}341345=0{,}135905;$$

$$P(8<X<12)=\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{8-10}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)=$$

$$=2\cdot 0{,}341345=0{,}682690.$$

Замечание. Здесь использованы соответствующие значения функции Лапласа (см. приложение) и нечетность этой функции.

Пример 11. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$. Найти $P(0<X<10)$, если известно $P(10<X<20)=0{,}3$.

Решение. При нахождении искомой вероятности будем пользоваться формулой (3.5.2), условием $a=10$, нечетностью функции Лапласа.

По условию $P(10<X<20)=0{,}3$, поэтому

$$P(10<X<20)=\Phi\left(\frac{20-10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-\Phi(0)=$$

$$=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-0=0{,}3,\quad \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)=0{,}3.$$

Так как

$$P(0<X<10)=\Phi\left(\frac{10-10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{0-10}{\sigma}\right)=$$

$$= \Phi(0) - \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right), \quad \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0{,}3,$$

то

$$P(0 < X < 10) = 0{,}3.$$

Пример 12. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a = 375$ г., $\sigma = 25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет: а) от 300 до 425 г; б) не более 450 г; в) больше 300 г.

Решение. Пользуемся формулой (3.5.2), полагая в ней $a = 375$ г, $\sigma = 25$ г.

В первом случае $\alpha = 300$, $\beta = 425$, поэтому

$$P(300 < X < 425) = \Phi\left(\frac{425-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300-375}{25}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-3) = \Phi(2) + \Phi(3) = 0{,}477250 + 0{,}498650 = 0{,}9759.$$

Во втором случае ($X < 450$) находим

$$P(X < 450) = P(0 < X < 450) = \Phi\left(\frac{450-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{0-375}{25}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-15) = \Phi(3) + \Phi(15) = 0{,}49865 + 0{,}5 = 0{,}9987.$$

Во третьем случае ($X > 300$) получаем

$$P(X > 300) = P(300 < X < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\alpha - 375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300-375}{25}\right) =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(-3) = \Phi(+\infty) + \Phi(3) = 0{,}5 + 0{,}49865 = 0{,}9987.$$

Пример 13. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметром $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей 15 мм.

Решение. Будем пользоваться формулой (3.5.4) и таблицей значений функции Лапласа. В данном случае $\delta = 15$, $\sigma = 10$, поэтому

$$P(|X - a| < 15) = 2\Phi\left(\frac{15}{10}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}433193 = 0{,}866386.$$

Пример 14. Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по модулю не превышает 0,77 мм. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100, если случайная величина X распределена нормально с параметром $\sigma = 0{,}4$ мм?

Решение. Найдем вначале вероятность отклонения по формуле (3.5.4) при $\delta = 0{,}77$ и $\sigma = 0{,}4$:

$$P(|X-a|<0{,}77) = 2\Phi\left(\frac{0{,}77}{0{,}4}\right) \approx 2\Phi(1{,}93) = 2\cdot 0{,}473197 = 0{,}946394.$$

Считая приближенно $p = 0{,}95$ и $q = 0{,}05$, в соответствии с формулой (3.1.5), т.е. $np - q \le k_0 \le np + p$, находим при $n = 100$:

$$100\cdot 0{,}95 - 0{,}05 \le k_0 \le 100\cdot 0{,}95 + 0{,}95,$$

откуда $k_0 = 95$.

Пример 15. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметры X. Считая, что случайная величина X распределена нормально, с параметрами $a = 10$ мм, $\sigma = 0{,}1$ мм, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Решение. Воспользуемся формулой (3.5.4). В данном случае известно $a = 10$, $\sigma = 0{,}1$, $2\Phi\left(\delta/\sigma\right) = 0{,}9973$; требуется определить δ и интервал $(a - \delta, a + \delta)$.

По таблице значений функции Лапласа находим, что $\delta/\sigma = 3$. Это вытекает из равенства $\Phi\left(\delta/\sigma\right) = 0{,}9973/2 = 0{,}4987$. Следовательно, $\delta = 3\sigma = 3\cdot 0{,}1 = 0{,}3$, Из неравенства $|X - 10| < 0{,}3$ получаем $-0{,}3 < X - 10 < 0{,}3$; $10 - 0{,}3 < X < 10 + 0{,}3$, $9{,}7 < X < 10{,}3$. Значит, искомым является интервал (9,7; 10,3).

Пример 16. Найти $P(|X - a| < \sigma)$ для случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами a и σ.

Решение. В соответствии с формулой (3.5.4) при $\delta = \sigma$ находим

$$P(|X-a|<\sigma) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(1) = 2\cdot 0{,}341345 = 0{,}682690.$$

Пример 17. Независимые случайные величины X и Y распределены нормально, причем $M(X) = 2$, $D(X) = 4$, $M(Y) = -3$, $D(Y) = 5$. Записать плотность вероятностей и функцию распределения их суммы.

Решение. Сумма нормальных случайных величин имеет также нормальное распределение. Найдем параметры этого распределения.

Поскольку случайные величины X и Y независимы, то $M(X+Y) = M(X) + M(Y) = 2 + (-3) = -1$, $D(X+Y) = D(X) + D(Y) = 4 + 5 = 9$.

Следовательно, $a = -1$, $\sigma(X+Y) = \sqrt{D(X+Y)} = \sqrt{9} = 3$, $\sigma = 3$ – параметры нормально распределенной суммы. Таким образом, функции (3.5.1) и (3.5.15) имеют вид

$$p(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-(x+1)^2/18}, \quad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x+1}{3}\right).$$

Пример 18. Независимые случайные величины X, Y, Z распределены нормально, причем $M(X) = 1$, $D(X) = 2$; $M(Y) = -2$, $D(Y) = 3$; $M(Z) = 5$, $D(Z) = 4$. Записать плотность вероятностей и функцию распределения их суммы.

Решение. Так как $M(X+Y+Z) = M(X) + M(Y) + M(Z) = 1 + (-2) + 5 = 4$, $D(X+Y+Z) = D(X) + D(Y) + D(Z) = 2 + 3 + 4 = 9$, то сумма $X + Y + Z$ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 4$, $\sigma = 3$. Значит

$$p(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-4)^2/18}, \quad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-4}{3}\right).$$

Пример 19. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 4, примет значения: 1) в интервале (– 1, 5); 2) не более 8; 3) не менее 5; 4) в интервале (– 3, 9).

Решение. Воспользуемся формулой (3.5.2).

1) По условию $\alpha = -1$, $\beta = 5$, $a = 3$, $\sigma = \sqrt{4} = 2$, поэтому

$$P(-1 < X < 5) = \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-3}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) =$$

$$= 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185;$$

2) $$P(X \le 8) = P(-\infty < x \le 8) = \Phi\left(\frac{8-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-3}{2}\right) = \Phi(2{,}5) + \Phi(+\infty) =$$

$$= 0{,}4938 + 0{,}5 = 0{,}9938;$$

3) $P(X \geq 5) = P(5 \leq X < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty - 3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi(1) =$

$$= 0{,}5 - 0{,}3643 = 0{,}1587;$$

4) $P(-3 < X < 9) = \Phi\left(\frac{9-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-3-3}{2}\right) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) =$

$$= 2 \cdot 0{,}4986 = 0{,}9972,$$

$$P(-3 < X < 9) = 0{,}9972.$$

Таким образом, принятие случайной величиной X значений в интервале (– 3, 9) практически достоверно.

Пример 20. Диаметр изготавливаемой в цехе детали является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами $a = 4{,}5$ см и $\sigma = 0{,}05$ см. Найти вероятность того, что размер диаметра взятой наугад детали отличается от математического ожидания не более чем на 1 мм.

Решение. Применяя формулу (3.5.4) при $\delta = 0{,}1$ см, получаем искомую вероятность.

$$P(|X - 4{,}5| \leq 0{,}1) = 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{0{,}05}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Пример 21. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и дисперсия этой величины соответственно равны 7 и 16. Найти вероятность того, что отклонение величины X от ее математического ожидания по модулю не превзойдет двух.

Решение. По условию $M(X) = 7$, $D(X) = 16$, $\sigma = \sqrt{16} = 4$, $\delta = 2$.

В соответствии с формулой (3.5.4) находим

$$P(|X - 7| \leq 2) = 2\Phi\left(\frac{2}{4}\right) = 2 \cdot \Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}3830.$$

Пример 22. Среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по нормальному закону, равно 2 см, а математическое ожидание равно 16 см. Найти границы, в которых с вероятностью 0,95 следует ожидать значение случайной величины.

Решение. В соответствии с формулой (3.5.4) при $\sigma = 2$ имеем $2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 0{,}95$ или $\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 0{,}475$. По таблице значений функции Лапласа находим, что $\delta/2 = 1{,}96$. Следовательно, $\delta/2 = 1{,}96$, откуда $\delta = 3{,}92$.

Таким образом, с вероятностью 0,95 можно ожидать, что отклонение случайной величины от математического ожидания не превзойдет по модулю 3,92 см, т.е. $|X-16| \le 3{,}92$, откуда $12{,}08 \le X \le 19{,}92$. Следовательно, все значения нормальной случайной величины будут находиться в интервале (12,08; 19,92).

Пример 23. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание $a = 0$ и среднее квадратическое отклонение этой величины $\sigma = 0{,}5$. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины X по модулю будет меньше единицы.

Решение. Воспользуемся формулой (3.5.4), которая при $a = 0$ принимает вид

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Поскольку по условию $a = 0$, $\sigma = 0{,}5$, $\delta = 1$, то

$$P(|X| < 1) = 2\Phi\left(\frac{1}{0{,}5}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Пример 24. При изготовлении некоторого изделия его вес X подвержен случайным колебаниям. Стандартный вес изделия равен 30 г, его среднее квадратическое отклонение равно 0,7, а случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что вес наугад выбранного изделия находится в пределах от 28 до 31 г.

Решение. Воспользуемся формулой (3.5.2). В данном случае $a = 30$, $\sigma = 0{,}7$, $\alpha = 28$, $\beta = 31$. В соответствии с указанной формулой находим

$$P(28 < X < 31) = \Phi\left(\frac{31-30}{0{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{28-30}{0{,}7}\right) = \Phi(1{,}43) - \Phi(-2{,}86) =$$

$$= \Phi(1{,}43) + \Phi(2{,}86) = 0{,}424 + 0{,}498 = 0{,}922.$$

Пример 25. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 30$ и $\sigma = 10$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50).

Решение. По формуле (3.5.2), полагая в ней $a = 30$, $\sigma = 10$, $\alpha = 10$, $\beta = 50$, находим искомую вероятность

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) =$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Пример 26. Линия связи обслуживает 1000 абонентов. Каждый абонент разговаривает в среднем 6 минут в час. Сколько каналов должны иметь линия связи, чтобы с практической достоверностью можно было утверждать, что не произойдет ни одной потери вызова?

Решение. Вероятность вызова для каждого абонента

$$p = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0{,}1, \quad q = 1 - p = 0{,}9,$$

поэтому

$$a = np = 1000 \cdot 0{,}1 = 100, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx 9{,}5.$$

Согласно правилу трех сигм (см. формулу (3.5.7)) практически достоверно, что

$$|X - a| < 3\sigma,$$

откуда $|X - 100| < 3 \cdot 9{,}5.$

Таким образом, для практически безотказной работы линии связи (при указанных условиях) достаточно иметь 130 каналов.

Задачи

1. Определите закон распределения, найдите $M(X)$, $D(X)$ и функцию распределения для случайной величины X, если ее плотность вероятностей задана функцией

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{32\pi}} e^{-(x-3)^2/32}.$$

2. Запишите функцию распределения и плотность вероятностей для нормально распределенной случайной величины X, если $M(X) = 5$, $D(X) = 4$.

3. При взвешивании получается ошибка, подчиненная нормальному закону с параметром $\sigma = 20$ г. Найдите вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей 30 г.

4. Случайная величина X распределена нормально. Найдите $P(35<X<40)$, если $M(X) = 25$ и $P(10<X<15) = 0{,}2$.

5. Найдите $P(|X - a| < 2\sigma)$ для случайной величины X, распределенной по нормальному закону.

6. Независимые случайные величины X и Y имеют нормальное распределение, причем $M(X) = -2$, $D(X) = 3$, $M(X) = 7$, $D(X) = 6$. Запишите плотность распределения и функцию распределения их суммы.

7. Независимые случайные величины X, Y, Z распределены нормальны, причем $M(X)=3$, $D(X)=1$; $M(Y)=-5$, $D(Y)=2$; $M(Z)=8$, $D(Z)=1$. Запишите плотность вероятностей и функцию распределения их суммы.

8. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a=2$, $\sigma=3$. Найдите вероятность того, что эта величина примет значение из интервала $(-1,\ 8)$.

9. В результате проверки точности работы прибора установлено, что 80% ошибок не вышло за пределы ±20 мм, а остальные ошибки вышли за эти пределы. Определите среднее квадратическое отклонение ошибок прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не дает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону.

10. На станке изготовляются втулки. Длина l втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, имеет среднее значение $l_{\text{ср}}=20$ см и дисперсию $\sigma=0{,}04$ см^2. Найдите вероятность того, что длина втулки заключена между 19,7 и 20,3 см, т.е. уклонение в ту или в иную сторону не превзойдет 0,3 см. Какую длину изделия можно гарантировать с вероятностью $p=0{,}95$?

Ответы

1. Нормальный закон распределения с параметрами $a=3$, $\sigma=4$. **2.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-5)^2/8}$. **3.** 0,866. **4.** 0,2. **5.** 0,9545. **6.** Указание: $a=5$, $\sigma=3$. **7.** Указание: $a=6$, $\sigma=2$. **8.** 0,8185. **9.** 15,6. **10.** 0,87; 20 ± 4 см.

Вопросы

1. Какое распределение вероятностей случайной величины называют нормальным?

2. Каков вероятностный смысл параметров a и σ, входящих в функцию (3.5.1)?

3. Что называют нормальной величиной?

4. Что называют нормальной кривой?

5. Чему равно математическое ожидание нормальной случайной величины?

6. Чему равна дисперсия нормальной случайной величины?

7. Чему равно среднее квадратическое отклонение нормальной случайной величины?

8. Как определяется функция Лапласа?

9. Как вычислить вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в заданный интервал?

10. Как вычислить вероятность отклонения нормальной случайной величины от ее математического ожидания?

11. Сформулируйте правило трех сигм.
12. Что называют стандартным отклонением?
13. Что называют нормированной кривой?
14. Какой вид имеет нормированная кривая?

§ 3.6. Некоторые другие распределения

Геометрическим распределением называется распределение дискретной случайной величины X, определяемое формулой

$$P(X = m) = (1-p)^{m-1} p, \qquad 0 < p < 1 \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \qquad (3.6.1)$$

Это название связано с тем, что вероятности (3.6.1) образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1 - p$.

Показательным распределением называется распределение с плотностью вероятностей, определяемой функцией

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{при } \ x \geq 0 \, (\alpha > 0). \end{cases} \qquad (3.6.2)$$

График функции $p(x)$ изображен на рис. 3.5.

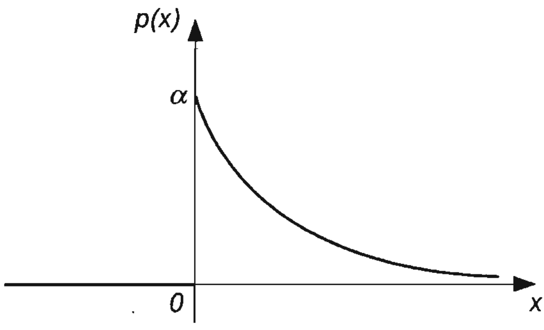


Рис. 3.5

Замечание. Показательный закон распределения вероятностей встречается во многих задачах, связанных с простейшим потоком событий. Под *потоком событий* понимают последовательность событий, наступающих одно за другим в случайные моменты. Например, поток вызовов на телефонной станции, поток заявок в системе массового обслуживания и др.

Гипергеометрическим распределением вероятностей случайной величины X называется распределение, определяемой формулой

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad (3.6.3)$$

где C_k^l - число сочетаний из k элементов по l:

$$C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}.$$

К гипергеометрическому распределению приводит, например, следующая задача. Пусть в партии из N изделий имеется M стандартных ($M < N$). Из партии наугад отбирают n изделий (каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью), причем отобранное изделие перед отбором следующего не возвращается в партию. Обозначим через X случайную величину - число m стандартных изделий среди n отобранных. Очевидно, возможные значения X таковы: 0, 1, 2, ..., $\min(M, n)$. Вероятность того, что $X = m$, т.е., среди n отобранных изделий ровно m стандартных, выражается формулой (3.6.3).

Гамма-распределением случайной величины X называется распределение с плотностью вероятностей

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \tag{3.6.4}$$

где $\Gamma(\lambda)$ - гамма-функция (или эйлеров интеграл второго рода), определяемая формулой

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\lambda-1} dx.$$

Гамма-распределение является обобщением показательного распределения.

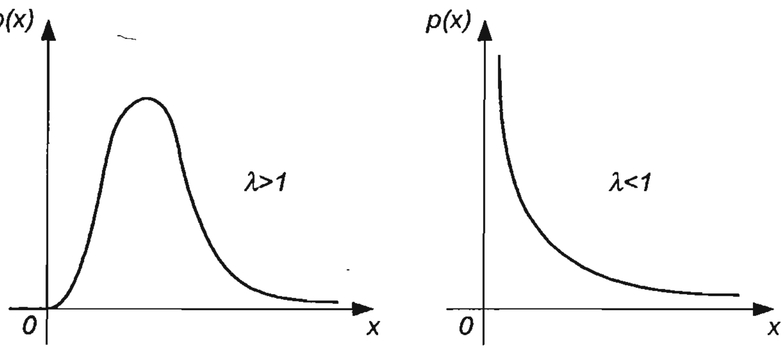


Рис. 3.6

На рис. 3.6 показан вид кривых распределения вероятностей при значениях параметра $\lambda > 1$, $\lambda < 1$ (при $\lambda = 1$ получаем показательное распределение, см. рис. 3.5). В случае $\lambda > 1$ кривая распределения имеет один максимум в точке $x = (\lambda - 1)/\alpha$ $(\lambda > 1)$. В случае $\lambda < 1$ плотность распределения убывает в интервале $(0, +\infty)$.

Пример 1. Доказать, что вероятности дискретной случайной величины X, определяемых формулой (3.6.1), удовлетворяют условию (2.1.4).

Решение. Запишем ряд, членами которого являются вероятности $p_m = P(X = m) = (1-p)^{m-1}p$, или $p_m = pq^{m-1}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = p + pq + pq^2 + pq^3 + \ldots$$

Этот ряд является геометрическим рядом с первым членом p и знаменателем q. Поскольку $|q| < 1$ $(0 < p < 1, 1 - p = q, 0 < q < 1)$, то геометрический ряд сходится и его сумма

$$S = \frac{a}{1-q},\ \ S = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Итак,

$$\sum_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = 1,$$

т.е. выполнено равенство (2.1.4).

Пример 2. Найти математическое ожидание случайной величины X, имеющей геометрическое распределение.

Решение. В соответствии с формулой (2.4.6) получаем

$$M(X) = \sum_{m=1}^{\infty} mP(X = m) = \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}p = p\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}.$$

Поскольку члены ряда $\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}$ являются производными соответствующих членов ряда $\sum_{m=0}^{\infty} q^m$ и

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + q^3 + \ \ldots\ = \frac{1}{1-q},$$

то

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} = 1+2q+3q^2+\ \dots\ = \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Следовательно,

$$M(X) = p\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} = p\cdot\frac{1}{(1-q)^2} = p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} \qquad (p=1-q),$$

$$M(X) = \frac{1}{p} \qquad (p>0). \tag{3.6.5}$$

Пример 3. Найти дисперсию случайной величины X, имеющей геометрическое распределение.

Решение. Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой (2.5.4) и формулами для сумм рядов:

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1} = \frac{1}{(1-q)^2},\ \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)q^{m-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Найдем сначала математическое ожидание квадрата величины X:

$$M(X^2) = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 q^{m-1} p = p\left(\sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)q^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}\right) =$$

$$= p\left(q\frac{2}{(1-q)^3} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = p\frac{2q+1-q}{(1-q)^3} = p\frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}.$$

Таким образом,

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2},$$

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2}. \tag{3.6.6}$$

Пример 4. Доказать, что функция (3.6.2) удовлетворяет условию (2.3.6), т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$

Решение. Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} p(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}dx =$$

$$= -\int_0^{+\infty} d\left(e^{-\alpha x}\right) = -e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} = -\left(e^{-\infty} - e^0\right) = 1.$$

Пример 5. Найти функцию распределения случайной величины, распределенной по показательному закону.

Решение. Воспользуемся формулой (2.3.2). При $x \le 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

Если $x > 0$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{0} p(t)dt + \int_{0}^{x} p(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt +$$

$$+ \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = -e^{-\alpha t}\Big|_0^x = -\left(e^{-\alpha x} - e^0\right) = 1 - e^{-\alpha x}.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{при } x \ge 0. \end{cases} \tag{3.6.7}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 3.7.

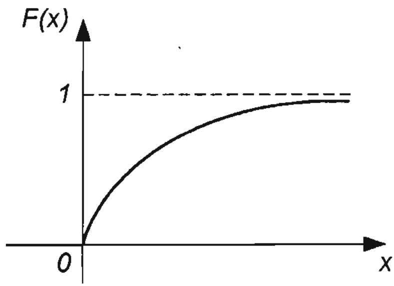


Рис. 3.7

Пример 6. Найти математическое ожидание случайной величины X, имеющей показательное распределение.

Решение. Воспользуемся формулой (2.4.8) и формулой (3.6.2):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xp(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot xdx + \int_{0}^{+\infty} x\alpha e^{-\alpha x}dx;$$

$$M(X) = \alpha \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям

$$\int_0^{+\infty} u dv = uv \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} v du,$$

полагая $u = x$, $dv = \alpha e^{-\alpha x} dx = -d\left(e^{-\alpha x}\right)$, находим

$$\alpha \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx = -\int_0^{+\infty} x d\left(e^{-\alpha x}\right) = -x e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx =$$

$$= 0 - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = \frac{1}{\alpha}. \quad M(X) = \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины, распределенной по показательному закону, равно обратной величине параметра α.

Пример 7. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, имеющей показательное распределение.

Решение. Дисперсию найдем по формуле (2.5.14)

$$D(x) = \int_0^{+\infty} x^2 p(x) dx - (M(x))^2.$$

Используя формулу (3.6.2) и результаты примера 6, выражение для дисперсии перепишем в виде:

$$D(x) = \int_0^{+\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx - 1/\alpha^2.$$

Дважды интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^{+\infty} x^2 \alpha e^{-\alpha x} dx = 2/\alpha^2.$$

Следовательно,

$$D(x) = \alpha \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx - 1/\alpha^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2};$$

$$D(x)=\frac{1}{\alpha^2}.$$

Чтобы найти среднее квадратическое отклонение, извлечем квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(X)}=\frac{1}{\alpha}.$$

Замечание. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой (см. пример 6).

Пример 8. Найти вероятность попадания в интервал (a, b) значений случайной величины X, распределенной по показательному закону.

Решение. Воспользуемся функцией распределения (3.6.7) и формулой (2.2.10):

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

Так как $F(x)=1-e^{-\alpha x}$ при $x>0$ и $F(x)=0$ при $x\le 0$, $F(b)=1-e^{-\alpha b}$, $F(a)=1-e^{-\alpha a}$, то

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\left(1-e^{-\alpha b}\right)-\left(1-e^{-\alpha a}\right),$$

$$P(a<X<b)=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b}. \tag{3.6.8}$$

Пример 9. Непрерывная величина X распределена по показательному закону: $p(x)=0$ при $x<0$; $p(x)=2e^{-2x}$ при $x\ge 0$. Найти вероятность попадания значений величины X в интервал $(0{,}1;\ 0{,}7)$.

Решение. Поскольку $\alpha=2$, то по формуле (3.6.8) получим

$$P(0{,}1<X<0{,}7)=e^{-2\cdot 0{,}1}-e^{-2\cdot 0{,}7}=e^{-0{,}2}-e^{-1{,}4}=0{,}8187-0{,}2466=0{,}5721.$$

Пример 10. Записать плотность распределения и функцию распределения показательного закона, если параметр $\alpha=7$.

Решение. Согласно формуле (3.6.2) записываем плотность распределения

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 7e^{-7x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

В соответствии с формулой (3.6.7) находим функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 1-e^{-7x} & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Пример 11. Найти математическое ожидание случайной величины

X, плотность распределения которой определяется функцией $p(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x}$ при $x \geq 0$.

Решение. Поскольку в данном случае $\alpha = 0{,}2$ и $M(X) = \dfrac{1}{\alpha}$, то

$$M(X) = \frac{1}{2/10} = \frac{10}{2} = 5, \qquad M(X) = 5.$$

Пример 12. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, плотность распределения которой задана функцией $p(x) = 5e^{-5x}$ $(x \geq 0)$.

Решение. Так как для показательного закона

$$D(X) = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\alpha}$$

и по условию $\alpha = 5$, то

$$D(X) = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04, \qquad \sigma(X) = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Пример 13. Производится подбрасывание игрального кубика до первого выпадения шести очков. Какова вероятность того, что первое выпадение шестерки произойдет при втором подбрасывании игрального кубика?

Решение. Воспользуемся формулой (3.6.1). Поскольку в данном случае $p = 1/6$ (вероятность появления шестерки при подбрасывании кубика) и $m = 2$, то

$$P(X = 2) = (1-p)^{2-1}p = \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}.$$

Пример 14. В партии из 12 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди 5 взятых наудачу деталей окажется 3 стандартных.

Решение. Применяем формулу (3.6.3). Так как в данном случае $N = 12$, $M = 8$, $n = 5$, $m = 3$, то

$$P(X = 3) = \frac{C_M^m \, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = \frac{C_8^3 \cdot C_4^2}{C_{12}^5} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{4!}{2!2!} : \frac{12!}{5!7!} =$$

$$= \frac{8!4!5!7!}{3!5!2!2!12!} = \frac{8!4!7!}{3!2!2!12!} = \frac{7!}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{14}{33}.$$

Задачи

1. В ящике 10 деталей, причем 7 стандартных. Какова вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей окажется 4 стандартных?

2. По какому закону распределена случайная величина X, если плотность вероятностей этой величины определена функцией $p(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$?

3. Найдите математическое ожидание случайной величины X с плотностью распределения $p(x) = 0{,}4e^{-0{,}4x}$ при $x \geq 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$.

4. Чему равна дисперсия случайной величины X с плотностью распределения $p(x) = 4e^{-4x}$ при $x \geq 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$?

5. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины X с плотностью распределения $p(x) = 0{,}5e^{-0{,}5x}$ при $x \geq 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$.

6. Найдите функцию распределения случайной величины X, если ее плотность определена функцией $p(x) = 2e^{-2x}$ при $x \geq 0$.

7. Случайная величина X распределена по показательному закону: $p(x) = 0$ при $x < 0$; $p(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$. Найдите вероятность попадания значений этой величины в интервал (0,1; 1).

8. Случайная величина X распределена по показательному закону: $p(x) = 0$ при $x < 0$, $p(x) = 6e^{-6x}$ при $x \geq 0$. Найдите математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и функцию распределения этой случайной величины. Найдите вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (0,2; 1,1).

9. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель $p = 0{,}7$. Какова вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле?

Ответы

1. 0,5. **2.** По показательному закону. **3.** 2,5. **4.** 1/16. **5.** 2. **6.** $1 - e^{-2x}$. **7.** 0,691.
8. $M(X) = \dfrac{1}{6}, D(X) = \dfrac{1}{36}$, $\sigma(X) = \dfrac{1}{6}, F(x) = 1 - e^{-6x}$, $P(0{,}2 < X < 1{,}1) = 0{,}512$.
9. 0,063.

Вопросы

1. Какое распределение дискретной случайной величины называется геометрическим?

2. Чему равно математическое ожидание случайной величины, имеющей геометрическое распределение?

3. Чему равна дисперсия геометрически распределенной случайной величины?

4. Чему равно среднее квадратическое отклонение геометрически распределенной случайной величины?

5. Как определяется гипергеометрическое распределение случайной величины?

6. Как определяется показательное распределение случайной величины?

7. Какой вид имеют функция распределения для показательного закона?

8. Каково соотношение между математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины, имеющей показательное распределение?

9. Чему равна дисперсия случайной величины, имеющей показательное распределение?

10. Как найти вероятность попадания в заданный интервал (a, b) значений случайной величины X, имеющей показательное распределение?

Глава 4.
Закон больших чисел. Предельные теоремы

§ 4.1. Неравенства Маркова и Чебышева

Если возможные значения дискретной случайной величины X неотрицательны и существует ее математическое ожидание $M(X) = a$, то для любого числа $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$P(X \le \delta) \ge 1 - \frac{a}{\delta}. \tag{4.1.1}$$

В этом случае выполняется и неравенство

$$P(X > \delta) < \frac{a}{\delta}. \tag{4.1.2}$$

Неравенства (4.1.1) и (4.1.2) называют *неравенствами Маркова.*

Если X – случайная величина, математическое ожидание которой $M(X) = a$, а дисперсия $D(X)$ конечна, то для любого числа $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства:

$$P(|X - a| > \varepsilon) < \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \tag{4.1.3}$$

$$P(|X-a|\le\varepsilon)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \qquad (4.1.4)$$

Неравенство (4.1.3) называют *первым неравенством Чебышева*, а неравенство (4.1.4) – *вторым неравенством Чебышева.*

Пример 1. Средний вес клубня картофеля равен 120 г. Какова вероятность того, что наугад взятый клубень картофеля весит не более 360г.?

Решение. Искомую вероятность оценим по формуле (4.1.1.). Случайную величину – вес клубня – обозначим через X. По условию $M(X)=120,\ \delta=360$. Воспользовавшись неравенством (4.1.1.), получим

$$P(X\le 360)\ge 1-\frac{120}{360}=\frac{2}{3},$$

Пример 2. Среднее число молодых специалистов, ежегодно направляемых в аспирантуру, составляет 200 человек. Оценить вероятность того, что в данном году будет направлено в аспирантуру не более 220 молодых специалистов.

Решение. В данном случае $a=200,\ \delta=220$. Применяя неравенство (4.1.1.), находим

$$P(X\le 200)\ge 1-\frac{200}{220}=1-0{,}091,\ \ P(X\le 200)\ge 0{,}909.$$

Пример 3. Оценить вероятность того, что при 3600 независимых подбрасываниях игрального кубика число появлений 6 очков будет не меньше 900.

Решение. Пусть X – число появлений 6 очков при 3600 подбрасываниях, тогда $M(X)=3600\cdot\frac{1}{6}=600$. Воспользуемся неравенством (4.1.2.) при $a=600,\ \delta=900$:

$$P(X\ge 900)\le\frac{600}{900}=\frac{2}{3}.$$

Пример 4. Случайная величина X имеет дисперсию $D(X)=0{,}001$. Какова вероятность того, что случайная величина X отличается от $M(X)=a$ более чем на 0,1?

Решение. По первому неравенству Чебышева

$$P(|X-a|\ge 0{,}1)\le\frac{D(X)}{(0{,}1)^2}=\frac{0{,}001}{0{,}01}=0{,}1.$$

Пример 5. Случайная величина X имеет дисперсию $D(X)=0{,}004$. Найти вероятность того, что случайная величина X отличается от $M(X)$

более чем на 0,2.

Решение. В соответствии с неравенством (4.1.3.) получаем

$$P(|X-a|>0{,}2)<\frac{0{,}004}{(0{,}2)^2}=\frac{0{,}004}{0{,}04}=0{,}1.$$

Пример 6. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X)=0{,}009$ и неравенство

$$P(|X-M(X)|\geq a)<0{,}1.$$

Найти число a.

Решение. Согласно неравенству (4.1.3.) получаем

$$P(|X-a|\geq a)<\frac{0{,}09}{a^2}.$$

Из этих двух неравенств следует, что

$$\frac{0{,}009}{a^2}\leq 0{,}1,\ \text{откуда}\ 0{,}009\leq 0{,}1a^2.$$

Следовательно,

$$a^2\geq\frac{0{,}009}{0{,}01}=0{,}09,\ \ a\geq 0{,}3.$$

Пример 7. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X)=0{,}01$ и неравенство $P(|X-M(X)|<a)>0{,}96$. Найти значение a.

Решение. Согласно формуле (4.1.4.) получаем $P(|X-M(X)|\leq a)\geq 1-\dfrac{D(X)}{a^2}$. По условию $P(|X-M(X)|\leq a)\geq 0{,}96$.

Из этих двух равенств следует, что $1-\dfrac{D(X)}{a^2}\geq 0{,}96$; $1-\dfrac{0{,}01}{a^2}\geq 0{,}96$;

$\dfrac{a^2-0{,}01}{a^2}\geq 0{,}96$; $a^2-0{,}01\geq 0{,}96a^2$; $a^2-0{,}96a^2\geq 0{,}01$; $0{,}4a^2\geq 0{,}1$,

$a^2\geq 1/4$, $a\geq 0{,}5$. Таким образом $a\geq 0{,}5$.

Пример 8. Среднее значение длины детали равно 50 см, а дисперсия равна 0,1. Оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по своей длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5 см.

Решение. Поскольку здесь $a=50$, то условие $49{,}5<X<50{,}5$, в котором случайная величина X обозначает возможную длину детали, приводится почленным вычитанием числа $a=50$ к виду $|X-a|\leq 0{,}5$.

Применяя неравенство (4.1.4.) в случае $\varepsilon = 0{,}5$ и $D(X) = 0{,}1$, получаем:

$$P(|X-a| \le 0{,}5) \ge 1 - \frac{0{,}1}{(0{,}5)^2} = 1 - \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}6.$$

Пример 9. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,75. Оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взошедших окажется от 700 до 800 включительно.

Решение. В данном случае $M(X) = a = 1000 \cdot 0{,}75 = 750$, граничные значения случайной величины X симметричны относительно $M(X) = 750$. Поэтому от исходных неравенств $700 \le X \le 800$ можно перейти к неравенствам $-50 \le X - 750 \le 50$, или $|X-a| \le 50$, что дает левую часть неравенства (4.1.4.) с $\varepsilon = 50$. Значение $D(X)$ найдем по формуле $D(X) = npq$, или $D(X) = 1000 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 750/4$. Принимая во внимание, что $\varepsilon^2 = 50^2 = 2500$, получаем правую часть неравенства (4.1.4.):

$$1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{750}{4 \cdot 2500} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925.$$

Следовательно,

$$P(|X-750| \le 50) \ge 0{,}925.$$

Пример 10. Вероятность производства нестандартной детали в некоторых технологических условиях равна 0,1. Оценить вероятность того, что число нестандартных деталей среди 10000 будет заключено в границах от 950 до 1030 включительно.

Решение. Число нестандартных деталей в данных условиях является случайной величиной X, распределенной по биномиальному закону. В соответствии в формулами (3.2.5.) и (3.2.6.) при $n = 10000$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$ получаем $M(X) = 10000 \cdot 0{,}1 = 1000$, $D(X) = 10000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 900$,

Отсюда видно, что границы допустимых значений случайной величины не симметричны относительно математического ожидания (левая меньше его на 1000 – 950 = 50, а правая больше на 1030 – 1000 = 30). Следовательно, применить неравенство Чебышева для оценки вероятности указанного события нельзя. Чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным, правая граница должна быть больше математического ожидания на 50, т.е. должна быть равна 1050. Учитывая, что двойное неравенство $950 \le X \le 1050$ равносильно неравенству $|X-1000| \le 50$, применяем неравенство (4.1.4.) при $\varepsilon = 50$ и $D(X) = 900$:

$$P(950 \le X \le 1050) = P(|X-1000| \le 50) \ge 1 - \frac{900}{50^2} = 0{,}64.$$

Замечание. Неравенство (4.1.4.) дает нетривиальную оценку вероятности события $|X-a|\le\varepsilon$ лишь в случае, когда дисперсия случайной величины X достаточно мала (меньше ε^2). Действительно, левая часть неравенства (4.1.4.), выражающая вероятность события, неотрицательна. Это неравенство дает оценку вероятности события $|X-a|\le\varepsilon$, если правая часть его будет положительной: $1-D(X)/\varepsilon^2>0$, откуда $D(X)/\varepsilon^2<1$, или $D(X)<\varepsilon^2$. Если же $D(X)>\varepsilon^2$, то неравенство (4.1.4.) запишется так: $m(|X-a|\le\varepsilon)>-\alpha$, где $\alpha>0$, что и без того очевидно (вероятность любого события неотрицательна).

Задачи

1. Вероятность наступления события A в каждом из 100 независимых опытов равна 0,8. Найдите вероятность того, что число наступлений события А в этих 1000 опытах отклонится от своего математического ожидания по модулю меньше чем на 50.

2. Среднее число дождливых дней в году в данном пункте равно 90. Какова вероятность того, что в этом пункте будет более 150 дождливых дней в году?

3. Случайная величина задана таблицей:

X	1	2	3	5	7	8
P	0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1

Пользуясь неравенством Маркова, оцените вероятность того, что случайная величина X примет значение не больше 7.

4. Вероятность появления события A в каждом испытании $p=1/2$. Используя неравенство Чебышева оцените вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

5. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что $|X-M(X)|<0{,}2$, если $D(X)=0{,}004$.

Ответы

1. 0,936. **2.** 0,6. **3.** $P(\le 7)>\frac{3}{7}$. **4.** $p\ge 0{,}75$. **5.** $P\ge 0{,}9$.

Вопросы

1. Что называют неравенствами Маркова?
2. Какой вид имеет первое неравенство Чебышева?
3. Какой вид имеет второе неравенство Чебышева?
4. В каком случае неравенство (4.1.4.) дает нетривиальную оценку вероятности события $|X-a|\le\varepsilon$?

§ 4.2. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли

Теорема Чебышева

Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, имеют математические ожидания $M(X_i)$ и дисперсии $D(X_i)$, ограниченные одним и тем же числом C, то для любого числа $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (4.2.1)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right) = 1. \qquad (4.2.2)$$

Если все случайные величины X_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ имеют одно и то же математическое ожидание $M(X_i) = a$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то неравенство (4.2.1.) принимает вид

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (4.2.3)$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, отсюда получают

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| \le \varepsilon\right) = 1. \qquad (4.2.4)$$

Теорема Бернулли

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то вероятность того, что отклонение частоты m/n от вероятности p по модулю не превзойдет числа $\varepsilon > 0$, больше, чем разность $1 - pq / n\varepsilon^2$, т.е.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (4.2.5)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1. \qquad (4.2.6)$$

Замечание 1. Теорема Бернулли подтверждает обоснованность статистического определения вероятности.

Замечание 2. Эта теорема опубликована в 1713 г., она положила начало теории вероятностей как науке. Доказательство Я. Бернулли было очень сложным. Более простое доказательство предложил П.Л. Чебышев в 1846 г.

Пример 1. Найти вероятность того, что частота появления шестерки в 10000 независимых подбрасываниях игрального кубика отклоняется от вероятности появления шестерки по модулю меньше чем на 0,01.

Решение. Воспользуемся неравенством (4.2.5). В данном случае $n = 10000$, $p = 1/6$, $q = 5/6$, поэтому

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq 0{,}01\right) = P\left(\left|\frac{m}{10000} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{10000\cdot 0.01^2} \approx 0{,}86.$$

Пример 2. При штамповке пластинок из пластмассы брак составляет 3%. Найти вероятность того, что при проверке партии в 1000 пластинок выявится отклонение от установленного процента брака меньше чем на 1%.

Решение. Из условия задачи следует, что $n = 1000$, $? = 0{,}01$, $p = 0{,}03$, $q = 1 - p = 0{,}97$.

В соответствии с формулой (4.2.5.) получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}03\cdot 0{,}97}{10000\cdot(0{,}01)^2} = 1 - \frac{0{,}0291}{0{,}1} = 0{,}709.$$

Таким образом, искомая вероятность $P \geq 0{,}709$.

Пример 3. При каком числе независимых испытаний вероятность выполнения неравенства $\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}2$ превысит 0,96, если вероятность появления события в отдельном испытании $p = 0{,}7$?

Решение. По условию задачи имеем: $\varepsilon = 0{,}2$, $p = 0{,}7$, поэтому $q = 0{,}3$; требуется определить n с помощью неравенства (4.2.5.). Условие $P > 0{,}96$ равносильно неравенству

$$\frac{pq}{n\varepsilon^2} < 0{,}04, \text{ откуда } n > \frac{pq}{\varepsilon^2\cdot 0{,}04}.$$

При подстановке значений $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$ и $\varepsilon = 0{,}2$ в последнее неравенство находим, что

$$n > \frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{(0{,}2)^2\cdot 0{,}04} = \frac{0{,}21}{0{,}0016} = 131{,}25.$$

Следовательно, требуемое неравенство выполняется при числе независимых испытаний, начиная со 132.

Пример 4. Для определения средней урожайности поля площадью 1800 га взяли на выборку по 1 $м^2$ с каждого гектара. Известно, что по каждому гектару поля дисперсия не превышает 6. Оценить вероятность того, что отклонение средней выборочной урожайности отличается от средней урожайности по всему полю не более чем на 0,25 ц.

Решение. В правой части неравенства (4.2.1.), определяющего искомую вероятность, условием определены значения: ? = 0,25, $C = 6$ и $n = 1800$. Следовательно,

$$P > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{6}{1800 \cdot 0{,}0625} = 1 - 0{,}053 = 0{,}947.$$

Пример 5. Дисперсия каждой из 1000 независимых случайных величин X_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, 1000)$ равна 4. Оценить вероятность того, что отклонение средней арифметической этих величин от средней арифметической их математических ожиданий по модулю не превзойдет 0,1.

Решение. В соответствии с неравенством (4.2.1.) при C = 4, ? = 0,1 получаем

$$P\left(\left|\frac{1}{1000}\sum_{\kappa=1}^{1000} X_\kappa - \frac{1}{1000}\sum_{\kappa=1}^{1000} M(X_\kappa)\right| \le 0{,}1\right) \ge 1 - \frac{4}{1000 \cdot 0{,}1^2} = 0{,}6.$$

Таким образом, $P \ge 0{,}6$.

Пример 6. Определить, сколько надо произвести замеров поперечного сечения деревьев на большом участке, чтобы средний диаметр деревьев отличался от истинного значения a не более чем на 2 см с вероятностью не меньшей 0,95. Среднее квадратическое отклонение поперечного сечения деревьев не превышает 10 см и измерения проводятся без погрешности.

Решение. Будем считать выбор деревьев для замеров таким, что можно считать результаты измерений независимыми случайными величинами. Обозначим через X_i результаты измерения поперечного сечения i-го дерева. По условию задачи $\sigma(X_i) = \sqrt{D(X_i)} \le 10$, следовательно, $D(X_i) \le 100$.

Полагая в неравенстве (4.2.3.) $\varepsilon = 2$, $C = 100$, получаем

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < 2\right) \ge 1 - \frac{100}{n \cdot 2^2} \ge 0{,}95.$$

Поскольку

$$1-\frac{100}{n\cdot 2^2}\geq 0{,}95,\ \text{то}\ 0{,}05\geq\frac{100}{n\cdot 4},\ n\geq\frac{100}{4\cdot 0{,}05}=500.$$

Итак, достаточно выполнить 500 замеров поперечного сечения деревьев.

Пример 7. Всхожесть семян некоторого растения составляет 70%. Найти вероятность того, что при посеве 10000 семян отклонение доли взошедших семян от вероятности того, что взойдет каждое из них, не превзойдет по модулю 0,01.

Решение. Воспользуемся формулой (4.2.5). Из условия следует, что $n=10000$, $\varepsilon=0{,}01$, $p=0{,}7$, а $q=0{,}3$.

В соответствии с формулой (4.2.5) получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{10000}-0{,}7\right|\leq 0{,}01\right)\geq 1-\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{0{,}01^2\cdot 10000}=1-0{,}21=0{,}79.$$

Пример 8. Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ каждая X_k из которых может принимать значения: $-k\alpha$, 0, $k\alpha$ $(\alpha=const)$ соответственно с вероятностями: $\frac{1}{2k^2}$, $1-\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{2k^2}$. Можно ли к этим величинам применить теорему Чебышева?

Решение. Чтобы дать ответ на поставленный вопрос, проверим ограниченность дисперсий данных случайных величин одной и той же постоянной C (остальные условия теоремы Чебышева выполняются: независимость случайных величин и достаточно большое число их). Для этого найдем сначала их математические ожидания:

$$M(X_k)=-k\alpha\cdot\frac{1}{2k^2}+0\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)+k\alpha\cdot\frac{1}{2k^2}=0,$$

Математические ожидания их квадратов:

$$M\left(X_k^2\right)=(-k\alpha)^2\cdot\frac{1}{2k^2}+0^2\cdot\left(1-\frac{1}{k^2}\right)+(k\alpha)^2\cdot\frac{1}{2k^2}=\alpha^2.$$

Поскольку (см. формулу (2.5.4))

$$D(X_k)=M\left(X_k^2\right)-\left(M(X_k)\right)^2=\alpha^2-0^2=\alpha^2,$$

то дисперсии всех случайных величин X_k одинаковы, они ограничены одним числом $C=\alpha^2$.

Итак, к данным случайным величинам можно применить теорему, так как все ее условия выполнены.

Пример 9. Известно, что дисперсия каждой из данных независимых случайных величин не превышает 4. Определить число таких величин, при котором вероятность отклонения средней арифметической случайной величины от средней арифметической их математических ожиданий не более чем на 0,25 превысит 0,99.

Решение. Неравенство (4.2.1) при $C = 4$ и $\varepsilon = 0{,}25$ принимает вид

$$m\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < 0{,}25\right) \geq 1 - \frac{4}{n\cdot(0{,}25)^2}.$$

Из условия следует, что

$$1 - \frac{4}{n\cdot 0{,}0625} \geq 0{,}99, \text{ откуда } 1 - 0{,}99 \geq \frac{4}{n\cdot 0{,}0625}, \text{ или}$$

$$0{,}01 \geq \frac{4}{n\cdot 0{,}0625}, \quad n \geq \frac{4}{0{,}01\cdot 0{,}0625} = \frac{4}{0{,}000625} = 6400.$$

Итак, $n \geq 6400$.

Пример 10. Начиная с какого числа n независимых испытаний выполняется неравенство $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}1\right) > 0{,}97$, если в отдельном испытании $p = 0{,}8$?

Решение. Неравенство (4.2.5) в данном случае принимает вид

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < 0{,}1\right) \geq 1 - \frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{n\cdot 0{,}01}, \text{ поэтому } 1 - \frac{0{,}16}{0{,}01n} > 0{,}97.$$

Отсюда находим

$$1 - 0{,}97 > \frac{0{,}16}{0{,}01\cdot n}, \quad 0{,}03 > \frac{0{,}16}{0{,}01\cdot n}, \quad n > \frac{0{,}16}{0{,}03\cdot 0{,}01} = \frac{0{,}16}{0{,}0003} \approx 533{,}33.$$

Таким образом, $n \geq 534$.

Задачи

1. Вероятность положительного исхода отдельного испытания $p = 0{,}8$. Оцените вероятность того, что при 1000 независимых повторных испытаний отклонение частоты положительных исходов от вероятности при отдельном испытании по модулю будет меньше 0,05.

2. Сколько следует провести независимых испытаний, чтобы вероятность выполнения неравенство $|m/n-p|\le 0{,}06$ превысила 0,78, если вероятность появления данного события в отдельном испытании $p=0{,}7$?

3. Для определения средней продолжительности горения электролампы в партии из 200 одинаковых ящиков было взято на выборку по одной лампе из каждого ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения во всей партии по модулю меньше чем на 5ч, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике меньше 7 ч.

4. Сколько раз нужно измерить данную величину, истинное значение которой равно a, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,95, можно было утверждать, что среднее арифметическое этих измерений отличается от a по модулю меньше чем на 2, если среднее квадратическое отклонение каждого измерения меньше 10.

5. Сколько должно быть произведено независимых измерений некоторой величины, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,98, можно было утверждать, что среднее арифметическое результатов измерений отличается от истинного значения по модулю меньше чем на 0,01, если дисперсия отдельного результата измерения не превосходит 1?

6. Дана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ Случайная величина X_n $(n=1,2,3,\dots)$ может принимать только три значения: $-\sqrt{n}, 0, \sqrt{n}$ с вероятностями, равными соответственно $\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ \frac{1}{n}$. Применима ли к этой последовательности случайных величин теорема Чебышева?

Ответы

1. $P>0{,}936$. **2.** $n>265$. **3.** $P>0{,}99$. Указание. $D(X_i)<49$. **4.** $n\ge 500$. **5.** $n=5\cdot 10^5$. **6.** Применима. Указание $M(X_\kappa)=0$, $D(X_k)=2$, $k=1, 2, \dots, n$.

Вопросы

1. Какую словесную формулировку имеет теорема Чебышева?
2. Как записывается формула, выражающая теорему Чебышева?
3. Какой вид имеет эта формула в предельном случае $(n\to\infty)$?
4. Какой вид имеет формула, выражающая теорему Чебышева, в случае, когда все величины одинаково распределены?
5. Как записывается формула, выражающая теорему Чебышева, в предельном случае $(n\to\infty)$?

6. Какую словесную формулировку имеет теорема Бернулли?

7. Как записывается формула, выражающая теорему Бернулли?

8. Какой вид имеет эта формула в предельном случае $(n \to \infty)$?

9. Каким условиям должны удовлетворять случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, чтобы к ним можно было применять теорему Чебышева?

10. Какова связь между теоремой Бернулли и теоремой Чебышева?

§ 4.3. Теоремы Лапласа

Локальная теорема Лапласа

Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, то вероятность $m_n(k)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно k раз, приближенно выражается формулой

$$m_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(k-np)^2}{2npq}}, \tag{4.3.1}$$

или

$$m_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{4.3.2}$$

при

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \tag{4.3.3}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{4.3.4}$$

Отметим, что таблицы значений функции (4.3.4) даны в приложениях к учебникам и учебным пособиям по теории вероятностей; имеются они и в данном справочном пособии.

Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, то веро-

ятность $m_n(k_1, k_2)$ *того, что во всех этих испытаниях событие* A *появится не менее* k_1 *раз и не более* k_2 *раз, приближенно определяется формулой*

$$P_n(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx, \qquad (4.3.5)$$

где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (4.3.6)$$

Эту формулу можно представить в другом виде:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (4.3.7)$$

где $\Phi(x)$ – *функция Лапласа*, т.е.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2/2} dt, \qquad (4.3.8)$$

а x_1 и x_2 определяются равенствами (4.3.6).

Замечание. Приближенными формулами Лапласа (4.3.1) и (4.3.5) на практике пользуются в случае, если $npq > 10$. Если же $npq < 10$, то эти формулы приводят к большим погрешностям.

Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Вероятность того, что при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, модуль отклонения частоты появления события от вероятности события не превышает положительного числа ε, приближенно равна удвоенному значению функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{n/pq}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (4.3.9)$$

Пример 1. Вероятность появления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие A произойдет: а) 750 раз; б) 710 раз.

Решение. Из условия следует, что $n = 900$, $p = 0{,}8$, поэтому $q = 0{,}2$;

в первом случае $k = 750$, во втором случае $k = 710$. Поскольку $npq = 900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 144 > 10$, то можно воспользоваться формулой (4.3.1), или (4.3.2)–(4.3.4).

Рассмотрим первый случай. По формуле (4.3.3) определяем x:

$$x = \frac{750 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{750 - 720}{\sqrt{144}} = \frac{30}{12} = 2{,}5.$$

По таблице значений функции (4.3.4) находим

$$\varphi(2{,}5) \approx 0{,}0175.$$

Согласно формуле (4.3.2) получаем искомую вероятность

$$P_{900}(750) \approx \frac{1}{12} \cdot \varphi(2{,}5) = \frac{1}{12} \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}00146.$$

Аналогично находим вероятность во втором случае, принимая во внимание четность функции (4.3.4):

$$x = \frac{710 - 720}{12} \approx -0{,}83, \;\; \varphi(-0{,}83) = \varphi(0{,}83) \approx 0{,}2827;$$

$$P_{900}(710) \approx \frac{1}{12} \cdot 0{,}2827 \approx 0{,}0236.$$

П р и м е р 2. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожидать появление события A в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5?

Р е ш е н и е. Будем пользоваться формулой (4.3.1). Из условия следует, что $n = 100$, $P_n(k) = 0{,}0484, p = 0{,}5$, $q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$; требуется определить k.

По формуле (4.3.3) находим x:

$$x = \frac{k - 100 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}}, \quad x = \frac{k - 50}{5}.$$

Формула (4.3.2) принимает вид

$$P_{100}(\kappa) = \frac{1}{5} \cdot \varphi(x) = 0{,}0484.$$

Отсюда находим $\varphi(x) = 0{,}0484 \cdot 5$, $\varphi(x) = 0{,}222$.

По таблицам значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$ определяем x:

$\varphi(1{,}09) \approx 0{,}222, x \approx 1{,}09.$

Подставляя это значение в выражение для x, получаем

$$\frac{k-50}{5}=1{,}09, \quad k-50=5{,}45, \quad k=50+5{,}45.$$

Поскольку k – целое число, то $k = 55$.

Пример 3. Вероятность появления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие A произойдет не менее 710 раз и не более 740 раз.

Решение. По условию $n = 900$, $k_1 = 710$, $k_2 = 740$, $p = 0{,}8$, поэтому $q = 0{,}2$. Согласно формулам (4.3.6) находим

$$x_1=\frac{710-900\cdot 0{,}8}{\sqrt{900\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{710-720}{12}\approx -0{,}83;$$

$$x_2=\frac{740-900\cdot 0{,}8}{\sqrt{900\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{740-720}{12}\approx 1{,}67.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. приложение), учитывая нечетность функции, определяем

$$\Phi(x_1)=\Phi(-0{,}83)=-\Phi(0{,}83)\approx -0{,}2967;$$
$$\Phi(x_2)=\Phi(1{,}67)\approx 0{,}4525.$$

В соответствии с формулой (4.3.7) получаем искомую вероятность

$$P_{900}(710{,}740)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\Phi(1{,}67)-\Phi(-0{,}83)=$$
$$=0{,}4525-(-0{,}2967)=0{,}7492.$$

Пример 4. Вероятность того, что электролампочка, изготовленная данным заводом, является бракованной, равна 0,02. Для контроля отобрано наугад 1000 лампочек. Оценить вероятность того, что частота бракованных лампочек в выборке отличается от вероятности 0,02 менее чем на 0,01.

Решение. Обозначим через k – число бракованных лампочек в выборке. Нам нужно оценить вероятность неравенства

$$\left|\frac{\kappa}{100}-0{,}02\right|<0{,}01.$$

Отсюда найдем, в каких границах заключено число k:

$$-0{,}01<\frac{k}{1000}-0{,}02<0{,}01; \quad 0{,}02-0{,}01<\frac{k}{1000}<0{,}01+0{,}02;$$

$$0{,}01<\frac{k}{1000}<0{,}03; \quad 10<k<30; \quad 11\le k\le 29.$$

Следовательно,

$$m\left(\left|\frac{k}{1000}-0{,}02\right|<0{,}01\right)=m_{1000}(11\le k\le 29).$$

Поскольку $npq=1000\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98=19{,}6>10$, то для вычисления вероятности $P_{1000}(11{,}29)$ воспользуемся формулой (4.3.7). В данном случае

$$x_1=\frac{11-1000\cdot 0{,}02}{\sqrt{1000\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98}}\approx -2{,}03;\quad x_2=\frac{29-20}{4{,}43}\approx 2{,}03.$$

По таблицам значений функции Лапласа находим

$$\Phi(-2{,}03)=-\Phi(2{,}03)\approx -0{,}4788;\quad \Phi(2{,}03)\approx 0{,}4788.$$

В соответствии с формулой (4.3.7) получаем

$$P_{1000}(11{,}29)=0{,}4788+0{,}4788=0{,}9576.$$

Пример 5. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших заключено между 790 и 830.

Решение. Для нахождения искомой вероятности воспользуемся формулой (4.3.7). Из условия следует, что $n=900$, $k_1=790$, $k_2=830$, $p=0{,}9$, $q=0{,}1$. По формулам (4.3.6) определяем

$$x_1=\frac{790-900\cdot 0{,}9}{\sqrt{900\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=\frac{790-810}{\sqrt{81}}=-\frac{20}{9}\approx -2{,}22;$$

$$x_2=\frac{830-900\cdot 0{,}9}{\sqrt{900\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=\frac{830-810}{\sqrt{81}}=\frac{20}{9}\approx 2{,}22.$$

С помощью таблицы значений функции Лапласа (см. приложение) находим

$$\Phi(x_2)=\Phi(2{,}22)\approx 0{,}4868;\quad \Phi(x_1)=\Phi(-2{,}22)\approx -0{,}4868.$$

Согласно формуле (4.3.7) получаем искомую вероятность

$$P_{900}(790{,}830)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=0{,}4868+0{,}4868=0{,}9736.$$

Пример 6. Производство дает 1 % брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбракованных будет не более 17?

Решение. Из условия следует, что $n = 1100$, $p = 0{,}01$, $q = 0{,}99$, $0 \le k \le 17$. По формулам (4.3.6) определяем

$$x_1 = \frac{0 - 1100 \cdot 0{,}01}{\sqrt{1100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99}} = \frac{-11}{\sqrt{10{,}89}} = -\frac{11}{3{,}3} \approx -3{,}33;$$

$$x_2 = \frac{17 - 11}{3{,}3} = \frac{6}{3{,}3} \approx 1{,}82.$$

С помощью таблицы значений функции Лапласа (см. приложение) находим

$$\Phi(x_1) = \Phi(-3{,}33) = -\Phi(3{,}33) \approx -0{,}4995;$$
$$\Phi(x_2) = \Phi(1{,}82) \approx 0{,}4656.$$

В соответствии с формулой (4.3.7) получаем

$$P_{1100}(0; 17) = 0{,}4656 - (-0{,}4995) = 0{,}9651.$$

Пример 7. Вероятность изготовления детали первого сорта на данном станке равна 0,8. Найти вероятность того, что среди наугад взятых 100 деталей окажется 75 деталей первого сорта.

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле (4.3.2). По условию $n = 100$, $k = 75$, $p = 0{,}8$; значит $q = 1 - p = 0{,}2$. Согласно формуле (4.3.3) вычислим

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{75 - 80}{\sqrt{16}} = \frac{-5}{4} = -1{,}25;$$

по таблице найдем $\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826$.

Следовательно,

$$P_{100}(75) = \frac{1}{4}\varphi(-1{,}25) = \frac{0{,}1826}{4} = 0{,}04565.$$

Пример 8. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 70 и не более 85 раз; б) не менее 70 раз; в) не более 69 раз.

Решение. Воспользуемся формулой (4.3.7) в случаях а) и б).

а) По условию $n = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $k_1 = 70$, $k_2 = 85$. По формулам (4.3.6) вычисляем x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{70 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5;$$

$$x_2 = \frac{85-80}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. приложение), учитывая нечетность этой функции находим

$$\Phi(x_1) = \Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) = -0{,}4938;$$
$$\Phi(x_2) = \Phi(1{,}25) = 0{,}3944.$$

Согласно формуле (4.3.7) получаем

$$m_{100}(70;85) = \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}3944 + 0{,}4938 = 0{,}8882.$$

б) Требование, что событие появилось не менее 70 раз, означает, что число появлений события может быть равно 70 либо 71, либо 72, ..., либо 100. Значит, в рассматриваемом случае следует принять, что $k_1 = 70$, $k_2 = 100$, тогда

$$x_1 = \frac{70 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = \frac{70-80}{\sqrt{16}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5;$$

$$x_2 = \frac{100 - 100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}} = \frac{20}{4} = 5.$$

По таблице значений $\Phi(x)$ находим

$$\Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) = -0{,}4938;\ \ \Phi(5) = 0{,}5.$$

На основании формулы (4.3.7) получаем

$$m_{100}(70;100) = \Phi(5) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4938 = 0{,}9938.$$

в) События "A появилось не менее 70 раз" и "A появилось не более 69 раз" противоположны, поэтому

$$P_{100}(0;69) = 1 - m_{100}(70;100) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062.$$

Пример 9. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по модулю не больше чем на 0,02.

Решение. Будем пользоваться формулой (4.3.9). По условию $n = 900$, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$, $\varepsilon = 0{,}02$. В соответствии с указанной формулой получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{900} - 0{,}5\right| \le 0{,}02\right) = 2\Phi\left(0{,}02\sqrt{\frac{900}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right) = 2\Phi(1{,}2).$$

По таблице находим $\Phi(1{,}2) = 0{,}3849$. Следовательно, $2\Phi(1{,}2) = 2 \cdot 0{,}3849 = 0{,}7698$. Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,7698.

Пример 10. Посажено 600 семян кукурузы с вероятностью 0,9 прорастания для каждого семени. Найти границу модуля отклонения частоты взошедших семян от вероятности $p = 0{,}9$, если эта граница должна быть гарантирована с вероятностью $P = 0{,}995$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.3.9), т. е.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

В данном случае $n = 600$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $P = 0{,}995$; требуется определить значение ε. Указанная формула принимает вид:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}9\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right);$$

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) = 0{,}995, \quad \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) = 0{,}4975.$$

Пользуясь таблицей значений функции Лапласа (см. приложение), решаем уравнение $\Phi(t) = 0{,}4975$; $t = 2{,}81$.

Следовательно,

$$\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 2{,}81, \ \varepsilon = 2{,}81 \cdot \sqrt{\frac{0{,}09}{600}} = \frac{2{,}81 \cdot 0{,}3}{10\sqrt{6}} = 0{,}0034.$$

Пример 11. С конвейера сходит в среднем 85 % изделий первого сорта. Сколько изделий необходимо взять, чтобы с вероятностью 0,997 отклонение частоты изделий первого сорта в них от вероятности $p = 0{,}85$ по модулю не превосходило 0,01?

Решение. Будем пользоваться формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Из условия следует, что $p = 0{,}85$, $q = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$, $\varepsilon = 0{,}01$, $P = 0{,}997$. Требуется определить значение n. Поскольку

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}997, \quad \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}4985,$$

то сначала решим уравнение $\Phi(t)=0{,}4985$; $t=2{,}96$. Следовательно,

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}=2{,}96, \quad \text{откуда} \quad n=(2{,}96)^2\cdot\frac{pq}{\varepsilon^2}.$$

Подставляя в последнее равенство значения p, q и ε, находим n:

$$n=(2{,}96)^2\cdot\frac{0{,}85\cdot 0{,}15}{(0{,}01)^2}, \quad n=11171.$$

Пример 12. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат.

Решение. Воспользуемся формулой (4.3.7). Согласно условию $p=0{,}8$, $q=1-0{,}8=0{,}2$, $k_1=150$, $k_2=n$ (значение n нужно определить). Указанная формула

$$P_n(k_1;k_2)=\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

принимает вид

$$0{,}98=\Phi\left(\frac{n-0{,}9n}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right)-\Phi\left(\frac{150-0{,}9n}{\sqrt{n\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\right),$$

или

$$0{,}98=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right)-\Phi\left(\frac{150-0{,}9n}{0{,}4\sqrt{n}}\right).$$

Очевидно, что $n>150$, поэтому $\sqrt{n}/4>\sqrt{150}/4\approx 3{,}06$. Поскольку функция Лапласа – возрастающая и $\Phi(3)=0{,}49865$, то можно положить $\Phi\left(\sqrt{n}/4\right)=0{,}5$. Следовательно,

$$0{,}98=0{,}5-\Phi\left(\frac{150-0{,}9n}{0{,}4\sqrt{n}}\right), \quad \Phi\left(\frac{150-0{,}9n}{0{,}4\sqrt{n}}\right)=-0{,}48.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. приложение) находим $\Phi(2{,}06)=0{,}48$. Отсюда и из последнего равенства, учитывая нечетность функции Лапласа, получаем

$$\frac{150-0{,}9n}{0{,}4\sqrt{n}}=-2{,}06, \quad 150-0{,}9n=-2{,}06\cdot 0{,}4\sqrt{n}.$$

Решая это уравнение, как квадратное относительно $\sqrt{n}$, находим $\sqrt{n} = 13{,}38$, $n = 180$.

Пример 13. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,77 модуль отклонения частоты появления события от его вероятности 0,5 не превышал ε.

Решение. Будем пользоваться формулой (4.3.9). В данном случае $n = 900$, $p = 0{,}5$, $q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. Следовательно,

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{900}{0{,}5 \cdot 0{,}5}}\right) = 0{,}77, \quad \text{или}$$

$$2\Phi(60\varepsilon) = 0{,}77,\ \Phi(60\varepsilon) = 0{,}385.$$

По таблице значений функции Лапласа находим $\Phi(1{,}2) = 0{,}385$; значит $60\varepsilon = 1{,}2$, откуда $\varepsilon = 0{,}02$.

Пример 14. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.

Решение. Воспользуемся формулой (4.3.9). Сначала определим число $\varepsilon > 0$, а потом границы, в которых заключено число m. По условию $n = 475$, $p = 0{,}05$, $q = 0{,}95$, $P = 0{,}95$. В соответствии с условием

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{475}{0{,}05 \cdot 0{,}95}}\right) = 0{,}95,\ 2\Phi(100\varepsilon) = 0{,}95,\ \Phi(100\varepsilon) = 0{,}475.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(1{,}96) = 0{,}475$; значит, $100\varepsilon = 1{,}96$, откуда $\varepsilon \approx 0{,}02$. Таким образом, $\left|\frac{m}{475} - 0{,}05\right| \le 0{,}02$;

$$-0{,}02 \le \frac{m}{475} - 0{,}05 \le 0{,}02,\ 0{,}05 - 0{,}02 \le \frac{m}{475} \le 0{,}02 + 0{,}05,\ 0{,}03 \le \frac{m}{475} \le 0{,}07,$$

$14{,}25 \le m \le 33{,}25$. Поскольку m – целое число, то $15 \le m \le 33$.

Пример 15. Игральный кубик подбрасывают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число m выпадений шестерки.

Решение. Будем пользоваться формулой (4.3.9). Сначала найдем число $\varepsilon > 0$, а потом границы, в которых заключено число m. По условию $n = 80$; в данном случае $p = 1/6$, $q = 5/6$. В соответствии с условием

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0{,}99,\quad 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{80}{1/6\cdot 5/6}}\right)=0{,}99,$$

$$2\Phi(24\varepsilon)=0{,}99,\quad \Phi(24\varepsilon)=0{,}495.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. приложение) находим, что $\Phi(2{,}58)=0{,}495$; значит, $24\varepsilon=2{,}58$, откуда $\varepsilon=0{,}11$. Из неравенства

$$\left|\frac{m}{80}-\frac{1}{6}\right|\le 0{,}11$$

определяем, что $0{,}06\le m/80\le 0{,}28$, или $4{,}8\le m\le 22{,}4$.

Так как m – целое число, то $5\le m\le 22$.

Пример 16. Обследуются 500 изделий продукции, изготовленной на предприятии, где брак составляет 2%. Найти вероятности того, что: 1) среди них окажется ровно 10 бракованных; 2) число бракованных в пределах от 10 до 20.

Решение. Из условия следует, что $n=500, p=0{,}02$, поэтому $q=1-p=0{,}98$, $np=500\cdot 0{,}02=10$, $npq=500\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98=9{,}8$.

Согласно формуле (4.3.2) находим

$$P_{500}(10)=\frac{1}{\sqrt{9{,}8}}\varphi\left(\frac{10-10}{\sqrt{9{,}8}}\right)=\frac{1}{\sqrt{9{,}8}}\varphi(0)=0{,}319\cdot 0{,}399=0{,}127.$$

В соответствии с формулой (4.3.7) получаем

$$\Phi(10\le k\le 20)=\Phi\left(\frac{20-10}{\sqrt{9{,}8}}\right)-\Phi\left(\frac{10-10}{\sqrt{9{,}8}}\right)=\Phi(3{,}2)-\Phi(0)=0{,}499.$$

Пример 17. Оценить вероятность события

$$\left|\frac{k}{300}-\frac{1}{6}\right|\le 0{,}01,$$

т. е. вероятность того, что частота наступления события A в 300 опытах отклоняется от вероятности события A не более чем на 0,01.

Решение. Оценить указанную вероятность можно с помощью формулы (4.3.7) или с помощью формулы (4.3.9).

Воспользуемся сначала последней формулой, которая в данном случае принимает вид

$$P\left(\left|\frac{k}{300}-\frac{1}{6}\right|\right)=2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{300}{1/6\cdot 5/6}}\right)=2\Phi\left(0{,}01\cdot 6\cdot 2\sqrt{15}\right)=$$

$$=2\Phi(0{,}46)=2\cdot 0{,}1772=0{,}354.$$

Чтобы применить формулу (4.3.7), предварительно надо найти границы, в которых заключено число k.

Поскольку

$$\left|\frac{k}{300}-\frac{1}{6}\right| \le 0{,}01,$$

то

$$-\frac{1}{100} \le \frac{k}{300}-\frac{1}{6} \le \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{6}-\frac{1}{100} \le \frac{k}{300} \le \frac{1}{100}+\frac{1}{6},$$

$$50-3 \le k \le 50+3, \quad 47 \le k \le 53.$$

В соответствии с формулой (4.3.7), полагая в ней $k_1 = 47, k_2 = 53$, получаем

$$P(47 \le k \le 53) = \Phi\left(\frac{53-300\cdot(1/6)}{\sqrt{300\cdot(1/6)\cdot(5/6)}}\right) - \Phi\left(\frac{47-300\cdot(1/6)}{\sqrt{300\cdot(1/6)\cdot(5/6)}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{3}{10\sqrt{5/6}}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{10\sqrt{5/6}}\right) \approx \Phi(0{,}46) + \Phi(0{,}46) \approx 0{,}354.$$

Задачи

1. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найдите вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

2. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожидать появления события в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5?

3. Игральный кубик подбрасывают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадает не меньше 260 и не больше 274 раз?

4. Вероятность появления события A в опыте равна 0,2. Опыт повторили независимым образом 400 раз. Какова вероятность того, что при этом событие A произойдет: а) 70 раз; б) 80 раз; в) не менее 70, но не более 90 раз; г) не менее 76, но не более 82 раз; д) не менее 78 раз; е) не более 78 раз?

5. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие A появится не менее 75 раз?

6. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найдите вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по модулю не более чем на 0,01.

7. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найдите такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,98 модуль отклонения частоты появления события от его вероятности не превышал ε.

8. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартная, равна 0,9. Найдите с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m стандартных деталей среди проверенных.

9. Вероятность приема каждого из 100 передаваемых сигналов равна 0,75. Найдите вероятность того, что будет принято от 71 до 80 сигналов.

Ответы

1. 0,093. **2.** 55. **3.** 0,4. **4.** а) 0,023; б) 0,05; в) 0,789; г) 0,92; д) 0,6; е) 0,4. **5.** $n = 100$. **6.** 0,979. **7.** $\varepsilon = 0{,}01$. **8.** $792 \le m \le 828$. **9.** 0,6961.

Вопросы

1. Как формулируется локальная теорема Лапласа?
2. Какой вид имеет формула, выражающая заключение локальной теоремы Лапласа?
3. Какой другой вид можно придать этой формуле?
4. Как формулируется интегральная теорема Лапласа?
5. Какой вид имеет формула, выражающая заключение интегральной теоремы Лапласа?
6. Какой другой вид можно придать этой формуле?
7. В каких случаях можно пользоваться приближенными формулами Лапласа?
8. По какой формуле вычисляется вероятность отклонения частоты события от его вероятности в независимых испытаниях.
9. Как определяется функция Лапласа?
10. Как доказать, что функция Лапласа является нечетной?

Глава 5. Из истории возникновения и развития теории вероятностей

На зарождение и первоначальное развитие теории вероятностей существенное влияние оказали задачи, возникшие в практике страховых обществ, при обработке результатов астрономических наблюдений и в различных азартных играх. Вероятностные вопросы возникали и в других сферах практической деятельности. Некоторые из таких вопросов появились в далекой древности, но в то время они не стимулировали развитие теории вероятностей, так как возникали спорадически и, главное, не были существенными ни в развитии науки, ни в жизни общества.

Многие из первых задач теории вероятностей были связаны с азартными играми. В процессе этих игр возникали удобные схемы и модели, а отчасти и терминология, позволявшие описать некоторые вероятностные явления и задачи. Разумеется, и сами азартные игры выдвигали задачи, стимулировавшие развитие теории вероятностей, хотя это и не было решающим. Одной из таких задач являлся подсчет числа различных возможных исходов при бросании нескольких игральных костей. Первые известные подсчеты для случая трех костей относятся к X–XI вв. На решениях отдельных задач учета ошибок наблюдений, задач из практики статистики, страхования и других областей вырабатывались общие вопросы и методы теории вероятностей.

§ 5.1. Предыстория теории вероятностей

Первые работы, в которых зарождались основные понятия теории вероятностей, представляли собой попытки создания теории азартных игр. На начальном этапе изучения случайных явлений ученые рассматривали три задачи: 1) подсчет числа различных возможных исходов при бросании нескольких костей; 2) раздел ставки между игроками, когда игра прекращена где-то посередине; 3) определение числа бросаний двух или нескольких костей, при которых число случаев, благоприятствующих выпадению на всех костях одинаковых граней (например, "шестерок"), было большим, чем число случаев, когда это событие не появится ни разу.

Определенную роль в формировании интереса к математике случайного сыграли задачи Л. Пачоли, предложенные им в книге "Сумма знаний...". В разделе "необычных задач" он рассматривал следующие:

1. Компания играет в мяч до 60 очков и делает ставку на 22 дуката. В связи с некоторыми обстоятельствами игра прекращена до ее окончания, причем одна сторона в этот момент имеет 50, другая 30 очков. Спрашивается, какую часть общей ставки должна получить каждая сторона?

2. Трое соревнуются в стрельбе из арбалета. Кто первым достигнет 6 попаданий, тот выигрывает. Ставка 10 дукатов. Когда первый совершает 4 попадания, второй – 3, а третий – 2, они не хотят продолжать стрельбу, а решают разделить приз справедливо. Спрашивается, какой должна быть доля каждого?

Существенное продвижение в решении первоначальных задач вероятностного характера связано с именами Дж. Кардано и Н. Тарталья. В рукописи "Книги об игре в кости" (1526; 1563) Кардано решил многие задачи, связанные с бросанием игральных костей и выпадением на них того или иного количества очков. При решении этих задач он подсчитывал число благоприятствующих шансов, а также число возможных шансов. Лишь в двух случаях он рассматривал отношение, которое называют теперь классическим определением вероятности. Это отношение воспринималось им скорее чисто арифметически, как доля случаев, а не как характеристика возможности случайного события при испытании. В этих случаях он фактически оперирует классическим понятием вероятности, но не замечает его значения для изучаемых им задач. Кардано интересовала задача Пачоли о разделе ставки до окончания игры.

К задаче о разделе ставки обращался и Н. Тарталья в сочинении "Общий тракт о мере и числе" (1556). Его подход к решению этой задачи изложен в § 20 книги, озаглавленном "Ошибка брата Луки из Борго".

Задачу о разделе ставки рассматривали и другие авторы, например, Г.Ф. Певероне в книге "Два коротких и легких трактата по началам арифметики и основам геометрии" (1558).

Задачи вероятностного характера исследовал также знаменитый итальянский ученый Галилео Галилей (1564–1642). Его работа "О выходе очков при игре в кости" (опубликована в 1718 г.) была посвящена подсчету числа всевозможных случаев при бросании трех костей. Число всех возможных случаев он подсчитал самым простым и естественным путем – возвел 6 (число различных возможностей при бросании одной кости) в третью степень и получил $6^3 = 216$, что определялось ранее непосредственным подсчетом. Галилей подсчитал и число различных способов, которыми может быть получено то или другое значение суммы выпавших на трех костях очков (сумма принимает любое значение от 3 до 18). При этих подсчетах он пользовался полезной идеей – кости нумеровались (первая, вторая, третья) и возможные исходы записывались в виде троек чисел, причем на соответствующем месте стояло число очков, выпавшее на кости с данным номером.

Галилей, как и его предшественники, рассматривал не вероятности случайных событий, а шансы, которые им благоприятствуют.

Для теории вероятностей и математической статистики имели важное значение его соображения относительно ошибок наблюдений, высказанные им в сочинении "Диалог о двух главнейших системах мира: птоломеевой и коперниковой" (1632). Галилей отмечал, что ошибки наблюдений неизбежны при каждом измерении, любом экспериментальном исследовании. Эти ошибки могут быть двух типов: систематические, непосредственно связанные со способом измерений и с используемыми инструментами, и случайные, которые меняются непредсказуемым образом от одного измерения к другому. Такая классификация сохранилась до наших дней и используется в пособиях по теории ошибок наблюдений. Галилеем выделены и проанализированы характерные особенности случайных ошибок измерений: во-первых, малые ошибки встречаются чаще, чем большие; во-вторых, положительные ошибки встречаются так же часто, как и отрицательные. Он отметил, что около истинного значения величины должно группироваться наибольшее число результатов измерений. Исследования Галилея имели принципиальное значение, так как они положили начало новой научной дисциплине – теории ошибок наблюдений. Эта теория сыграла важную роль в формировании теории вероятностей, имела большое значение для развития математической статистики.

Вопросы, относящиеся к математике случайного, обсуждались в переписке Паскаля и Ферма (1654).

В этой переписке еще отсутствует понятие вероятности – рассматривается число шансов, благоприятствующих событию. Паскаль и Ферма впервые нашли правильное решение задачи о разделе ставки, которая потребовала много усилий исследователей в течение длительного времени. Оба они исходили из одной и той же идеи – раздела ставки в отношении, пропорциональном, как теперь можно сказать, вероятностям окончательного выигрыша каждого игрока. Предложенные ими решения содержали зачатки использования математического ожидания и, в весьма несовершенной форме, теорем сложения и умножения вероятностей, точнее говоря, не вероятностей, а шансов, благоприятствующих тому или иному событию. Ими сделан серьезный шаг в создании предпосылок и интересов к задачам теоретико-вероятностного характера. Второй шаг сделал Паскаль, существенно продвинув развитие комбинаторики и указав на ее значение для зарождающейся теории вероятностей. Серьезным вкладом в развитие комбинаторики явился его "Трактат об арифметическом треугольнике" (1665). В этом сочинении имеется параграф, в котором изложены правила применения комбинаторных результатов и задача о разделе ставки. Правило Паскаля состояло в следующем: пусть игроку A до выигрыша всей игры не хватает m партий, а игроку B – n партий, тогда ставка между ними должна делиться в отношении

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_{m+n-1}^{i} \Big/ \sum_{i=0}^{m-1} C_{m+n-1}^{i}.$$

Паскаль первым предложил слова "теория вероятностей" для названия новой математической дисциплины. Он намеревался написать книгу "Математика случая", очевидно, предполагая систематизировать полученные им и Ферма результаты. Но этот термин остался неизвестным (книга не была написана), и в употребление вошло название "Учение о случаях" (1718), как было озаглавлено сочинение Муавра. Только в XIX в. стало применяться современное название, которое окончательно закрепилось в результате работ Лапласа.

§ 5.2. Первые сочинения по науке о случайном и статистике

Первым (и до начала XVIII в. единственным) сочинением по математике случайного была работа Х. Гюйгенса (1629–1695) "О расчетах в азартных играх". Впервые она была опубликована в качестве приложения к "Математическим этюдам" (1657) его учителя Франса ван Схоотена (1615–1660). Гюйгенс написал это сочинение на голландском языке, латинский перевод сделал Схоотен. В предпосланном этой работе письме к Схоотену Гюйгенс писал: "Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории"[1]. В этом замечании появилось глубокое понимание им существа рассматриваемого вопроса. Книга Гюйгенса выдержала ряд изданий и переводов, она оказала большое влияние на многих ученых, в том числе и на Я. Бернулли.

В начале книги Гюйгенс вводит понятие математического ожидания, а затем решает самые разнообразные задачи на справедливое разделение ставок при разном числе игроков и разном количестве недостающих партий. Он вычисляет также математические ожидания при решении различных задач, связанных с бросанием костей. Математическое ожидание явилось первым теоретико-вероятностным понятием. Это понятие Гюйгенс определил следующими словами (будем иметь в виду, что речь шла об азартной игре): "Если число случаев, в

[1] Ch. Huygens. Oeuvres complétes, Hague, 1920, v. 14, P. 58.

которых получается сумма a, равно p и число случаев, в которых получается сумма b, равна q и все случаи могут получиться одинаково легко, то стоимость моего ожидания равна $(ap+bq)/(p+q)$"[1]. Отметим, что Гюйгенс предпочитал, так сказать, коммерческую терминологию и говорил о стоимости, за которую он готов уступить свое право на получение выигрыша. Термин "ожидание" был введен в употребление Схоотеном при переводе.

В конце сочинения "О расчетах в азартных играх" Гюйгенс предложил читателям пять задач для самостоятельного решения. Решения этих задач получены им самим в 1665 г. В сочинении известного философа Б. Спинозы (1632–1677) "Заметки о математической вероятности" (1687) содержится решение одной из них, приведены формулировки остальных четырех. Представляет интерес то обстоятельство, что в названиях работ уже говорится о математической вероятности, хотя это понятие не определяется; рассуждения ведутся над числом благоприятствующих событию случаев.

Развитие методов решения задач вероятностного характера стимулировалось статистическими исследованиями. Основная задача статистики народонаселения (или, как принято было говорить, политической арифметики), т. е. задачи рождаемости, смертности и т.п., а также связанные с ними вопросы подсчетов для страхования жизни и вычислений стоимости пожизненных рент оказались важнейшими приложениями теории вероятностей XVIII в. Слово "статистика" (от итальянского statio – государство, statista – политик, страновед) появилось в немецкой школе государствоведения XVIII в. и сперва означало общее описание стран, включавшее и некоторые числовые данные. Математическая статистика возникла в рамках политической арифметики. Хотя сбор статистических сведений начинается в очень примитивной форме с античной древности, первые научные начала статистики заложены только в XVII в. работами членов Королевского общества Джона Граунта (1620–1674) и Вильяма Петти (1623–1687). В этих работах использовались бюллетени о естественном движении населения Лондона, которые велись с XVI в. Основная работа Граунта имеет название "Естественные и политические наблюдения... над бюллетенями смертности" (1662). На статистическом материале автор работы установил ряд интересных закономерностей. Граунт показал, в частности, что число родившихся мальчиков относится к числу родившихся девочек, как 14 к 13; что смертность людей больше в начале жизни, что относительная смертность от ряда болезней и случайностей устойчива и т.д. Он специально отметил, что отношение числа умерших детей до 6 лет к общему числу смертей за тот же период времени приблизительно равно 1/3. Другими словами, Граунт ввел представление о частоте события. Для развития теории вероятностей сыграло важную роль его замечание о том, "... что некоторые из случайностей имеют постоянное отношение к числу всех похорон"[2]. Здесь он вплотную подошел к представлению о статистической устойчивости средних. Граунт прекрасно понимал, что точность выводов будет тем выше, чем больше результатов наблюдений.

[1] Ch. Huygens. Oeuvres complétes, Hague, 1920, v. 14, P. 66.

[2] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988, С. 401.

Наиболее значительными работами Петти были "Политическая арифметика" (1676) и "Замечания относительно Дублинских бюллетеней смертности" (1683). В этих работах он подсчитал необходимое количество людей различных профессий как в то время, так и в будущем; величину необходимых налогов; величину народного богатства и доходов; количество населения Лондона и т.п.

Непосредственным продолжателем исследований Граунта и Петти был Эдмунд Галлей (1656–1742), друг Ньютона, воспитанник и профессор Оксфордского университета, а затем директор Гринвичской обсерватории, знаменитый астроном (чьим именем названа комета Галлея). В 1693 г. в изданиях Лондонского Королевского общества он опубликовал две статьи о статистике народонаселения. Галлей ввел в науку понятие о вероятной продолжительности жизни, как о возрасте, которого одинаково можно достигнуть или не достигнуть; на современном языке это медиана длительности жизни (у него нет этих терминов). В вычислениях Галлея заметны использование им принципов, лежащих в основе теорем сложения и умножения вероятностей, а также рассуждения, близкие к формулировке закона больших чисел. Работы Галлея имели важное значение для развития науки и применения статистических исследований к вопросам страхования и народонаселения.

§ 5.3. Возникновение понятия вероятности

Классическое определение вероятности. Введение этого понятия произошло не в результате однократного действия, а заняло длительный промежуток времени, в течение которого происходило совершенствование формулировки. Классическое определение вероятности было подготовлено исследованиями Граунта и Петти, результаты которых убедительно показали преимущества понятия частоты перед понятием численности. Понятие частоты, т. е. отношения числа опытов, в которых появлялось данное событие, к числу всех проведенных опытов, позволяет получить практические выводы, тогда как рассмотрение численностей оставляет исследователя в состоянии неопределенности.

Классическое определение вероятности (в весьма несовершенной форме) впервые появляется у Я. Бернулли, в его сочинении "Искусство предположений" (1713). В первой главе четвертой части этой книги он писал: "Вероятность же есть степень достоверности и отличается от нее, как часть от целого". В эту формулировку Я. Бернулли вкладывал современный смысл, что видно из его последующих слов: "Именно, если полная и безусловная достоверность, обозначаемая нами буквой α или 1 (единицей), будет, для примера, предположена состоящей из пяти вероятностей, как бы частей, из которых три благоприятствуют существованию или осуществлению какого-либо события, остальные же не благоприятствуют, то будет говориться, что это событие имеет $3\alpha/5$ или 3/5 достоверности"[1]. В дальнейшем он писал об отношении числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных, предполагая эти случаи равновозможными, но специально не оговаривая этого. Из его высказываний следует, что Бернулли владел и статистическим понятием вероятности. Им было введено в рассмотре-

[1] Бернулли Я. О законе больших числе. – М.: Наука, 1986, с. 24.

ние и использование понятие вероятности случайного события как числа, заключенного между 0 и 1. Достоверному событию приписывалась единица (максимальное значение), а невозможному – нуль (минимальное значение). Было ясно сказано, что это число может быть определено двумя способами: 1) как отношение числа случаев, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных случаев; 2) как частота события при проведении большого числа независимых испытаний. Можно сказать, что с этого момента начинается история теории вероятностей.

Классическое определение вероятности, предложенное Бернулли, воспринял А. Муавр. Вероятность он определял так: "Следовательно мы строим дробь, числитель которой будет число случаев появления события, а знаменатель – число всех случаев, при которых это может появиться или не появиться, такая дробь будет выражать действительную вероятность его появления"[1]. Как и Я. Бернулли, он специально не отмечал, что все шансы должны быть равновероятными. Замечание о равновероятности шансов впервые было сделано П. Лапласом в его "Аналитической теории вероятностей" (1812).

Геометрическая вероятность. Классическое определение вероятности имеет ограниченную область применения. Часто возникает ситуация, когда оно не действовало, поэтому понадобилось какое-то естественное его расширение.

В 1692 г. в Лондоне был издан английский перевод книги Х. Гюйгенса "О расчетах в азартных играх". Переводчик книги – математик, врач и сатирик Д. Арбутнот (1667–1735) добавил несколько задач, среди которых оказалась задача совсем иной природы, по сравнению с теми, которые рассматривались автором. Задача Арбутнота состояла в следующем: на плоскость наудачу бросают прямоугольный параллелепипед с ребрами, равными *а*, *в*, *с*; как часто параллелепипед будет выпадать гранью *ав*? Решение задачи дано Т. Симпсоном (1710–1761) в книге "Природа и закон случая" (1740). Им предложена следующая идея решения. Опишем около параллелепипеда сферу и спроектируем из центра на ее поверхность все ребра, боковые грани и основания. В результате поверхность сферы будет разбита на шесть непересекающихся областей, соответствующих граням параллелепипеда. Симпсон подвел итог: "Нетрудно заметить, что определенная часть сферической поверхности, ограниченная траекторией, описанной таким образом радиусом, будет находиться в таком же отношении к общей площади поверхности, как вероятность появления некоторой грани к единице"[2]. Сказанное в полной мере выражает принцип разыскания геометрических вероятностей: вводится мера множества благоприятствующих событию случаев и рассматривается ее отношение к мере множества всех возможных случаев. В данном случае полная мера сводится к площади поверхности шара.

Французский естествоиспытатель Бюффон (1707–1788), член Парижской академии наук (1733) и почетный член Петербургской академии наук (1766), дважды публиковал работы, посвященные геометрическим вероятностям (1733, 1777). Он рассматривал следующие задачи: 1) пол разграфлен на одинаковые фигуры (прямоугольники); на пол бросается монета, диаметр которой $2r$ меньше

[1] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988, с. 404.

[2] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988, С. 405.

каждой из сторон прямоугольника, и монета целиком укладывается внутрь фигуры; чему равна вероятность того, что брошенная наудачу монета пересечет одну или две стороны фигуры? 2) на плоскость, разграфленную равноотстоящими параллельными прямыми, наудачу бросается игла; один игрок утверждает, что игла пересечет одну из прямых, другой – что не пересечет; определить вероятность выигрыша каждого игрока; 3) тот же вопрос для случая, когда игла бросается на плоскость, разграфленную на квадраты.

После Бюффона задачи на геометрические вероятности стали систематически включаться в монографии и учебные пособия по теории вероятностей. Все задачи Бюффона были включены в книгу Лапласа "Аналитическая теория вероятностей" (без указания источника). Довольно большой раздел, посвященный геометрической вероятности, имеется в учебнике В.Я. Буняковского (1804–1889) "Основания математической теории вероятностей" (1846). В исследование вопросов, связанных с геометрическими вероятностями, внесли вклад Г. Ламе (1795–1870) и Д. Сильвестр (1814–1897). Ламе рассматривал задачу Бюффона о бросании иглы для случаев эллипса или правильного многоугольника. Сильвестр первым расширил тематику задач на геометрические вероятности. Он предложил задачу, позже названную его именем: внутри выпуклой области наудачу зафиксированы четыре точки; чему равна вероятность того, что, взяв эти точки в качестве вершин, можно составить выпуклый четырехугольник?

На необходимость совершенствования понятия геометрической вероятности обратил внимание Ж. Бертран (1822–1900) в своей книге "Исчисление вероятностей" (1899). Критика Бертрана привлекла внимание математиков к общим вопросам логического обоснования теории вероятностей.

§ 5.4. Основные теоремы теории вероятностей

Важным шагом на пути формулировки теоремы сложения вероятностей были работы Паскаля, в которых можно усмотреть, что он отчетливо понимал, как следует подсчитывать число благоприятствующих шансов для события A, если известны шансы для несовместных событий A_i, составляющих событие A.

В работах Я. Бернулли и Н. Бернулли предложена отчетливая формулировка правила вычисления вероятности противоположного события по известной вероятности прямого события.

Я. Бернулли при выводе формулы, названной его именем, сознательно использовал правила сложения и умножения вероятностей, хотя самих правил явно не сформулировал. Его замечание, высказанное при решении одной задачи, показывает, что он отчетливо понимал особенности теоремы сложения для совместных событий. Я. Бернулли вплотную подошел к предложению, которое записывают теперь формулой $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. Можно сказать, что рядом с этим предложением (но не для вероятностей, а для числа шансов) находился и Д. Кардано. В главе XIV "О соединении очков" своей "Книги об игре в кости" он подсчитывал при бросании двух костей число случаев выпадения хотя бы на одной из них одного очка. Одно очко может появиться шестью различными способами на первой кости: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) и столькими же – на второй. Поскольку случай (1, 1) встречается дважды, то число всех таких случаев будет не 12, а 11.

Однако, как ни важны частные утверждения указанных авторов, в их сочинениях нет формулировки теоремы сложения вероятностей.

Первая четкая формулировка этого важнейшего положения теории вероятностей дана в работе Т. Бейеса (1702–1761) "Опыт решения задач по теории вероятностей...", зачитанной на заседании Лондонского Королевского общества 27 декабря 1763 г., спустя два года после смерти автора. В начале работы дано определение несовместимых событий, сам Бейес употреблял другой термин – "неплотные события". Он писал: "несколько событий являются неплотными, если наступление одного из них исключает наступление других". Далее рассматривается предложение I следующего содержания: "Если несколько событий являются неплотными, то вероятность того, что наступит какое-то из них, равна сумме вероятностей каждого из них".

В течение длительного времени формировалась и теорема умножения вероятностей при рассмотрении частных примеров и подсчете числа шансов, благоприятствующих наступлению произведения двух или нескольких событий. Такие рассмотрения и подсчеты встречаются почти у всех предшественников Я. Бернулли, а также у него самого.

Четкое выделение теоремы умножения вероятностей дал Муавр в своем "Учении о случаях". Во введении к этому сочинению он определил важное понятие независимости событий: "Мы скажем, что два события независимы, когда каждое из них не имеет никакого отношения к другому, а появление одного из них не оказывает никакого влияния на появление другого". Им дано определение и зависимых событий: "два события зависимы, когда они связаны друг с другом и когда вероятность появления одного из них изменяется при появлении другого". Эти определения иллюстрируются примером. Муавр ввел понятие условной вероятности и сформулировал теорему умножения: "... вероятность появления двух зависимых событий равна произведению вероятности появления одного из них на вероятность того, что другое должно появиться, если первое из них уже появилось. Это правило может быть обобщено на случай нескольких событий". Далее он подробно остановился на последнем утверждении. Муавр рассмотрел ряд задач на применение его теоремы. В одной из них он нашел, что если события A, B, C независимы в совокупности и x, y, z – их вероятности, что xyz – вероятность появления всех трех событий, а $1-(1-x)(1-y)(1-z)$ – вероятность наступления хотя бы одного из них.

Из теоремы умножения Бейес получил следствие о вычислении вероятности $P(B/A)$ по вероятностям $P(AB)$ и $P(A)$. Этот результат дал основание приписать Бейесу формулы, носящие его имя и которых у него нет, так как ему была неизвестна формула полной вероятности.

Словесную формулировку "правила Бейеса"

$$P(B_i/A)=P(B_i)P(A/B_i)\Big/\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A/B_k)$$

дал Лаплас в "Опыте философии теории вероятностей". Предложение Лапласа содержит и формулу полной вероятности, которой с начала XVIII в. широко пользовались в своих работах многие математики, занимавшиеся вопросами теории вероятностей.

§ 5.5. Развитие теории ошибок измерений

Основы теории ошибок измерений заложил Г. Галилей, который ввел ряд важнейших понятий, сохранивших значение и в наши дни.

Интерес к ошибкам измерений возрос позднее под влиянием астрономических и геодезических наблюдений. Знаменитый астроном-наблюдатель Тихо Браге (1546–1601) обратил внимание на то, что каждое измерение сопряжено с ошибкой и точность измерений повышается, если взять среднее арифметическое результатов нескольких наблюдений.

Первые попытки построить математическую теорию ошибок измерений принадлежат английским математикам, членам Лондонского Королевского общества Р. Котсу (1682–1716), Т. Симпсону (1710–1761) и Д. Бернулли. Предположения, высказанные этими учеными о закономерностях распределения ошибок измерений, были различными. Роджер Котс считал, что ошибки распределены равномерно на некотором отрезке $[-a, a]$. Томас Симпсон исходил из того, что малые ошибки встречаются чаще, чем большие и ограничены по модулю. Приняв для ошибок измерений дискретное треугольное распределение вероятностей, симметричное относительно оси ординат, с максимумом на этой оси, он доказал, что при таком распределении среднее арифметическое дает большую точность, чем каждое отдельное измерение. Этот результат был опубликован в его работе "О преимуществе выбора среднего из некоторого числа наблюдений в практической астрономии" (1755). Следует отметить, что Симпсон, как и Котс, не рассматривали в сущности плотности распределения, так как полагали, что ошибки укладываются в арифметическую прогрессию с очень малой разностью и неопределенным числом возможных значений.

В работе Д. Бернулли "Наиболее вероятное определение по нескольким расходящимся между собой наблюдениям и устанавливаемое отсюда правдоподобное заключение", опубликованной в 1778 г. в изданиях Петербургской академии наук, впервые был высказан и использован для оценки неизвестного параметра принцип максимального правдоподобия. К этой работе Эйлер написал комментарий, в котором были высказаны замечания относительно указанного принципа и предложение отбрасывать результаты наблюдений, далекие от истинного значения параметра, поскольку они маловероятны.

Термин "теория ошибок измерений" предложил немецкий ученый И. Ламберт (1728–1777), который в своих статьях (1760, 1765) изложил цели этой теории, свойства погрешностей, оценку точности измерений и правила подбора кривых по наблюдаемым точкам, содержащим случайные ошибки. Позднее появилась работа Лагранжа, посвященная выяснению роли среднего арифметического результатов измерений при оценке истинного значения измеряемой величины.

Дальнейшее развитие теории ошибок наблюдений связано с именами Лапласа, Гаусса, Лежандра.

Лаплас получил ряд важных результатов в этой теории, которые вошли в практику обработки данных наблюдений. Гаусс и Лежандр предложили и разработали метод наименьших квадратов. Гаусс указывал на то, что он пользовался этим методом с 1795 г.; метод наименьших квадратов изложен во второй части его трактата "Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям" (1809). Лежандр изложил свои идеи в работе "Новые методы для определения орбит комет" (1806), к которой было сделано дополнение "О методе наименьших квадратов". Предложенный метод восприняли другие ученые и начали систематически использовать его в своей практической работе.

Теория ошибок измерений привлекла внимание всех видных специалистов в области теории вероятностей. П.Л. Чебышев, А.А. Марков и многие другие уделяли внимание как методу наименьших квадратов, так и другим вопросам теории ошибок наблюдений.

§ 5.6. Формирование понятий случайной величины, математического ожидания и дисперсии

С понятием случайной величины впервые встретились Я. Бернулли, Н. Бернулли, Муавр. Я. Бернулли рассматривал число появлений события A в n независимых испытаниях. В настоящее время это число рассматривается как случайная величина, которая может принимать значения 0, 1, 2, ... , n с вероятностями, определяемыми формулой Бернулли. Муавр ввел в рассмотрение нормальное распределение вероятностей. Однако эти ученые явно не сформулировали новое понятие – понятие случайной величины, необходимость введения которого уже явно ощущалась. Я. Бернулли оставался на уровне схемы последовательных случайных событий. У Муавра нормальное распределение было лишь аппроксимирующей функцией, дающей хорошее приближение к точному значению искомых вероятностей.

С течением времени ученые начали представлять себе, что возможные значения, принимаемые ошибками наблюдений, заполняют целый промежуток, вероятности возможных значений определялись посредством плотности распределения. Лаплас, Гаусс, Лежандр под плотностью распределения понимали неотрицательную функцию, интеграл от которой по всей числовой прямой равен единице, а вероятность попадания значений в некоторый промежуток равна определенному интегралу от плотности по этому промежутку.

Многочисленные исследования ряда видных математиков подготовили почву для введения в научный обиход понятия случайной величины. Первый шаг был сделан Пуассоном в мемуаре "О вероятности средних результатов наблюдений" (1832). Самого термина "случайная величина" у него еще не было, он говорил о "некоторой вещи", которая может принимать значения $a_1, a_2, \ldots, a_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Пуассон рассматривал также непрерывные случайные величины и плотности их распределения. Его термин "вещь" не привился и перестал употребляться. П.Л. Чебышев в своих мемуарах по теории вероятностей использует термин "величина" и автоматически предполагает независимыми все рассматриваемые случайные величины. В работах А.М. Ляпунова уже применяется термин "случайная величина" и всюду, где это необходимо, оговаривается, что имеются в виду независимые случайные величины. Ляпунов приводит современное определение функции распределения и формулу $P(a \le \xi \le b) = F(b) - F(a)$.

Определение случайной величины, предложенное Пуассоном, представляет собой скорее описание реального объекта изучения, обращение к интуиции, полученной в результате практического и научного опыта. Такое описание применяется и в настоящее время на начальных ступенях педагогического процесса, связанного с изложением основ теории вероятностей.

Чтобы случайная величина приобрела статус полноценного математического понятия, ей необходимо было дать строго формализованное определение. Это было сделано А.Н. Колмогоровым в конце двадцатых годов в небольшой статье, посвященной аксиоматике теории вероятностей, а затем подробно изложено в его книге "Основные понятия теории вероятностей" (1936).

Понятие математического ожидания в самых начальных его элементах было введено рано – оно появилось впервые в переписке Паскаля и Ферма. В более явной форме это понятие ведено Гюйгейнсом. Сам термин "математическое ожидание" был предложен Схоотеном – учителем Гюйгенса. Новому термину в ту пору придавался смысл ожидания средней цены, которую можно дать за приобретение случайной величины, дающей выигрыш x_1 с вероятностью p_1, выигрыш x_2 с вероятностью p_2,..., выигрыш x_n с вероятностью p_n. Н. Бернулли в своей книге "О применении искусства предположений в вопросах права" (1709) рассматривал ожидание для случайных величин, принимающих не только два или три значения, но и большее число значений. Он сравнивал формулу для вычисления, математического ожидания с правилом вычисления координат центра тяжести системы материальных точек. Этим объясняется другое название "математического ожидания" – "центр распределения", заимствованное из механики: если в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ оси Ox находятся соответственно массы $p_1, p_2, \dots, p_n$, то координата x центра тяжести системы материальных точек вычисляется по формуле

$$x = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k p_k\right) \Bigg/ \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = M(X) \qquad \left(\text{ибо } \sum_{k=1}^{n} p_k = 1\right).$$

В курсе лекций по теории вероятностей, которые читал П.Л. Чебышев в Петербургском университете, шла речь о величинах (случайных), их математическом ожидании и дисперсии. Эти лекции были записаны А.М. Ляпуновым. Впоследствии их переписал А.Н. Крылов и издал в 1936 г. В записках лекций имеются формулировки и доказательства теорем о математическом ожидании и дисперсии суммы случайных величин, при этом предполагается, что речь идет о независимых случайных величинах. Здесь же Чебышев привел и вывод знаменитого неравенства, позже названного его именем. Утверждение о том, что дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых, использована Чебышевым в его статье "О средних величинах"; там же впервые в печати встречается и неравенство Чебышева.

В учебниках по теории вероятностей, опубликованных в первой четверти XX в. (в 1913, в 1924 г.) уже строго доказываются и теорема о математическом ожидании произведения и теорема о математическом ожидании суммы со специальным упоминанием о том, что последняя верна не только для независимых случайных величин.

Ответы на вопросы

§ 1.1.

14. (A, B), (A, A), (B, A), (B, B), где A – герб, B – цифра; запись (A, B) означает, что на первой монете выпал герб, на второй – цифра.

§ 1.5.

4. $P(A) = l_1/l$, где l – длина данного отрезка $[a, b]$, l_1 – длина отрезка $[c, d] \subset [a, b]$.

§ 2.2.

8. Нельзя. Для непрерывной случайной величины X $P(X = \alpha) = 0$ (см. формулу (2.2.8)), однако событие $(X = \alpha)$ не является невозможным. **10.** Эта функция имеет разрывы.

§ 2.4.

7. Величины X и Y должны быть независимыми.

§ 2.5.

4. Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины вокруг ее математического ожидания. **13.** Математическому ожиданию каждой из этих величин. Указание. См. пример 12. **14, 15.** Указание. См. пример 12.

§ 2.6.

9. $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = M(X)$. Указание. См. пример 1. **10.** $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$. Указание. См. пример 2. **11.** $\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$. Указание. См. пример 3. **12.** $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$.

§ 2.8.

5. Таблица совместного распределения двух дискретных случайных величин позволяет определить вероятности сложных случайных событий: "случайная величина X примет значение $x_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, а случайная величина Y – значение $y_k (k = 1, 2, \ldots, n)$. **6.** С помощью формул (2.8.2) и (2.8.3). **7.** С помощью законов распределения случайных величин X и Y их математические ожидания и дисперсии можно вычислить по формулам:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(X = x_i); \quad M(Y) = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot P(Y = y_k);$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - M(X))^2 \cdot P(X = x_i); \; D(Y) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - M(Y))^2 \cdot P(Y = y_k).$$

9. С помощью равенств (2.8.5) и (2.8.6). **18.** Ничего. **21.** 1) $|r(X, Y)| \le 1$; 2) если случайные величины X и Y независимы, то $|r(X,Y)| = 0$; 3) если $Y = AX + B$, где A и B постоянные, то $|r(X,Y)| = 1$; причем $r(X,Y) > 0$, если $A > 0$; $r(X,Y) < 0$, если $A < 0$. **22.** Если случайные величины X и Y независимы, то $r(X,Y) = 0$. Однако, когда $r(X,Y) = 0$, то это еще не означает, что величины X и Y независимы.

§ 3.1.

1. Испытания должны быть независимы друг от друга, а условия их проведения неизменными. **3.** Закон распределения можно записать посредством таблицы:

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

4. Сумма коэффициентов, стоящих на четных местах в биноме Ньютона, равна сумме коэффициентов на нечетных местах. Вероятность появления герба и цифры одинаковы: $p = q = 0{,}5$; $P_r = P_н$. **5.** Это число находится по формуле (3.1.5). **6.** Указание. См. формулу (3.1.6). **7.** По формуле (3.1.7). **8.** По формулам (3.1.8) – (3.1.11).

§ 3.2.

1. Биномиальным распределением называется распределение, определяемое формулой Бернулли. **2.** Слово "биномиальный" в названии распределения объясняется тем, что правая часть формулы $P_n(k) = \ = C_n^k p^k q^{n-k}$ является общим членом разложения бинома

$$(q+p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + C_n^k q^{n-k} p^k + \ldots + p^n.$$

3. $M(X) = np$. **4.** $D(X) = npq$. **5.** $\sigma(X) = \sqrt{npq}$. **7.** $P_n(k+1) = = \dfrac{p}{q}\dfrac{n-k}{k+1}P_n(k)$. Указание. См. пример 9. **8.** Полиномиальное распределение определяется формулой

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m},$$

где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, $p_1 + p_2 + \ldots p_m = 1$. Указание. См. формулу (3.1.12). **9.** Биномиальное распределение – частный случай полиномиального распределения.

§ 3.3.

1. Потому, что вероятность p появления события A в одном испытании очень мала. **2.** Когда вероятность p появления случайного события в одном испытании стабильна и достаточно мала; количество n независимых событий является достаточно большим. **3.** См. формулу (3.3.1). **4.** Число k. **5.** Независимость испытаний друг от друга, неизменность вероятности p. **6.** Формула Пуассона – это приближенная формула, заменяющая формулу Бернулли в случае, когда число n испытаний велико, а вероятность p мала. **7.** $M(X)=a$, $D(X)=a$, где $a=np$. **8.** Поскольку $M(X)=a$, $a=np$, $a<p<<1$ (значительно меньше единицы), то $M(X)<<n$ (значительно меньше n). **9.** Так как $P_n(0)=e^{-a}$, $P_n(1)=ae^{-a}$, то при $a=1$ $P_n(0)=P_n(1)$; $P_n(1)>P_n(0)$, когда $a>1$; $P_n(1)<P_n(0)$, когда $a<1$.

§ 3.4.

2. См. формулу (3.4.3). **3.** См. формулу (3.4.6). **4.** $M(X)=(\alpha+\beta)/2$. **5.** $D(X)=(\beta-\alpha)^2/12$. **6.** $\sigma(X)=(\beta-\alpha)/2\sqrt{3}$. **7.** См. формулу (3.4.4). **8.** См. формулу (3.4.2).

§ 3.5.

8. По формуле (3.5.3). **9.** С помощью формулы (3.5.2). **10.** По формуле (3.5.4).

§ 3.6.

7. См. формулу (3.6.7). **8.** $M(X)=\sigma(X)$. Указание. См. примеры 6 и 7. **9.** $D(X)=1/\alpha^2$. **10.** По формуле (3.6.8). См. пример 8.

§ 4.2.

2. См. формулу (4.2.1). **3.** См. формулу (4.2.2). **4.** См. формулу (4.2.3). **5.** См. формулу (4.2.4). **7.** См. формулу (4.2.5). **8.** См. формулу (4.2.6). **9.** Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, имеют математические ожидания и дисперсии, ограниченные одним и тем же числом. **10.** Теорема Бернулли – частный случай теоремы Чебышева для одинаково распределенных случайных величин: $M(X_i)=a$ $(i=1,2,\dots,n)$.

§ 4.3.

2. См. формулу (4.3.1). **3.** См. формулы (4.3.2) – (4.3.4). **5.** См. формулу (4.3.5). **6.** См. формулу (4.3.7). **7.** При $npq\geq 10$. **8.** По формуле (4.3.9). **9.** Формулой (4.3.8). **10.** Указание. См. § 3.5, пример 4.

Биографический словарь

Бейес, или Байес, Томас (1702–1761) – английский математик, член Лондонского Королевского общества (с 1742 г.). Основные труды относятся к теории вероятностей. В частности, он поставил и решил ряд задач элементарной теории вероятностей.

Бернулли – семейство швейцарских математиков, родоначальником которого был выходец из Голландии Якоб Бернулли (умер в1583 г.). В различных поколениях Бернулли математиками были: Якоб (1654–1705), Иоганн (1667–1748), Николай (1687–1759), Николай (1695–1726), Даниил (1700–1782), Иоганн (1744–1807), Якоб (1759–1789).

Бернулли Даниил занимался физиологией и медициной, но больше всего математикой и механикой. В 1725–1733 гг. работал в Петербургской академии наук, затем был избран ее почетным членом. В Базеле был профессором анатомии и ботаники (с 1733 г.), профессором физики (с 1750 г.). В математике Даниилу Бернулли принадлежат: метод численного решения алгебраических уравнений с помощью возвратных рядов, работы по обыкновенным дифференциальным уравнениям, по теории вероятностей с приложением к статистике народонаселения и отчасти к астрономии, по теории рядов. В работах, завершенных написанным в Петербурге трудом "Гидродинамика" (1738), вывел основное уравнение стационарного движения идеальной жидкости, носящее его имя. Разрабатывал кинетические представления о газах.

Бернулли Николай (1687–1759) – швейцарский математик. Родился в Базеле, учился в Базельском университете. Был профессором математики в Падуе, а затем профессором логики и права в Базельском университете. Его исследования посвящены теории вероятностей, интегральному исчислению, демографии.

Бернулли Якоб (1654–1705) – швейцарский математик, профессор Базельского университета (с 1687 г.). Ему принадлежат важные заслуги в развитии анализа бесконечно малых, начало которому положила работа Лейбница, опубликованная в 1684 г. Ознакомившись с этой работой в 1687 г. он сразу правильно оценил ее значение и стал первым последователем нового исчисления. Я. Бернулли применил новые идеи к изучению свойств ряда кривых: открытой им лемнискаты, логарифмической спирали, цепной линии и др. Он вычислил площади многих плоских фигур, площади поверхностей и длины линий. Другие работы Я. Бернулли относятся к алгебре, арифметике, геометрии, теории рядов, теории вероятностей, а также к физике. Его книга "Арифметические приложения о бесконечных рядах и их конечных суммах" явилась первым руководством по теории рядов. В книге "Искусство предположений" доказал теорему (названную позже его именем), имеющую важное значение в теории вероятностей и ее приложениях к статистике.

Бертран Жозеф Луи Франсуа (1822–1900) – французский математик, член Парижской академии наук, иностранный почетный член Петербургской академии наук. Он установил некоторые специальные признаки сходимости числовых рядов. Его гипотеза, носящая название "постулат Бертрана": между числами n и $2n-2$ при $n \geq 4$, лежит, по крайней мере, одно простое число – доказана П.Л. Чебышевым. Важное значение имеют работы, относящиеся к дифференциальным уравнениям динамики и теории вероятностей. Является автором руководств по математике для средней и высшей школы.

Буняковский Виктор Яковлевич (1804–1889) – русский математик, член Петербургской академии наук (1830 г., адъюнкт с 1828 г.) и ее вице-президент (1864–1889). Математическое образование получил за границей, в Париже защитил диссертацию и получил степень доктора математики (1825 г.). С 1826 г. начинается его педагогическая и научная деятельность в Петербурге. Преподавал сначала в Первом кадетском корпусе, затем в Морском корпусе (1827–1862), в Институте инженеров путей сообщения (1830–1846). Читал курсы аналитической механики, теории вероятностей и математического анализа в Петербургском университете (1846–1859). Составил обширный "Лексикон чистой и прикладной математики" (вышел только 1-й том в 1839 г.), написал учебник арифметики для средней школы (1844, 1849). Опубликовал 128 научных работ, около половины из них относится к теории вероятностей, а остальные – к проблемам анализа, геометрии, алгебры. Его "Основания математической теории вероятностей" (1846) включали оригинальное изложение теоретических вопросов и приложения к страхованию, демографии и т.п. С 1858 г. он был главным экспертом правительства по вопросам статистики и страхования.

Бюффон Жорж Луи Леклерк (1707–1788) – французский естествоиспытатель, член Парижской академии наук, иностранный почетный член Петербургской академии наук. Учился в колледже Дижона, увлекался математикой и физикой. Позже стал известным ботаником; с 1739 г. был директором ботанического сада в Париже. В своем "Опыте нравственной арифметики" (1760) отвел особое место двенадцатиричной системе счисления; он впервые стал заниматься задачами на геометрические вероятности.

Галилей Галилео (1564–1642) – итальянский физик, механик, астроном и математик, член Национальной академии деи Линчеи в Риме (с 1611). В 1589 г. он получил кафедру математики в Пизе, а в 1592 г. – в Падуе. Основные его работы относятся к механике: открытие закона инерции, закона падения тел и др. В сочинении "Диалог о двух главнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой" (1632) Галилей развивал учение Коперника о движении Земли. Это сочинение вызвало гнев инквизиции и было запрещено. После допросов в июне 1633 г. Галилей отрекся от учения Коперника. Галилей является одним из предшественников теории вероятностей. В частности, он первый явно сформулировал вероятностные свойства случайных погрешностей.

Галлей Эдмунд (1656–1742) – английский астроном, геофизик и математик, член Лондонского Королевского общества. С 1720 г. директор Гринвичской обсерватории. В 1705 г. предсказал появление кометы в 1758 г., которую назвали его именем. Автор исследований по теории вероятностей и математической статистике.

Гаусс Карл Фридрих (1777–1855) – немецкий математик, астроном, физик и геодезист, член Лондонского королевского общества (1804), Парижской академии наук (1820), Петербургской академии наук (1824). Родился в Брауншвейге в семье водопроводчика. В раннем детстве обнаружил выдающиеся математические способности. Учился в Гёттингенском университете (1795–1798). После защиты диссертации получил право на приват-доцентуру в Брауншвейге (1799). С 1807 г. – профессор математики и астрономии в Геттингенском университете, директор астрономической обсерватории. Научные исследования Гаусса были чрезвычайно разнообразными. Его работы оказали большое влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории вероятностей, геодезии, небесной механики, астрономии, теории электричества и магнетизма. Гаусс предложил несколько вариантов доказательства основной теоремы алгебры (любой многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень), построил теорию комплексных чисел. Он исследовал уравнения $x^n - 1 = 0$, установил связь между методами решения этих уравнений и построением правильных многоугольников. Впервые после древнегреческих ученых им сделан шаг вперед в этом вопросе: он нашел все те значения n, для которых правильный n-угольник можно построить циркулем и линейкой. В частности, решив уравнение $x^{17} - 1 = 0$, Гаусс дал построение правильного 17-угольника с помощью циркуля и линейки. В 1818 г. Гаусс пришел к мысли о возможности построения неевклидовой геометрии. Опасаясь, что его идеи не будут поняты, он далее не разрабатывал их и не опубликовывал. К публикациям Н.И. Лобачевского по неевклидовой геометрии Гаусс отнесся с большим вниманием. По инициативе Гаусса Н.И. Лобачевский был избран членом-корреспондентом Геттингенского ученого общества. Ряд работ по физике Гаусс выполнил совместно с физиком В. Вебером (1804–1891). Вместе с ним он создал абсолютную систему электромагнитных единиц (1832), сконструировал первый в Германии электромагнитный телеграф (1833).

Гюйгенс Христиан (1629–1695) – голландский механик, физик, математик. Учился в университетах Лейдена (1645–1647) и Бреды (1647–1649). В 1665–1681 гг. жил в Париже, с 1681 г. – в Гааге. Первый иностранный член Лондонского Королевского общества (с 1663 г.), член Парижской академии наук (с 1666 г.) и ее первый президент (1666–1681). Он создал волновую теорию света, развил ряд важнейших понятий механики, заложил основы теории удара, построил первые часы с маятником. Гюйгенс совместно с Р. Гуком установил постоянные точки термометра – точку таяния льда и точку кипения воды. В 22 года он опубликовал первую математическую работу об определении длин дуг окружности, эллипса и гиперболы. В последующих математических трактатах им исследованы циклоида, логарифмическая спираль, цепная линия (он ввел этот термин) и другие линии. Написал одно из первых сочинений по теории вероятностей.

Кардано Джероламо (1501–1576) – итальянский математик, философ, врач. Родился в Павии, где затем окончил университет (1521 г.). Доктор медицины (с 1526 г.), был практикующим врачом. С 1534 г. читал лекции по математике и медицине в Миланском университете. Профессор Павийского университета (с 1539 г.), Болонского университета (около 1560 г.). Его математические работы сыграли большую роль в развитии алгебры. Именем Кардано названа формула решения в радикалах неполного кубического уравнения, которая им позаимствована у Н. Тарталья. Он одним из первых в Европе рассматривал отрицательные и мнимые корни уравнений. В механике занимался вопросами передачи движения, теорией рычагов (карданная передача, карданов подвес).

Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) – советский математик, академик АН СССР (с 1939 г.) и Академии педагогических наук СССР (с 1966 г.), Герой Социалистического Труда (с 1963 г.), почетный член многих иностранных академий. Окончил Московский университет, работал там же. Его научные интересы были весьма разнообразны: теория функций действительного переменного, дифференциальные уравнения, функциональный анализ, конструктивная логика, топология, механика, теория информации, применение математических методов в военном деле, биологии, технике, лингвистике. Основополагающее значение имеют работы Колмогорова в области теории вероятностей.

Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) – французский математик и механик, член Берлинской АН (1759) и директор ее физико-математического класса (1766–1787), почетный член Парижской академии наук (1772), почетный член Петербургской академии наук (1776). Родился в Турине (Италия), где затем окончил университет и с 17 лет начал преподавать математику в Артиллерийской школе. В 1759–1787 гг. работал в Берлине, а с 1787 г. – в Париже: профессор Нормальной школы (1795), Политехнической школы (1797). Лагранж вместе с Эйлером заложили основы вариационного исчисления. Ему принадлежат выдающиеся исследования по математическому анализу, в котором его именем названы: форма остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений, функция и множители для определения условного экстремума, интерполяционная формула, по различным вопросам дифференциальных уравнений (теория особых решений, метод вариации произвольных постоянных и др.), по алгебре и теории чисел, механике, астрономии, математической картографии и др. Лагранж впервые ввел в рассмотрение тройные интегралы, предложил обозначения для производной $(y', f'(x))$ и для функции арксинус (arcsin). Парижская академия наук дважды присуждала премии Лагранжу за его научные работы.

Ламе Габриель (1795–1870) – французский математик, физик и инженер, член-корреспондент Петербургской академии наук (1829), член Парижской академии наук (1843), профессор Политехнической школы (1832–1863), Парижского университета (1848–1863). Родился в Туре, окончил в Париже Политехническую школу (1817) и Горную школу (1820). В 1820–1831 гг. работал в Институте корпуса инженеров путей сообщения

(Петербург), где читал курсы математики, физики, прикладной механики, разрабатывал проекты мостов, консультировал строителей Исаакиевского собора. Основные научные исследования относятся к математической физике и теории упругости. Ламе (совместно с Клапейроном) впервые ввел цилиндрические координаты (1828). Он разработал общую теорию криволинейных координат (1833), ввел специальный класс функций (функции Ламе, 1839) и ныне называемые коэффициенты Ламе (1859).

Лаплас Пьер Симон (1749–1827) – французский математик, физик и астроном, член Парижской академии наук (1785, адъюнкт с 1773), член Французской академии (1816), почетный член Петербургской академии наук (1802). Родился в крестьянской семье в провинции Нормандия, учился в школе бенедиктинцев. В 1766 г. приехал в Париж, где с помощью Д'Аламбера получил должность профессора математики в Военной школе. Активно участвовал в реорганизации системы высшего образования во Франции, в создании Нормальной и Политической школы. В 1790 г. он назначен председателем Палаты мер и весов, руководил введением в практику новой метрической системы мер. Во времена Наполеона был министром внутренних дел (1799). Лаплас развил методы небесной механики и завершил почти все то, что не удалось его предшественникам в объяснении движения тел Солнечной системы на основе закона всемирного тяготения Ньютона. В области математики ему принадлежат фундаментальные исследования по дифференциальным уравнениям, теории вероятностей, алгебре.

Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918) – русский математик и механик, академик Петербургской академии наук (1901, член-корреспондент – с 1900 г.), иностранный член-корреспондент Парижской академии наук (1916). Окончил Петербургский университет (1880); ученик П.Л. Чебышева. Преподавал в Харьковском университете (доцент – с 1885 г., профессор – с 1892 г.). Работал в Петербурге (с 1902 г.) и в Одессе (с 1917 г.). Он создал современную теорию устойчивости равновесия и движения механических систем, определяемых конечным числом параметров. Выдающейся его заслугой является построение общего метода для решения задач об устойчивости. На его идеях и методах основаны все работы отечественных и зарубежных ученых по теории устойчивости, выполненные после исследований Ляпунова. Он впервые строго поставил вопрос и посредством тонкого математического анализа исследовал устойчивость фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости. Ему принадлежат также работы по математической физике и теории вероятностей.

Марков Андрей Андреевич (1856–1922) – русский математик, академик Петербургской академии наук (с 1890 г.). Окончил Петербургский университет, в котором и работал с 1880 по 1922 г. (с 1886 г. – профессор, с 1905 г. – заслуженный профессор). Основные его труды относятся к теории чисел, теории вероятностей и математическому анализу. Установил ряд закономерностей, положивших начало всей современной теории марковских процессов.

Муавр Абрахам де (1667–1754) – английский математик, член Лондонского Королевского общества, член Парижской и Берлинской академий наук. Его именем названа предложенная им формула возведения в n-ю степень и извлечения корня n-й степени из комплексных чисел. Исследовал степенные ряды. В теории вероятностей доказал частный случай теоремы Лапласа.

Остроградский Михаил Васильевич (1801–1862) – русский математик, академик Петербургской академии наук (с 1830, адъюнкт с 1828), иностранный член Парижской академии наук (1856) и многих других академий. Учился в Харьковском университете (1816–1820), слушал лекции знаменитых французских математиков (О. Коши, П. Лапласа, Ж. Фурье и др.) в Париже (1822–1828). По возвращении на родину преподавал в учебных заведениях Петербурга. Основные его труды относятся к математическому анализу, теоретической механике, математической физике. Он известен своими работами по алгебре, теории чисел, теории вероятностей. Его именем названы теорема о связи тройного интеграла по объему с интегралом по поверхности, ограничивающей этот объем, метод выделения рациональной части интеграла. Он первым установил правила замены переменных в двойном и тройном интеграле. Ему принадлежит ряд популярных статей, педагогических исследований, а также превосходных для своего времени учебников. Остроградский создал русскую школу прикладной механики. Его учеником был и уроженец Речицкого уезда (ныне Гомельской области) Н.Ф. Ястржембский (1808–1874), профессор Института корпуса сообщения (Петербург), лауреат Демидовской премии, инженер, по проектам и под руководством которого на территории Белоруссии построен ряд участков дорог, мостов и других сооружений.

Паскаль Блез (1623–1662) – французский математик, физик, философ и писатель. В 16-летнем возрасте написал свою первую научную работу, в которой содержалась одна из важных теорем проективной геометрии, позже названная его именем. Через два года сконструировал счетную машину, окончательный вариант которой построил в 1644 г. Опубликовал ряд работ по арифметике, алгебре, теории чисел и теории вероятностей. Он первым предложил метод математической индукции и применил его для доказательства теорем. Паскаль – один из предшественников Ньютона и Лейбница, создавших дифференциальное и интегральное исчисление.

Пачоли Лука (ок. 1445 – ок. 1514) – итальянский математик, монах. Преподавал математику в различных городах Италии. Автор книги "Сумма [знаний] по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности" (1494), посвященной арифметическим действиям, алгебраическим уравнениям и их применениям в геометрии. В 1496–1499 гг. под влиянием своего друга Леонардо да Винчи написал трактат "О божественной пропорции", содержащий теорию геометрических пропорций, в частности золотого сечения. Перевел на итальянский язык и издал (1509) "Начала" Евклида.

Пуассон Симеон Дени (1781–1840) – французский математик, механик, физик, член Парижской академии наук (1812), иностранный почетный член Петербургской академии наук (1826). Окончил Политехническую школу в Париже (1800), работал в Парижском университете (с 1806 г. профессор). Основные труды относятся к теоретической и небесной механике, математической физике. Ему принадлежат работы по интегральному исчислению (интеграл Пуассона), теории вероятностей, где он впервые ввел термин "закон больших чисел", доказал одну из предельных теорем (теорема Пуассона), предложил названное его именем распределение вероятностей случайных величин. В теории потенциала ввел так называемое уравнение Пуассона и применил его к решению задач по гравитации и электростатике. Решил ряд задач по теории упругости. Исследовал вопросы теплопроводности, магнетизма, капиллярности и др.

Сильвестр Джеймс Джозеф (1814–1897) – английский математик, член Лондонского королевского общества (с 1839), иностранный член-корреспондент Петербургской академии наук (1872). Окончил Кембриджский университет (1837). Одно время был адвокатом. Профессор Виргинского университета (1841–1845), математик в страховой компании (1845–1855), профессор Королевской академии в Вулидже (1855–1870). В 1876–1883 гг. – профессор университета Джона Гопкинса в Балтиморе (США). Основатель и первый редактор первого американского математического журнала (1878–1883). По возвращении в Англию получил кафедру в Оксфордском университете (1883–1897). Основные работы по алгебре, теории чисел, механике и математической физике.

Симпсон Томас (1710–1761) – английский математик, член Лондонского королевского общества (с 1746 г.). Математику изучал самостоятельно. Был ткачом шелковых тканей, школьным учителем, а затем профессором математики Вулиджской военной академии (с 1743 г.). Основные работы по геометрии, тригонометрии, математическому анализу и его приложениям к механике. В 1743 г. вывел формулу приближенного интегрирования (формула Симпсона).

Тарталья Николо (ок. 1499–1557) – итальянский математик. Самостоятельно изучал латинский и греческий языки, математику. В 1535 г. прославился блестящей победой на публичном математическом диспуте с математиком Фиоре. Темой диспута был вопрос о решении кубического уравнения, неизвестного до того времени в науке. Открытый им метод решения уравнения третьей степени он сообщил Д. Кардано, который опубликовал его в своей книге (1545). Основные труды Тартальи относятся к арифметике, алгебре, геометрии, механике, баллистике, геодезии, фортификации. В сочинении "Новая наука" (1557) Тарталья показал, что траекторией полета снаряда является парабола и что наибольшая дальность полета снаряда соответствует наклону орудия под углом в 45^0.

Ферма Пьер (1601–1665) – французский математик. По профессии был юристом, с 1631 г. работал советником Кассационной палаты парламента в Тулузе. Математикой занимался в свободное время, при жизни почти ничего не опубликовал. Полученные им математические результаты становились известными ученым благодаря переписке и личному общению. Ферма является одним из создателей теории чисел, в которой с его именем связаны две теоремы: великая теорема Ферма (для любого натурального $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых положительных числах x, y, z) и малая теорема Ферма (если p – простое число и a – целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p). Ферма, наряду с Декартом, является основоположником аналитической геометрии. Он предложил правило нахождения экстремумов, а также общие правила дифференцирования и интегрирования степенной функции, которые затем распространил на случаи дробных и отрицательных показателей. Занимался и вопросами физики. Вел переписку с Паскалем по вопросам теории вероятностей.

Чебышев Пафнутий Львович (1821–1894) – русский математик и механик, академик Петербургской академии наук (1856; адъюнкт с 1853 г.), иностранный член Берлинской академии наук (1871) и многих других академий. Окончил Московский университет (1841), здесь защитил магистерскую диссертацию "Опыт элементарного анализа теории вероятностей" (М., 1845). Работал в Петербургском университете, где защитил докторскую диссертацию "Теория сравнений" (СПБ, 1849), за которую ему присуждена Демидовская премия (1849). Длительное время принимал активное участие в работах артиллерийского отделения военно-ученого комитета и ученого комитета Министерства народного образования. Прекратив чтение лекций в университете, целиком отдался научной работе, продолжавшейся до последних дней его жизни. Основатель Петербургской математической школы, наиболее крупными представителями которой были А.М. Ляпунов, А.А. Марков, В.А. Стеклов и др. Характерной особенностью его творчества была тесная связь теории и практики, что он сам неоднократно подчеркивал. Основные труды относятся к интегральному исчислению, теории чисел, теории вероятностей, теории механизмов, другим областям математики и смежных наук. Чебышев является основоположником теории приближения функций.

Эйлер Леонард (1707–1783) – математик, физик, механик, астроном. Родился в Базеле (Швейцария) в семье небогатого пастора Пауля Эйлера. Окончил Базельский университет (1724). По приглашению Петербургской академии наук приехал в Россию (1727). В Петербурге (где находился с 1727 по 1741 гг. и с 1766 г. до конца своей жизни) он нашел благоприятные условия для научной деятельности и сразу приступил к занятиям математикой и механикой. За 14 лет первого петербургского периода жизни подготовил около 80 работ и опубликовал свыше 50. С 1741 по 1766 гг. Эйлер жил и работал в Берлине, не переставая интенсивно трудиться для Петербургской академии наук, сохраняя звание ее почетного члена и получая пенсию. Он участвовал в подготовке русских математиков, командированных на учебу в Берлин, приобретал литературу и оборудование для Петербургской академии наук, вел переписку и т.п. В июле 1766 г. Эйлер вместе с семьей вернулся в Петербург. За 17 лет второго петербургского периода им было подготовлено около 400 работ, среди которых несколько больших книг (всего им написано свыше 800 работ). Круг научных занятий Эйлера охватывал все разделы современной ему математики и механики, теорию упругости, математическую физику, оптику, теорию машин, картографию, баллистику, морскую науку, страховое дело, теорию музыки и др. Свои результаты и результаты, полученные другими учеными, Эйлер систематизировал в ряде классических монографий, большая часть которых вошла затем в учебные пособия для высшей и отчасти средней школы. Трудно перечислить все доныне употребительные теоремы и методы Эйлера, из которых только немногие фигурируют в учебной литературе под его именем: теоремы Эйлера, тождества Эйлера, Эйлеровские постоянные, функции, углы, интегралы, формулы, уравнения, подстановки и т.д. В трудах Эйлера многие математические формулы и символика получили современный вид. Ему принадлежат обозначения: e, π (постоянные), i (мнимая единица), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ (тригонометрические функции), Δx (разность, приращение), Σ (знак суммы), $f(x)$ – обозначение функции и др.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблицы значений для функций

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{и} \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt.$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3186
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	98	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621

Продолжение

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	3011	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3888	72	0909	4573	44	0203	4927
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	49984
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	49993
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	49999997
69	0957	4545	38	0235	4913			

Таблица значений функции

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

k	$\lambda = 0{,}1$	$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}3$	$\lambda = 0{,}4$	$\lambda = 0{,}5$	$\lambda = 0{,}6$	$\lambda = 0{,}7$	$\lambda = 0{,}8$	$\lambda = 0{,}9$	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	

k	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0213	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0.0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Литература

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей (задачи и упражнения). М.: Наука, 1969.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1977.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1970.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.
5. Гурский Е.И., Скобля Т.В., Юшкевич В.Э. Методическое пособие по теории вероятностей и математической статистике. Минск, 1973.
6. Гусак А.А. Высшая математика, т. 2. Мн.: ТетраСистемс, 1998.
7. Ивашев-Мусатов О.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.
8. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Статистика, 1979.
9. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1991.
10. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике с основами математической статистики и теории вероятностей. Минск: Высшая школа, 1966.
11. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. М.: Высшая школа, 1972.
12. Микулик Н.А., Рейзина Г.Н. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике. Мн.: Вышэйшая школа, 1991.
13. Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. М.: Наука, 1966.
14. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под редакцией А.А. Свешникова. М.: Наука, 1970.

Содержание

Справочное издание

ГУСАК Алексей Адамович
БРИЧИКОВА Елена Алексеевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Справочное пособие к решению задач

Справочное пособие

Редактор С.В. Процко.
Дизайн обложки С.А. Демидовой.
Ответственный за выпуск А.Ф. Мясников.

Подписано в печать с готовых диапозитивов 26.08.2003.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага для офсетной печати. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Печ.л. 18,0. Усл.печ.л. 30,24. Тираж 3100 экз.
Заказ 1874.

Научно-техническое общество с ограниченной ответственностью "ТетраСистемс"
(Лицензия ЛВ № 76 от 19.11.2002).
220116, г. Минск, а/я 139 (тел. 219-74-01; E-mail: books@tut.by; http://www.ts.by).

Качество печати соответствует качеству представленных издателем диапозитивов.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство "Белорусский Дом печати"».
220013, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 79.

А.А. Гусак, Е.А. Бричикова

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ