

Проф. Г. М.  
ФИХТЕНГОЛЬЦ

МАТЕМАТИКА  
ДЛЯ  
ИНЖЕНЕРОВ

проф.  
Г.М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

# МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

3 р переплет 45 к.

I

ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО

1931



Проф. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

МАТЕМАТИКА  
ДЛЯ  
ИНЖЕНЕРОВ

*ЧАСТЬ ПЕРВАЯ*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА · 1931 · ЛЕНИНГРАД





Редактор *Е. В. Пулькина*. Технический редактор *М. Г. Славин*. Книга сдана в набор 31/х — 39 г., подписана к печати 12/ix — 31 г. НТ. 11. Огиз № 40036/л. Тираж 50.000. Леноблит № 19243. Зак. № 298. Бумага 62 × 94 см. (11483 тип знака № 1 бум. л.) Бум. листов 30<sup>3</sup>/<sub>4</sub>.



*Светлой памяти  
своей безвременно угасшей дочери*

**НАТАШИ**

*эту книгу посвящает*

*Автор.*







## ПРЕДИСЛОВИЕ.

В основу настоящей работы легла моя прежняя книга „Математика для техников“. Но так как объем ее увеличен *вдвое*, да и заимствованный из нее материал почти весь заново переработан, то эту книгу правильнее рассматривать как новую. Она предназначается как для студентов ВТУЗОВ, так и для инженеров, желающих возобновить, дополнить и систематизировать свои познания по математике. При этом, главным образом, имелись в виду студенты и инженеры *строительной и машиностроительной* специальностей.

Содержание книги определяется желанием автора дать *инженеру-производственнику*, по возможности, весь тот математический материал, который нужен ему не только непосредственно в практической деятельности, но и для чтения технической литературы, равно как для ориентировки в методах решения основных задач его специальности.

Сознавая, что ценность математической теории для инженера в значительной степени измеряется возможностью ее практического приложения, автор старался *дозести эту теорию до числа* и уделил большое внимание различным вычислительным, графическим и механическим приемам, облегчающим получение *приближенного значения* величины. Даже самое понятие о пределе автор счел полезным связать с приближенными вычислениями, и этим в сущности определяется основной тон всей книги.

С другой стороны, для того чтобы сделать из математики действительно полезное *орудие в руках инженера*, автору казалось необходимым и самое изложение ее основ *увязать с ее приложениями* и, так сказать, сразу *показать математику в действии*. Поэтому книга снабжена (особенно — во второй части) значительным числом примеров и задач из области механики и техники.

Следует подчеркнуть, впрочем, что все эти приложения группируются вокруг *отчетливого математического костяка*, без чего усвоение математических понятий и методов было бы затруднено.

В книге применяются два шрифта. Все задачи и приложения, а также и более специальные вопросы набраны петитом. Изложение, однако, ведется так, чтобы основной текст можно было понимать и не читая петита.



В интересах более быстрого выпуска в свет, книга разделена на две части, которые вместе составляют одно неразрывное целое.

Ко второй части отнесены следующие главы: гл. XI — Определенный интеграл, гл. XII — Бесконечные ряды, гл. XIII — Функции от нескольких переменных, гл. XIV — Векторы. Поверхности и кривые в пространстве, гл. XV. — Криволинейные и кратные интегралы, гл. XVI и XVII — Дифференциальные уравнения. Дополнения: I. Эмпирические формулы; II. Элементы номографии.

Автор выражает глубокую признательность всем лицам, оказывавшим ему помощь советами и указаниями, а также Ленинградскому отделению Научно-технического издательства, отнесшемуся к выпуску книги с исключительным вниманием.

*Гр. Фихтенгольц*

Октябрь 1931 г.

---



## ГЛАВА I.

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ ЧИСЛА.

1. **Абсолютная погрешность приближенного значения величины.** При технических расчетах, за редкими исключениями, приходится иметь дело не с *точными* данными, а лишь с *приближенными*. В основе всех расчетов лежат непосредственно произведенные измерения, неизбежно сопровождающиеся погрешностями. Затем, расчеты очень часто производятся по эмпирическим формулам, также не вполне точно устанавливающим соотношения между величинами. Наконец, многие числа, которыми технику приходится пользоваться (как напр., отношение окружности к диаметру  $\pi$ , корни, логарифмы, тригонометрические величины), *точно* выражаются лишь *бесконечными* десятичными дробями, которые на практике обрывают на том или ином знаке, создавая тем новый источник погрешностей. С другой стороны, техник и не нуждается в абсолютно точных результатах, ибо он все равно не мог бы их реализовать; так, при постройке деревянного моста бесполезно было бы вычислять размеры для плотничьих работ в миллиметрах. Таким образом, техник должен уметь, правильно используя имеющиеся в его распоряжении приближенные данные, с наименьшей затратой труда получать из них результаты с такой точностью, какая нужна для практических целей. Относящиеся сюда методы изложены во многих местах этой книги. Начнем с установления основных понятий.

Пусть для некоторой величины  $A$  (которую будем считать положительной) получено ее приближенное значение  $a$ . Если известно, что  $a < A$ , или что  $a > A$ , то  $a$  называют соответственно *приближенным значением по недостатку* или *по избытку*. Напр., для  $\sqrt{2}$  число 1,41 будет приближенным значением по недостатку, а 1,42 — по избытку, так как  $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ .

Абсолютное значение разности  $A - a$ , которое обозначается знаком  $|A - a|$ \*, мы будем называть *истинной абсолютной погрешностью приближенного значения  $a$* .

В приведенном примере истинная абсолютная погрешность выражается бесконечной дробью (так как  $\sqrt{2} = 1,41421\dots$ ):

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} - 1,41| &= \sqrt{2} - 1,41 = 0,00421\dots \\ |\sqrt{2} - 1,42| &= 1,42 - \sqrt{2} = 0,00578\dots \end{aligned}$$

Обыкновенно, однако, истинная погрешность вовсе не известна. Так, если с помощью измерительного масштаба измерена длина некоторого отрезка

---

\* *Абсолютным значением* (или *абсолютной величиной*) числа  $x$  называется само число  $x$ , если оно положительное, и число  $-x$ , если  $x$  отрицательно. Обозначая абсолютное значение числа  $x$  упомянутым в тексте знаком  $|x|$ , имеем напр.:  $|3| = 3$ ,  $|-2| = 2$  и т. д.



(напр., ход поршня паровой машины) и получился результат 32,4 см, то (при нормальных условиях) можно лишь утверждать, что истинная абсолютная погрешность *не превосходит*  $0,5 \text{ мм} = 0,05 \text{ см}$ , но самое значение погрешности найти невозможно. Даже в прежнем примере, когда мы рассматривали приближенные значения числа  $\sqrt{2}$ , точные выражения погрешностей, в виде *бесконечных* дробей, собственно были для нас бесполезны (хотя мы и умеем вычислять любые их знаки); на деле нам может быть важно лишь то, что погрешность числа 1,41 меньше 0,005, а погрешность числа 1,42 меньше 0,01.

Если известно, что истинная абсолютная погрешность приближенного значения  $a$  не превосходит  $\alpha$ , то число  $a$  называют максимальной абсолютной погрешностью; в этом случае говорят, что  $a$  есть приближенное значение  $A$  с точностью до  $\alpha$ .

Так как на практике важна именно эта максимальная абсолютная погрешность, которая только и будет интересоваться нас в дальнейшем, то мы часто будем называть ее просто *абсолютной погрешностью*.

Итак, если  $a$  есть приближенное значение  $A$  с абсолютной погрешностью  $\alpha$ , то это значит, что  $|A - a| \leq \alpha$ , т. е., что  $A$  может отличаться от  $a$ , в ту или иную сторону, не больше, чем на  $\alpha$ . Очевидно, что тогда  $A$  не может быть ни меньше, чем  $a - \alpha$ , ни больше, чем  $a + \alpha$ . Поэтому можно написать также

$$a - \alpha \leq A \leq a + \alpha, \quad (1)$$

так что точное значение  $A$  лежит между  $a - \alpha$  и  $a + \alpha$ .

Так, для длины  $d$  отрезка, о котором шла речь выше, имеем:  $32,4 - 0,05 \leq d \leq 32,4 + 0,05$  или  $32,35 \leq d \leq 32,45$ . Этот результат иногда записывают и так:  $d = 32,4 \text{ см} \pm 0,05 \text{ см}$ , а в общем виде:  $A = a \pm \alpha$ . Легко понять, что означает, напр., утверждение, что вес 1 дм<sup>3</sup> чистой воды (при 4° С, в пустоте и на широте 45°) равен  $999,847 \pm 0,001 \text{ г}$  (или равен 999,847 г с точностью до 0,001 г).

Числа  $a - \alpha$  и  $a + \alpha$  можно также рассматривать как приближенные значения  $A$ , и притом первое — по недостатку, а второе — по избытку; но только погрешность этих значений придется оценить числом  $2\alpha$ , вместо  $\alpha$ . Напр., вес 1 дм<sup>3</sup> воды содержится между 999,846 г и 999,848 г, но к которому из этих чисел он ближе, мы не знаем; оба они будут его приближенными значениями, но о погрешности их можно лишь сказать, что она не превосходит 0,002 г.

**2. Относительная погрешность.** Указание абсолютной погрешности приближенного значения недостаточно полно характеризует произведенное измерение (или вычисление). Так, если, измеряя длины двух стержней, подвергаемых растяжению в технической лаборатории, мы нашли соответственно 100,8 см и 25,2 см, в обоих случаях с (максимальной) абсолютной погрешностью в 0,1 см, то, несмотря на совпадение абсолютных погрешностей, ясно, что *качество* первого измерения выше, чем второго. Для того чтобы дать себе полный отчет в качестве обоих измерений, нужно *сравнить* абсолютную погрешность с самой измеряемой величиной; определеннее говоря, следует рассмотреть отношения (истинной или максимальной) абсолютной погрешности и результатов измерения. Если взять



максимальные абсолютные погрешности, то в первом случае у нас получится число  $1/1008$ , а во втором  $1/252$ , так что точность первого измерения в четыре раза превосходит точность второго.

Отношение истинной абсолютной погрешности какого-нибудь приближенного значения к самому значению называется истинной относительной погрешностью этого значения. На практике пользуются лишь максимальной относительной погрешностью, т. е. числом, которого истинная относительная погрешность не может превзойти. Мы будем называть его просто относительной погрешностью. Очевидно, что за (максимальную) относительную погрешность приближенного значения  $a$  можно принять отношение к  $a$  (максимальной) абсолютной погрешности  $\alpha$ ,

т. е. число  $\frac{\alpha}{a}$ . \*

Относительной погрешностью и пользуются обыкновенно для характеристики точности измерения или наблюдения. Ее часто указывают в  $\%$  (проценты;  $1\% = 0,01$ ) или в  $\text{‰}$  (промилли;  $1\text{‰} = 0,001$ ). Так как точное выражение относительной погрешности не имеет особого значения, то это число нужно округлять (в сторону увеличения!), не боясь некоторого ухудшения оценки точности, которое при этом может произойти. Так, в разобранный выше примере измерения длин двух стержней мы имели относительные погрешности  $1/1008$  и  $1/252$ , которые можно округлить, соответственно, до  $0,001 = 1\text{‰} = 0,1\%$  и  $0,004 = 4\text{‰} = 0,4\%$ .

Заметим далее, что абсолютная погрешность есть число именованное — того же наименования, что и измеряемая величина; поэтому численное значение абсолютной погрешности зависит от выбранной системы единиц и будет изменяться при изменении этой системы. Относительная же погрешность, как отношение двух одноименных величин, является числом отвлеченным и совершенно не зависит от выбора системы единиц. Если бы мы длины стержней выразили в метрах числами 1,008 и 0,252, то их абсолютная погрешность была бы 0,001 (м), вместо 0,1 (см), в то время как относительные погрешности выражались бы теми же числами, что и раньше.

Обозначив относительную погрешность буквой  $\delta$ , мы имеем, согласно сказанному выше,

$$\delta = \frac{\alpha}{a}, \text{ откуда } \alpha = a\delta. \quad (2)$$

Эти формулы позволяют находить относительную погрешность измерения по абсолютной и, обратно, абсолютную погрешность по относительной.

Зная относительную погрешность  $\delta$ , мы можем указать и пределы, между которыми заключается точное значение  $A$ , т. е. ее приближенные значения по недостатку и по избытку. В самом деле, подставляя в (1) вместо  $\alpha$  его значение  $a\delta$  из (2), мы имеем

$$a - a\delta \leq A \leq a + a\delta,$$

\* Иногда относительную погрешность определяют, как отношение абсолютной погрешности к истинному значению  $A$  нашей величины. Так как это истинное значение неизвестно, то удобнее пользоваться определением в тексте, тем более, что — в виду близости  $a$  и  $A$  — оба отношения  $\alpha/a$  и  $\alpha/A$  практически пришлось бы оценивать одним и тем же числом.



или

$$a(1 - \delta) \leq A \leq a(1 + \delta). \quad (3)$$

Таким образом, если  $\delta$  есть относительная погрешность приближенного значения  $a$ , то точное значение  $A$  лежит между  $a(1 - \delta)$  и  $a(1 + \delta)$ . Это обстоятельство иногда условно записывают так:  $A = a(1 \pm \delta)$ . Пользуясь этим способом записи, можно было бы длины стержней, о которых была речь выше, представить в виде:  $100,8(1 \pm 0,001)$  и  $25,2(1 \pm 0,004)$  (см).

*Примеры.* 1. Определить относительную погрешность взвешивания  $1 \text{ дм}^3$  воды, давшего  $999,847 \pm 0,001$  г.

Имеем:  $\delta = \frac{0,001}{999,847} \doteq 0,000\ 001$ .\* Итак, можно сказать, что вес  $1 \text{ дм}^3$  воды равен  $999,847(1 \pm 0,000\ 001)$  г.

2. Определить абсолютную и относительную погрешности приближенного равенства:  $\pi^2 \doteq 10$ .

Так как  $\pi^2 = 9,8696 \dots$ , то  $\alpha = 0,15$  и  $\delta = \frac{0,15}{10} = 1,5\%$ .

3. При определении газовой постоянной для воздуха получилось  $R \doteq 29,25$ . Зная, что относительная погрешность этого значения равна  $1\%$ , найти пределы, между которыми заключается  $R$ .

Мы имеем здесь:  $\delta = 0,01$ ,  $a = 29,25$ ; тогда абсолютная погрешность  $\alpha = a\delta \doteq 0,03$  и  $R$  содержится между  $29,22$  и  $29,28$ .

4. Определяя модуль упругости (модуль Юнга)  $E$  для литого железа (напр., наблюдая прогибание балки), установили, что он содержится между  $2100\ 000$  и  $2200\ 000$  (кг/см<sup>2</sup>).

Найти приближенное значение  $E$  с возможно меньшей абсолютной погрешностью и вычислить его относительную погрешность.

Так как  $E$  содержится между  $2100\ 000$  и  $2200\ 000$ , то можно за приближенное значение  $E$  принять число  $2150\ 000$ , лежащее как раз посредине между этими пределами; так как истинное значение  $E$  должно лежать либо между  $2100\ 000$  и  $2150\ 000$ , либо же между  $2150\ 000$  и  $2200\ 000$ , то во всяком случае абсолютная погрешность выбранного значения не превзойдет  $\alpha = 50\ 000$ . Относи-

тельная погрешность будет тогда  $\delta = \frac{50\ 000}{2150\ 000} = \frac{1}{43} \doteq 0,024 = 2,4\%$ .

**3. Округление чисел. Число верных знаков.** Если в выкладки входит какое-нибудь *точное* число, но выражаемое бесконечной десятичной дробью, напр.,  $\pi = 3,141\ 592\ 6535 \dots$ , то ее обрывают на том или ином знаке и пишут приближенно  $\pi = 3,14$ ,  $\pi = 3,1415$ ; иногда при этом увеличивают на единицу последнюю цифру:  $\pi = 3,15$  или  $\pi = 3,1416$ . Легко понять, что  $3,14 < \pi < 3,15$ ; так как крайние числа разнятся одно от другого на  $0,01$ , то оба они от  $\pi$  разнятся меньше, чем на  $0,01$ , а одно из них, именно первое, даже меньше, чем на  $\frac{1}{2} \cdot 0,01 = 0,005$ .

Аналогично, числа  $3,1415$  и  $3,1416$  отличаются от  $\pi$  меньше, чем на  $0,0001$ , а второе из них — меньше, чем на  $\frac{1}{2} \cdot 0,0001 = 0,000\ 05$ . Иногда

то же самое делают и с конечными дробями или даже с целыми числами (заменяя откинутые цифры целых разрядов нулями) — если желают упростить выкладки и не нуждаются в чрезмерной точности; напр., говорят, что число рабочих на заводе  $2200$  или  $2300$ , вместо точного числа  $2268$ ; в обоих случаях погрешность меньше  $100$ , во втором — даже меньше

\* Здесь (и далее) знак  $\doteq$  означает приближенное равенство.



$\frac{1}{2} \cdot 100 = 50$ . Описанный процесс называется *округлением числа*; при этом *истинная абсолютная погрешность округленного числа меньше единицы последнего из оставленных разрядов* (считая, конечно, слева направо).

Для увеличения точности иногда уславливаются при округлении чисел увеличивать последнюю из оставленных цифр на единицу, если отброшенные знаки начинаются с одной из цифр 5, 6, 7, 8, 9, и оставлять эту цифру без изменения, если отброшенные знаки начинаются с 0, 1, 2, 3, 4. В этом случае, очевидно, истинная абсолютная погрешность не превосходит *половины единицы последнего из оставленных разрядов*. Такое округление чисел мы будем называть *правилом дополнения*. Так, округляя число  $\pi$  по правилу дополнения, мы должны были бы взять его приближенные значения 3,14 (а не 3,15, так как первая отбрасываемая цифра есть 1) и 3,1416 (а не 3,1415, так как после 5 следовало 9).

*Примеры.* 1. Округлить значение  $\sqrt{2} = 1,41421\dots$  на третьем десятичном знаке после запятой (по правилу дополнения) и оценить абсолютную погрешность ( $\sqrt{2} \doteq 1,414$ ,  $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 0,001 = 0,0005$ ).

2. Число  $e$  (основание натуральных логарифмов, с которым читатель познакомится ниже) равно 2,718 281 828 4.... Округлить его с таким расчетом, чтобы погрешность была меньше 0,01 или 0,000 05 ( $e \doteq 2,71$  или 2,72;  $e \doteq 2,7183$ ).

Пусть имеем приближенное значение  $a$  некоторой величины  $A$ , причем предположим, что в числе  $a$  будет  $n$  знаков, считая от первой значащей (отличной от нуля) цифры слева и кончая последней цифрой (которая может быть и нулем) справа. \*

Мы будем говорить вообще, что *число  $a$  есть приближенное значение с  $n$  верными знаками, если (максимальная) абсолютная погрешность числа  $a$  равна единице последнего,  $n$ -го разряда*.

Таким образом, приближенные значения  $\pi$ : 3,14 и 3,15 имеют по три верных знака, а 3,1415 и 3,1416 — по пяти. Точно также 999,847 (г) есть приближенное значение веса 1 л воды с шестью верными знаками.

Иногда (особенно, для математических величин) пользуются приближенными значениями (изображенными  $n$  знаками), погрешность которых не превосходит *половины единицы  $n$ -го разряда*; в этом случае мы будем говорить, что приближенное значение имеет  $n$  верных знаков *в узком смысле*. Таковы, напр., все приближенные значения, полученные округлением истинных по правилу дополнения: 3,14 и 3,1416 для  $\pi$ , 1,414 для  $\sqrt{2}$ , 2,72 и 2,7183 для  $e$ , и т. п.

Термин „ $n$  верных знаков“ не следует понимать буквально, т. е. так, что в данном числе  $a$  действительно *все  $n$  цифр совпадают с  $n$  первыми цифрами числа  $A$* . Так, если за приближенное значение веса 1 л воды взять 1000 (г), то погрешность будет меньше  $\frac{1}{2}$  (г), так что здесь все знаки верны (даже в узком смысле), хотя вовсе не совпадают с знаками числа, выражающего „истинный“ вес. Тем не менее, в большинстве случаев дело будет обстоять именно так, что „верные знаки“ будут совпадать с цифрами точного значения.

\* Напр., для чисел 38 500; 0,407; 0,0780 первая значащая цифра будет, соответственно, 3, 4 и 7, а  $n$  равно 5, 3 и 3.



Все то, что мы говорили выше об округлении точных чисел, относится и к округлению приближенных значений со всеми верными знаками. Округляя такое значение, мы получим значение снова с верными знаками, и притом — в узком смысле, если было применено правило дополнения; так, округляя число 999,847 до четырех знаков, получим 999,8 (г), как приближенное значение веса 1 л воды с четырьмя верными знаками (в узком смысле).

Если в приближенном значении  $a$  величины  $A$  не все цифры верны, то иногда спрашивается, *сколько в нем верных знаков*. Смысл этого вопроса для нас будет всегда таков: *на каком знаке надлежит оборвать приближенное значение, округляя его по правилу дополнения, чтобы все оставленные знаки были верны*. Напр., согласно этому условию, для  $\pi$  имеем приближенные значения  $\frac{22}{7} = 3,1428\dots$  с тремя (а не четырьмя!) верными знаками,  $\frac{355}{113} = 3,1415929\dots$  с семью верными знаками.

Очень удобно пользоваться приближенными значениями со всеми верными знаками. Если не будет оговорена погрешность приближенного значения, то в последующем всегда будет подразумеваться, что *все написанные знаки его верны*, так что (максимальная) абсолютная погрешность равна единице последнего разряда. В виду этого условия мы будем сохранять и нули в конце десятичной дроби, если они входят в число „верных знаков“. Напр., написать, что отношение сажени к метру равно 2,133 600 или 2,1336, имеет разный смысл: в первом числе мы ручаемся за семь знаков, а во втором лишь за пять, так что абсолютная погрешность в первом случае 0,000 001, а во втором — 0,0001.

Иногда все же приходится прибегать и к таким приближенным значениям, у которых, кроме верных знаков, имеется и один „сомнительный“ (конечно — с указанием погрешности!). Перейти от такого значения к значению со всеми верными знаками нетрудно, но это влечет за собою умаление точности. Так, если при определении модуля упругости Юнга для литого железа мы получили  $E = 2150\ 000$  (кг/см<sup>2</sup>) с относительной погрешностью в 1%, т. е. с абсолютной погрешностью 21 500 (кг/см<sup>2</sup>), то *точнее* будет сказать, что  $E = 2150\ 000 \pm 21\ 500$ , хотя третий знак 5 здесь уже сомнителен, чем что  $E \doteq 21 \cdot 10^5$ , \* где оба знака верны.

**4. Определение относительной погрешности по числу верных знаков и обратно.** Если приближенное число написано со всеми верными знаками, то нетрудно подсчитать его относительную погрешность. Так как такой подсчет приходится делать часто, то для ускорения его мы приводим ниже таблицу, указывающую относительную погрешность (в %) приближенного значения, в зависимости от числа ( $n$ ) верных знаков и от *первых двух* его цифр слева (считая от первой значащей цифры):

\* Заметим, что если в приближенном числе много нулей справа или слева, то удобнее написать его, выделив соответствующую степень десяти, как это сделано в тексте. Аналогично, напр., вместо 0,000034 удобнее писать  $34 \cdot 10^{-6}$ .



ТАБЛИЦА I.

$n =$	2	3	4	$n =$	2	3	4
10...11	10	1	0,1	35...39	2,9	0,29	0,029
12...13	8,3	0,83	0,083	40...44	2,5	0,25	0,025
14...16	7,1	0,71	0,071	45...49	2,2	0,22	0,022
17...19	5,9	0,59	0,059	50...59	2	0,2	0,02
20...22	5	0,5	0,05	60...69	1,7	0,17	0,017
23...25	4,3	0,43	0,043	70...79	1,4	0,14	0,014
26...29	3,8	0,38	0,038	80...89	1,2	0,12	0,012
30...34	3,3	0,33	0,033	90...99	1,1	0,11	0,011

Напр., если дано приближенное значение  $a = 0,00273$  с тремя верными знаками, то так как здесь  $n = 3$  и 27 содержится в промежутке 26...29, по таблице находим:  $\delta = 0,38\%$ .

Что касается составления таблицы, то поясним его сначала на простом случае  $n = 2$ . Пусть дано приближенное значение  $a$ , имеющее два верных знака; его можно представить в виде произведения двузначного числа  $b$  на некоторую степень 10, т. е.  $a = b \cdot 10^k$ , где  $k$  — целое число, которое может быть и отрицательным (напр.  $a = 0,0043 = 43 \cdot 10^{-4}$  или  $a = 4300 = 43 \cdot 10^2$  и т. п.). Абсолютная погрешность равна  $10^k$ , так что относительная погрешность будет  $10^k : (b \cdot 10^k) = 1 : b$ . Пусть, скажем,  $b$  содержится между 40 и 44 (как в приведенных примерах); тогда  $b \geq 40$  и  $1 : b \leq 1 : 40 = 2,5\%$ , что и указано в таблице.

Если бы число  $a$  имело три верных знака, то его также можно было бы представить в виде:  $b \cdot 10^k$ , но на этот раз  $b$  — трехзначное число (напр.,  $0,00437 = 437 \cdot 10^{-5}$ ). Как и выше, получим, что относительная погрешность будет  $1 : b$ . Если  $b$  содержится между 40-0 и 44-9, то  $1 : b \leq 1 : 400 = 0,25\%$  — в десять раз меньше, чем для случая двух верных знаков! Теперь читателю ясно, что, составив один столбец таблицы (для  $n = 2$ ), другие столбцы (для  $n = 1, 3, 4, 5, \dots$ ) легко получить последовательным переносом запятой.

Если известна только первая цифра числа, напр., 4, так что мы не знаем, содержится ли  $b$  между 40 и 44 или между 45 и 49, то берем, конечно, большее из чисел 2,5 и 2,3 (при  $n = 2$ ). Если и первая цифра неизвестна, то берем числа в первой строке ( $10\%$ ,  $1\%$ ,  $0,1\%$ ), как наибольшие. Мы видим, что обыкновенно три верных знака являются уже достаточными, ибо они обеспечивают относительную точность в  $1\%$ , достаточную для большинства технических расчетов. Заметим, что если приближенное число  $a$  имеет 2, 3 или 4 верных знака в узком смысле, то все числа таблицы нужно уменьшить вдвое.

Переходя к обратной задаче: по известной относительной погрешности определить число верных знаков, обратим внимание на следующее обстоятельство. В то время как только что мы имели дело с приближенными числами, у которых заведомо все знаки были верны, теперь нам приходится рассматривать числа, содержащие и неверные знаки: сама задача именно в том и состоит, чтобы определить, на каком знаке следует число округлить (по правилу дополнения, как мы условились в предыдущем  $n^0$ ), чтобы оставшиеся знаки были верными. Необходимо при



этом учесть и погрешность от округления, оцениваемую половиной единицы последнего оставленного разряда. В нижеследующей таблице приведены верхние границы для относительных погрешностей (в ‰), обеспечивающих данному приближенному значению то или другое число верных знаков, в зависимости от его первых двух цифр.

ТАБЛИЦА II.

$n =$	2	3	4	$n =$	2	3	4
10...11	4,2	0,42	0,042	35...39	1,2	0,12	0,012
12...13	3,6	0,36	0,036	40...44	1,1	0,11	0,011
14...16	2,9	0,29	0,029	45...49	1	0,1	0,01
17...19	2,5	0,25	0,025	50...54	0,9	0,09	0,009
20...22	2,2	0,22	0,022	55...59	0,8	0,08	0,008
23...25	1,9	0,19	0,019	60...69	0,7	0,07	0,007
26...29	1,6	0,16	0,016	70...79	0,6	0,06	0,006
30...34	1,4	0,14	0,014	80...99	0,5	0,05	0,005

Пользуются этой таблицей так. Пусть, напр., в результате некоторых вычислений получилось приближенное значение  $a = 5,234\dots$  с относительной погрешностью  $\delta = 0,5\%$ ; 52 содержится между 50 и 54, в соответствующей строчке находим 0,9‰, 0,09‰, ...; так как  $\delta$  меньше 0,9‰, то можно ручаться за два верных знака и писать  $a = 5,2$ . Если бы имели  $a = 0,02738\dots$  при  $\delta = 0,1\%$  (что меньше 0,16‰), то верных знаков было бы три и писать следовало бы так:  $a = 0,0274 = 274 \cdot 10^{-4}$ . Легко понять, как пользоваться таблицей, если известен только первый знак. Наконец, если и первый знак неизвестен, то берут наименьшие числа 0,5‰, 0,05‰, 0,005‰, ...

Составление таблицы поясним, напр., для  $n = 2$ . Представим приближенное число  $a$  в виде  $b \cdot 10^k$ , где  $b$  имеет две цифры до запятой и еще дробную часть, а  $k$  — целое (напр., если  $a = 5,234\dots$ , то полагаем:  $a = 52,34\dots \cdot 10^{-1}$ ; если  $a = 0,02738\dots$ , то пишем:  $a = 27,38\dots \cdot 10^{-3}$ , и т. п.). Для того чтобы число имело два верных знака, нужно, чтобы его абсолютная погрешность не превосходила половины единицы второго, следующего за высшим, разряда (ибо при сочетании этой погрешности с погрешностью от округления, которая имеет ту же оценку, в совокупности получится погрешность, не превосходящая единицы второго разряда). Итак, должно быть:  $\alpha \leq \frac{1}{2} \cdot 10^k$ , или  $\delta = \frac{\alpha}{a} \leq \frac{1}{2} \frac{10^k}{a} = \frac{1}{2b}$ , т. е.  $\frac{1}{2b}$  и есть та верхняя граница относительной погрешности, которая обеспечивает два верных знака. Если, напр., целая часть  $b$  содержится между 50 и 54, так что  $b < 55$ , то  $\frac{1}{2b} > \frac{1}{110} = 0,9\%$  и неравенство  $\delta \leq 0,9\%$  очевидно достаточно для того, чтобы в  $a$  было два верных знака; это число 0,9 и помещено в таблице. Для  $n = 3$  получаются числа, в десять раз меньшие и т. д. (как и в случае табл. I).

Примеры. 1. Полагая  $\pi = 3,141$ ,  $\sqrt{7} = 2,65$ ,  $e = 2,718$ ,  $\log 5 = 0,698$ ,  $\sin 1^\circ = 0,0174$  (все знаки верны!) и еем, по таблице I,  $\delta = 0,033\%$ , 0,19‰, 0,019‰, 0,17‰, 0,59‰ соответственно (правило дополнения было применено только во



в первом и третьем случаях, так что в этих случаях знаки верны в узком смысле!).

2. По прогибу стального стержня вычислен модуль Юнга:  $E = 2212, \dots$  (т/см<sup>2</sup>) с точностью в 2%; сколько верных знаков в найденном значении?

По табл. II находим: два верных знака,  $E = 22 \cdot 10^2$  (т/см<sup>2</sup>).

3. Для взрывчатой смеси в газомоторе вычислена газовая постоянная  $R = 31,5 \dots$  с относительной погрешностью в 1%; определить число верных знаков.

На основании таблицы II можно ручаться за два знака,  $R = 32$ .

4. Число колебаний в 1 сек. мостовой железной балки вычислено с относительной погрешностью в 1% и получилось равным 5,12... По таблице II — не выходит двух верных знаков, ибо  $1\% > 0,9\%$ . В виду близости этих чисел, пересчитаем абсолютную погрешность числа 5,12... особо и убедимся, что в нем все же две верных цифры! [В таблице округление произведено грубо!]

5. Путем наблюдений над качанием маятника (скажем, в Москве) установлена величина ускорения силы тяжести  $g = 981,54 \dots$  (см/сек<sup>2</sup>) с погрешностью в  $0,1\text{‰} = 0,01\%$ . По табл. II здесь всего три верных знака. Однако лучше подсчитать абсолютную погрешность и писать не так:  $g = 982$  (см/сек<sup>2</sup>), а так:  $g = 981,54 \pm 0,1$ . (Ср. заключительное замечание предыдущего п<sup>0</sup>.)

**5. Действия над приближенными числами. Сложение.** Перейдем теперь к действиям над приближенными числами; результат таких действий, очевидно, также не будет точен, и при этом возникают две задачи: 1) *определить точность результата, когда известна точность отдельных данных*, и 2) *определить, с какой точностью необходимо взять данные, чтобы получить результат определенной, указанной наперед точности*. Мы разберем обе эти задачи в применении к четырем основным арифметическим действиям: сложению, вычитанию, умножению и делению.

Пусть мы имеем две положительные величины  $A_1$  и  $A_2$ , которых приближенные значения суть  $a_1$  и  $a_2$  с абсолютными погрешностями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Число  $a = a_1 + a_2$ , очевидно, можно принять за приближенное значение суммы  $A = A_1 + A_2$ , и нам нужно только определить абсолютную погрешность этого значения. Из неравенств (1) вытекает:

$$a_1 - \alpha_1 \leq A_1 \leq a_1 + \alpha_1; \quad a_2 - \alpha_2 \leq A_2 \leq a_2 + \alpha_2.$$

Складывая эти неравенства почленно, мы находим:

$$(a_1 + a_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) \leq A_1 + A_2 \leq (a_1 + a_2) + (\alpha_1 + \alpha_2),$$

или

$$a - (\alpha_1 + \alpha_2) \leq A \leq a + (\alpha_1 + \alpha_2),$$

откуда ясно, что  $\alpha_1 + \alpha_2$  можно принять за абсолютную погрешность  $\alpha$  числа  $a = a_1 + a_2$ . Этот результат доказан только для суммы двух слагаемых, но, очевидно, его можно распространить и на случай какого угодно числа слагаемых: если имеем приближенные значения  $a_1, a_2, \dots, a_n$  величин  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , с абсолютными погрешностями  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , то за приближенное значение суммы  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$  можно принять сумму  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  приближенных значений, причем абсолютная погрешность  $\alpha$  этой суммы равна сумме абсолютных погрешностей отдельных слагаемых:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$



Из доказанного правила вытекает следующее: *относительная погрешность суммы не превосходит наибольшей из относительных погрешностей слагаемых*. В самом деле, обозначим относительные погрешности значений  $a_1, a_2, \dots, a_n$  через  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ . Мы имеем:

$$\delta = \frac{\alpha}{a} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{a},$$

но, в силу (2),

$$\alpha_1 = \delta_1 a_1; \alpha_2 = \delta_2 a_2; \dots; \alpha_n = \delta_n a_n,$$

так что

$$\delta = \frac{\delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \dots + \delta_n a_n}{a} = \delta_1 \frac{a_1}{a} + \delta_2 \frac{a_2}{a} + \dots + \delta_n \frac{a_n}{a}. \quad (4)$$

Пусть теперь  $\delta_0$  означает наибольшее из чисел  $\delta_1, \dots, \delta_n$ . Очевидно тогда, что

$$\delta \leq \delta_0 \frac{a_1}{a} + \delta_0 \frac{a_2}{a} + \dots + \delta_0 \frac{a_n}{a} = \delta_0 \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{a} = \delta_0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Полезно отметить один частный случай. Предположим, что одно из слагаемых, напр.,  $a_1$  значительно превосходит все остальные. Тогда дробь  $\frac{a_1}{a}$  будет близка к 1, а остальные дроби  $\frac{a_2}{a}, \frac{a_3}{a}, \dots$  будут малы, так что относительная погрешность суммы  $\delta$  практически совпадает с относительной погрешностью наибольшего слагаемого  $\delta_1$ .

При складывании приближенных чисел прежде всего нужно помнить, что *слагаемые должны заканчиваться на одном и том же разряде*, т. е., напр., иметь одно и то же число знаков *после запятой*. В самом деле, пусть, напр., требуется найти сумму

$$s = 3,3243 + 27,375 + 147,55 + 3735,5,$$

причем, по условию, в каждом слагаемом все знаки верны. Так как сотых, тысячных и т. д. долей в последнем слагаемом мы *не знаем*, то было бы лишено смысла удерживать соответствующие цифры в прочих слагаемых: все равно за эти знаки в сумме ручаться мы не могли бы. Поэтому следует отбросить упомянутые доли во всех слагаемых (округляя их по правилу дополнения) и сложить лишь числа:

$$3735,5 + 147,6 + 27,4 + 3,3 = 3913,8.$$

При этом последняя цифра в результате явно сомнительна.

Далее, если число слагаемых не превосходит пяти (в случае же, если все знаки слагаемых верны *в узком смысле*, число их не должно превосходить десяти), то, по теореме об абсолютной погрешности суммы, эта погрешность в данном случае не превзойдет пяти единиц последнего сохраненного во всех слагаемых разряда. Отбрасывая в сумме последний сомнительный знак (с применением правила дополнения), сделаем новую



погрешность, также не превосходящую пяти единиц последнего разряда. В результате сумма получится с абсолютной погрешностью в одну единицу последнего оставшегося разряда, т. е. со всеми верными знаками. В нашем примере сумму следует принять равной 3914. Таким образом:

*Число верных знаков суммы в крайнем случае лишь на единицу меньше числа верных знаков в наибольшем из слагаемых.*

Оба числа на практике часто совпадают; так будет в случае, если сумма содержит более высокий разряд, чем наибольшее слагаемое, или если и последняя цифра, которую мы считали сомнительной, на деле верна (в виду взаимной компенсации погрешностей разного знака).

Из всего сказанного следует правило:

*Для того, чтобы получить сумму с  $n$  верными знаками, нужно наибольшее слагаемое взять с  $n + 1$  верными знаками, а в остальных слагаемых отбросить (по правилу дополнения) все знаки, стоящие направо от разряда, отвечающего последнему сохраненному в наибольшем слагаемом знаку.*

Эти правила и разрешают по отношению к сложению обе поставленные в начале  $n^{\circ}$  задачи.

*Примеры.* 1. Вычислить сумму  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49}$  с тремя верными знаками. Берем первое, наибольшее, слагаемое с тремя верными знаками, что дает 1,00, а в остальных отбрасываем все знаки, начиная с тысячных, т. е. полагаем: \*

$$\begin{aligned} 1 &= 1,00 \\ \frac{1}{4} &= 0,25 \\ \frac{1}{9} &\doteq 0,11 \\ \frac{1}{16} &\doteq 0,06 \\ \frac{1}{25} &= 0,04 \\ \frac{1}{36} &\doteq 0,03 \\ \frac{1}{49} &\doteq 0,02 \end{aligned}$$

---


$$\text{Сумма} \doteq 1,51$$

Более точное вычисление дало бы для искомой суммы число 1,51179.

Таким образом, мы получили три верных знака, взяв в наибольшем из слагаемых также всего лишь три верных знака.

2. Пусть требуется найти сумму  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$  с двумя верными знаками. Взяв по три знака в каждом из слагаемых (округляя по правилу дополнения), получим 9,83, — тут все три знака верные, так что мы получили их больше, чем требовалось.

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &\doteq 1,41 \\ \sqrt{3} &\doteq 1,73 \\ \sqrt{4} &= 2,00 \\ \sqrt{5} &\doteq 2,24 \\ \sqrt{6} &\doteq 2,45 \end{aligned}$$

---


$$\text{Сумма} \doteq 9,83$$

Но если бы мы ограничились двумя знаками в каждом слагаемом, то в результате нашли бы 9,7, так что ошибка была бы  $> 0,1$ .

Как следовало бы поступить, если бы требовалось найти сумму „с точностью до 0,001“? Достаточно ли было бы в данном случае вычислить каждое слагаемое с точностью до 0,001?

---

\* Снова напоминаем, что символом  $\doteq$  мы обозначаем приближенное равенство.



**6. Вычитание.** Совершенно так же, как и в случае сложения, можно доказать, что *абсолютная погрешность разности двух чисел равна сумме абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого*. Таким образом, рассматривая вычитание как алгебраическое сложение, — с отрицательным числом, мы можем сказать, что *правило об абсолютной погрешности*, высказанное в предыдущем п<sup>0</sup> для случая сложения положительных чисел, *применяется без изменений и к случаю отрицательных слагаемых*.

С относительной погрешностью и с числом верных знаков дело обстоит сложнее. Если уменьшаемое значительно превосходит вычитаемое, то относительная погрешность разности практически будет совпадать с относительной погрешностью уменьшаемого. Число же верных знаков в разности будет такое же, как и в уменьшаемом, либо (редко!) на единицу меньше. Таким образом, в случае, когда уменьшаемое значительно превосходит вычитаемое, то к числу верных знаков разности (алгебраической суммы) применяются те же правила, что и для числа верных знаков обыкновенной суммы. Роль наибольшего слагаемого играет уменьшаемое.

*Пример.* Вычислить  $2529,37 - 2,1462$  (предполагая, как всегда, все цифры верными). Очевидно, в вычитаемом мы можем отбросить все знаки, начиная с тысячных; округлив, приходим к разности

$$\begin{array}{r} 2529,37 \\ - 2,15 \\ \hline 2527,22 \end{array}$$

Совсем другое произойдет, если уменьшаемое и вычитаемое близки друг к другу, т. е. разность мала. Для определения относительной погрешности нам придется делить абсолютную погрешность на малое число — разность, вследствие чего относительная погрешность может стать очень большой и точность весьма пострадает. В связи с этим, благодаря взаимному сокращению высших разрядов уменьшаемого и вычитаемого, число верных знаков в разности может оказаться значительно меньшим, чем в числах, над которыми производится вычитание. Опасность этой „потери точности“ вынуждает всячески избегать вычитания близких чисел [как это делать, будет показано ниже; см. 26, 2; 67]. Если же это невозможно, то приходится увеличивать точность данных, беря их с лишними знаками.

*Пример.* Вычислить разность  $0,5791 - 0,5776$ . Произведя вычитание, мы получим  $0,0015$ . Так как данные числа имеют по 4 верных знака, то абсолютная погрешность их равна  $0,0001$ , а относительную можно принять равной  $0,02\%$ . Далее, абсолютная погрешность разности будет  $0,0002$ ; относительная же погрешность будет равна:

$$\frac{0,0002}{0,0015} = \frac{2}{15} \doteq 0,13 = 13\%.$$

Таким образом, относительная погрешность увеличивается в  $\frac{13\%}{0,02\%} = 650$  раз, и для того, чтобы и в разности получить четыре верных знака, нужно было бы уменьшаемое и вычитаемое задать не с четырьмя, а с 6—7 верными знаками.



7. Умножение и деление. Правило для абсолютной погрешности произведения и частного настолько сложно, что его редко применяют. Выведем правило для относительной погрешности произведения.

Пусть даны две (положительные) величины  $A_1, A_2$  и их приближенные значения  $a_1, a_2$  с относительными погрешностями  $\delta_1, \delta_2$ . За приближенное значение произведения  $A = A_1 \cdot A_2$  возьмем  $a = a_1 \cdot a_2$ ; задача состоит в определении его относительной погрешности  $\delta$ . В силу (3) имеем:

$$a_1(1 - \delta_1) \leq A_1 \leq a_1(1 + \delta_1) \text{ и } a_2(1 - \delta_2) \leq A_2 \leq a_2(1 + \delta_2).$$

Перемножая эти неравенства почленно, получим:

$$a_1 a_2 (1 - \delta_1)(1 - \delta_2) \leq A_1 A_2 \leq a_1 a_2 (1 + \delta_1)(1 + \delta_2)$$

или

$$a(1 - \delta_1 - \delta_2 + \delta_1 \delta_2) \leq A \leq a(1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_1 \delta_2).$$

В виду малости  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , произведением их  $\delta_1 \delta_2$  (которое будет уже совсем ничтожной величиной!) можно пренебречь и переписать последние неравенства так:

$$a - a(\delta_1 + \delta_2) \leq A \leq a + a(\delta_1 + \delta_2).$$

Отсюда ясно, что за абсолютную погрешность числа  $a$  можно принять число  $\alpha = a(\delta_1 + \delta_2)$ , так что относительная погрешность

$$\delta = \frac{\alpha}{a} = \delta_1 + \delta_2.$$

Это простое правило распространяется и на случай любого числа сомножителей:

*Относительная погрешность произведения (приблизленно) равна сумме относительных погрешностей отдельных множителей.*

Это правило показывает, что, в противоположность сложению, точность при умножении ухудшается и будет тем хуже, чем больше умножений приходится производить.

Переходя к делению, рассмотрим прежде всего положительную величину  $A$ , имеющую приближенное значение  $a$ , и установим, что относительная погрешность числа  $a' = \frac{1}{a}$ , которое является приближенным зна-

чением величины  $A' = \frac{1}{A}$ , будет та же, что и для  $a$ .

Имеем:

$$\frac{A' - a'}{a'} = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a}} = \frac{a - A}{A} = \frac{a - A}{a},$$

так что, переходя к абсолютным величинам, видим, что истинные относительные погрешности значений  $a$  и  $a'$  (приблизленно) совпадают. Следо-



вательно, это справедливо и для *максимальных* относительных погрешностей, что и требовалось доказать.

Если теперь (при сохранении прежних обозначений) требуется определить погрешность *частного*:  $\frac{a_1}{a_2}$ , то, представив его в виде *произве-*

*дения*:  $a_1 \cdot \left(\frac{1}{a_2}\right)$ , мы сведем дело к уже доказанному. Приняв во внима-

ние, что относительные погрешности  $a_2$  и  $\frac{1}{a_2}$  равны, получим для *част-*  
*ного* то же правило, что и для произведения:

*Относительная погрешность частного (приближенно) равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя.*

С помощью доказанных правил решим теперь такой вопрос. Пусть дано несколько чисел  $a_1, a_2, \dots$ , написанных, напр., с 4 верными знаками, и над ними произведен последовательно ряд умножений и делений. Сколько верных знаков будет в результате? При этом мы предположим, что количество этих чисел  $a_1, a_2, \dots$  не превосходит *пяти* (или *десяти*, если знаки верны *в узком смысле*). По таблице I, относительная погрешность каждого числа есть  $0,1\%$  (или  $0,05\%$ ), так что относительная погрешность результата будет  $0,1\% \cdot 5$  (или  $0,05\% \cdot 10$ ), т. е.  $0,5\%$ , а это — по таблице II — во всяком случае обеспечивает *два* верных знака. Конечно, число верных знаков могло оказаться и больше двух, так как мы вели лишь грубый подсчет, *не зная самих чисел* и учитывая самое неблагоприятное стечение обстоятельств. Полученное нами утверждение имеет общий характер и легко может быть доказано и в общем виде:

*Результат ряда умножений и делений имеет на один, самое большее на два верных знака меньше, чем наименьшее количество верных знаков в тех числах, над которыми эти действия производятся.*

Отсюда сразу следует, что *для того, чтобы получить результат последовательных умножений и делений с  $n$  верными знаками, нужно взять числа, над которыми эти действия производятся, с  $n + 2$  верными знаками.*

На практике *почти всегда* оказывается достаточным брать числа, данные для умножения или деления, всего лишь с  $n + 1$  знаками, а *иной раз* даже — с  $n$  знаками (особенно, если знаки в данных числах верны *в узком смысле*). Установить подобные случаи можно с помощью учета относительной погрешности, по таблицам I и II.

Пользуясь этими таблицами, можно, напр., наперед указать широкий класс случаев, когда — при *одном* умножении (или делении) — заведомо достаточно брать множимое и множитель (или делимое и делитель) с  $n + 1$  знаками. Это будет тогда, *когда произведение первых цифр двух данных чисел больше или равно 10*. На доказательстве останавливаться не будем; его можно было бы осуществить, перебрав различные комбинации первых цифр.

Приведенное выше общее правило предполагает, что данные числа имеют одно и то же число верных знаков. Если это не так, то часто выгодно бывает округлить более точные числа, доведя их до наименьшего числа верных знаков, а затем лишь произвести действия. Напр., если



нужно перемножить пять чисел, из которых два имеют по пяти верных знаков, а три — по четыре, то (по таблице I) это дает относительную погрешность  $2 \cdot 0,01\% + 3 \cdot 0,1\% = 0,32\%$ , что (по таблице II) обеспечивает вообще лишь два верных знака; если же округлить первые два числа (по правилу дополнения), то получим  $2 \cdot 0,05\% + 3 \cdot 0,1\% = 0,4\%$ , т. е. те же два знака, но с меньшей затратой труда! Эти общие соображения не исключают однако возможности и того, что в отдельных случаях дело будет обстоять и иначе, в чем можно убедиться опять-таки лишь с помощью учета относительной погрешности.

*Примеры.* 1. При обмере прямоугольного участка земли найдены его длина 82,2 м и ширина 74,8 м, с точностью до 0,1 м (т. е. со всеми верными знаками). Площадь  $F$  вычисляем по формуле:  $F = ab$ . Так как произведение первых цифр  $8 \times 7 = 56 > 10$ , то в произведении  $82,2 \cdot 74,8 = 6148,56$  будет два верных знака, так что  $F \doteq 61 \cdot 10^3$  м<sup>2</sup>. Определим и непосредственно число верных знаков в полученном значении  $F$ . Так как измерение производилось с точностью до 0,1 м, то истинное значение длины заключается между пределами 82,1 и 82,3 м, а ширины — между 74,7 и 74,9 м. Поэтому истинное значение площади  $F$  заключается между пределами  $82,1 \cdot 74,7$  и  $82,3 \cdot 74,9$ , т. е. между числами 6132,9 и 6164,3 м<sup>2</sup>, откуда следует, что число  $61 \cdot 10^3$  имеет, действительно, два верных знака. Совершенно ясно также, что не имеет никакого смысла писать произведение  $82,2 \cdot 74,8 = 6148,56$  со всеми знаками, раз мы можем ручаться лишь за два первых знака.

Неопытному вычислителю обыкновенно трудно бывает отказаться от мысли, что если в данных числах знаки были „верные“, то и в правильно полученном произведении их знаки тоже должны быть верны. Поэтому мы напоминаем, что слова „верные знаки“ имеют *условный смысл* [3], не исключающий наличия погрешности. Погрешности же в 0,1 м при измерении длины и ширины отражаются в площади даже на десятках квадратных метров!

2. Для определения удельного веса цинка был взят образец, вес и объем которого при грубом измерении оказались равными 2,5 кг и 350 см<sup>3</sup>. С какой точностью надо произвести эти измерения, чтобы путем деления соответствующих результатов получить удельный вес цинка с точностью до 0,1?

Так как грубый подсчет дает для удельного веса значение  $2500 : 350 \doteq 7$ , то требуемая точность равносильна двум верным знакам. Попробуем измерить вес и объем с тремя верными знаками в узком смысле, т. е. вес с точностью до 5 г, а объем с точностью до 0,5 см<sup>3</sup>. По табл. I это даст не меньшую точность, чем

$$0,5\% : 2 + 0,33\% : 2 = 0,42\%$$

что, согласно табл. II, вполне обеспечивает два знака.

Если результаты, скажем, получились: 2620 г и 363 см<sup>3</sup>, то для искомого удельного веса будем иметь приближенное значение 7,2 г/см<sup>3</sup>.

3. При нормальном давлении  $p = 10\,330$  кг/м<sup>2</sup> и температуре в 0° С (т. е. при абсолютной температуре  $T = 273$ ), объем 1 кг воздуха равен  $v = 0,7733$  м<sup>3</sup>. По этим данным определить газовую постоянную  $R$  в формуле Клапейрона:  $pv = RT$ .

Имеем:

$$R = \frac{10\,330 \cdot 0,7733}{273}$$

Число 273 считаем точным. Так как в остальных числах по 4 верных знака, то можно рассчитывать лишь на 2 верных знака в  $R$ . Лучше однако непосредственно оценить относительную погрешность  $R$  по табл. I; так как погрешность знаменателя есть 0, то общая погрешность будет  $0,1\% + 0,015\%$ , т. е. кругло 0,12%.

Грубый подсчет дает для  $R$  значение  $\frac{10\,000 \cdot 0,8}{300} \doteq 30$ , а тогда, по табл. II, 0,12%

обеспечивают три верных знака. Окончательно,  $R = 29,3$ .



**8. Правило сокращенного умножения.** При фактическом производстве умножения приближенных чисел часто приходится делать лишние вычисления, определяя ряд знаков, которые потом откидываются. Так, желая вычислить с двумя верными знаками произведение приближенных чисел  $a = 4,531$  и  $b = 21,88$ , известных нам с четырьмя верными знаками, мы сначала обычным порядком перемножаем эти числа:

$$\begin{array}{r} 4531 \\ 2188 \\ \hline 36248 \\ 4531 \\ \hline 9062 \\ \hline 99,13828 \end{array}$$

и полученный результат округляем до двух знаков:  $ab \approx 99$ . Чертой мы отделили знаки, которые явно не нужны. Для того чтобы по возможности избежать вычисления ненужных знаков, можно пользоваться следующим *правилом сокращенного умножения (Утрета)*:

Пусть множимое и множитель содержат одинаковое число (скажем,  $k$ ) знаков; тогда подписывают множитель под множимым в перевернутом виде, так чтобы первая цифра множителя пришлась под  $k$ -ой цифрой множимого, вторая — под  $(k-1)$ -ой и т. д. Затем умножают каждую цифру множителя (идя справа налево, как обычно) *на те лишь цифры множимого, которые находятся над нею и влево от нее*, не обращая внимания на цифры направо от нее. Таким образом, на первую цифру множителя умножаются все  $k$  цифр множимого, на вторую — лишь первые  $(k-1)$  цифр множимого, на третью —  $(k-2)$  цифры множимого, и т. д.; последняя цифра множителя умножается только на одну первую цифру множимого. (Во время производства действий рекомендуется *зачеркивать* ту цифру множителя, на которую уже произведено умножение, равно как и стоящую над нею цифру множимого; это поможет избежать опасности ошибиться.) Все полученные произведения следует подписать так, чтобы *все крайние цифры справа приходились одна над другой*, и сложить.

Применим это правило, для примера, к тем же числам 4531 и 2188, которые мы выше перемножили обычным способом:

$$\begin{array}{r} 4531 \\ 8812 \\ \hline 9062 \\ 453 \\ 360 \\ 32 \\ \hline 9907 \end{array}$$

Положение запятой всего проще установить, прикинув заранее грубо порядок произведения; в данном случае легко получаем: 99,07. Сравнивая отдельные произведения здесь и в прежнем умножении (слева от черты), видим, что лишь последние знаки несколько искажены, в сторону уменьшения. Результат сокращенного умножения обыкновенно меньше *истинной* величины произведения, лишь в исключительных случаях (когда сами сомножители являются приближенными значениями по избытку) может превзойти истинную величину, но не на много. Следующее правило (которое мы приводим без доказательства) говорит о том, как устанавливать с помощью сокращенного умножения верные знаки произведения.

*Для того чтобы получить произведение двух чисел с  $n$  верными знаками, нужно взять множимое и множитель с  $(n+2)$  верными знаками и перемножить их по правилу Утрета; в том случае, когда произведение первых цифр множимого и множителя больше или равно 10, можно взять сомножители лишь с  $(n+1)$  знаками. Результат сокращенного умножения следует округлить на  $n$ -ом знаке, и при том, если  $(n+1)$ -ый знак есть 0 или 1, то — в сторону уменьшения, если же этот знак больше 1, то — в сторону увеличе-*



ния. Полученное число и будет приближенным значением произведения с  $n$  верными знаками.

Существует также правило сокращенного деления, но — в виду большей сложности его — им редко пользуются. Приведем еще примеры на сокращенное умножение.

*Примеры.* 1. Вычислить с тремя знаками произведения  $885,4 \cdot 37,42$  и  $4,5314 \cdot 21,886$  (причем число знаков сомножителей согласовано с правилами предыдущего и настоящего пп<sup>0</sup>). Слева действия выполнены по сокращенному способу, а справа — для сравнения — по обычной схеме. Очевидно, что сокращенный метод требует меньшего количества вычислений, давая однако ту же точность, что и обыкновенный.

$\begin{array}{r} 8854 \\ 2473 \\ \hline 26562 \\ 6195 \\ 352 \\ 16 \\ \hline 33125 \\ 332\ 000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8854 \\ 3742 \\ \hline 17708 \\ 35416 \\ 61978 \\ 26562 \\ \hline 33131,668 \\ 331\ 000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 45314 \\ 68812 \\ \hline 90628 \\ 4531 \\ 3624 \\ 360 \\ 24 \\ \hline 99167 \\ 99,2 \end{array}$
	$\begin{array}{r} 8854 \\ 3742 \\ \hline 17708 \\ 35416 \\ 61978 \\ 26562 \\ \hline 33131,668 \\ 331\ 000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 45314 \\ 21886 \\ \hline 271884 \\ 362512 \\ 362512 \\ 45314 \\ 90628 \\ \hline 99,1742204 \\ 99,2 \end{array}$

2. Вычислить с двумя верными знаками произведение  $41,785 \cdot 52,346 \cdot 7,8291$ . Применяя правило сокращенного умножения, вычисляем первое произведение с тремя верными знаками, что дает 2190. Вычисляем, далее, по тому же правилу произведение  $2190 \cdot 7,8291$ , что дает окончательный результат:  $17 \cdot 10^3$ .

$\begin{array}{r} 4179 \\ 5315 \\ \hline 20895 \\ 834 \\ 123 \\ 20 \\ \hline 21872 \end{array}$	$\begin{array}{r} 219 \\ 387 \\ \hline 1533 \\ 168 \\ 6 \\ \hline 1707 \end{array}$
---	---

**9. Возвышение в степень и извлечение корня.** Действия возвышения в степень и извлечения корня можно также причислить к основным арифметическим действиям. Оба эти действия можно рассматривать как возвышение в степень, если допустить и дробные показатели степени, ибо извлечение корня  $m$ -ой степени равносильно возвышению в степень с показателем  $\frac{1}{m}$ .

Итак, говоря о возвышении в  $n$ -ую степень, мы будем считать показатель каким угодно. Ниже [71] будет доказано, что при возвышении в степень с показателем  $n$  относительная погрешность умножается на  $n$  (или на абсолютное значение  $n$ , если  $n$  отрицательно).

Если  $n$  есть целое положительное число, то это правило вытекает непосредственно из правила 7, так как тогда возвышение в  $n$ -ую степень



можно рассматривать как вычисление произведения  $n$  одинаковых множителей, и так как относительные погрешности их одинаковы и складываются, то мы и получим погрешность в  $n$  раз большую, чем погрешность каждого множителя.

Полагая  $n = \frac{1}{m}$ , получаем в частности из приведенного правила, что при извлечении корня  $m$ -ой степени из приближенного числа его относительная погрешность делится на показателя корня  $m$ .

Расчет знаков ведется с помощью таблиц I и II [4].

*Пример.* С какой относительной погрешностью и со сколькими верными знаками можно определить сторону квадрата  $a$ , если известно, что его площадь  $a^2 = S = 14,47$  см<sup>2</sup>. Мы имеем, очевидно,  $a = \sqrt{S}$ . Так как число  $S$  имеет по условию четыре верных знака, то относительная погрешность  $S$  равна 0,071%, по таблице I; но тогда относительную погрешность числа  $a = \sqrt{14,47}$  можно принять равной 0,036%. Первая значащая цифра числа  $a$  есть очевидно 3, поэтому по таблице II, получим для  $a$  три верных знака; вычисляя на самом деле, находим  $a = 3,80$  см. Для проверки заметим, что истинное значение стороны квадрата лежит между двумя пределами:

$$\sqrt{14,46} = 3,803 \text{ и } \sqrt{14,48} = 3,804;$$

это и показывает, что число 3,80 имеет действительно три верных знака.

Легко было бы произвести и обратный расчет: со сколькими знаками взять  $S = 14, \dots$  см<sup>2</sup>, чтобы сторона  $a = 3, \dots$  см получилась с тремя верными знаками. По таблице II, достаточно обеспечить для  $a$  погрешность 0,12%, для чего нужно, чтобы  $S$  была известна с погрешностью в 0,24%. По таблице I такую точность дают лишь четыре знака:  $S$  следует взять с четырьмя знаками.

**10. Примеры более сложных выражений.** Выше мы показали, как в простейших случаях основных арифметических действий решаются две основные задачи: определить точность результата по известной точности данных и, наоборот, определить необходимую точность данных по заданной наперед точности результатов [5 — 9].

Случай более сложных формул, в которых встречаются сразу несколько последовательных арифметических действий, приводится к разобранному выше. Как это нужно делать — проще всего уяснить на конкретных практических примерах, к которым мы сейчас и перейдем. Условимся предварительно в некоторых основных обозначениях, которые значительно сократят дальнейшие рассуждения.

Относительную погрешность приближенного значения  $a$  мы будем обозначать через  $\delta_a$ . При таком обозначении, результаты, полученные в 5 — 9, можно кратко записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{a+b} &= \frac{a}{a+b} \delta_a + \frac{b}{a+b} \delta_b; \\ \delta_{a-b} &= \frac{a}{a-b} \delta_a + \frac{b}{a-b} \delta_b; \quad (a > b) \\ \delta_{ab} &= \delta_a + \delta_b; \\ \delta_{a/b} &= \delta_a + \delta_b; \\ \delta_{a^m} &= |m| \delta_a. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

*Примеры.* 1. Удельное сопротивление (электрическое) металла  $\rho$  определяется по полному сопротивлению  $R$  (ом) круглой проволоки с длиной  $l$  (м) и с поперечным сечением диаметра  $d$  (мм) по формуле:  $\rho = \pi R d^2 / 4l$ .



Пусть для медной проволоки взято  $l = 12,50$  м (с точностью до  $0,01$  м = 1 см),  $d = 2,00$  мм (с точностью до  $0,01$  мм) и найдено  $R = 0,068$  ома (с точностью до  $0,0005$  ома); вычислить  $\rho$ .

Определим прежде всего относительную погрешность  $\delta_\rho$  и число верных знаков для  $\rho$ , которые можно получить при данных условиях. По таблице I:

$$\delta_R = 0,85\%, \delta_d = 0,5\%, \delta_l = 0,083\%.$$

Погрешность  $\delta_\pi$  мы можем считать сколь угодно малой, взяв  $\pi$  с достаточной точностью, а поэтому пока не будем выписывать ее численного значения. Так как множитель 4 известен точно, то по формулам (5) имеем:

$$\delta_\rho \doteq \delta_\pi + \delta_R + 2\delta_d + \delta_l = \delta_\pi + 0,85\% + 1,00\% + 0,08\% = \delta_\pi + 1,93\%.$$

Грубый подсчет по формуле

$$\rho \doteq \frac{3 \cdot 0,07 \cdot 4}{4 \cdot 12} = 0,01 \dots$$

дает, что первая цифра  $\rho$  есть 1, а тогда — по таблице II достаточно иметь  $\delta_\rho = 2,5\%$ , чтобы это обеспечило два верных знака для  $\rho$ . Таким образом, на долю  $\delta_\pi$  остается  $2,5\% - 1,93\% = 0,57\%$ ; такой точности с избытком можно достигнуть, согласно таблице I, если взять  $\pi$  с тремя верными знаками:  $\pi = 3,14$ . Произведя выкладки, получим:

$$\rho \doteq \frac{3,14 \cdot 0,068 \cdot 2^2}{4 \cdot 7,5} \doteq 0,017 \left( \frac{\text{ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}} \right).$$

2. Действительная мощность  $H$  паровой машины выражается по формуле:

$$H = \frac{10\,000}{75} \cdot f \cdot p_i \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{ns}{30} \text{ лош. сил,}$$

где  $f$  — коэффициент полезного действия,  $p_i$  — среднее индикаторное давление ( $\text{кг}/\text{см}^2$ ),  $d$  — диаметр поршня (м),  $n$  — число оборотов в минуту и  $s$  — ход поршня (м). Пусть мы желаем определить  $H$  с относительной погрешностью, примерно, в  $5\%$ . С какой точностью для этого должны быть взяты данные?

Имеем:

$$\delta_H = \delta_\pi + \delta_f + \delta_{p_i} + 2\delta_d + \delta_n + \delta_s.$$

Раскинуть  $5\%$  между шестью слагаемыми — задача неопределенная. Но на деле при определении разных входящих в формулу величин мы зачастую связаны в выборе погрешности. Пусть нам известно из таблиц, что для машины рассматриваемого типа  $f = 0,87$  с точностью до  $0,01$ ; следовательно, уже имеем:  $\delta_f = 1,2\%$ ; далее, нельзя рассчитывать на точность, большую чем в  $2\%$ , для индикаторного давления  $p_i$ , пусть  $\delta_{p_i} = 2\%$ . Если потребовать, чтобы было  $\delta_n = \delta_s = \delta_d = 0,5\%$  (что осуществимо), то мы уже незначительно выйдем за пределы  $5\%$ , именно в сумме получится  $5,2\%$ . Накинем еще  $0,2\%$  для  $\pi$ ; для осуществления этого достаточно, по табл. I, положить  $\pi = 3,14$  (округление по правилу дополнения, цифры верны в узком смысле!). Предположим, далее, что во исполнение намеченного плана произведены измерения, и получилось:  $p_i = 2,80 \pm 0,05$  ( $\text{кг}/\text{см}^2$ ) (так что  $\delta_{p_i} = 1,9\%$ , как и предполагали),  $d = 0,400 \pm 0,002$  (м) ( $\delta_d = 0,5\%$ ),  $s = 0,700$  (м) ( $\delta_s = 0,3\%$ , даже меньше предположенного),  $n = 85 \pm 0,5$  (обор./мин.) ( $\delta_n = 0,6\%$ , чуть больше намеченного). Окончательно,  $\delta_H = 5,3\%$  и  $H$  будет иметь лишь один верный знак:

$$H = \frac{10\,000}{75} \cdot 0,87 \cdot 2,8 \cdot \frac{3,14 \cdot (0,41)^2}{4} \cdot \frac{85 \cdot 0,7}{30} = 85 (1 \pm 0,53) = 85 \pm 5 \text{ лош. сил.}$$

Вычисление можно вести на три знака или с помощью логарифмической линейки, которая как раз дает требуемую точность



3. Теплоемкость  $x$  твердого тела определяется (по способу смешения) по формуле

$$x = \frac{(M_1 + cM_2)(t - t_0)}{M(T - t)},$$

где  $M$  — масса исследуемого тела,  $M_1$  — масса воды,  $M_2$  — масса калориметра с мешалкой ( $c$ ),  $c$  — теплоемкость калориметра,  $T$  — температура погружаемого тела,  $t_0$  — температура воды в калориметре до погружения тела и  $t$  — окончательная температура воды.

На опыте получились следующие результаты:

$$M = 165,4 \pm 0,1 \text{ г}; M_1 = 440,3 \pm 0,2 \text{ г}; M_2 = 187,5 \pm 0,1 \text{ г}; c = 0,094;$$

$$T = 99,93^\circ \pm 0,004^\circ; t_0 = 11,6^\circ \pm 0,05^\circ; t = 14,6^\circ \pm 0,05^\circ.$$

Относительная погрешность  $\delta_x$  определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \delta_x &= \delta_{M_1 + cM_2} + \delta_{t - t_0} + \delta_M + \delta_{T - t} = \frac{M_1 \delta_{M_1} + c M_2 \delta_{M_2}}{M_1 + c M_2} + \delta_{M T} \\ &+ \frac{t \delta_t + t_0 \delta_{t_0}}{t - t_0} + \frac{T \delta_T + t \delta_t}{T - t} = \frac{0,2 + 0,094 \cdot 0,1}{440,3 + 0,094 \cdot 187,5} + \frac{0,1}{165,4} + \frac{0,05 + 0,05}{14,6 - 11,6} + \\ &+ \frac{0,004 + 0,05}{99,93 - 14,6} = \frac{0,21}{420} + \frac{0,1}{160} + \frac{0,1}{3} + \frac{0,054}{80} = 0,04 = 4\%. \end{aligned}$$

Вычисления, таким образом, нужно вести не более чем с тремя знаками, сохранив в окончательном результате не более двух знаков. Мы имеем

$$x = \frac{(440,3 + 0,094 \cdot 187,5)(14,6 - 11,6)}{165,4(99,93 - 14,6)} = \frac{(440 + 17,7) \cdot 3}{165 \cdot 85,3} = 0,097.$$

Итак, окончательно находим:

$$x = 0,097 (1 \pm 0,04) = 0,097 \pm 0,003.$$

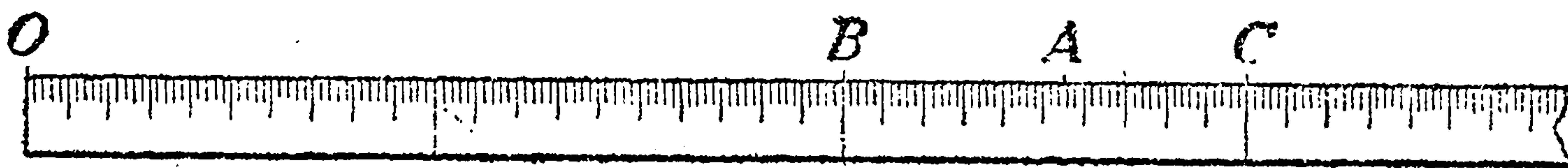
Мы привели выше ряд правил, относящихся к производству основных арифметических действий над приближенными числами и на примерах показали, как ими пользоваться (о погрешностях действий с логарифмическими таблицами будет сказано ниже, в п<sup>о</sup> 71). *Строгое выполнение этих правил необходимо лишь в случае более или менее точных выкладок.* По большей же части, инженеру приходится вводить в вычисления эмпирические коэффициенты, известные с очень малой точностью, или так называемые „коэффициенты прочности“. При таких условиях вообще не имеет смысла вести вычисления больше чем на два-три знака; в этом случае следует настойчиво рекомендовать производить расчеты по *логарифмической линейке* (о которой речь будет идти в следующей главе), так как она не только облегчает выкладки и дает как раз требуемую точность, но и автоматически удерживает вычислителя от увлечения *кажущейся* возможностью „подыскать точность“.



## ГЛАВА II.

### ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА.

11. **Равномерная и логарифмическая шкалы.** Читателю не раз приходилось иметь дело со шкалой, деления которой изображают в известном масштабе определенные числа (масштабная линейка, термометрическая шкала и т. п.). Пусть, напр., вся длина шкалы (черт. 1)\* принята за 1, и она разделена крупными штрихами на 10 частей, каждая из этих частей штрихами средней длины — также на 10 частей и, наконец, каждая из полученных частей еще, скажем, на пять частей — мелкими штрихами. Отрезок между каждыми двумя соседними крупными



Черт. 1.

штрихами изображает, в принятом масштабе, число 0,1; отрезок между двумя соседними средними штрихами — 0,01, и, наконец, между двумя соседними мелкими штрихами — 0,002. Считая, что начало шкалы соответствует числу 0, мы видим, что каждой точке, взятой на шкале, соответствует определенное число между 0 и 1, которое мы без труда сможем определить с точностью до двух и даже трех знаков. Так, напр., на черт. 1 точке А отвечает число 0,255, ибо от 0 до А содержится отрезок, заключающий два крупных штриха (0,2), затем еще 5 средних (0,05), еще два мелких (0,004) и, наконец, еще отрезок, равный половине расстояния между двумя мелкими штрихами, т. е. 0,001, — в общем:

$$0,2 + 0,05 + 0,004 + 0,001 = 0,255.$$

Если мы примем, что длина шкалы равна 10 единицам (масштаб уменьшен в 10 раз), то получим возможность изображать числа между 0 и 10 с тем же числом верных знаков. В этом случае точке А будет соответствовать уже число 2,55; приняв длину шкалы равной 100 единицам, получим числа от 0 до 100 (точке А соответствует число 25,5) и т. д.

Шкалы подобного типа носят название *равномерных*. Они характеризуются тем, что на них отрезки пропорциональны числам, т. е. отсчетам, которые отвечают этим отрезкам; так напр., если мы возьмем отрезки

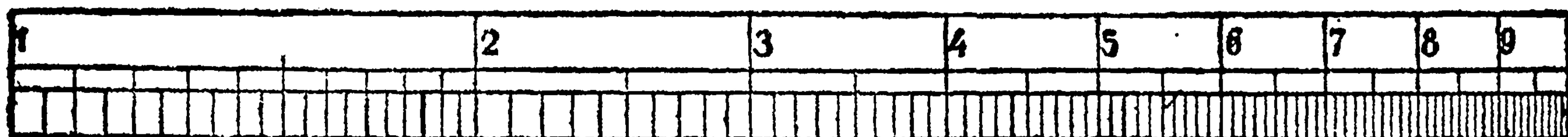
\* На черт. 1 приведена только часть всей шкалы.



$OB$  и  $OC$  (черт. 1), которым отвечают отсчеты 0,2 и 0,3 (если длину шкалы принять за 1), то ясно, что

$$OB : OC = 2 : 3 = 0,2 : 0,3.$$

В устройстве логарифмической линейки основную роль играет уже не равномерная шкала, а *логарифмическая*, которая наносится следующим образом. Пусть длина всего основного отрезка принята за единицу. Раньше мы в начале шкалы поместили бы отсчет 0 и в конце — отсчет 1; теперь же мы, заметив, что  $0 = \log 1$ ,  $1 = \log 10$ , поместим в начале отсчет 1, а в конце — отсчет 10 (черт. 2). Нанесем теперь на нашей шкале ряд других делений (отсчетов), руководствуясь следующим принципом: отсчет 2 мы поместим в конце такого отрезка, отношение которого ко всему основному отрезку равно как раз  $\log 2 = 0,301$ ; отсчетом 3 мы снабдим конец отрезка, отношение которого к основному отрезку равно  $\log 3 = 0,477$  и т. д. Эти отсчеты мы отметим крупными штрихами. Отрезок между крупными штрихами мы подразделим средними штрихами, разместив их не равномерно, как раньше, а так, чтобы отношение расстояния каждого штриха от 1 ко всему основному отрезку равнялось логарифму



Черт. 2.

того числа, которое соответствовало бы этому штриху на равномерной шкале. Отрезок между средними штрихами мы подразделим мелкими штрихами по тому же принципу. Шкала, построенная таким образом (черт. 2), обладает тем свойством, что любому отсчету этой шкалы  $x$ , прочитанному по штрихам так, как если бы они были расположены равномерно, отвечает отрезок, пропорциональный не  $x$ , как в равномерной шкале, а  $\log x$ ; отношение этого отрезка ко всему основному отрезку равно  $\log x$ , или короче (так как основной отрезок принят за единицу): *длина этого отрезка равна  $\log x$ .*

Возьмем теперь тот же основной отрезок, но масштаб уменьшим вдвое, так что длина всего отрезка будет равна двум единицам длины. Построим на нем новую шкалу по тому же принципу, что и раньше, т. е. помещая отсчет  $y$  в конце отрезка, длина которого равна  $\log y$  (применительно к новой единице длины!). Посмотрим, какой отсчет  $y$  должен соответствовать тому же отрезку, которому раньше соответствовал отсчет  $x$ . Единица длины стала вдвое меньше, а потому числа, выражающие длины всех отрезков, увеличились вдвое; раньше отрезку  $\overline{1x}$  соответствовало число  $\log x$ ; теперь же отрезку  $\overline{1y}$  той же длины будет соответствовать число  $2 \log x = \log x^2$ , и по сделанному выше условию нам в конце этого отрезка придется поместить отсчет  $y = x^2$ . В частности, в конце новой шкалы придется поместить отсчет 100, ибо именно  $\log 100 = 2$ . Итак, *уменьшение масштаба логарифмической шкалы в два раза приводит к тому, что все отсчеты нужно заменить их квадратами.*



Handwritten musical notation on a staff, featuring a series of rhythmic patterns and notes. A large '2' is written at the end of the staff.

Handwritten musical notation on a staff, featuring a series of rhythmic patterns and notes. A large '2' is written at the end of the staff.

Handwritten musical notation on a staff, featuring a series of rhythmic patterns and notes. A large '2' is written at the end of the staff.

Handwritten musical notation on a staff, featuring a series of rhythmic patterns and notes. A large '2' is written at the end of the staff.

Handwritten musical notation on a staff, featuring a series of rhythmic patterns and notes. A large '2' is written at the end of the staff.



Точно также, уменьшив масштаб в три раза, мы должны будем все отсчеты шкалы заменить их кубами, и т. д.

**12. Описание логарифмической линейки; производство отсчетов.** Перейдем теперь к описанию самой линейки.\* Всякая логарифмическая линейка состоит из трех частей (черт. 3): 1) собственно линейка, снабженная неподвижной шкалой; 2) подвижная часть, называемая „движком“ и скользящая в желобке, прорезанном в линейке, и 3) бегун, представляющий собою стеклышко, вделанное в рамку и свободно перемещающееся вдоль линейки; на стеклышке намечена тонкая черта, перпендикулярная к линейке, называемая *визирной линией*, или просто *визиром*. На неподвижной части обыкновенной линейки снизу от желобка, по которому скользит движок, нанесена логарифмическая шкала  $L$ , а кверху от желобка — логарифмическая шкала  $Q$  вдвое меньшего, чем  $L$  масштаба; ее называют *шкалой квадратов*. На линейке системы Рица, кроме этих, нанесены еще две шкалы: равномерная шкала  $A$  внизу линейки и, на верхнем краю линейки, логарифмическая шкала  $C$  втрое меньшего, чем  $L$ , масштаба (*шкала кубов*).

На лицевой стороне движка нанесены две шкалы: внизу шкала  $L'$ , тождественная со шкалой  $L$ , а наверху — шкала  $Q'$ , тождественная со шкалой  $Q$ . На оборотной стороне движка нанесены три шкалы. О них мы будем говорить ниже, в п<sup>о</sup> 16.

На шкале  $L$  деления нанесены следующим образом: от 1 до 2 через 0,01; от 2 до 4 через 0,02; от 4 до 1(0) через 0,05. [Это приходится делать в виду того, что логарифмы увеличиваются, сравнительно с числами, *неравномерно*, постоянно замедляя свой рост, а потому при увеличении числа на одну и ту же величину, скажем на 0,1, расстояние между двумя последовательными штрихами делается все меньше и меньше.] Пусть читатель сообразит, какие штрихи (или какие положения визира) отвечают числам: 1,53; 2,36; 6,75; 9,05. Однако при расчетах с линейкой постоянно приходится иметь дело с числами, которым не отвечают начерченные штрихи, или читать показания визира, расположенного *между* двумя соседними штрихами. В этих случаях на-глаз делят расстояние между штрихами или на-глаз оценивают, в каком отношении визир делит это расстояние. Так, для чисел 5,25; 3,47; 1,765 необходимо делить расстояние между соседними штрихами пополам; для чисел 4,42; 5,57; 2,648 — в отношении 2:3; для чисел 1,072; 3,264; 4,36 — в отношении 1:4, и т. д. Читателю следует поупражняться и в чтении показаний визира, наудачу помещенного между любыми соседними штрихами шкалы  $L$ . При этом, конечно, все время нужно учитывать *цену* рассматриваемого деления, т. е. тот прирост числа, которому оно отвечает. После упражнений такое интерполирование на-глаз производится легко. Вообще линейка (обычной длины, в 25 см) дает возможность отсчетов с 3, лишь в благоприятных случаях, — с 4 знаками.

Может показаться, что точность отсчетов по логарифмической шкале, в виду неизбежных погрешностей интерполирования, больше в правой

\* Кроме обыкновенной логарифмической линейки, наиболее дешевой и распространенной, мы будем постоянно иметь в виду и линейку системы Рица (Rietz), также часто встречающуюся и удобную для техников. Эта именно линейка и изображена на черт. 3.



части шкалы, где основные штрихи скучены, нежели в левой. Действительно, абсолютные погрешности отсчетов в правой части больше, но так как они относятся и к большим числам, то *относительная погрешность* во всех частях будет примерно одна и та же, именно, около  $1^0/_{00}$ . Ниже [71, 4] мы вернемся к этому вопросу.

Иногда бывает очень удобно становиться по отношению к шкале  $L$  и другим логарифмическим шкалам на другую точку зрения, именно — считать, что на ней отложены не логарифмы чисел, а лишь *мантиссы* этих логарифмов (т. е. правильно-дробные положительные части их), подобно тому как только мантииссы и указываются в таблицах логарифмов. Но тогда каждому штриху на нашей шкале будет отвечать не одно только число, содержащееся между 0 и 1 (для которого логарифм совпадает с его мантииссой), но и все числа, отличающиеся от этого числа положением запятой, так как логарифмы их имеют одну и ту же мантииссу. Так, напр., тому штриху, к которому мы раньше относили число 2,54 (ибо он отстоит на расстояние  $\log 2,54 = 0,405$  от начала шкалы, если длину всей шкалы принять за 1), теперь мы с равным правом можем отнести и числа 0,254, 2540, 0,000254 и т. д., логарифмы которых имеют ту же мантииссу 0,405 и разнятся лишь характеристиками (т. е. целыми частями: — 1, 3, — 4, ...). Таким образом, каждый штрих на шкале  $L$  отвечает лишь определенной *группе цифр* (2-5-4 в нашем примере), не устанавливая вовсе положения запятой. Поэтому полезно приучиться и отсчеты производить, называя лишь цифры одну за другой, без упоминания разрядов: два, пять, четыре.

Обращаясь к шкале  $Q$ , отметим прежде всего, что она представляется составленной из двух тождественных логарифмических шкал, сходных с  $L$ , но вдвое меньших. На деле при цифрах, помещенных у штрихов правой части шкалы, подразумеваются *нули* (10, 20, 30, ..., 100), так что и вообще отсчеты в правой части в десять раз больше соответствующих отсчетов в левой части. Легко понять, почему по виду обе части [шкалы  $Q$  совершенно тождественны; если принять длину всей шкалы за 2, то, напр., расстояние между штрихами 2 и 3 в левой части равно  $\log 3 - \log 2 = \log \frac{3}{2}$ , а расстояние между штрихами 2(0) и 3(0) в правой есть  $\log 30 - \log 20 = \log \frac{3}{2}$ , так что оба расстояния равны! Эта своеобразная *периодичность* делений логарифмической шкалы, при ее продолжении, есть одно из замечательных ее свойств.

Шкала  $Q$ , в виду меньшего масштаба, обладает и меньшей точностью, а именно на ней деления идут от 1 до 2 через 0,02, от 2 до 5 через 0,05; от 5 до 1(0) через 0,1; от 1(0) до 2(0) через 0,2; от 2(0) до 5(0) через 0,5; от 5(0) до 1(00) через 1.

После сказанного, читателю не трудно самому разобраться в шкале  $S$ , состоящей из трех рядом расположенных логарифмических шкал, подобных  $L$ , но втрое меньших.

**13. Умножение и деление.** Оба эти действия производятся с помощью лицевой стороны движка, на шкалах  $L$  и  $L'$  или на верхних шкалах  $Q$  и  $Q'$ , и основываются на известных свойствах логарифмов:

$$\log xy = \log x + \log y, \quad \log \frac{x}{y} = \log x - \log y.$$



Пусть требуется перемножить два числа 3,2 и 2,5. Заметим штрихи, отвечающие числу 3,2 на шкале  $L$  и числу 2,5 на шкале  $L'$ ; соответствующие этим штрихам отрезки равны как раз логарифмам перемножаемых чисел. Для того, чтобы сложить эти логарифмы, передвинем движок так, чтобы начало его шкалы  $L'$  пришлось против штриха 3,2 шкалы  $L$ ; тогда, очевидно, расстояние штриха 2,5 на шкале  $L'$  от начала шкалы  $L$  будет равно именно сумме логарифмов, а потому против этого штриха, на шкале  $L$ , мы прочтем искомое произведение: 8. Если бы были даны числа 3,2 и 5, то, передвинув движок, как только что, увидели бы, что штрих 5 на шкале  $L'$  вышел за пределы шкалы  $L$ , так что прочесть произведение мы могли бы лишь продолжив шкалу  $L$ . Вместо этого мы поступим иначе. Очевидно,  $\log 3,2 \cdot 5 = \log 3,2 + \log 5$  оказывается больше 1, так что этот логарифм состоит из характеристики 1 и из мантиссы, равной  $\log 3,2 + \log 5 - 1$  или  $\log 3,2 - (1 - \log 5)$ . Но отрезок  $1 - \log 5$  есть не что иное, как отрезок от штриха 5 на шкале  $L'$  до конца этой шкалы (ибо длина всей шкалы есть 1!); поэтому, для нахождения мантиссы логарифма искомого произведения, достаточно передвинуть движок *налево*, так чтобы (правый) конец шкалы  $L'$  пришелся против штриха 3,2 шкалы  $L$ , ибо тогда расстояние от начала шкалы  $L$  до штриха 5 на шкале  $L'$  будет равно именно разности  $\log 3,2 - (1 - \log 5)$ , т. е. искомой мантиссе. Против штриха 5 на шкале  $L'$  помещается штрих на шкале  $L$  с отсчетом 1-6; учитывая характеристику (1), окончательно находим: 16.

Переходя к общему случаю, заметим, что здесь именно удобно рассматривать шкалу  $L$  [и  $L'$ ], как шкалу мантисс, и производить отсчеты, не называя разрядов. Положим

$$\log x = c + m, \quad \log y = c' + m',$$

где  $c, c'$  — характеристики, а  $m, m'$  — положительные мантиссы. Тогда имеем

$$\log xy = (c + c') + (m + m').$$

Если  $m + m' < 1$ , то, очевидно, именно  $m + m'$  будет мантиссой  $\log xy$  (первый пример!), а  $c + c'$  — его характеристикой; если же  $m + m' > 1$ , то одна единица отсюда отойдет к характеристике, так что мантисса  $\log xy$  будет  $m + m' - 1 = m - (1 - m')$  (второй пример), а характеристика —  $c + c' + 1$ . Если отрезки  $m$  и  $m'$  сложить, или отрезки  $m$  и  $1 - m'$  вычесть с помощью шкал  $L$  и  $L'$  (см. черт. 4, *a* и *b*), как это было сделано на примерах, то придем к общему правилу:

Для нахождения произведения  $xy$  нужно переместить движок направо так, чтобы начало шкалы  $L'$  пришлось против деления  $x$  на шкале  $L$  [или, в случае необходимости, — налево так, чтобы конец шкалы  $L'$  пришелся против названного деления], и прочитать отсчет того деления на шкале  $L$ , которое придется против деления  $y$  передвинутой шкалы  $L'$ .

Для точных установки и отсчета пользуются визиром. Конечно, таким образом определяется лишь группа цифр произведения; для того чтобы установить положение запятой, можно воспользоваться характеристиками;

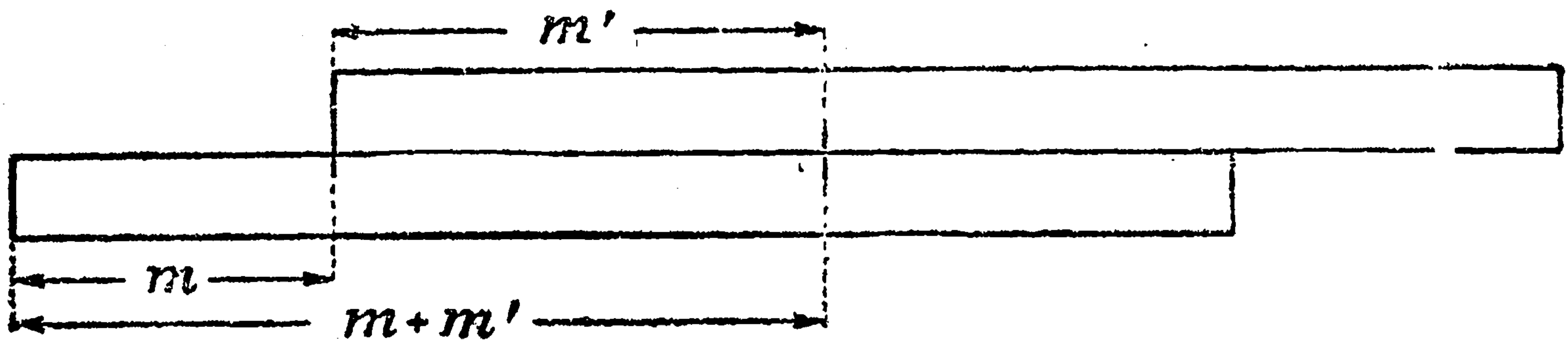


если через  $C$  обозначить характеристику логарифма произведения, то, как мы видели:

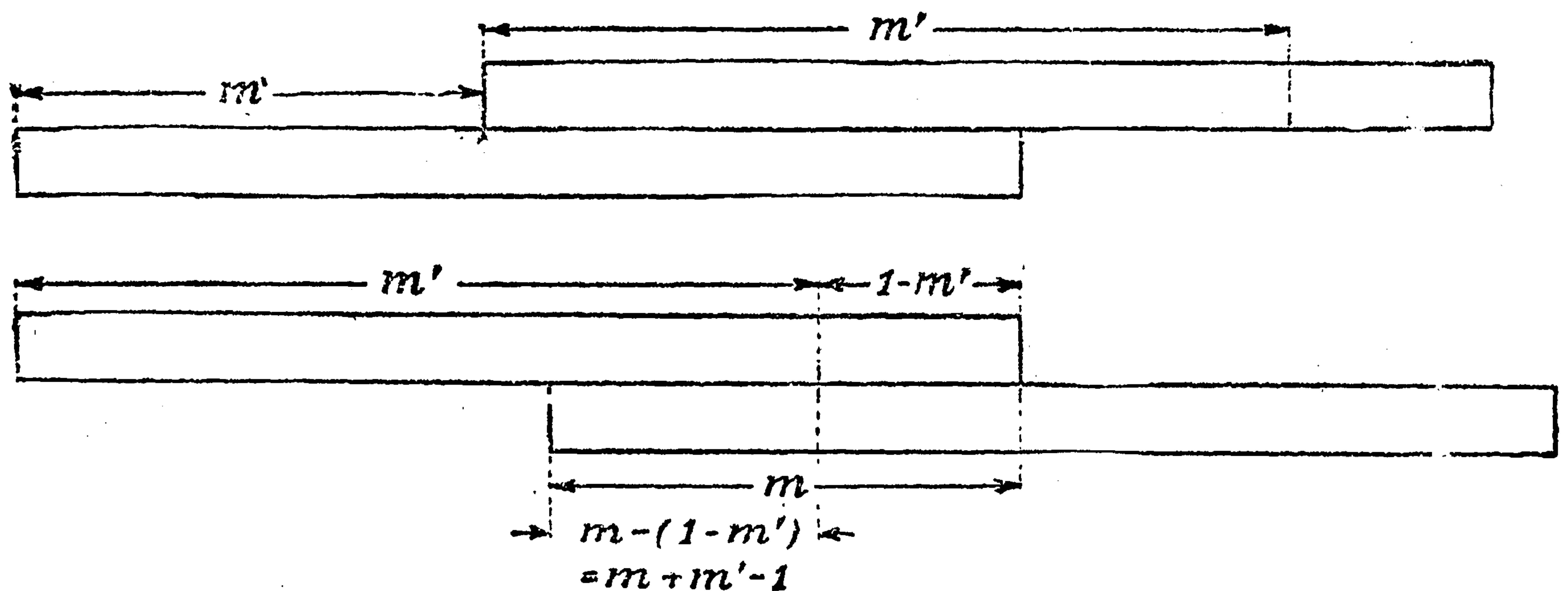
$$\left. \begin{aligned} C &= c + c', \text{ если движок — направо,} \\ C &= c + c' + 1, \text{ если движок — налево.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

На черт. 5 и 6 изображено умножение:  $35,5 \cdot 2,24 \doteq 79,5$  (движок направо;  $c=1, c'=0, C=1$ ) и  $226 \cdot 0,0648 \doteq 14,64$  (движок налево;  $c=2, c'=-2, C=1$ ).

Обыкновенно однако предпочитают иметь дело не с характеристикой логарифмов, а с „числом целых знаков“. Если число больше 1 (напр.: 238,6),



Черт. 4a).



Черт. 4b)

то под этим разумеют число цифр *налево* от запятой (в нашем примере — три), или вообще число цифр, если имеем дело с целым числом; если же число меньше 1, но содержит десятые доли (напр.: 0,238), то считают, что в нем „число целых знаков“ равно 0; если же, наконец, число и десятых долей не содержит (напр.: 0,00238), то под „числом его целых знаков“ разумеют число нулей после запятой до первой значащей цифры, *взятое со знаком минус* ( $-2$ ). Обозначим теперь через  $n, n'$  и  $N$  число целых знаков для  $x, y$  и  $xy$ ; тогда, как известно из алгебры,

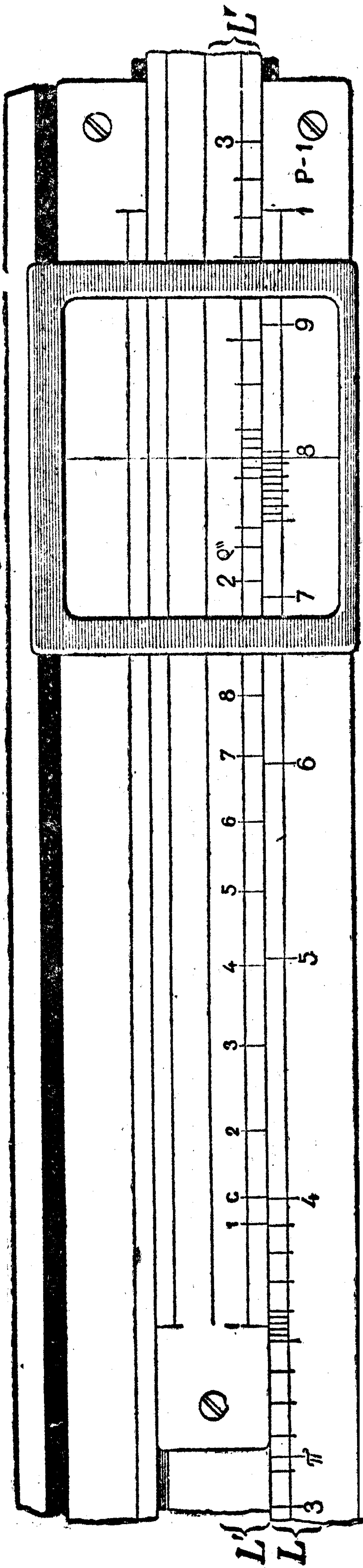
$$c = n - 1, \quad c' = n' - 1, \quad C = N - 1.$$

Подставляя эти выражения в формулы (1), видим, что

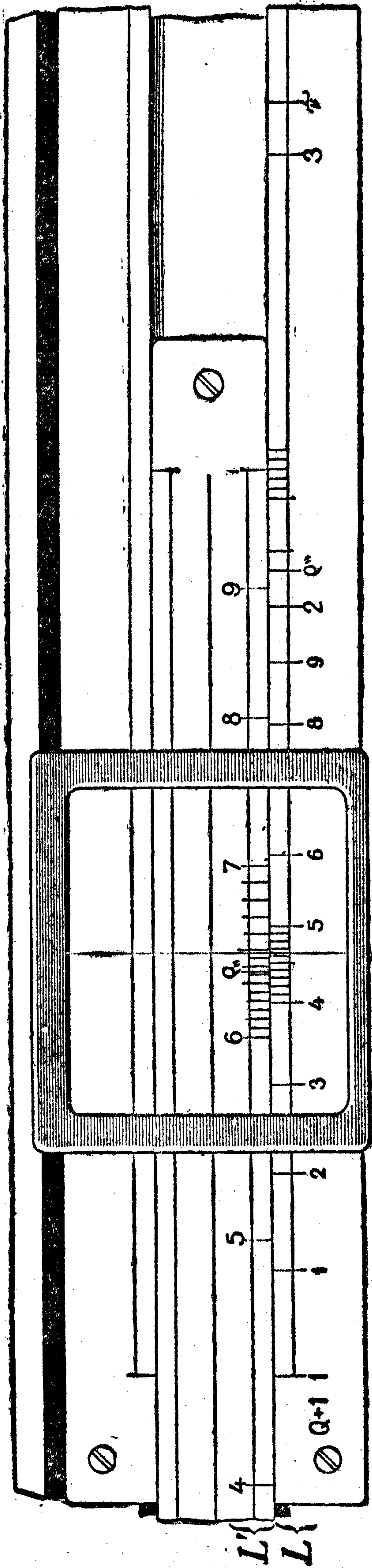
$$\left. \begin{aligned} N &= n + n' - 1, \text{ если движок — направо,} \\ N &= n + n', \text{ если движок — налево.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Так, напр., для произведения  $0,0124 \cdot 81,21$  получаем  $(-1) + 2 = 1$  знак (движок передвигается налево), что дает 1,007.



Черт. 5.

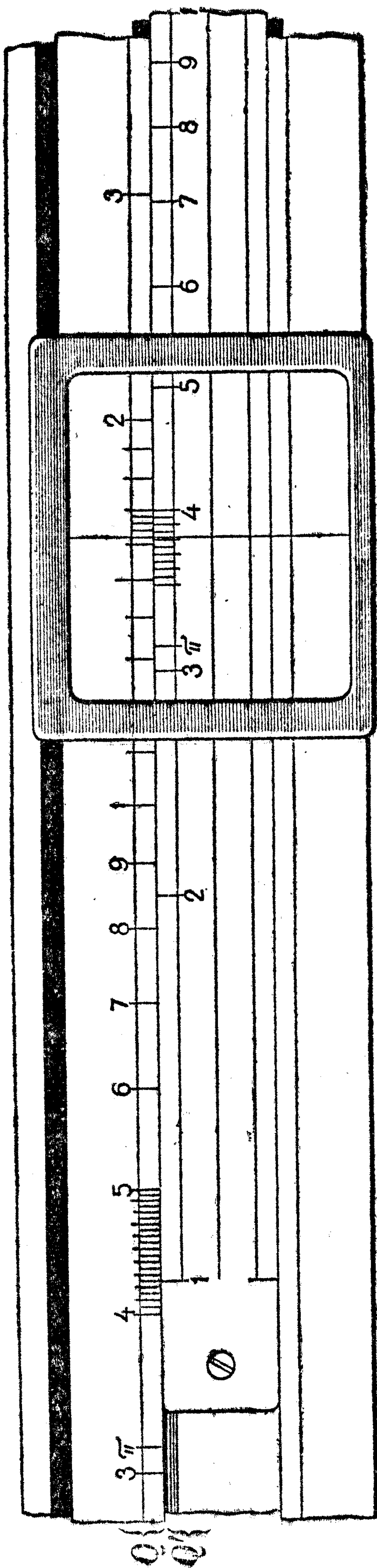


Черт. 6.

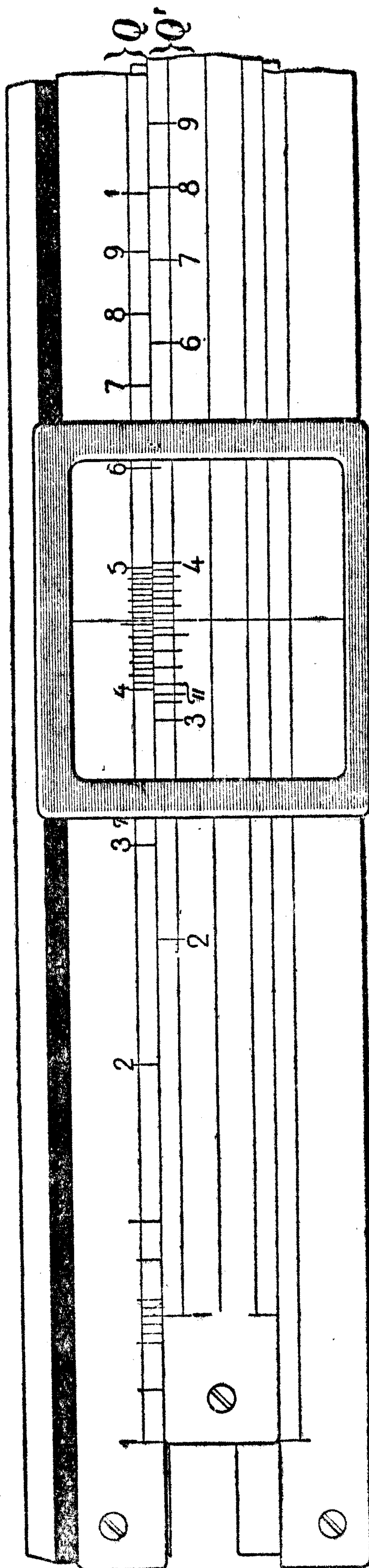
Для умножения можно пользоваться и верхними шкалами  $Q$  и  $Q'$  неподвижной части и движка. Тогда придется движок передвигать только направо, и число (целых) знаков произведения будет равно сумме чисел



знаков сомножителей, или меньше его на единицу, смотря по тому, получилось ли произведение на правой или на левой половине шкалы  $Q$ .



Черт. 7.



Черт. 8.

Однако точность при этом уменьшается, так как масштаб шкалы  $Q$  вдвое меньше масштаба шкалы  $L$ . Черт. 7 и 8 соответствуют произведениям:  $42,5 \cdot 381 = 16\,200$  и  $1,26 \cdot 36 = 45,3$ .

Если нужно перемножить сразу несколько чисел, то они перемно-



жаются по указанному правилу последовательно, причем *нет необходимости прочитывать промежуточные результаты*, а нужно только отмечать их *наведением визира*, с которым и совмещается начальное или конечное деление движка при следующем умножении. Нужно однако обращать каждый раз внимание на то, в какую сторону передвигается движок, чтобы не ошибиться в числе (целых) знаков произведения.

*Примеры.* 1. Пусть дано умножить:

$$2,74 \cdot 0,34 \cdot 5,28 \cdot 0,086;$$

→   ←   ←

стрелки внизу указывают, в какую сторону приходится перемещать движок. Число знаков:  $1 + 0 - 1 + 1 + (-1) = 0$ . *Отв.* 0,423.

2. Другой пример:

$$32,4 \cdot 0,68 \cdot 0,00175 \cdot 226;$$

←   →   →

число знаков:  $2 + 0 + (-2) - 1 + 3 - 1 = 1$ . *Отв.* 8,71.

3. Найти вес стержня из круглого железа длиной 11,3 м и диаметром 5 см. Удельный вес железа 7,8 г/см<sup>3</sup>. Имеем:

$$3,14 \cdot 6,25 \cdot 1130 \cdot 7,8;$$

←   →   ←

число знаков:  $1 + 1 + 4 - 1 + 1 = 6$ . *Отв.* 173 000 г = 173 кг.

4. Если один из сомножителей, напр.,  $x$  остается неизменным, а другой принимает различные значения, то достаточно, очевидно, *одной* установки движка, если умножать на верхних шкалах (и *двух*, если — на нижних), чтобы получить „таблицу“ соответствующих значений  $y$  и  $xу$ . Две рядом расположенных шкалы удобнее обыкновенной таблицы, ибо интерполирование производится непосредственно „на-глаз“.

Предлагается читателю составить такие „таблицы“: 1) для перевода сажень в метры и обратно (1 саж. = 2,134 м), 2) для окружностей кругов по их диаметрам.

Из сказанного об умножении можно вывести (на чем останавливаться не станем) следующее правило для *деления*:

*Для нахождения частного  $x : y$  нужно установить движок так, чтобы точка  $y$  шкалы  $L'$  пришлась против точки  $x$  неподвижной шкалы  $L$ , и прочитать отсчет той точки шкалы  $L$ , которая придется против начала или конца шкалы  $L'$  (в зависимости от того, выдвинут ли при этом движок направо или налево).*

Определив этим путем *группу цифр* частного, число его „целых знаков“  $N$  устанавливаются по формулам

$$\left. \begin{aligned} N &= n - n' + 1, \text{ если движок — направо,} \\ N &= n - n' \quad \quad \quad \text{, если движок — налево.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Так, те же черт. 5 и 6 дают выполнение делений  $\frac{79,5}{2,24} \doteq 35,5$  (движок направо, число знаков определяется по схеме:  $2 - 1 + 1 = 2$ ) и  $\frac{14\ 640}{64,8} \doteq 226$  (движок налево, число знаков:  $5 - 2 = 3$ ); в то же время они дают, разумеется, и выполнение таких, напр., делений:  $\frac{0,795}{2,24} \doteq 0,355$  (число знаков:  $0 - 1 + 1 = 0$ ) и  $\frac{0,001464}{0,0648} \doteq 0,0226$  (число знаков:  $-2 - (-1) = -1$ ).



На верхних шкалах деление производится по тем же правилам, если только точки с отсчетами  $x$  и  $y$  берутся, соответственно, на шкалах  $Q$  и  $Q'$  в пределах одноименных (левых или правых) полу-шкал, а отсчет  $x : y$  читается на шкале  $Q$  над любым из концов или над серединой шкалы  $Q'$ . Однако, в виду меньшей точности, предпочитают пользоваться нижними шкалами.

Очень часто приходится вычислять выражения, в которые входят несколько множителей в числителе и несколько множителей в знаменателе („комбинированное“ умножение и деление). Тогда удобнее всего вести вычисление в следующем порядке: первый множитель числителя делим на первый множитель знаменателя; не читая результата, умножаем его на второй множитель числителя; опять не прочитывая результата, делим его на второй множитель знаменателя и т. д.

Этим достигается уменьшение числа отдельных установок. Еще раз напоминаем о необходимости учитывать, сколько раз при выполнении умножения и деления движок передвигался направо или налево. Чтобы облегчить счет числа целых знаков в произведении и частном, объединим правила (2) и (3) в следующей табличке, где  $n$  и  $n'$  обозначают числа целых знаков, соответственно, в множимом и множителе, или в делимом и делителе:

Действие	Перемещение движка	
	направо	налево
Умножение . . . . .	$n + n' - 1$	$n + n'$
Деление . . . . .	$n - n' + 1$	$n - n'$

Примеры. 1.  $\frac{0,787 \cdot 32,5 \cdot 0,024}{6,33 \cdot 5,76 \cdot 113} = 0,787 \xrightarrow{\quad} : 6,33 \xrightarrow{\quad} \cdot 32,5 \xleftarrow{\quad} : 5,76 \xleftarrow{\quad} \cdot 0,024 \xrightarrow{\quad} : 113.$

Число знаков определяем, пользуясь табличкой:  $0 - 1 + 1 + 2 - 1 - 1 + (-1) - 3 + 1 = -3.$

Отв. 0,000149.

2.  $\frac{4,5 \cdot 0,362 \cdot 671}{28,3 \cdot 0,054 \cdot 3,25}$ . Число знаков:  $1 - 2 + 1 + 0 - 1 - (-1) + 1 + 3 - 1 - 1 + 1 = 3.*$

Отв. 220.

3. Предлагаем читателю произвести расчеты в примерах 10 с помощью линейки.

\* Обращаем внимание читателя на то, что при производстве действия умножения или деления нужно следить за тем, оказывается ли движок *выдвинутым из линейки* направо или налево, а не за тем, куда пришлось передвигать движок после предыдущей установки; напр., здесь при делении на 0,054 пришлось движок передвинуть налево (по сравнению с предыдущей установкой), но в результате он все же остался выдвинутым из линейки *направо*.



4. Сила  $P$ , с которой надо действовать на рукоятку ворота, чтобы поднять груз  $Q$ , определяется формулой (если пренебречь трением):

$$P = Q \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2},$$

где  $p$  и  $q$  — плечи сил  $P$  и  $Q$  относительно некоторых точек, а  $r_1, R_1, r_2, R_2$  — радиусы входящих в конструкцию ворота зубчатых колес. Вычислить по этой формуле  $P$ , пользуясь линейкой, при  $Q = 500$  кг,  $p = 31$  см,  $q = 11$  см,  $\frac{r_1}{R_1} = \frac{21}{85}$ ,  $\frac{r_2}{R_2} = \frac{16}{65}$  (отношение радиусов зубчатых колес определяется отношением чисел зубцов).

Отв. 10,66 кг.

5. На конец рычага длины  $l = 87$  см действует усилие  $P = 45$  кг; поперечное сечение рычага есть прямоугольник с основанием  $b = 2,5$  см и высотой  $h = 3,7$  см; вычислить напряжение  $\sigma$  по формуле:

$$\sigma = \frac{6Pl}{bh^2}.$$

Отв. 686 кг/см<sup>2</sup>.

6. Вычислить „степень надежности“  $\mathcal{E}$  шатуна (из литой стали) на продольный изгиб, по формуле:

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{P \cdot l^2},$$

где модуль упругости  $E = 2200000$  кг/см<sup>2</sup>, момент инерции поперечного сечения  $I = 44,9$  см<sup>4</sup>, передаваемое усилие  $P = 8500$  кг, наконец, длина шатуна  $l = 135$  см.

Отв. 6,3.

*Замечание.* Иной раз техники предпочитают, не пользуясь указанными правилами знаков, прикинуть сначала грубо определяемую величину, чем и устанавливается положение запятой. Для примеров 1 и 2 имеем:

$$\frac{0,8 \cdot 30 \cdot 0,02}{6 \cdot 5 \cdot 100} = 0,00016, \quad \frac{5 \cdot 0,4 \cdot 700}{30 \cdot 0,05 \cdot 3} = \frac{1400}{4,5} \doteq 300.$$

Этот прием, во всяком случае, следует рекомендовать для проверки.

14. Возвышение в квадрат и в куб, извлечение квадратного и кубического корня. Возвышение в квадрат производится с помощью шкал  $L$  и  $Q$  (без участия движка). Из сказанного в 11 вытекает следующее правило:

Для возвышения в квадрат числа  $x$  устанавливают визир на делении с отсчетом  $x$  шкалы  $L$  и в пересечении его со шкалой  $Q$  прочитывают отсчет  $x^2$ .

Так как этот отсчет получается, конечно, приближенно, с 3-4 верными знаками, то некоторое затруднение может представить определение „числа целых знаков“. Дело обстоит совсем просто, если  $x$  имеет один целый знак, т. е. представляет собой однозначное число (с дробью): его квадрат имеет одну цифру влево от запятой, если прочитывается на левой половине шкалы  $Q$ , и две цифры — если на правой. Так, на черт. 9 изображены случаи возведения в квадрат:

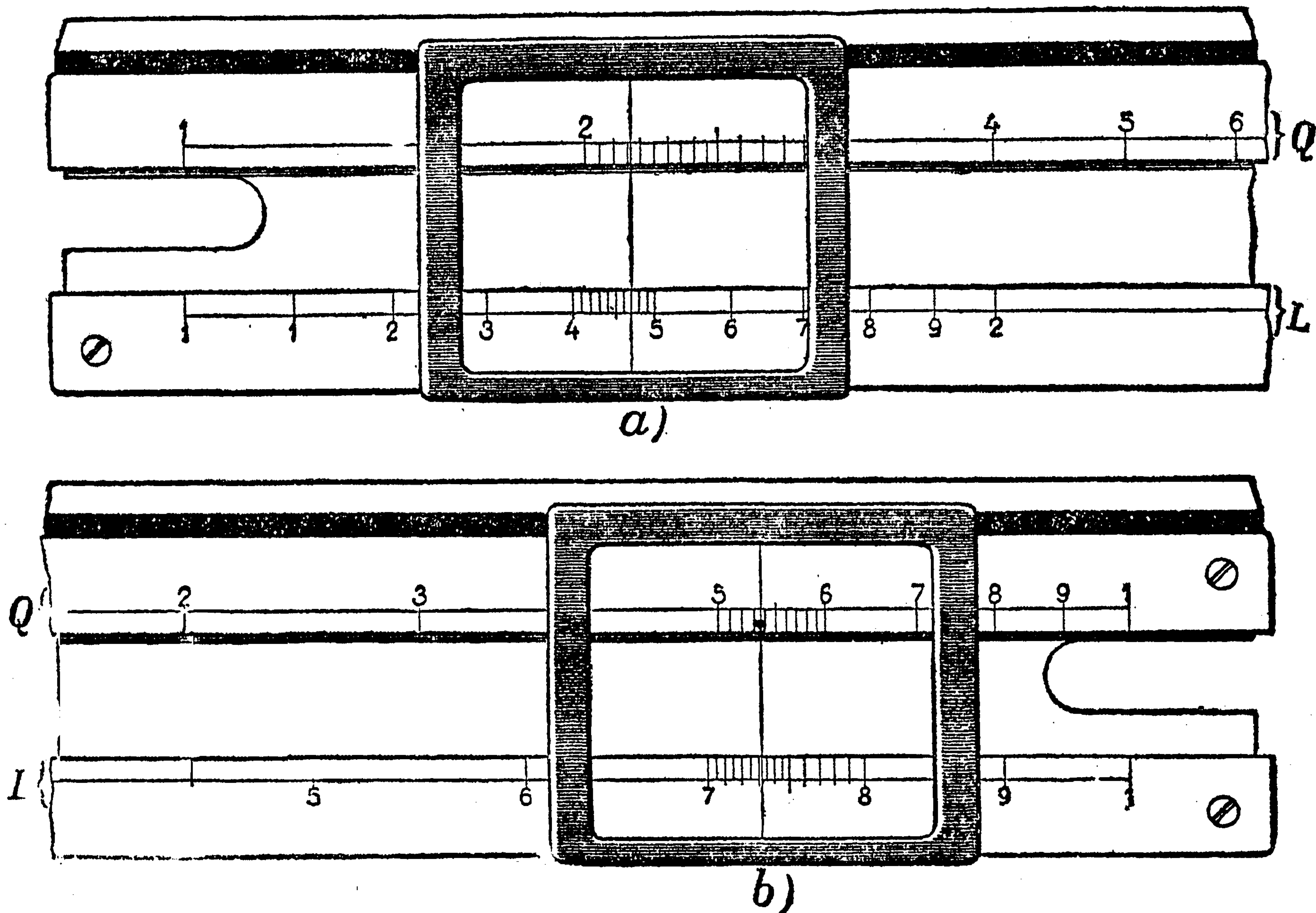
$$\begin{aligned} a) & (1,47)^2 = 2,16; \\ b) & (7,32)^2 = 53,6. \end{aligned}$$



Переходя к общему случаю, обозначим через  $c$  характеристику  $\log x$ , а через  $m$  — его мантиссу, так что  $\log x = c + m$ ; тогда

$$\log x^2 = 2 \log x = 2c + 2m. \quad (4)$$

Визир, установленный на отсчете  $x$  шкалы  $L$ , отсекает на ней отрезок, длина которого есть  $m$ , если за единицу взята длина всей шкалы  $L$ ; на шкале  $Q$  визир отсечет такой же отрезок, но, при вдвое меньшей единице длины, его длина будет уже  $2m$ . Если визир пересечет



Черт. 9.

левую полушкалу (как в случае 1,47; 0,0147; 147;...), то  $2m < 1$  и, как видно из (4),  $2m$  и будет мантиссой  $\log 2x$ , а следовательно  $2c$  — его характеристикой. Если же визир пересечет правую полушкалу (как в случае 732; 7320; 0,732;...), то  $2m > 1$ , так что одна единица отсюда отойдет к характеристике; мантисса будет  $2m - 1$ , а характеристика  $2c + 1$ . Заметим, что, так как длина левой полушкалы равна 1, то отрезок на правой полушкале как раз и выразит эту мантиссу.

Итак, в первом случае характеристика  $\log x^2$  есть  $2c$ , а во втором —  $2c + 1$ . Если через  $n$  и  $N$  обозначить „число целых знаков“ [13], соответственно для  $x$  и для  $y = x^2$ , то

$$N - 1 = 2(n - 1)$$

или

$$N - 1 = 2(n - 1) + 1,$$



смотря по случаю. Отсюда правило:

$$\left. \begin{aligned} N &= 2n - 1, \text{ если отсчет слева,} \\ N &= 2n \quad , \text{ если отсчет справа.} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

*Примеры.* 1. Тот же черт. 9 дает выполнение следующих возвышений в квадрат:

а) на левой полушкале.

$$\begin{aligned} (0,0147)^2 &= 0,000216 \\ 147^2 &= 21\,600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n &= -1; \quad 2n - 1 = 2(-1) - 1 = -3) \\ (n &= 3; \quad 2n - 1 = 5) \end{aligned}$$

б) на правой полушкале

$$\begin{aligned} 7320^2 &= 536 \cdot 10^5 \\ (0,732)^2 &= 0,536 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n &= 4; \quad 2n = 8) \\ (n &= 0; \quad 2n = 0) \end{aligned}$$

2. 
$$\begin{aligned} (0,00375)^2 &= 0,0000141 \\ (0,121)^2 &= 0,0146 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{справа; } n &= -2; \quad 2n = -4) \\ (\text{слева; } n &= 0; \quad 2n - 1 = -1) \end{aligned}$$

*Замечание.* Если угодно, можно свести каждый случай к возведению в квадрат числа с одним целым знаком, как это ясно из следующих примеров:

$$\begin{aligned} 0,0147 &= 1,47 \cdot 10^{-2}; \quad (0,0147)^2 = (1,47)^2 \cdot 10^{-4} = 2,16 \cdot 10^{-4} = 0,000216 \\ 147 &= 1,47 \cdot 10^2; \quad (147)^2 = 2,16 \cdot 10^4 = 21\,600; \end{aligned}$$

при этом отпадает необходимость пользоваться приведенными выше правилами.

Извлечение квадратного корня из чисел производится, естественно, в обратном порядке. Из сказанного выше о возведении в квадрат может быть выведено такое правило:

Для извлечения квадратного корня из числа  $y$ , нужно установить визир на отсчете „у“ левой половины шкалы  $Q$ , если число  $N$  целых знаков „у“ нечетное, и правой половины—если это число знаков четное; в пересечении визира со шкалой  $L$  прочтывают отсчет:  $\sqrt{y} = x$ .

Что же касается положения запятой, то „число целых знаков“ корня определяется по формулам, вытекающим из (5):

$$n = \frac{N+1}{2}, \text{ если } N \text{ — нечетное,}$$

$$n = \frac{N}{2}, \text{ если } N \text{ — четное.}$$

*Примеры:* 1.  $\sqrt{450} \doteq 21,2$  ( $N=3$ , отсчет слева,  $n = \frac{3+1}{2} = 2$ )

$$\sqrt{0,45} \doteq 0,67 \quad (N=0, \text{ отсчет справа, } n = \frac{0}{2} = 0).$$

2.  $\sqrt{0,648} \doteq 0,805$  (справа);  $\sqrt{6,48} \doteq 2,54$  (слева).

3.  $\sqrt{2380} \doteq 48,8$ ;  $\sqrt{0,00238} \doteq 0,0154$  ( $n = \frac{-3+1}{2} = -1$ ).



Вместо того, чтобы пользоваться указанными правилами, поступают и так: 1) представляют число  $u$  в виде произведения числа с *одним* или *двумя* целыми знаками на *четную* степень десяти —  $10^{2k}$  (напр.,  $450 = 4,5 \cdot 10^2$ ;  $0,45 = 45 \cdot 10^{-2}$ ;  $0,648 = 64,8 \cdot 10^{-2}$ ;  $2380 = 23,8 \cdot 10^2$ ;  $0,000238 = 2,38 \cdot 10^{-4}$ ); 2) прочитывая число с *одним* знаком на левой, а с *двумя* — на правой половине шкалы  $Q$ , извлекают из него корень, как выше, и умножают на  $10^k$  (напр.,  $\sqrt[3]{450} = \sqrt[3]{4,5 \cdot 10} \doteq 2,12 \cdot 10 = 21,2$ ;  $\sqrt[3]{0,45} = \sqrt[3]{45 \cdot 10^{-1}} = 6,7 \cdot 10^{-1} = 0,67$ ;  $\sqrt[3]{0,000238} = \sqrt[3]{2,38 \cdot 10^{-2}} \doteq 1,54 \cdot 10^{-2} = 0,0154$ ).

На линейке системы Рида *возвышение в куб* и *извлечение кубического корня* производятся аналогично, с помощью шкалы кубов  $C$ . Случай возвышения в куб однозначного числа (с дробью) не требует пояснений; другие случаи сводятся к этому.

*Примеры:*

$$\begin{aligned} (0,162)^3 &= (1,62 \cdot 10^{-1})^3 = (1,62)^3 \cdot 10^{-3} = 4,25 \cdot 10^{-3} = 0,00425; \\ 162^3 &= (1,62 \cdot 10^2)^3 = 4,25 \cdot 10^6 = 425 \cdot 10^4; \\ (0,029)^3 &= (2,9 \cdot 10^{-2})^3 = (2,9)^3 \cdot 10^{-6} = 24,4 \cdot 10^{-6} = 0,0000244; \\ (72,4)^3 &= (7,24 \cdot 10)^3 = (7,24)^3 \cdot 10^3 = 380 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

При извлечении кубического корня следует представить подкоренное число в виде произведения *одно-, двух- или трехзначного* числа (с дробью) на степень десяти с показателем, *кратным трех*, т.е. на  $10^{3k}$ ; установив визир на первом множителе (соответственно, в 1-й, 2-й или 3-й трети шкалы  $C$  и найдя корень на шкале  $L$ , умножают его на  $10^k$ .

*Примеры:*

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{0,006} &= \sqrt[3]{6 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{6} \cdot 10^{-1} = 1,817 \cdot 10^{-1} = 0,1817; \\ \sqrt[3]{60\,000} &= \sqrt[3]{60 \cdot 10^3} = \sqrt[3]{60} \cdot 10 = 3,91 \cdot 10 = 39,1; \\ \sqrt[3]{0,6} &= \sqrt[3]{600 \cdot 10^{-3}} = \sqrt[3]{600} \cdot 10^{-1} = 8,43 \cdot 10^{-1} = 0,843. \end{aligned}$$

Совместное применение шкал  $Q$  и  $C$  дает возможность возвышать числа в степень с показателями  $\frac{3}{2}$  и  $\frac{2}{3}$ . Предоставляем сообразить это читателю

*Примеры:*  $7,3^{\frac{3}{2}} = 3,75$ ;  $7,84^{\frac{2}{3}} = 21,9$ .

Так как на обыкновенной линейке нет шкалы кубов, то полезно знать, как производятся указанные выше операции без ее помощи. Для возвышения числа  $x$  в куб умножают на верхних шкалах  $x^2$  на  $x$ . Что же касается нахождения кубического корня  $x = \sqrt[3]{u}$ , то, как мы видели, можно ограничиться случаями, когда число  $u$  имеет один, два или три целых знака (так что корень будет иметь один знак). Для этих случаев укажем два приема.

Предположим для простоты, что  $u$  имеет *один* целый знак. Подведем визир к делению с отсчетом „ $u$ “ на шкале  $Q$  и, сохраняя визир неподвижным, станем перемещать движок направо. Если следить за отсчетами на шкале  $Q'$  у визира и на шкале  $L$  у начала движка, то заметим, что отсчеты эти сближаются и, в некоторый момент, совпадут; этот общий отсчет  $x$  на шкалах  $Q'$  и  $L$  и будет искомым корнем. Действительно, против начала движка на шкале  $Q$  будет отсчет  $x^3$ , и, умножая на верхних шкалах  $x^2$  на  $x$ , мы и получаем  $u$ . Вот, напр., последовательные пробы для  $\sqrt[3]{5}$ :

отсчеты на $Q'$ :	1,8;	1,7;	1,71	$\sqrt[3]{5} = 1,71$ .
отсчеты на $L$ :	1,66;	1,715;	1,71	



Если  $u$  имеет два или три целых знака, то поступают так же, но, беря отсчет  $u$  всегда на левой половине шкалы  $Q$ , пользуются при этом уже правым концом движка. Легко проверить, напр., что,  $\sqrt[3]{50} = 3,68$  [на правой половине  $Q'$ ],  $\sqrt[3]{500} = 7,94$  [на левой половине  $Q'$ ]. Вот сводка различных случаев:

Число цел. знаков $u$	Конец движка	Отсчет на $Q'$
один	левый	слева
два	правый	справа
три	правый	слева

Если брать отсчеты  $u$  на правой половине  $Q$ , то схема будет другая; впрочем во всех случаях быстро приходят к цели, если грубо прикинуть наперед величину корня.

При втором приеме визир устанавливают на отсчете  $u$  шкалы  $L$ . Затем, как и прежде, перемещают движок так, чтобы отсчет шкалы  $Q'$  у визира совпал с отсчетом шкалы  $L$  у начала или конца движка; в момент совпадения этих отсчетов, отсчет  $x$  шкалы  $L'$  у визира (а не совпавшие отсчеты!) дает искомый корень. Совпавшие же отсчеты дадут, очевидно,  $x^2$ ; если умножить  $x^2$  на  $x$  на нижних шкалах, то, действительно, получится  $u$ . Если, напр., установить визир на отсчете 5 (50, 500) и, совместив с ним начало движка, перемещать затем движок налево, то получатся поочередно три совпадения на отсчетах 2,912; 1,358; 6,3, которым и будут отвечать на шкале  $L'$  у визира отсчеты  $\sqrt[3]{5} = 1,71$ ;  $\sqrt[3]{50} = 3,68$ ;  $\sqrt[3]{500} = 7,94$ .

Предлагаем в виде упражнения произвести на линейке, комбинируя указанные выше приемы, следующие расчеты.

*Примеры.* 1. Диаметр  $d$  железного вала по допускаемому напряжению кручения и на допускаемый угол скручивания рассчитывается, соответственно, по формулам:

$$d_1 = 12 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}, \quad d_2 = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \text{ (см).}$$

Полагая, что передаваемая мощность  $N = 275$  лощ. сил, а число оборотов в минуту  $n = 80$ , найти  $d_1$  и  $d_2$ . *Отв.*  $d_1 \doteq 12 \cdot 1,51 \doteq 18,1 \doteq 18$  (см);  $d_2 \doteq 12 \cdot 1,36 \doteq 16,3 \doteq 16,5$  (см). *Указ.*  $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$ .

2. Рассчитать шаг зацепления  $t$  зубчатого колеса по формуле

$$t = \sqrt[3]{\frac{2\pi \cdot M_d}{c \cdot \psi \cdot z}} \text{ (см),}$$

где крутящий момент  $M_d = 1300$  кг · см, условное напряжение  $c = 18$  кг/см<sup>2</sup>, отношение ширины зубца к шагу  $\psi = 1,75$ , число зубцов  $z = 11$ . *Отв.*  $t \doteq \sqrt[3]{23,6} \doteq 2,87$  см = 28,7 мм; но обыкновенно берут  $t$  (в мм) кратным  $\pi$ , по линейке:  $28,7 \doteq 9\pi$ , окончательно,  $t = 9\pi \doteq 28,3$  мм.

3. Для круглой железной оси, опертой по концам, дано: длина  $l = 300$  см, диаметр  $d = 22$  см, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>; по середине ось несет на себе груз  $P = 12\,000$  кг. Рассчитать период собственных колебаний этого груза по формуле



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}} \text{ (сек),}$$

где  $g = 981$  см/сек<sup>2</sup>, стрела же прогиба  $f$  определяется формулой

$$f = \frac{Pl^3}{48EI},$$

причем момент инерции  $I$ , в свою очередь, находится по формуле

$$I = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Отв.  $f = 0,29$  см,  $T = 0,11$  сек.

4. Расход воды через незатопленный прямоугольный водослив дается формулой

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}}.$$

Пусть коэффициент расхода  $\mu = 0,67$ , ширина водослива  $b = 10,5$  м,  $g = 9,81$  м/сек<sup>2</sup>, высота напора  $H = 0,75$  м; найти  $Q$  (в м<sup>3</sup>/сек).

Отв.  $H^{\frac{3}{2}} = 0,65$ ,  $Q = 13,5$  м<sup>3</sup>/сек.

15. Решение кубических уравнений. В виду того, что инженерам иногда приходится решать кубические уравнения (напр., при расчете железобетонных конструкций, а также и в других случаях), мы покажем, как это решение может быть выполнено с помощью линейки.

Общий вид кубического уравнения таков:

$$a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0,$$

где  $a_0, a_1, a_2, a_3$  — постоянные коэффициенты.

Разделив на  $a_0$ , мы приведем его к виду:

$$y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0. \quad (6)$$

Это уравнение может быть еще упрощено; разъясним это сначала на примере.

Пусть дано уравнение:

$$y^3 + 3y^2 - 10y - 7 = 0. \quad (7)$$

Положим здесь  $y = x - 1$  (вводя, таким образом, взамен неизвестной  $y$ , другую неизвестную  $x$ ):

$$(x - 1)^3 + 3(x - 1)^2 - 10(x - 1) - 7 = 0$$

или, после преобразований и упрощений,

$$x^3 - 13x + 5 = 0.$$

Уравнение (7) заменилось другим, в котором уже нет члена с квадратом неизвестной!

Того же можно добиться и по отношению к общему уравнению (6), если положить там  $y = x - \frac{b_1}{3}$ . В самом деле, произведя эту подстановку:

$$\left(x^3 - 3 \cdot \frac{b_1}{3} x^2 + \dots\right) + b_1 \left(x^2 - 2 \cdot \frac{b_1}{3} x + \dots\right) + \dots = 0$$



(выписаны не все члены) — сразу видим, что члены с  $x^2$  взаимно уничтожаются.

Итак, можно ограничиться рассмотрением кубических уравнений в так называемом приведенном виде:

$$x^3 + px + q = 0. \quad (8)$$

Удобнее выявить знаки коэффициентов и писать уравнение в форме:

$$x^3 \pm p_1 x \pm q_1 = 0, \quad (9)$$

где под  $p_1$  и  $q_1$  понимаются уже *положительные* числа (абсолютные величины коэффициентов). Кубическое уравнение может иметь или *три* вещественных корня, или *один*. В следующей таблице дан обзор всех возможных случаев [см. ниже, 148].

Вид уравнения	положительных корней	отрицательных корней
1) $x^3 + p_1 x + q_1 = 0$	нет	один
2) $x^3 + p_1 x - q_1 = 0$	один	нет
3) $x^3 - p_1 x + q_1 = 0$	$\begin{cases} \text{нет, если } \Delta \geq 0 \\ \text{два, если } \Delta < 0 \end{cases}$	один
4) $x^3 - p_1 x - q_1 = 0$	один	$\begin{cases} \text{нет, если } \Delta \geq 0 \\ \text{два, если } \Delta < 0 \end{cases}$

(10)

где через  $\Delta$  в случаях 3) и 4) обозначено выражение

$$\frac{q_1^2}{4} - \frac{p_1^3}{27}.$$

Сделаем предварительно еще два замечания. Если наше уравнение имеет *три* вещественных корня  $x_1, x_2, x_3$ , то, как будет показано в главе IX [см. 143, (7)] их сумма равна нулю:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (11)$$

Этим свойством можно пользоваться либо для вычисления третьего корня, когда два уже найдены, либо для проверки вычисленных корней. Затем вычисление *отрицательного* корня данного уравнения всегда можно свести к вычислению *положительного* корня некоторого другого уравнения. Пусть, напр., дано уравнение вида 1), имеющее один отрицательный корень  $x_1$ . Полагая  $x = -X$ , приведем его к уравнению:

$$X^3 + p_1 X - q_1 = 0$$

вида 2), с одним *положительным* корнем  $X_1$ . Очевидно,  $x_1 = -X_1$ .

Последнее замечание позволяет нам ограничиться разысканием *положительных* корней в случаях 2), 3), 4). Переносим свободный член направо, легко приведем уравнение в этих случаях к виду:

$$\begin{aligned} 2a) \quad x(x^2 + p_1) &= q_1, \\ 3a) \quad x(p_1 - x^2) &= q_1, \\ 4a) \quad x(x^2 - p_1) &= q_1. \end{aligned}$$

Остановимся на уравнении вида 2a). Нужно найти такое число  $x$ , чтобы произведение его на его же квадрат, увеличенный на  $p_1$ , было равно  $q_1$ . Установим визир на отсчете  $q_1$  шкалы  $L$  и стнем передвигать движок, следя за отсчетами на шкале  $L$  у начала (или конца) движка и на шкале  $Q'$  у визира, подобно тому как мы это делали [14] при извлечении кубического корня (вторым

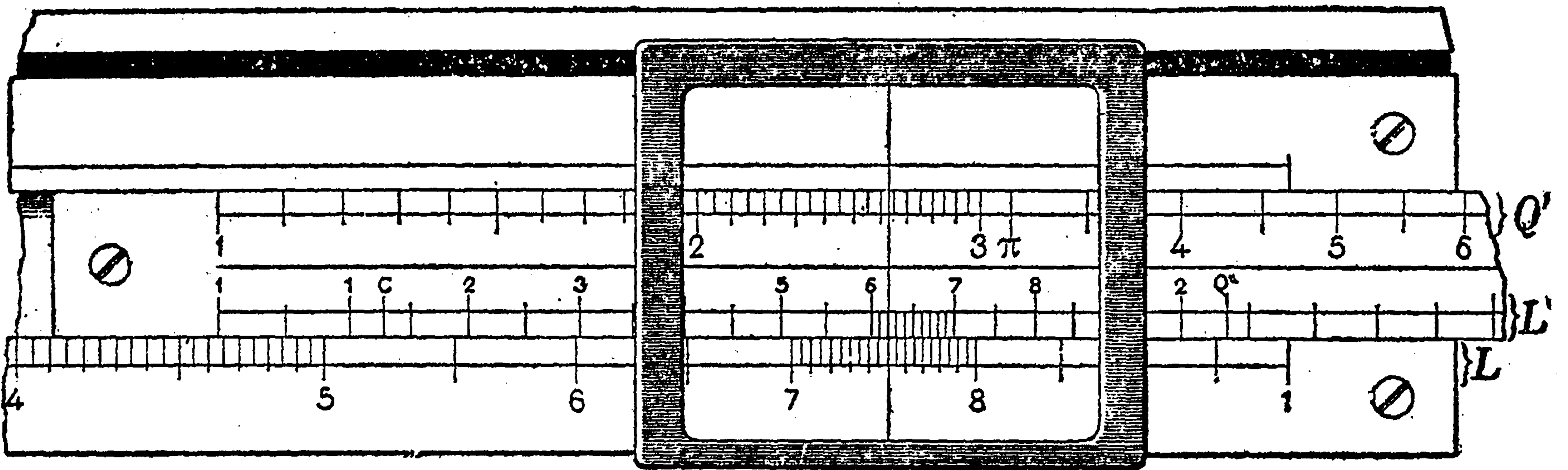


приемом!). Но там мы старались добиться совпадения этих отсчетов, а теперь будем стремиться к тому, чтобы отсчет на шкале ( $L$ ) был на  $p_1$  больше отсчета на шкале  $Q'$ . В тот момент, когда мы этого достигнем, отсчет  $x$  на шкале  $L'$  у визира даст искомый корень. Действительно, на  $Q'$  тогда отсчет будет  $x^2$ , на  $L - x^2 + p_1$ , и произведение этого числа на  $x$  как раз и будет  $q_1$  (умножение на нижних шкалах). Поясним сказанное примером. Пусть дано уравнение

$$x^3 + 2x - 7,5 = 0 \text{ или } x(x^2 + 2) = 7,5.$$

Заметим, что при  $x=1$  левая часть уравнения меньше 7,5, а при  $x=2$  — больше 7,5; отсюда ясно, что искомый корень лежит где-то между 1 и 2. Поэтому  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^2 + p$  будут иметь один знак на лево от запятой. Установив визир на делении 7,5 шкалы  $L$ , будем перемещать движок, отмечая последовательные попытки, напр., по схеме:

отсчет на $L'$ :	2	1,5	1,6	1,62	1,621
отсчет на $Q'$ :	4	2,25	2,56	2,62	2,63
то же плюс 2 :	6	4,25	4,56	4,62	4,63
отсчет на $L$ :	3,75	5	4,69	4,635	4,63



Черт. 10.

Итак, искомый корень (с точностью, превосходящей потребности техники!) будет 1,621. Его нахождение иллюстрируется черт. 10.

Возьмем еще уравнение:

$$x(x^2 + 2) = 2,4.$$

Если не оценить предварительно величины корня, то можно было бы при разыскании его впасть в ошибку и подумать, напр., что  $x=2,657$ , так как при этом на шкале  $Q'$  имеем 7,04, а на шкале  $L$  — у конца движка — 9,04. Конечно, подобную ошибку легко заметить, но лучше избежать ее, оценив корень, хотя бы грубо. Легко видеть, что при  $x=0,5$  левая часть уравнения меньше 2,4, а при  $x=1$  — больше 2,4. Поэтому искомый корень лежит между 0,5 и 1;  $x^2$  на шкале  $Q'$  следует читать как *десятые доли* (с последующими), на  $L$  — у конца движка — должно быть два с дробью. Эти соображения быстро приводят к цели:

отсчет на $L'$ :	0,9	0,85	0,86	0,87
отсчет на $Q'$ :	0,81	0,72	0,74	0,759
то же плюс 2 :	2,81	2,72	2,74	2,759
отсчет на $L$ :	3,05	2,82	2,79	2,759

Заметим, что инженеру наперед почти всегда известен порядок искомой величины.

В случае уравнений вида 3а) или 4а) нужно, очевидно, стремиться к тому, чтобы сумма отсчетов на  $Q'$  и на  $L$  была равна  $p$ , или чтобы первый отсчет был на  $p$  больше второго. Это также достигается без труда, причем полезно (хотя и не необходимо) наперед справиться по таблице, сколько корней нужно искать, а также установить их границы.



Для уравнений вида

$$x^3 \pm p_1 x^2 \pm q_1 = 0,$$

не содержащих члена с первой степенью  $x$ , вместо того чтобы преобразовывать их к приведенному виду, можно было бы обобщить *первый* прием для разыскания кубических корней. Предлагаем читателю, в виде упражнения, выполнить это самому.\*

Если иметь в распоряжении линейку системы Р и ца, то кубическая шкала облегчает решение. Остановимся для примера на уравнении 2). Выдвинув движок так, чтобы деление  $p$  на шкале  $L'$  пришлось против начала (или конца) шкалы  $L$ , и перемещая визир, в пересечении его со шкалами  $L$ ,  $L'$  и  $C$ , будем иметь соответственно  $x$ ,  $px$  и  $x^3$ . Очевидно, нужно стремиться к тому, чтобы сумма отсчетов на  $L'$  и  $C$  была равна  $q$ , тогда на  $L$  получим искомый корень. Остальные случаи исчерпываются аналогично. Впрочем, в виду меньшей точности шкалы  $C$ , все же предпочтителен выше указанный прием.

*Примеры и задачи.* 1.  $x^3 - 2x - 0,5 = 0$  или  $x(x^2 - 2) = 0,5$ . Один положительный корень и ( $\Delta = \frac{1}{16} - \frac{8}{27} < 0$ ) два отрицательных. Левая часть уравнения при  $x = 1$  меньше 0,5, а при  $x = 2$  — больше; следовательно, искомый корень  $x_1$  лежит между 1 и 2. Переписав уравнение в виде  $x^2 - 2 = 0,5/x$ , замечаем, что если  $1 < x < 2$ , то  $0,25 < x^2 - 2 < 0,5$ , поэтому отсчеты на шкале  $L$  должны читаться как *десятые доли*. Корень  $x_1 \doteq 1,526$  получается при отсчетах: 2,328 на шкале  $Q'$  и 0,328 на шкале  $L$ . Для разыскания отрицательных корней полагаем  $x = -X$  и приходим к уравнению  $X^3 - 2X + 0,5 = 0$  или  $X(2 - X^2) = 0,5$ , имеющему два положительных корня  $X'$  и  $X''$ . Так как при  $X = 0$ , 1 и 2 левая часть уравнения, соответственно, меньше, больше и снова меньше 0,5, то  $0 < X'' < 1$ ,  $1 < X' < 2$ . Корень  $X' \doteq 1,267$  находим подобно  $x_1$ , при отсчетах 1,606 на шкале  $Q'$  и 0,394 на шкале  $L$ . Корень  $X''$  оценим точнее:  $0,1 < X'' < 0,5$ . Если переписать уравнение в виде  $2 - X^2 = 0,5/X$ , то становится ясным, что при  $0,1 < X < 0,5$  имеем:  $1 < 2 - X^2 < 5$ , т. е. отсчеты на шкале  $L$  нужно читать как целые единицы. Корень  $X'' = 0,2587$  находим при отсчетах 0,067 на шкале  $Q'$  и 1,933 на шкале  $L$ . Окончательно:  $x_1 \doteq 1,526$ ,  $x_2 \doteq -1,267$ ,  $x_3 \doteq -0,2587$ . Проверка:  $x_1 + x_2 + x_3 \doteq 0!$

При некотором навыке можно обойтись без предварительных оценок. Четвертые знаки устанавливать трудно, обыкновенно ограничиваются тремя.

2.  $x^3 + 2x + 7,8 = 0$ . *Отв.* 1,65.

3.  $x^3 - 7,23x + 2,72 = 0$ . *Отв.* 0,384; 2,48; -2,86.

4.  $x^3 + 18,5x - 29,3 = 0$ . *Отв.* 1,426.

5.  $x^3 - 30x^2 + 57x - 89 = 0$ . *Указ.* Перейти к приведенному виду. *Отв.* 3,17.

6.  $x^3 - 2,34x - 0,16 = 0$ . *Отв.* 1,56; -1,49; -0,0684.

7.  $x^3 + 1,5x^2 - 12,75x + 10,775 = 0$ . *Отв.* 1,08; 2,12; -4,70.

8. Требуется подобрать кольцевое сечение для полый колонны так, чтобы толщина ее была 2 см, а момент инерции сечения был 2400 см<sup>4</sup>. Момент инерции выражается формулой

$$I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4),$$

где  $D$  и  $d$  — внешний и внутренний диаметры кольцевого сечения; кроме того, по условию,  $D = d + 4$ . Уравнение:  $d^3 + 6d^2 + 16d - 290 = 0$ . *Отв.*  $d = 4,5$ ,  $D = 8,5$  (см).

9. Для определения глубины  $h$  воды в канале, при некоторых условиях, оказалось необходимым найти *положительный* корень уравнения:  $h^3 - 1,305h - 1,305 = 0$ . *Отв.* 1,475.

10. При расчете железобетонной балки для определения положения нейтральной оси получилось уравнение:

$$x^3 + 180x^2 + 9939x - 368280 = 0.$$

\* Для решения трехчленных уравнений часто применяют *перевернутый* вверх ногами движок; этот прием несколько проще по технике, ибо в нем перемещают визир, а не движок, но зато он связан с необходимостью следить за отсчетами по *перевернутой* шкале.



Полагая  $x = z - 60$ , приведем его к виду:  $z^3 - 861z - 5^3 2620 = 0$ . Имеем:  $z = 84,61$ , так что  $x = 24,61$  (см).

11. При расчете воздушного железного провода, для определения натяжения  $S_1$  при гололеде и натяжения  $S$  при нормальной температуре, получились соответственно уравнения:

$$\begin{aligned} S_1^3 + 4430 S_1^2 - 965 \cdot 10^5 &= 0, \\ S^3 + 893 S^2 - 495 \cdot 10^4 &= 0. \end{aligned}$$

Найти их положительные корни.

*Указ.* Для избежания больших чисел можно положить  $S_1 = 100 x_1$ ,  $S = 100 x$  что приведет к уравнениям:

$$x_1^3 + 44,3 x_1 - 96,5 = 0, \quad x^3 + 8,93 x^2 - 4,95 = 0,$$

из которых первое имеет корень между 1 и 2, а второе — между 0,5 и 1.  
*Отв.* 145 и 71,6 (кг).

12. Шар радиуса  $R = 20$  (см) и удельного веса  $\gamma = 0,75$  плавает в воде; на какую глубину  $h$  (см) он погружен в воду?

Вес шара должен равняться весу воды, вытесненной погруженным в воду сегментом шара. С другой стороны, вес шара равен его объему  $\frac{4}{3} \pi R^3$ , умноженному на удельный вес  $\gamma$ , вес же воды (в граммах) выражается тем же числом, что и объем сегмента (в см<sup>3</sup>), который равен  $\pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right)$  (как известно из геометрии). Отсюда для определения  $h$  получается кубическое уравнение:  $h^3 - 3Rh^2 + 4R^3\gamma = 0$  или (подставляя численные значения)  $h^3 - 60h^2 + 2400 = 0$ . По условиям вопроса, ищется тот из корней, который содержится между 20 и 40.

*Отв.*  $h = 27$  (см).

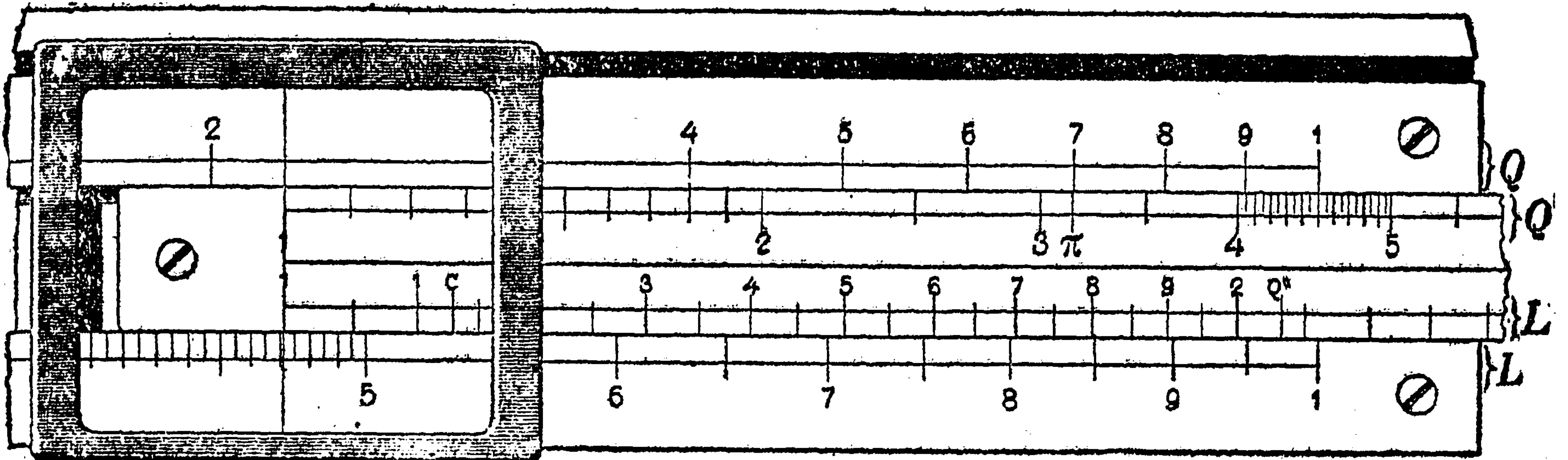
**16. Логарифмы. Тригонометрические величины.** *Нахождение логарифма* данного числа и, обратно, *нахождение числа* по данному логарифму производится с помощью равномерной шкалы  $A$ , которая на обыкновенных линейках имеется на *оборотной* стороне движка, посередине. Длина ее в точности равна длине шкалы  $L$  линейки (принятой за единицу); на ней большими штрихами отмечены десятые доли, средними — сотые, а мелкие штрихи нанесены через 0,002.

Вынув вовсе движок из паза, перевернем его задней стороной наверх и в таком положении снова вдвинем в паз линейки, но *вверх ногами*. Дело в том, что цифры на шкале  $A$  наносятся справа налево (цель этого выяснится ниже); поэтому и приходится помещать эту шкалу в перевернутом виде, чтобы отсчеты возрастали *слева направо*. Начальные и конечные штрихи всех шкал должны точно совпадать.

Если теперь установить визир на отсчете  $x$  шкалы  $L$ , то он — по основному свойству логарифмической шкалы — отсечет на ней отрезок, равный *мантиссе*  $\log x$ ; ее величина легко отсчитывается по равномерной шкале. Характеристика определяется, как обычно. Напр., если ищется  $\log 0,542$ , то по отсчету 5-4-2 на шкале  $L$  легко находим на равномерной шкале 0,734, так что  $\log 0,542 = \bar{1},734$ . Ясно, как и, обратно, по заданной мантиссе, которую откладывают по равномерной шкале, находят соответствующий отсчет на логарифмической шкале; положение же запятой устанавливается по характеристике. Так, если  $\log x = 1,752$ , то по отсчету 0,752 на шкале  $A$  находим отсчет 5-6-5 на шкале  $L$ , так что  $x = 56,5$ .



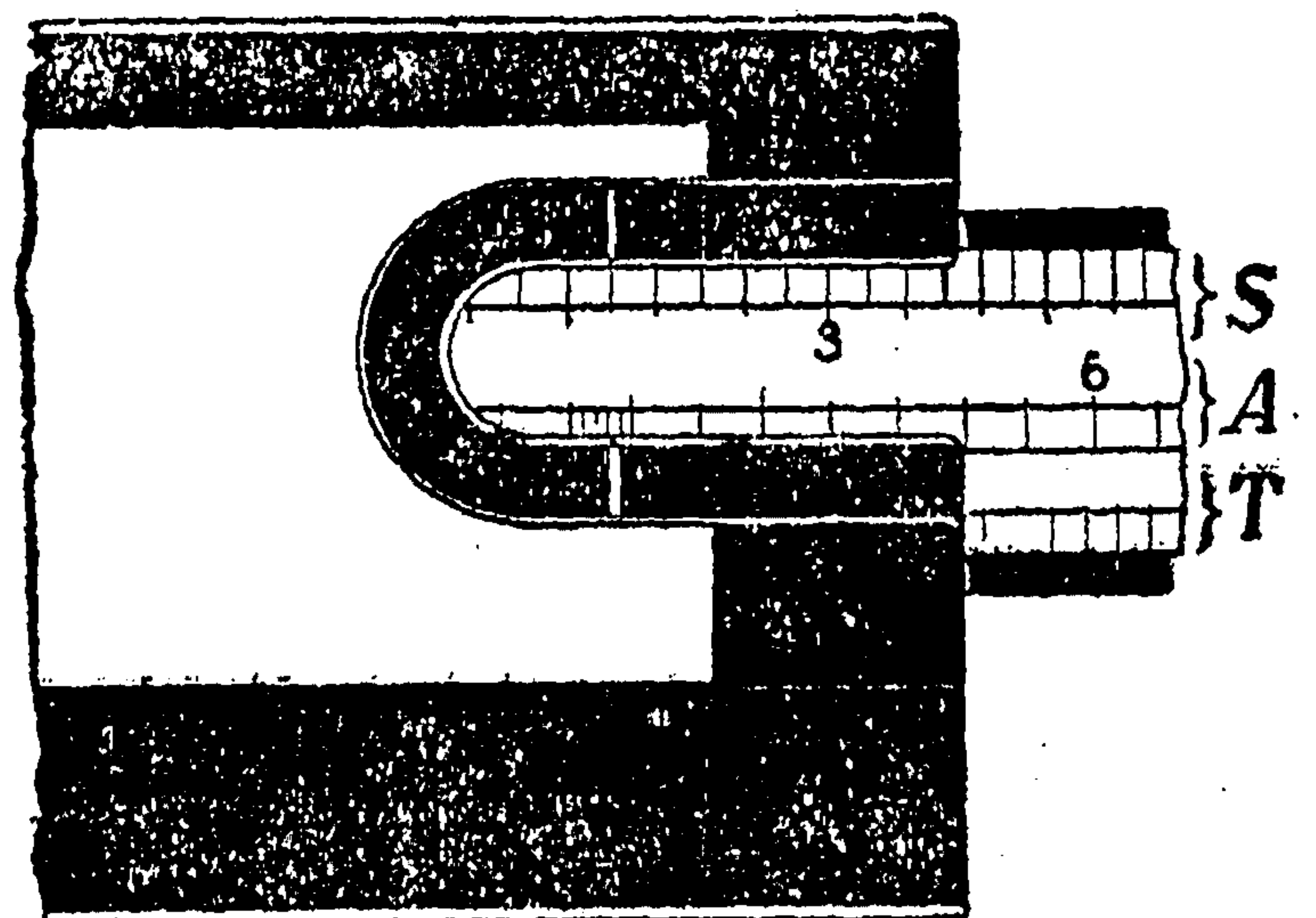
Существует однако более практичный прием, при котором *не нужно переворачивать движка*. Во всех линейках в неподвижной части с обеих сторон (а иногда лишь с одной) имеются вырезы. На боках этих вырезов штрихами (на обратной стороне линейки) обозначены положения начала и конца шкалы неподвижной линейки. Если мы желаем найти



Черт. 11а).

$\log x$ , то, не вытаскивая движка из паза, лишь выдвигаем его *направо* так, чтобы начальный штрих лицевой стороны движка пришелся против отсчета  $x$  шкалы  $L$ . Так как при этом отрезок шкалы  $L$ , считая от ее начала до штриха  $x$ , как раз равен отрезку шкалы  $A$  на обратной стороне движка, между штрихом в *правом* вырезе и началом шкалы, то отсчет этой шкалы против указанного штриха и даст мантиссу логарифма; здесь именно и удобно обратное расположение цифр на шкале  $A$ !

Обратно, если по логарифму ищется число, то выдвигают движок так, чтобы против штриха в вырезе пришелся отсчет шкалы  $A$ , равный мантиссе. Тогда на лицевой стороне линейки против начала движка на шкале  $L$  будет отсчет, соответствующий искомому числу. На черт. 11 показано нахождение по числу 4,71 его логарифма 0,673, или обратно.



Черт. 11б).

На линейках системы Р и ца, как уже упоминалось, равномерная шкала находится на лицевой стороне неподвижной линейки внизу. После сказанного пользование ею едва ли нуждается в пояснениях.

Итак, линейка заменяет собой таблицы логарифмов и антилогарифмов. Этим пользуются, напр., при вычислении степеней с показателями, отличными от 2, 3,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$  (см. ниже примеры 1 и 2).

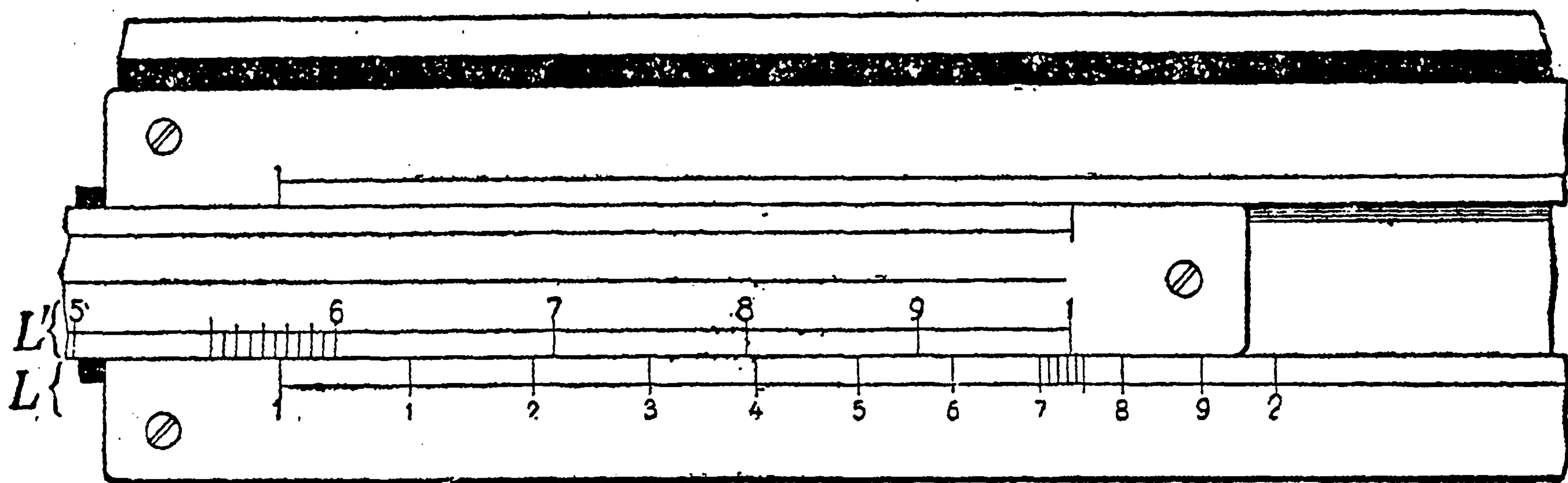
Верхняя шкала  $S$  на обратной стороне движка служит для *определения синусов по углам и углов по их синусам*. Деления на этой шкале (с отсчетами в градусах и минутах) идут от  $34'$  до  $10^\circ$  через  $5'$ , от  $10^\circ$  до  $20^\circ$  через  $10'$ , от  $20^\circ$  до  $30^\circ$  через  $20'$ , от  $30^\circ$  до  $40^\circ$  через  $30'$ , от  $40^\circ$  до  $70^\circ$  через  $1^\circ$ , от  $70^\circ$  до  $80^\circ$  через  $2^\circ$ . Длина шкалы принята равной двум единицам длины, так что масштаб совпадает с масштабом *верхней* неподвижной шкалы  $Q$ .



Отрезок, заключенный между началом шкалы  $S$  и делением с отсчетом  $x$  (в градусах) равен как раз  $\log 100 \sin x$ ; при  $x = 34' 23''$  имеем  $\sin x = 0,01$  и  $\log 100 \sin x = \log 1 = 0$ ; при  $x = 90^\circ$ ,  $\sin x = 1$  и  $\log 100 \sin x = \log 100 = 2$ ; таким образом, эти отсчеты и соответствуют началу и концу шкалы  $S$ .

Если снова вдвинуть движок в паз линейки оборотной стороной наверх, так чтобы шкала  $S$  пришлась на месте шкалы  $Q'$ , то отсчетам  $x$  на  $S$  будут отвечать, очевидно, отсчеты  $100 \sin x$  на  $Q$ ; для получения  $\sin x$  нужно эти отсчеты разделить на 100 (или — что на практике удобнее — считать на  $Q$  прежние целые единицы за сотые). Напр., отсчету  $22^\circ$  на шкале  $S$  отвечает отсчет 37,5 на шкале  $Q$ ; следовательно,  $\sin 22^\circ = 0,375$ . Обратное, если дан  $\sin x$  (напр. 0,643), то умножим его на 100 и установим визир на соответствующем отсчете (64,3) шкалы  $Q$ ; на шкале  $S$  можно прочесть тогда  $x$  (в нашем случае  $40^\circ$ ).

Как и при операциях со шкалой  $A$ , можно и здесь не переворачивать движка, воспользовавшись штрихами в правом вырезе на оборотной



Черт. 12а).

стороне линейки. Переместив движок так, чтобы против этого штриха пришелся отсчет  $x$  на шкале  $S$ , мы на лицевой стороне на шкале  $Q'$  движка, против конца шкалы  $Q$ , прочитаем отсчет  $100 \sin x$ . Обратная операция ясна сама собой. Тот же черт. 11 дает нахождение по углу  $x = 2^\circ 35'$  его синуса 0,045, или обратно.

Внизу на оборотной стороне движка (как на обыкновенной линейке, так и на линейке Р и ца) помещается шкала  $T$ , служащая для действий с тангенсами. На шкале  $T$  отложены отрезки  $\log 10 \operatorname{tg} x$  для различных углов  $x$ , начиная от  $5^\circ 44'$ , для которого тангенс равен 0,1 (так что  $\log 10 \operatorname{tg} 5^\circ 44' = 0$ ), и кончая углом  $45^\circ$ , для которого тангенс равен 1 (так что  $\log 10 \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ ); таким образом, шкала  $T$  имеет тот же масштаб, что и шкала  $L$ . Деления на ней идут до  $20^\circ$  через  $5'$ , а после — через  $10'$ . Операции — те же, что и в случае синуса, лишь шкалы  $Q$  и  $Q'$  заменяются шкалами  $L$  и  $L'$  и, вместо умножения и деления на 100, нужно умножать и делить на 10. Кроме того, при пользовании вторым приемом, движок приходится выдвигать налево (иначе при расположении шкалы  $T$ , нельзя пользоваться штрихом в выемке!). В соответствии с этим, прочитывать отсчет шкалы  $L'$  нужно не против конечного деления шкалы  $L$ , а против начального. На черт. 12 а), и 12 б), изображено нахождение  $\operatorname{tg} 30^\circ = 0,577$ .



Если приходится иметь дело с тангенсами углов, меньших  $5^\circ 44'$  (но больших  $34'$ ), то можно заменить их синусами и пользоваться шкалой  $S$ , потому что для этих углов синусы и тангенсы мало разнятся [как видно из таблиц натуральных тригонометрических величин — меньше, чем на 0,0005; см. также 26, 12., где оценена относительная погрешность такой замены\*].

Линейкой, конечно, можно воспользоваться для вычисления косинусов и котангенсов, а также и тангенсов углов, больших  $45^\circ$ .

Косинусы углов вычисляются, как синусы углов дополнительных до  $90^\circ$ , ибо  $\cos x = \sin (90^\circ - x)$ . Котангенсы углов между  $5^\circ 44'$  и  $45^\circ$  находятся — при втором способе — совершенно так же, как и тангенсы, но только нужно прочитывать не отсчет шкалы  $L'$  против начального деления шкалы  $L$ , а наоборот — отсчет шкалы  $L$  против конечного деления шкалы  $L'$ , ибо  $\cotg x = \frac{1}{\tg x}$ , а таким путем именно и произво-

дится деление 1 на  $\tg x$ . Полученный отсчет не нужно умножать ни на какие множители, ибо котангенсы углов между  $45^\circ$  и  $5^\circ 44'$  лежат как раз между 1 и 10. Так, на том же черт. 12 б) получаем  $\ctg 30^\circ = 1,732$ .

Умея находить котангенсы углов, меньших  $45^\circ$ , мы тем самым получаем способ находить и тангенсы углов, больших  $45^\circ$ , ибо известно, что  $\tg x = \cotg (90^\circ - x)$ .

На линейках системы Р и ца длина шкалы  $S$  принимается за единицу, подобно шкале  $L$ , так что она — сравнительно с обыкновенной линейкой — имеет вдвое больший масштаб. Отсчеты  $x$  идут от  $5^\circ 44'$  до  $90^\circ$ , им соответствуют отрезки длины  $\log 10 \sin x$  (заметим, что  $\sin 5^\circ 44' = 0,1$ , так что именно  $\log 10 \sin 5^\circ 44' = \log 1 = 0$ ). Так же, как и для тангенсов, здесь приходится иметь дело со шкалами  $L$  и  $L'$  а не  $Q$  и  $Q'$ , как на обыкновенной линейке); при пользовании вторым приемом движок выдвигается *направо*.

Кроме шкал  $S$  и  $T$ , на линейках системы Р и ца, вместо шкалы  $A$ , посередине оборотной стороны движка помещена шкала  $S T$ , которая позволяет находить углы  $x$  от  $34' 23''$  до  $5^\circ 44'$  по их синусам, изменяющимся от 0,01 до 0,1, и обратно; масштаб ее тот же, что и у шкалы  $L$ , отложенные на ней отрезки равны  $\log 100 \sin x$ . Отсюда ясно, как ею пользоваться. Как упоминалось выше, в указанных пределах для углов тангенсы незначительно отличаются от синусов, поэтому шкала  $S-T$  может служить и для определения тангенса, по углу, и обратно. [Черт. 12 б) сделан применительно к линейке Р и ца, на нем поэтому видна часть упомянутой шкалы  $S-T$ .]

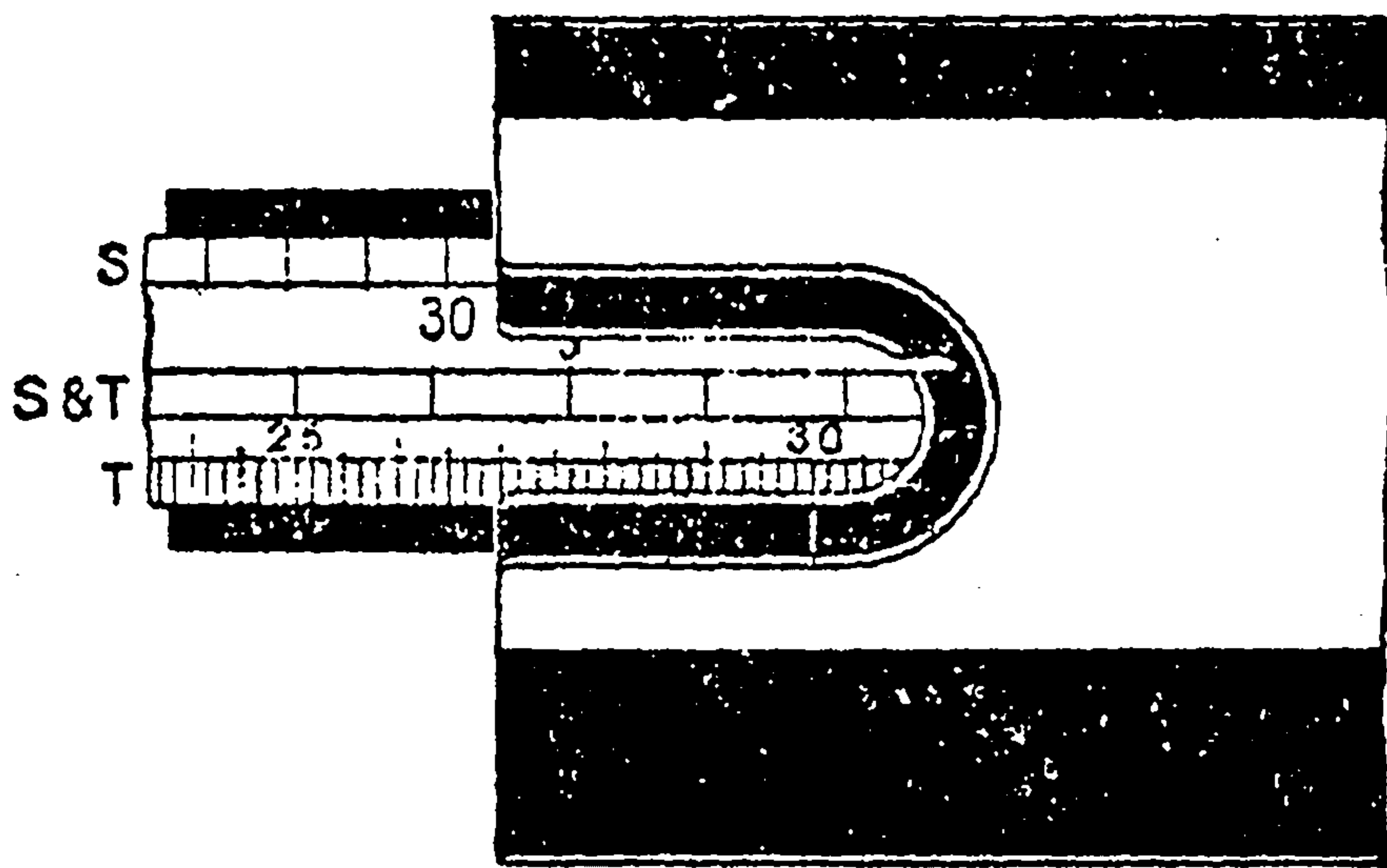
**Задачи.** 1. Предлагается поупражняться в нахождении логарифмов по числам, и обратно; сравнить результаты с трехзначной таблицей логарифмов.

2. Вычислить следующие выражения, пользуясь линейкой, как таблицей логарифмов:

$$1) (0,00513)^{0,134}; \quad 2) (0,147)^{-2,1}; \quad 3) 3,1 \cdot (0,517)^{1,5} + 28 \cdot (0,517)^{2,5}.$$

$$\text{Отв. } 1) 0,493; \quad 2) 55,8; \quad 3) 1,15 + 5,38 = 6,53.$$

\* Там же упомянуто и о вычислении синусов и тангенсов для углов, меньших  $34'$ .



Черт. 12 б).



3. Газ расширяется по закону:  $pv^n = c = \text{пост.}$  Найти величину постоянной  $c$  если давление  $p = 8,5 \text{ кг/см}^2$ , объем  $v = 2,93 \text{ м}^3$  и  $n = 1,3$ .

Отв. 34,4.

4. В дизельномоторе определить температуру после сжатия воздуха (при мертвом положении поршня) по формуле:

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}},$$

где начальная температура  $15^\circ \text{C}$  (так что абсолютная температура  $T_1 = 15 + 273 = 288$ ), начальное давление  $p_1 = 1 \text{ атм}$ , конечное  $p_2 = 35 \text{ атм}$ , показатель же  $k = 1,41$ . Имеем:

$$T_2 = 288 \cdot 35^{\frac{41}{141}} = 288 \cdot 2,81 = 810^\circ (= 810 - 273 = 537^\circ \text{C}).$$

5. Вычислить для подшипника Селлерса коэффициенты трения  $\mu_0$  (для начала движения) и  $\mu_1$  (для установившегося состояния), пользуясь формулой:

$$\mu = \frac{1,36 \cdot v^{0,605}}{p^{0,58} \cdot t^{1,29}},$$

где скорость  $v = 0,63 \text{ м/сек}$ , давление  $p = 3 \text{ кг/см}^2$ , а температура  $t$  для начала движения равна  $t_0 = 15^\circ \text{C}$ , для установившегося же состояния, в свою очередь, определяется по формуле:

$$t_1 = 28 \cdot v^{0,5} \cdot p^{0,12}.$$

Имеем:  $t_1 = 28 \cdot 0,794 \cdot 1,14 = 25,3^\circ \text{C}$ ,

$$\mu_0 = \frac{1,36 \cdot 0,756}{1,89 \cdot 32,9} = 0,0165, \quad \mu_1 = \frac{1,36 \cdot 0,756}{1,89 \cdot 64,6} = 0,0084$$

(так что  $\mu_1 = \frac{\mu_0}{2}$ ).

6. Определить емкость  $C$  воздушного провода (на 1 км) по формуле:

$$C = \frac{1}{150 + 41,4 \log \frac{h}{d}} \text{ (микрофарад)},$$

если диаметр его  $d = 2,5 \text{ мм}$ , а высота подвешивания (от земли)  $h = 9,5 \text{ м}$ .

Отв. 0,0057 (мкф).

7. Найти теоретический расход пара в паровой машине, по формуле:

$$Q = \frac{6,87 - 0,9 \log p_0}{\log p - \log p_0} \left( \frac{\text{кг/лош. силу}}{\text{час}} \right),$$

если  $p_0 = 1,05 \text{ абс. атм.}$ ,  $p = 12 \text{ абс. атм.}$

Отв. 6,5.

8. Предлагается поупражняться в нахождении тригонометрических величин по углам, и обратно, сверяя результаты с таблицей натуральных тригонометрических величин.

9. Вычислить нормальное давление ветра на поверхность, наклоненную под углом  $\theta$  к направлению ветра, по формуле:

$$p_n = p \cdot \frac{2 \sin \theta}{1 + \sin^2 \theta},$$



если  $\theta = 22,5^\circ$  и давление на поверхность, перпендикулярную к направлению ветра,  $p = 28 \text{ кг/м}^2$ .

Отв.  $19 \text{ кг/м}^2$ .

10. Найти угол  $\alpha$  наклона, который следует придать орудью, чтобы снаряд попал на расстоянии  $d = 2800 \text{ м}$ , если начальная скорость снаряда  $v_0 = 320 \text{ м/сек}$ ; воспользоваться формулой:

$$\sin 2\alpha = \frac{9,81 \cdot d}{v_0^2}.$$

Отв.  $7^\circ 45'$ .

11. Угол  $\beta$  отклонения шатуна (от оси цилиндра) связан с углом  $\alpha$  поворота кривошипа (от мертвого положения) соотношением:

$$\sin \beta = \frac{r}{L} \sin \alpha,$$

где  $r$  — радиус кривошипа, а  $L$  — длина шатуна. Принимая  $\frac{L}{r}$  равным 4, 5 или 6, вычислить углы  $\beta$ , соответствующие  $\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ .

Указание. Если движок вдвинуть обратной стороной наверх и совмещать отсчет  $\alpha$  шкалы  $S$  с отсчетом 4, 5, 6 шкалы  $Q$ , то под начальным штрихом шкалы  $Q$  на шкале  $S$  найдем отсчет  $\beta$ . Почему?

12. Коэффициент полезного действия винта вычисляется по формуле:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \rho)},$$

где  $\alpha$  — угол подъема нарезки, а  $\rho$  — угол трения, который можно принять равным  $6^\circ 50'$ . Вычислить  $\eta$  для  $\alpha = 3^\circ 20', 3^\circ 50', 4^\circ 30', 5^\circ 40', 7^\circ 40', 9^\circ, 13^\circ 20', 15^\circ 20', 18^\circ$ .

Отв.  $\eta = 0,32; 0,36; 0,39; 0,49; 0,52; 0,55; 0,65; 0,67; 0,7$ .

17. Особые штрихи на логарифмической линейке. На многих линейках особо отмечаются некоторые наиболее важные числа; так, на ней отмечается особыми штрихами число  $\pi$  (на шкалах  $L, L', Q$  и  $Q'$ ). Штрих  $C$  (на шкале  $L'$ ) отмечает число  $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$ , которое полезно при вычислении площади  $S$  круга по диаметру его  $d$ :

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \left( \frac{d}{C} \right)^2.$$

Пример. Найти площадь круга, которого диаметр равен 12 см. Устанавливая движок так, чтобы отсчет  $C$  на шкале  $L'$  пришелся против 12 на шкале  $L$  (деление  $12 : C$ ), на шкале  $Q$  против начала шкалы  $Q'$  найдем, отсчет  $S = 113 \text{ (см}^2\text{)}$  (возвышение в квадрат числа  $\frac{12}{C}$ ).

Весьма полезны штрихи  $\rho'', \rho'$  на шкалах  $L$  и  $L'$ , которые служат для переводов угла, заданного в градусах, минутах и секундах, — в дуговую меру (в радианы), и наоборот. Напомним, что дуговой мерой называется такая мера углов, когда за единицу угла принимается центральный угол окружности, опирающийся на дугу, по длине равную радиусу окружности. Этот угол и называется радианом (он равен  $57,2958^\circ$ ).

Приняв для простоты радиус окружности за единицу, мы получаем для  $360^\circ$  в дуговой мере число  $2\pi$  (длина всей окружности); угол  $1^\circ$  будет в дуговой мере измеряться числом  $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ , угол же в  $x^\circ$  — чис-

лом  $\frac{\pi x}{180}$ . Если угол равен  $x'$ , то в дуговой мере он будет измеряться



числом  $\frac{\pi x}{180 \cdot 60}$ ; если же угол равен  $x''$ , то в дуговой мере он будет равен  $\frac{\pi x}{180 \cdot 60 \cdot 60}$ .

Штрихи  $\rho''$  и  $\rho'$  соответствуют как раз числам

$$\frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi} = 206\,265'' \text{ и } \frac{180 \cdot 60}{\pi} = 3\,437,75'.$$

Таким образом, угол в  $x''$  будет в дуговой мере равен  $\frac{x}{\rho''}$ , а угол  $x'$  равен  $\frac{x}{\rho'}$ . Поэтому для перевода градусной меры в дуговую достаточно число, выражающее меру угла в минутах, разделить на  $\rho'$ , а в секундах — на  $\rho''$ . Обратное, для перевода дуговой меры в градусную, достаточно умножить число, дающее угол в радианах, на  $\rho'$  (мы получим тогда меру в ') или на  $\rho''$  (что дает меру в ").

*Примеры.* 1. Перевести угол  $24' 17''$  в радианы. Совмещаем отсчеты 24 и  $\rho'$  шкал  $L$  и  $L'$ ; на шкале  $L$  против конечного деления  $L'$  приходится отсчет 698. Так как число знаков частного  $\frac{24}{\rho'}$  равно  $2 - 4 = -2$ , то имеем  $34' = 0,00698$  радиан. Обращаем теперь секунды в радианы. Для этого устанавливаем  $\rho''$  шкалы  $L'$  против 17 шкалы  $L$ , и затем против конечного деления шкалы  $L'$  на шкале  $L$  прочитываем результат:  $17'' = 0,0000824$  радиан. Окончательно округляя, находим:  $34^\circ 17' = 0,00705$  радиан.

2. Перевести угол  $22^\circ 15'$  в радианы. В этом угле целых минут будет  $22 \cdot 60 + 15 = 1335'$ . Устанавливая  $\rho'$  шкалы  $L'$  против 1335 шкалы  $L$  и приняв во внимание правило числа знаков при делении, прочитав отсчет  $L$  против конечного деления  $L'$ , находим:  $1335' = 0,388$  радиан.

3. Перевести угол 1,75 радиан в градусную меру. Помножая на линейке числа 1,75 и  $\rho'$ , находим результат:  $6020' = 100^\circ 20'$ .

Заметим в заключение, что обычно употребляемые линейки, длиной в 25 см, дают возможность отсчетов с 3 — 4 знаками и приводят к результатам, содержащим 2 — 3 верных знака. Для грубых подсчетов, не более чем на два знака, иногда употребляются линейки длиной в 12,5 см. Для более точных расчетов приготавливаются линейки длиной в 50 см и даже в 1 м, но пользование ими менее удобно, чем линейкой в 25 см. Существуют и линейки *специального назначения*: для расчета железобетонных сооружений, электротехнических расчетов и т. п. На них нанесены особые шкалы, облегчающие типические расчеты. Более подробные описания действий с логарифмической линейкой и различные детали помещаются обычно в инструкции, прилагаемой к линейке при ее покупке.



### ГЛАВА III

#### ПЕРЕМЕННАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ПРЕДЕЛ.

**18. Приближенные значения с ограниченной и неограниченной точностью.** Из предыдущего изложения мы с достаточной ясностью могли заметить, что на практике почти всегда имеют дело с приближенными, а не с точными значениями рассматриваемых величин. Но по характеру своему эти величины бывают следующих двух существенно отличающихся между собою типов.

Приближенные значения величин первого типа обладают *ограниченной точностью*, которая обуславливается характером и конструкцией измерительных приборов, субъективными недостатками лица, производящего наблюдение и т. д. Имея дело с такими величинами, мы не можем увеличить точность их приближенных значений дальше известного предела. Так, например, наилучшая точность при взвешивании, достигнутая до сих пор, не превышает  $0,000\ 001\%$ , при определении длины —  $0,000\ 01\%$ ; но эта точность может быть достигнута только с помощью чрезвычайно сложных и чувствительных приборов, а на практике она не превышает  $1\%$  —  $0,1\%$ .

Другой тип представляют величины, которые мы можем вычислять с какою угодно степенью точности, так что мы берем приближенные значения лишь с целью округления и упрощения вычислений. Возьмем, например, число  $\frac{1}{9}$ . Для вычисления удобно иметь дело с десятичными числами; пользуясь логарифмической линейкой в 12,5 см, мы найдем для  $\frac{1}{9}$  приближенное значение 0,11; взяв линейку в 25 см, получим 0,111; с линейкой в 1 м мы получили бы еще лучшее приближение 0,1111. Эта точность совершенно достаточна для практических расчетов. Но при более точных расчетах пришлось бы взять еще более точные значения для  $\frac{1}{9}$ , с семью и даже с 8—10 знаками. Однако, возможная точность не ограничивается и этим, и мы можем получить приближенное значение для  $\frac{1}{9}$  в виде десятичных дробей с *неограниченной точностью*, т. е. с сколь угодно малой погрешностью как абсолютной, так и относительной. Для этого нам нужно только взять достаточно большое число знаков в известном еще из курса арифметики разложении  $\frac{1}{9}$  в бесконечную десятичную дробь:

$$\frac{1}{9} = 0,11111\dots$$

Ряд других чисел, с которыми постоянно приходится иметь дело на практике, также представляет примеры получения приближенных значений с неограниченной точностью, т. е. со сколь угодно малой погрешностью. Та-



ковы: отношение диагонали квадрата к его стороне  $\sqrt{2} = 1,414\ 213\dots$ , отношение диагонали куба к его стороне  $\sqrt[3]{3} = 1,732\ 050\dots$ , отношение длины окружности к диаметру:  $\pi = 3,141\ 592\dots$ , основание системы натуральных логарифмов:  $e = 2,718\ 281\dots$ , и т. д.

Все названные числа мы можем вычислять теоретически с какой угодно точностью (хотя практически эти вычисления значительно труднее, чем нахождение приближенных значений  $1/9$ ). Другими словами, для всех этих чисел можно получить разложение в бесконечную десятичную дробь, округляя которую, мы и находим приближенные значения.

Очевидно, что если приходится вести вычисления, в которые входят приближенные значения обоих названных выше типов, то точность результата, необходимое число верных знаков и т. п. обуславливаются только величинами первого типа, известными с ограниченной точностью, ибо приближенные значения величин второго типа можно взять настолько точно, что их погрешность не повлияет на точность окончательного результата.

**19. Понятие о пределе и о бесконечно малой величине.** Рассмотрение величин второго типа, для которых можно получать приближенные значения с неограниченной точностью, приводят нас к весьма важному понятию о *пределе*. Рассмотрим такую величину  $a$ , для которой можно получить приближенное значение  $x$  с какой угодно точностью.\*

Увеличивая постепенно требуемую точность, мы получаем ряд приближенных значений:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ , все более и более точных, и мы будем говорить, что величина  $x$ , приближенное значение  $a$ , есть *переменная величина, принимающая при своем изменении ряд частных значений*.

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

Так, например, в случае приближения к  $a = 1/9$  десятичными дробями, мы получаем:

$$x_1 = 0,1; x_2 = 0,11; x_3 = 0,111; \dots x_n = 0, \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ раз}}; \dots \quad (1a)$$

В случае  $a = \pi$ , мы имеем:

$$x_1 = 3; x_2 = 3,1; x_3 = 3,14; \dots$$

Мы не можем здесь указать общего закона для составления  $x_n$  (т. е. приближенного десятичного значения  $\pi$  с  $n$  верными знаками) при любом  $n$ ; но задав  $n$  определенным образом, мы можем теоретически, с большим или меньшим трудом, вычислить это  $x_n$ .

Что же мы можем сказать о ряде значений (1) переменной величины  $x$ , если нам известно, что точность приближения не ограничена? Неограниченность точности приближения означает, что, уйдя достаточно

\* Здесь мы употребляем не те обозначения, что раньше. Истинное (точное) значение величины мы обозначаем буквой  $a$  (вместо  $A$ ), а приближенное — буквой  $x$  (вместо  $a$ ) [см. 1].



далеко в ряде значений (1), мы можем добиться того, что погрешность (абсолютная) станет сколь угодно малой, меньше любого наперед заданного малого числа  $\epsilon$ , как бы мало оно ни было. Так как истинная абсолютная погрешность значения  $x$  выражается, как мы знаем [1], в виде  $|a - x|$ , то, стало-быть, можно сказать, что, задав сколь угодно малое число  $\epsilon$ , мы всегда можем настолько далеко уйти в ряде (1), что для всех значений этого ряда, начиная с некоторого, абсолютное значение разности  $a - x$  или, что то же, разности  $x - a$ , будет оставаться всегда меньше  $\epsilon$ :  $|x - a| < \epsilon$ . Например, если мы желаем, чтобы погрешность десятичного приближения к  $1/9$  стала меньше 0,0001, то достаточно брать значения из ряда (1а), начиная с 0,1111; если мы хотим, чтобы эта погрешность стала меньше  $\frac{0,5}{10^m}$ , то в ряде (2) нужно брать только значения, начиная с  $0,11 \dots 1$  и дальше.

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ раз}}$

Итак, свойство неограниченной точности приближения  $x$  к  $a$  математически учитывается тем обстоятельством, что выражение  $|x - a|$ , начиная с некоторого значения  $x$ , делается меньше сколь угодно малого наперед заданного числа. Это свойство имеет громадное значение<sup>а</sup> не только для приближенных вычислений, но, как увидим, вообще для всего математического анализа; мы свяжем с ним основное понятие о *пределе* переменной величины:

*Если переменная величина  $x$  обладает тем свойством, что абсолютное значение разности между  $x$  и постоянной величиной  $a$ , при последовательном изменении  $x$ , может быть сделано меньше любого наперед заданного положительного числа  $\epsilon$ , как бы мало оно ни было, и при дальнейшем изменении  $x$  остается все время меньше  $\epsilon$ :*

$$|x - a| < \epsilon,$$

*то говорят, что переменная величина  $x$  стремится к пределу, равному  $a$ , и обозначают это символом:*

$$x \rightarrow a, \quad \lim x = a. *$$

Написанное неравенство показывает, что (начиная с некоторого момента изменения) переменная величина  $x$  отличается от своего предела  $a$ , в ту или иную сторону, меньше чем на  $\epsilon$ ; другими словами, вместо этого неравенства можно также писать

$$a - \epsilon < x < a + \epsilon. \quad (2)$$

[Ср. 1, (1).]

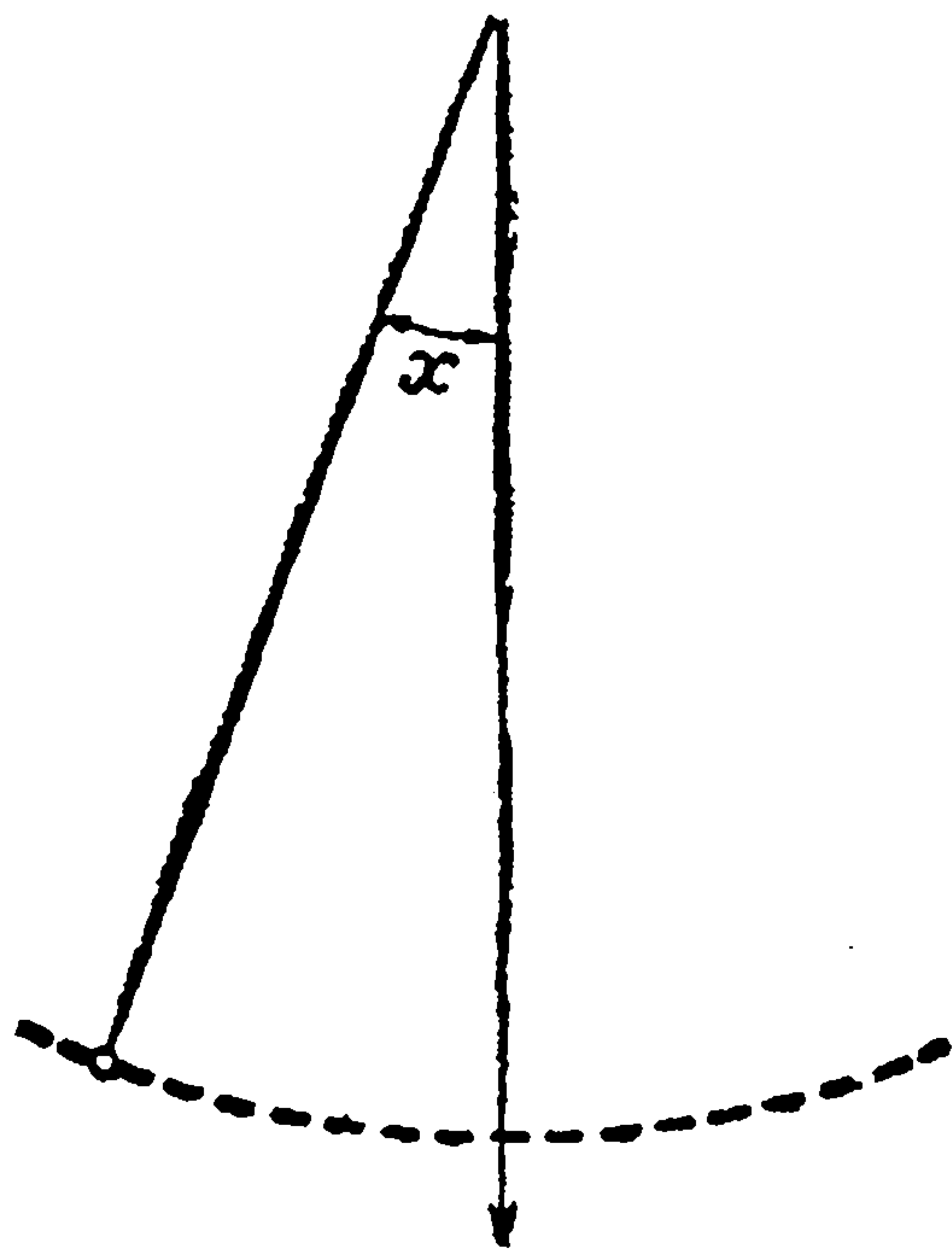
Очень часто „стремление“ или приближение переменной величины  $x$  к пределу  $a$  получается независимо от теории приближенных вычислений. Рассмотрим, например, маятник, который, будучи выведен из положения равновесия (черт. 13), начнет совершать колебания. Если маятник подвешен очень хорошо, он будет очень долго колебаться, постепенно уменьшая размахи колебаний, пока, наконец, не успокоится

\* „lim“ суть первые три буквы латинского слова *limes*, что значит „предел“. В некоторых русских книгах иногда предел обозначается символом: пред.  $x = a$ .



опять в положении равновесия; идеально подвешенный маятник, при наличии сопротивления со стороны воздуха, производил бы затухающие колебания *бесконечно*. Если мы будем определять положение маятника углом  $x$ , который он образует с вертикальной прямой (положение равновесия), приписав  $x$  положительные значения направо и отрицательные — налево от этой прямой, то мы получим пример переменной величины, которая стремится к пределу 0, ибо совершенно ясно, что, начиная с некоторого момента, размахи колебаний настолько уменьшатся, что  $|x - 0| = |x|$  делается меньше любого положительного числа  $\epsilon$ , сколь мало бы оно ни было, и при дальнейших колебаниях будет все время оставаться меньше  $\epsilon$ . Применяя вышеуказанные обозначения, мы должны будем написать:

$$x \rightarrow 0, \text{ или } \lim x = 0.$$



Черт. 13.

Случай, когда переменная величина стремится к пределу 0, имеет особенно важное значение, так как вообще, если переменная величина  $x$  стремится к любому пределу  $a$ , то это значит, что разность  $x - a$  может быть сделана сколь угодно малою, по абсолютному значению, и стало быть очевидно:  $(x - a) \rightarrow 0$ . Таким образом, совершенно все равно, скажем ли мы, что  $x \rightarrow a$  или что  $(x - a) \rightarrow 0$ .

В виду этой особой важности переменных величин, стремящихся к нулю, они получили особое название „*бесконечно малых величин*“. Итак, всякая переменная величина  $x$ , которая стремится к 0, называется *величиной бесконечно малой*. Иными словами, величина  $x$  есть *бесконечно малая*, если при изменении  $x$  абсолютное значение  $|x|$  может быть сделано меньше сколь угодно малого положительного числа  $\epsilon$  и при дальнейшем изменении будет оставаться меньше  $\epsilon$ .

Введя понятие о бесконечно малой величине, мы можем теперь сказать, что переменная величина  $x$  является приближением к  $a$  с неограниченной точностью или стремится к пределу  $a$ , если разность  $x - a$  есть величина бесконечно малая, и обратно.

**20. Действия над переменными и их пределами.** Основные правила приближенных вычислений легко приводят к следующим аналогичным правилам для действий с пределами:

I. Предел суммы какого угодно (но определенного) числа переменных слагаемых равен сумме их пределов.

В виде формулы это правило может быть записано так:

если  $x \rightarrow a, y \rightarrow b, z \rightarrow c, \dots$ , то  $(x + y + z + \dots) \rightarrow (a + b + c + \dots)$ ,  
или

$$\lim (x + y + z + \dots) = a + b + c + \dots = \lim x + \lim y + \lim z + \dots$$

II. Предел разности двух переменных величин равен разности их пределов, т. е.,

$$\text{если } x \rightarrow a, y \rightarrow b, \text{ то } (x - y) \rightarrow (a - b),$$



или

$$\lim (x - y) = a - b = \lim x - \lim y.$$

III. Предел произведения какого угодно (но определенного) числа переменных сомножителей равен произведению их пределов, т. е.

$$\text{если } x \rightarrow a, y \rightarrow b, z \rightarrow c, \dots, \text{ то } xyz \dots \rightarrow abc \dots,$$

или

$$\lim (xyz \dots) = abc \dots = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z \dots$$

IV. Предел частного двух переменных величин равен частному их пределов, т. е.

$$\text{если } x \rightarrow a, y \rightarrow b, \text{ то } \frac{x}{y} \rightarrow \frac{a}{b},$$

или

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

Последнее утверждение подразумевает, что  $b$  не равно нулю, ибо в противном случае выражение  $\frac{a}{b}$  было бы лишено смысла.

Для пояснения этих правил, остановимся для примера на первом. Если  $x$  есть приближенное значение  $a$ ,  $y$  — приближенное значение  $b$ ,  $z$  — приближенное значение  $c$ , и т. д., то  $x + y + z + \dots$  будет приближенным значением суммы  $a + b + c + \dots$ .

Известно [5], что максимальная абсолютная погрешность суммы  $x + y + z + \dots$  равна сумме таких же погрешностей отдельных слагаемых; но погрешности слагаемых могут быть сделаны сколь угодно малыми, и число их — определенное, следовательно, и сумма погрешностей произвольно мала, так что  $x + y + z + \dots$  есть приближенное значение  $a + b + c + \dots$  с неограниченной точностью, т. е. стремится к пределу  $a + b + c + \dots$ .

Отметим частный случай правила III, когда в произведении двух множителей  $yx$  один множитель  $x$  переменный и  $\rightarrow a$ , другой же  $y$  — постоянный ( $y = b$ ). Тогда мы имеем:

$$bx \rightarrow ba, \text{ или } \lim (bx) = b \cdot \lim x; \text{ таким образом:}$$

V. Постоянный множитель можно выносить из-под знака предела.

Из правил I и II вытекает следующее утверждение относительно бесконечно малых величин:

VI. Сумма какого угодно (но определенного\*), числа бесконечно ма-

\* Нужно твердо помнить, что здесь (как и выше, в правиле I) речь идет непременно о сумме с определенным числом слагаемых. Если это условие не выполнено, то утверждение может оказаться неверным. Возьмем, напр., отрезок длины 1 и будем делить его на 1, 2, 3, ..., 10, ..., 100, вообще  $n$  равных частей. Каждая часть будет равна  $\frac{1}{n}$ , и ясно, что при беспредельном возрастании  $n$  она



лых величин  $x, y, z \dots$ , равно как и разность двух бесконечно малых величин  $x, y$ , есть также величина бесконечно малая.

Для доказательства этого нужно лишь вспомнить определение бесконечно малых величин, данное в предыдущем  $n^0$ , и положить в правилах I и II:  $a = b = c = \dots = 0$ .

Из правила же III следует:

VII. Если в ряду переменных  $x, y, z, \dots$ , имеющих пределами определенные числа  $a, b, c, \dots$ , хоть одна бесконечно мала, то и произведение их  $x y z \dots$  также будет бесконечно малой величиной.

Это ясно из замечания, что обращение в нуль одного из множителей произведения  $abc \dots$  влечет за собой равенство нулю всего произведения.

К правилам I—IV, которые касаются четырех основных действий, примыкают аналогичные правила, относящиеся к другим действиям. Мы упомянем для примера еще о следующих:

VIII. Предел  $n$ -ой степени (где  $n$  — любое число) переменной  $x$  равен  $n$ -ой степени ее предела:

$$\text{если } x \rightarrow a, \text{ то } x^n \rightarrow a^n,$$

или

$$\lim x^n = a^n = (\lim x)^n.$$

При  $n$  целом и положительном это правило вытекает из правила III; стоит лишь взять  $n$  переменных  $x, y, z, \dots$  равными между собой. В частности, если в предыдущем правиле заменить  $n$  через  $\frac{1}{n}$  получится правило:

IX. Предел корня  $n$ -ой степени из переменной  $x$  равен корню  $n$ -ой степени из ее предела:

$$\text{если } x \rightarrow a, \text{ то } \sqrt[n]{x} \rightarrow \sqrt[n]{a},$$

или

$$\lim \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\lim x}.$$

**21. Понятие о бесконечно большой величине.** Если  $x$  есть бесконечно малая величина, так что  $x \rightarrow 0$ , то к дроби  $\frac{1}{x}$  нельзя применить правило IV, в виду сделанной там оговорки. Постараемся непосредственно дать себе отчет в том, как же будет вести себя, в процессе изменения  $x$ , эта обратная ей величина  $z = \frac{1}{x}$ .

При безграничном уменьшении знаменателя  $x$  сама дробь  $z$  должна безгранично же возрастать (по абсолютному значению). Мы можем сделать нашу дробь бóльшей какого-угодно числа, напр. 10 000; для этого стоит лишь пойти настолько далеко в ряде значений бесконечно малой

будет величиной бесконечно малой. Однако сумма всех этих частей, очевидно, равна конечному числу 1 и вовсе не бесконечно мала. Объясняется это тем, что здесь мы имеем дело не с определенным числом слагаемых, а с переменным, которое при том беспредельно возрастает.



величины  $x$ , чтобы уже выполнялось неравенство:  $|x| < \frac{1}{10\,000}$ ; очевидно, одновременно тогда мы будем иметь:  $|z| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} > 10\,000$ . В подобном случае говорят, что  $z$  стремится к бесконечности, и называют  $z$  бесконечно большой величиной.

Вообще, если переменная величина  $z$  изменяется так, что, начиная с некоторого значения, становится (по абсолютной величине) больше сколь угодно большого числа, данного наперед, то говорят, что  $z$  есть величина бесконечно большая, и обозначают это символом  $z \rightarrow \infty$ , или  $\lim z = \infty$ .

Иногда бывает, что  $z$  при достаточном увеличении может принимать или только положительные, или только отрицательные значения (сколь угодно большие по абсолютной величине), тогда пишут соответственно:  $z \rightarrow +\infty$  и  $z \rightarrow -\infty$  (или  $\lim z = +\infty$ ,  $\lim z = -\infty$ ).

Итак, как мы видели только-что, переменная, обратная бесконечно малой величине, есть величина бесконечно большая.

Нетрудно видеть, что и наоборот, переменная, обратная бесконечно большой величине, есть величина бесконечно малая.

В самом деле, пусть  $z \rightarrow \infty$  и  $x = \frac{1}{z}$ . Если мы желаем, чтобы  $|x|$  было меньше, напр., чем  $0,000\,001$ , то достаточно сделать  $|z|$  большим  $1\,000\,000$ .

В качестве примера рассмотрим переменную  $z = Q^n$ , где  $|Q| > 1$  [напр.,  $Q = \frac{3}{2}$ ,  $-4$ , и т. п.], а  $n$  принимает значения  $1, 2, 3, \dots$ , так что последовательные значения этой переменной  $z$  будут:

$$Q, Q^2, Q^3, \dots, Q^n, \dots$$

Так как  $|z| = |Q|^n$  и  $\log |z| = n \cdot \log |Q|$  [причем  $\log |Q| > 0$ , так как  $|Q| > 1$ ], то, очевидно, с безграничным возрастанием  $n$  растет безгранично и  $\log |z|$ , а с ним и  $|z|$ . Итак,  $z \rightarrow \infty$ ; если  $Q > 0$ , так что и  $z$  всегда  $> 0$ , то можно сказать даже, что  $z \rightarrow +\infty$ .

Положим теперь  $x = q^n$ , причем на этот раз  $|q| < 1$  [напр.,  $q = 0,9$ ,  $-\frac{2}{3}$  и т. п.], а  $n$  попрежнему принимает значения  $1, 2, 3, \dots$

Если обозначить через  $Q$  число, обратное  $q$  ( $Q = \frac{1}{q}$ ), то, очевидно,  $|Q| > 1$ , так что переменная  $z = |Q|^n \rightarrow \infty$ . Но тогда и  $q = \frac{1}{Q}$ , откуда  $x = q^n = \frac{1}{Q^n} = \frac{1}{z}$  и, в силу сделанного замечания,  $x \rightarrow 0$ .

Итак, при безграничном возрастании показателя степени  $n$ , но постоянном основании, сама степень растет до  $\infty$ , или убывает до  $0$ , в зависимости от того, будет ли основание степени (по абсолютному значению)  $> 1$  или  $< 1$ .



22. Примеры на вычисление пределов. Понятие о неопределенных выражениях. 1. Суммирование бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$\div a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots,$$

где  $a$  — первый член прогрессии, а  $q$  — знаменатель прогрессии ( $|q| < 1$ ), даст нам полезный пример на вычисление пределов.

Сумму бесконечного ряда слагаемых

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots,$$

разумеется, нельзя понимать в том смысле, который устанавливается арифметикой для *конечного* числа слагаемых. Сначала вспомним (известное из элементарной алгебры) выражение для суммы  $s_n$  произвольного, но *конечного* числа  $n$  слагаемых

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Станем теперь увеличивать число слагаемых  $n$  до бесконечности. Предел  $s$ , к которому при этом стремится  $s_n$ , и будет суммой всех членов бесконечной прогрессии. Для того чтобы найти этот предел, представим выражение *переменной* суммы  $s_n$  в виде:

$$s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \cdot q^n.$$

Так как  $q^n$  (по предыдущему  $n^0$ ) бесконечно малая величина, а с нею и второй член правой части равенства, то оказывается, что разность между *переменной*  $s_n$  и постоянным числом  $\frac{a}{1 - q}$  бесконечно мала, следова-

тельно [19],  $s_n \rightarrow \frac{a}{1 - q}$ , т. е. сумма  $s$  бесконечной прогрессии дается формулой:

$$s = \frac{a}{1 - q}. \quad (3)$$

Так, напр.,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Полученный результат разъясняет обращение простых дробей в *бесконечные* десятичные. Так, напр., мы знаем, что

$$\frac{1}{9} = 0,(1) = 0,111\dots 1\dots$$



В правой части мы, очевидно, имеем сумму членов бесконечной геометрической прогрессии:  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{10^n} + \dots$ , которая, по найденной формуле, действительно, равна  $\frac{1}{10} : \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{9}$ . Предлагаем читателю проверить подобным же образом равенства:  $\frac{1}{3} = 0,(3)$ ,  $\frac{3}{11} = 0,(27)$ . [Указание:  $a = \frac{27}{100}$ ,  $q = \frac{1}{100}$ .]

Мы видели, что правило IV [20] неприменимо в том случае, когда предел  $b$  знаменателя  $y$  дроби  $\frac{x}{y}$  есть 0. Если при этом  $x$  стремится к пределу  $a$ , отличному от 0, то, применяя правило IV к обратной дроби  $1 : \frac{x}{y} = \frac{y}{x}$  (где знаменатель уже не стремится к 0!), видим, что она имеет пределом 0. А тогда, в силу замечаний в 21, наша дробь  $\frac{x}{y}$  должна быть бесконечно большой.

Если же в дроби  $\frac{x}{y}$  и числитель, и знаменатель оба  $\rightarrow 0$ , то нельзя ничего сказать о пределе этой дроби без особого дополнительного исследования. В связи с этим говорят, что  $\frac{x}{y}$  есть *неопределенное выражение* вида  $\frac{0}{0}$ . В некоторых случаях бывает все же возможно найти пре-

дел, к которому стремится дробь  $\frac{x}{y}$  при  $x \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow 0$ . Этот предел называется тогда „*истинным значением*“ неопределенного выражения, а самый процесс нахождения предела — *раскрытием неопределенности*. Сказанное уяснится лучше всего на конкретных примерах.

2. Рассмотрим дробь  $\frac{x-3}{x^2-9}$ . При  $x \rightarrow 3$  мы имеем  $(x-3) \rightarrow 0$  и  $(x^2-9) \rightarrow 0$ , так как ясно, что  $x^2 \rightarrow 9$ . Стало быть, при  $x \rightarrow 3$  мы получаем неопределенное выражение вида  $\frac{0}{0}$ ; такое же выражение мы получим непосредственно, подставив в нашу дробь 3 вместо  $x$ . Допустим теперь, что  $x \neq 3$  и только стремится к 3. Тогда мы можем написать:

$$\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}.$$

Дробь, стоящая в правой части, уже не будет неопределенным выражением, и [IV, 20], очевидно,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}.*$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}.$$

\* Символ  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3}$  есть сокращенное обозначение слов „предел выражения  $\frac{1}{x+3}$ , когда  $x$  стремится к 3“. Также и аналогичные обозначения мы будем ниже употреблять очень часто.



и истинное значение нашего неопределенного выражения равно  $\frac{1}{6}$ .

3. Раскрыть неопределенность  $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ , при  $x \rightarrow 0$ . Так как  $(1+x) \rightarrow 1$ , то [IX, 20]  $\sqrt{1+x} \rightarrow 1$ , и числитель дроби стремится к 0, одновременно со знаменателем. Сделаем тождественное преобразование:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &= \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{(\sqrt{1+x})^2-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \\ &= \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}; \end{aligned}$$

полученное выражение уже не будет неопределенным и при  $x \rightarrow 0$  стремится к  $\frac{1}{2}$ . Следовательно, и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}.$$

4. Рассмотрим отношение синуса бесконечно малого угла к самому углу:  $\frac{\sin x}{x}$ . Очевидно, что при  $x \rightarrow 0$  и  $\sin x \rightarrow 0$ , так что мы снова получаем неопределенное выражение вида

$\frac{0}{0}$ . Чтобы его раскрыть, т. е. вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ , мы воспользуемся простыми геометрическими соображениями.

Прежде всего отметим, что угол  $x$  мы будем измерять в *дуговой* мере (т. е. будем выражать в *радианах*). \* Из черт. 14 мы видим, что площадь  $\triangle AOB$  меньше площади сектора  $AOB$ , которая, в свою очередь, меньше площади  $\triangle AOC$ . Но мы имеем:

$$\text{пл. } \triangle AOB = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin x = \frac{r^2}{2} \sin x,$$

$$\text{пл. сект. } AOB = \frac{1}{2} AO \cdot \overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2} r \cdot rx = \frac{r^2}{2} x,$$

$$\text{пл. } \triangle AOC = \frac{1}{2} AO \cdot AC = \frac{1}{2} r \cdot r \operatorname{tg} x = \frac{r^2}{2} \operatorname{tg} x.$$

\* Напомним читателю основное свойство радиального измерения углов: дуга радиуса  $r$ , отвечающая центральному углу  $x$  (в радианах!), имеет длину, равную  $rx$ ; это непосредственно ясно из того, что углу в 1 радиан отвечает дуга с длиной  $r$ .



Приняв радиус  $r$  окружности за единицу, находим отсюда:

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x, \text{ или } \sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (4)$$

Рассмотрим *обратные* числа  $\frac{1}{\sin x}$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ; для них, очевидно, будут выполняться неравенства противоположного смысла, т. е.

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x},$$

или (помножая на  $\sin x$ )

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \quad (5)$$

Таким образом интересующее нас отношение  $\frac{\sin x}{x}$  оказалось заключенным между 1 и  $\cos x$  и, следовательно, отличается от 1 меньше, чем  $\cos x$ . Но чем меньше  $x$ , тем ближе  $\cos x$  будет к  $\cos 0 = 1$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ,

но тогда, очевидно, и по-прежнему

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (6)$$

т. е. истинное значение выражения  $\frac{\sin x}{x}$  при  $x \rightarrow 0$  есть 1.\*

Итак, *отношение синуса бесконечно малого угла к самому углу (выраженному в дуговой мере) стремится к единице.*

Для того чтобы проиллюстрировать это стремление к пределу, приведем следующие данные:

Угол в ° и его част.	$x$ в дуговой мере	$\sin x$	$1 - \frac{\sin x}{x}$
10°	0,174 5329	0,173 6482	$51 \cdot 10^{-4}$
5°	0,087 2665	0,087 1557	$13 \cdot 10^{-4}$
1°	0,017 4533	0,017 4524	$51 \cdot 10^{-6}$
30'	0,008 7266	0,008 7265	$12 \cdot 10^{-6}$
10'	0,002 9089	0,002 9089***	$14 \cdot 10^{-7}$
1'	0,000 2909	0,000 2909	$14 \cdot 10^{-9}$
30''	0,000 1454	0,000 1454	$35 \cdot 10^{-10}$
10''	0,000 0485	0,000 0485	$38 \cdot 10^{-11}$
1''	0,000 0048	0,000 0048	$38 \cdot 10^{-13}$

\* Очевидно, при этом  $x$  может приближаться к 0 и через отрицательные значения, так как при изменении знака  $x$  отношение  $\frac{\sin x}{x}$  остается тем же.

\*\*\* Разница между  $x$  и  $\sin x$  уже не отражается на 7-м знаке после запятой!



Соотношение (6) позволяет найти истинные значения и для других неопределенных выражений. Напр.:

5. Раскрыть неопределенность:  $\frac{1 - \cos x}{x^2}$  при  $x \rightarrow 0$ . По известной формуле тригонометрии:

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad (7)$$

так что

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2}.$$

В силу (6), не только  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ , но и  $\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$  также (стоит лишь заменить  $x$  на  $\frac{x}{2}$ ), а потому, на основании правил V и VIII [20],

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, и для неопределенного (при  $x \rightarrow 0$ ) выражения  $\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$  получаем предел  $\frac{1}{2}$ . Действительно,

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \sin x \left( \frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\cos x}, \quad (8)$$

и поэтому

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

При  $x \rightarrow 0$ , очевидно,  $\cos x \rightarrow \cos 0 = 1$ , так что [IV, 20] первый множитель справа стремится к 1, второй имеет также предел 1, а третий, как мы видели, стремится к  $\frac{1}{2}$ ; отсюда [III] и вытекает наше утверждение.

Из разобранных примеров видно, что предел дробного выражения, у которого числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю, действительно может в разных случаях иметь разные значения; необходимость подвергнуть каждое данное выражение этого типа особому исследованию, чтобы найти именно для него этот предел, и мотивирует название таких выражений *неопределенными*. Неопределенные выражения бывают не только типа  $\frac{0}{0}$ , но этот тип особенно важен.

Мы упомянем здесь еще о неопределенных выражениях типа  $\frac{\infty}{\infty}$ , т. е. о дробях  $\frac{x}{y}$ , у которых и числитель, и знаменатель одновременно стремятся к бесконечности.

6. Рассмотрим дробь

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x + 3}$$

при  $x \rightarrow \infty$ . Здесь и числитель, и знаменатель являются величинами бесконечно



большими. Однако, разделив их на  $x^2$ , мы получим выражение:

$$\frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

которое уже не является неопределенным. При  $x \rightarrow \infty$  дроби  $\frac{3}{x}$ ,  $\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{1}{x}$ ,  $\frac{3}{x^2}$  будут бесконечно малыми [21], так что [VI, IV, 20]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = \frac{2}{3}.$$

Таким же приемом можно доказать вообще, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \frac{a_0}{b_0}$$

( $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$  — постоянные коэффициенты и  $a_0, b_0$  отличны от нуля).

Если же степень многочлена, стоящего в числителе, ниже степени многочлена, стоящего в знаменателе, то предел будет 0. Напр.:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{x^2 + 4x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

[Мы разделили числитель и знаменатель на  $x^2$ ; в новой форме, числитель дроби стремится к 0, а знаменатель к 1]

Наоборот, если степень числитель выше степени знаменателя, то дробь будет стремиться к  $\infty$  (ибо обратная дробь стремится к 0!). Напр.:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} = \infty,$$

так как числитель стремится к пределу, отличному от нуля (к 1), в то время как знаменатель стремится к нулю [21].

**23. Число  $e$ . Натуральные логарифмы.** В разобранных простых примерах мы были в состоянии фактически найти пределы, которые выражались обыкновенными (рациональными) числами. Иногда же предел выражается иррациональным числом, т. е. бесконечной (и притом непериодической) дробью, так что приходится довольствоваться вычислением его по приближению. Один такой — весьма важный для всего анализа и его приложений — случай мы сейчас рассмотрим. Возьмем выражение

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

в котором будем предполагать  $\alpha \rightarrow 0$ , и постараемся дать себе отчет о пределе его. Если бы показатель здесь оставался постоянным, то, так



как основание стремится к 1, степень также стремилась бы к 1 [VIII, 20]; но в виду того, что показатель на самом деле бесконечно возрастает, это заключение неверно. Можно доказать, что выражение  $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  при  $\alpha \rightarrow 0$  стремится к определенному конечному пределу, отличному от 1. Это можно уяснить себе и непосредственным вычислением, придавая  $\alpha$  ряд уменьшающихся значений, напр.: 1, 0,1; 0,01; ... (и, конечно, для вычислений прибегая к таблицам логарифмов). Мы получим таким путем следующую табличку:

$\alpha$	1	0,1	0,01	0,0001	0,000 001	0,000 000 01
$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$	2,000 00	2,599 82	2,704 81	2,718 15	2,718 28	2,718 28

Отсюда уже совершенно ясно, что при  $\alpha \rightarrow 0$  выражение  $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  стремится к некоторому числу 2,71828 ... Интересно отметить, что  $\alpha$  может приближаться к нулю, принимая и отрицательные значения; предел выражения  $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  будет тем же самым, в чем нас убеждает, напр., следующая табличка, составленная для отрицательных значений  $\alpha$ :

$\alpha$	-0,1	-0,01	-0,0001	-0,000 001	-0,000 000 01
$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$	2,057 76	2,643 46	2,717 52	2,718 27	2,718 28

Вот этот именно предел, в виду его важного значения, обозначают обыкновенно особой буквой  $e$ ; таким образом, мы можем писать:

$$e = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 2,71828 \dots \quad (9)$$

По основаниям, которые выяснятся впоследствии [56], в теоретических исследованиях (и в прикладных областях) удобно пользоваться системой логарифмов, основанием которой служит именно число  $e$ ; такая система логарифмов называется *натуральной* или *нэперовой*, по имени знаменитого шотландского математика Нэпера (Napier), который ввел натуральные логарифмы в употребление еще до десятичных логарифмов. В дальнейшем мы условимся обозначать натуральные логарифмы символом  $\ln x$ \*; десятичные же логарифмы попрежнему будем обозначать символом  $\log x$ .

Перейти от логарифмов по одному основанию к логарифмам по другому основанию очень просто. Если  $y = \log_a x$ ,  $z = \log_b x$ , то, по определению логарифмов, это значит, что  $x = a^y$  и  $x = b^z$ , так что  $a^y = b^z$ . Лю-

\* Это — начальные буквы от латинских слов: logarithmus naturalis, т. е. натуральный логарифм.



гарифмируя это равенство сначала по основанию  $a$ , затем — по основанию  $b$ , получим:

$$y = z \log_a b, \quad z = y \log_b a. \quad (10)$$

Таким образом, логарифмы чисел  $x$  по одному основанию получаются из логарифмов этих чисел по другому основанию путем умножения их на *постоянный множитель*. Из (10), между прочим, вытекает, что

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \quad (11)$$

В частности, если взять  $a = 10$ ,  $b = e$  (так что  $y = \log x$ , а  $z = \ln x$ ) и положить

$$M = \log e = \frac{1}{\ln 10} = 0,4342945 \dots, \quad (12)$$

то будем иметь:

$$\log x = M \cdot \ln x. \quad (13)$$

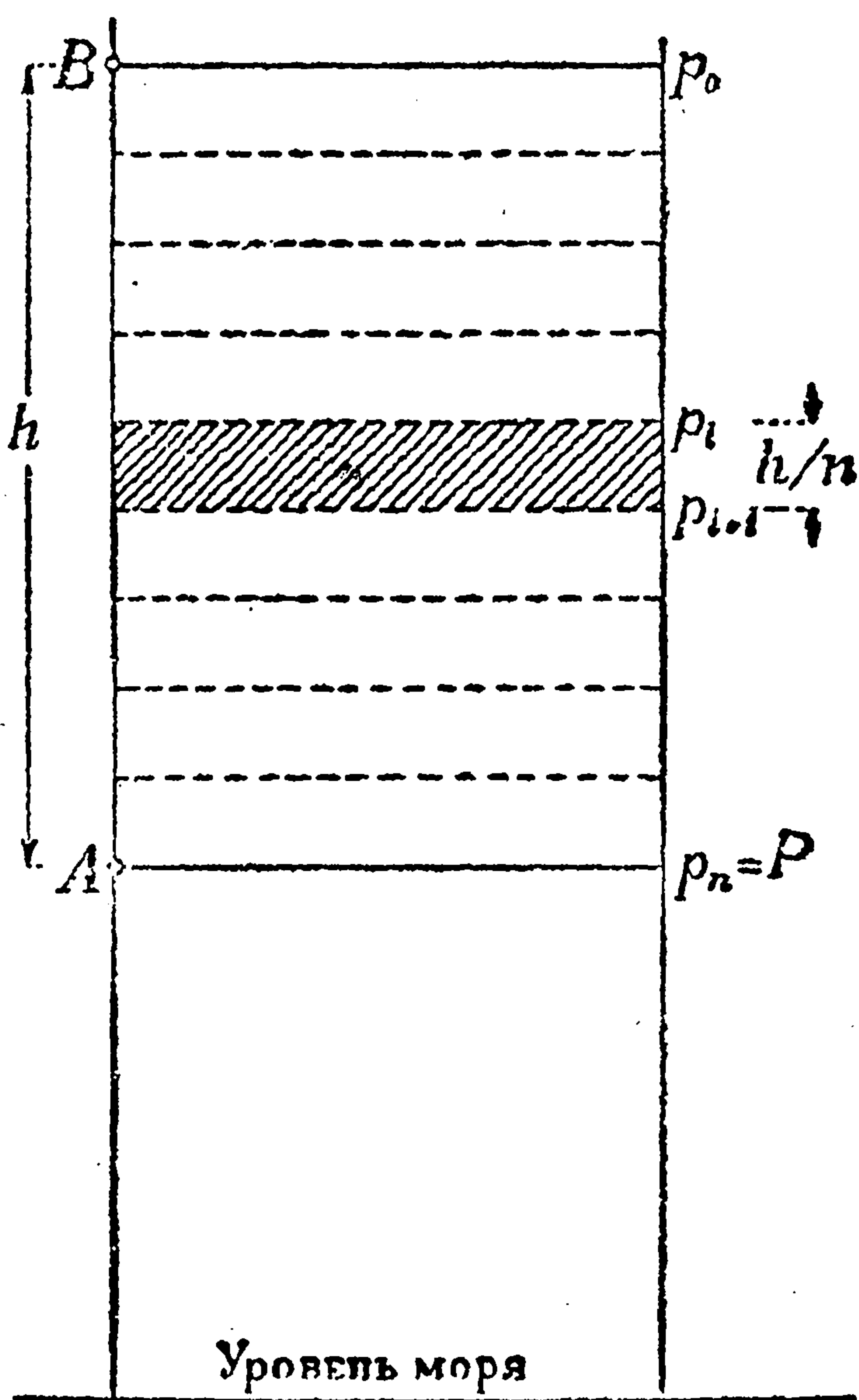
Множитель  $M$  называют *модулем* (точнее — модулем для перехода от натуральных логарифмов к десятичным).

**24. Барометрическое нивелирование.** Из многих прикладных вопросов, в которых используется число  $e$ , в качестве простейшего примера, мы приведем здесь вывод так называемой *барометрической формулы*, которую пользуют для определения разности высот двух точек относительно уровня моря, если не нужна большая точность.

Возьмем на уровне моря площадку в  $1 \text{ м}^2$  и рассмотрим призматический столб воздуха, опирающийся на эту площадку (черт. 15); именно весом этого столба и обуславливается давление на уровне моря. Чем *выше* брать подобную площадку, тем *меньший* столб воздуха будет на нее давить; в точке  $B$ , очевидно, давление будет меньше, чем в точке  $A$ , лежащей на  $h$  м ниже. Обозначая давления (в кг) на соответствующие площадки через  $p_0$  и  $P$ , постараемся найти их отношение. С этой целью разделим отрезок  $AB$  на большое число  $n$  равных частей и проведем через все точки деления горизонтальные площадки. Давления (в кг) на эти площадки по порядку (считая *сверху вниз*) обозначим через  $p_0$  (в точке  $B$ ),  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n = P$  (в точке  $A$ ); при этом, как мы видели,

$$p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{n-1} < p_n = P.$$

Рассмотрим какие-нибудь две соседние площадки,  $i$ -ую и  $(i+1)$ -ую; разность давлений на них  $p_{i+1} - p_i$  будет равна как раз весу заключенной между ними части воздушного столба. Объем этой части равен  $\frac{h}{n} \cdot 1 \text{ м}^3$ ; принимая, что плотность воздуха постоянна в пределах рассматриваемой части и обозначая через  $s_i$  вес  $1 \text{ м}^3$  воздуха на высоте  $i$ -ой площадки, получим



Черт. 15.



для разности  $p_{i+1} - p_i$  выражение  $\frac{h}{n} \cdot s_i$ . Конечно, наше допущение неточно, но оно повлечет тем меньшую погрешность, чем больше мы будем брать  $n$ . Пусть в рассматриваемом столбе воздуха температура  $t^\circ$  во всех сечениях одна и та же; тогда, по закону Бойля-Мариотта, вес  $s$  единицы объема будет пропорционален давлению  $p$ , т. е.

$$s = k p, \quad (k = \text{пост.}), \quad (14)$$

так что, в частности,  $s_i = k p_i$ ; подставляя это в выражение для  $p_{i+1} - p_i$ , получим:

$$p_{i+1} - p_i = \frac{hk}{n} p_i$$

так что прирост давления пропорционален самому давлению! [Ср. ниже, 74; 8]. Отсюда легко находим:

$$p_{i+1} = p_i \left( 1 + \frac{hk}{n} \right),$$

так что давления повышаются в геометрической прогрессии, знаменателем которой является число  $1 + \frac{hk}{n}$ . Тогда  $(n+1)$ -ый член этой прогрессии,  $P$ , по известной формуле, выразится так:

$$P = p_0 \left( 1 + \frac{hk}{n} \right)^n. \quad (15)$$

Это равенство — приближенное; для повышения его точности нужно увеличивать  $n$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим точную зависимость между  $P$  и  $p_0$ . Представим полученное равенство (15) в форме:

$$P = p_0 \left[ \left( 1 + \frac{hk}{n} \right)^{\frac{n}{hk}} \right]^{kh} \quad (15a)$$

и положим  $\frac{hk}{n} = \alpha$ ; мы видим, что тогда 1)  $\alpha \rightarrow 0$  (при  $n \rightarrow \infty$ ) и 2) выражение в квадратных скобках в точности совпадает с рассмотренным в предыдущем  $n^\circ$  выражением  $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ , которое имеет пределом число  $e$  [(9)]. Итак, заменяя в равенстве (15a) выражение в квадратных скобках его пределом  $e$  [VIII, 20], получим окончательную формулу:

$$P = p_0 \cdot e^{kh}. \quad (16)$$

Отсюда:  $e^{kh} = \frac{P}{p_0}$  или, логарифмируя (по основанию  $e$ ):

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{P}{p_0}.$$

Таким образом, мы получаем возможность судить о высоте  $h$  (в м) точки  $B$  относительно точки  $A$  по величине атмосферного давления в этих местах.

Введя отсчеты  $b_1$  и  $b_2$  барометра в мм ртутного столба, соответствующие давлениям  $P$  и  $p_0$ , мы можем, в виду пропорциональности этих величин, заменить отношение  $\frac{P}{p_0}$  в нашей формуле отношением отсчетов  $\frac{b_1}{b_2}$ . Остается лишь

определить постоянную  $\frac{1}{k}$ ; для этого применим формулу (14) к уровню моря. Если принять там давление  $p = 10333 \text{ кг/м}^2$ , то вес  $s$  одного куб. метра <sup>3</sup> выразится дробью  $\frac{1,2 \cdot 3}{1 + 0,004t}$  (кг). Таким образом, постоянная  $\frac{1}{k}$  равна

$$\frac{p}{s} = \frac{10333}{1,2 \cdot 3} (1 + 0,004t) \text{ или, округляя, } 8000 (1 + 0,004t).$$



Мы приходим к формуле:

$$h = 800^{\circ} (1 + 0,004t) \ln \frac{b_1}{b_2}. \quad (17)$$

Так как практически удобнее иметь дело с обыкновенными, десятичными, логарифмами, то, умножая натуральный логарифм на модуль  $M \doteq 0,43$  [(12)], а коэффициент при нем на  $\frac{1}{M} \doteq 2,3$ , приведем формулу (17) к такому окончательному виду:

$$h = 18400 (1 + 0,004t) \log \frac{b_1}{b_2}. \quad (18)$$

*Пример.* Если при  $t = 10^{\circ}$  отсчеты барометров на двух станциях будут соответственно 761 мм и 777 мм, то вертикальное расстояние этих станций будет  $1840 \cdot 1,04 (2,8914 - 2,8831) \doteq 140$  метров.

Так как при выводе формулы (18) мы пренебрегли влажностью воздуха и зависимостью силы тяжести от высоты и от широты места, то — если желают получить более точный результат — в нее вносят еще некоторые поправки.

**25. Сравнение бесконечно малых величин. Классификация их.** Если рассматривать бесконечно малые величины, одновременно стремящиеся к нулю, напр., если на ряду с  $x \rightarrow 0$  взять выражения  $\sin x$ ,  $\sqrt{1+x} - 1$ ,  $1 - \cos x$ ,  $\operatorname{tg} x - \sin x$ ,  $\sqrt{x}$ , то легко заметить, что они стремятся к нулю далеко не одинаковым образом. Отношения  $\sin x$  и  $\sqrt{1+x} - 1$  к  $x$ , как мы знаем, стремятся к конечным и отличным от нуля пределам [22, 3, 4], отношения  $1 - \cos x$  или  $\operatorname{tg} x - \sin x$  к  $x$  стремятся к 0 [22, 5\*], а отношение  $\sqrt{x} : x = 1 : \sqrt{x}$ , очевидно, стремится к  $\infty$  [21]. Мы можем сказать поэтому, что хотя  $\sqrt{x}$  и есть бесконечно малая величина, но она — при малом  $x$  — будет *гораздо больше*  $x$ , настолько больше, что отношение ее к  $x$  будет бесконечно большим; с другой стороны,  $1 - \cos x$  или  $\operatorname{tg} x - \sin x$  будет *гораздо меньше*  $x$ , настолько меньше, что отношение каждой из этих величин к  $x$  будет само величиной бесконечно малой. Эти примеры приводят нас к возможности установления „порядка“ бесконечно малых величин следующим образом:

Если имеются две бесконечно малые величины  $\alpha$  и  $\beta$ , то они называются бесконечно малыми одного и того же порядка, если отношение  $\frac{\beta}{\alpha}$  стремится к конечному и отличному от 0 пределу; величина  $\beta$  называется бесконечно малой высшего порядка, чем  $\alpha$ , если отношение  $\frac{\beta}{\alpha}$  само бесконечно мало, т. е. стремится к 0; величина  $\beta$  называется бесконечно малой низшего порядка, чем  $\alpha$ , если это отношение бесконечно велико, т. е. стремится к  $\infty$ .

Таким образом, мы можем сказать, что  $\sin x$  и  $\sqrt{1+x} - 1$  являются бесконечно малыми того же порядка, что и  $x$ ;  $1 - \cos x$  и  $\operatorname{tg} x - \sin x$  — высшего порядка, а  $\sqrt{x}$  — низшего порядка, чем  $x$ .

\* Мы видели, что  $\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ ; отсюда ясно, что

$$\frac{1 - \cos x}{x} = x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$



Во многих случаях бывает возможно еще более расчленивать между собой различные бесконечно малые величины. Обыкновенно, имея несколько бесконечно малых величин, приходится *сравнивать* их с одной из них, которая называется тогда *главной бесконечно малой* ( $x$  — в разобранных примерах).

Если  $\alpha$  есть главная бесконечно малая, то бесконечно малая величина  $\beta$  называется бесконечно малой  $m$ -го порядка, если  $\beta$  одного порядка с  $\alpha^m$ , т. е. если отношение  $\frac{\beta}{\alpha^m}$  стремится к конечному пределу, отличному от 0. Совершенно очевидно, и читатель это обнаружит без труда, что  $\beta$  будет вместе с тем порядка того же, что и  $\alpha$ , высшего или низшего, смотря по тому, будет ли  $m=1$ ,  $m > 1$  или  $m < 1$ .

Из 22 (см. 3, 4, 5) следует, что если  $x$  есть главная бесконечно малая, то величины  $\sqrt{1+x}-1$  и  $\sin x$  будут бесконечно малыми первого порядка, величина  $1-\cos x$  — бесконечно малой второго порядка, наконец  $\operatorname{tg} x - \sin x$  — бесконечно малой третьего порядка. Нетрудно дать примеры бесконечно малых величин дробных порядков:  $\sqrt{\sin x}$  есть бесконечно малая порядка  $\frac{1}{2}$ , ибо

$$\frac{\sqrt{\sin x}}{x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\sin x}{x}} \rightarrow 1;$$

но они в технической практике не представляют интереса.

Классификация бесконечно малых величин по порядкам важна, так как при различных вычислениях часто бывает возможно пренебрегать бесконечно малыми величинами высших порядков, просто их отбрасывая и тем значительно упрощая формулы. С этим мы неоднократно будем встречаться в дальнейшем [напр., в 26]. Погрешность в подобных случаях просто характеризуется порядком отброшенной бесконечно малой. Смысл этого мы выясним на примере только что упомянутых величин  $1-\cos x$  и  $\operatorname{tg} x - \sin x$ . Мы видели [22], что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

так что при малых углах  $x$  можно считать

$$\frac{1-\cos x}{x^2} \doteq \frac{1}{2}$$

и разность  $1-\cos x$  оказывается приближенно пропорциональной  $x^2$ ; но при тех же условиях разность  $\operatorname{tg} x - \sin x$  будет приближенно пропорциональна  $x^3$  и можно рассчитывать, что при малых  $x$  вторая разность будет значительно меньше первой, так что, скажем, с большей точностью можно положить  $\operatorname{tg} x \doteq \sin x$ , чем  $\cos x \doteq 1$ . Конечно, отсюда еще не вполне ясно, для каких именно углов и с какой погрешностью могут применяться эти приближенные формулы. В ответственных случаях необходимо непосредственное установление (максимальной) погрешности [для



нашего примера это будет сделано в следующем п<sup>0</sup>]; но по большей части в технике довольствуются указанной грубой оценкой.

Упомянем теперь об одном особенно важном частном случае бесконечно малых одного порядка:

Если отношение  $\frac{\alpha'}{\alpha}$  двух бесконечно малых величин стремится к единице, то эти величины называются эквивалентными.

Напр.,  $\sin x$  и  $x$  (при  $x \rightarrow 0$ ) являются эквивалентными бесконечно малыми; этого нельзя сказать про  $1 - \cos x$  и  $x^2$ , так как их отношение стремится к  $\frac{1}{2}$ , но  $1 - \cos x$  и  $\frac{x^2}{2}$  уже будут эквивалентными; то же

справедливо относительно  $\sqrt{1+x} - 1$  и  $\frac{x}{2}$ , и т. д.

Если отношение  $\frac{\alpha'}{\alpha} \rightarrow 1$ , то оно разнится от 1 на некоторую бесконечно малую величину  $\gamma$  [20]:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - 1 = \gamma;$$

умножая обе части этого равенства на  $\alpha$ , получим:

$$\alpha' - \alpha = \alpha\gamma, \quad (19)$$

причем  $\alpha\gamma$  есть бесконечно малая величина уже высшего порядка, чем  $\alpha$ , так как ее отношение к  $\alpha$  ( $=\gamma$ ) само бесконечно мало. Итак:

Две эквивалентные бесконечно малые  $\alpha'$  и  $\alpha$  разнятся на бесконечно малую высшего порядка; иными словами, они приближенно между собою равны, с точностью до бесконечно малой величины высшего порядка.\*

Важно отметить, что не только абсолютная погрешность равенства  $\alpha' \doteq \alpha$  стремится к нулю вместе с  $\alpha$  и  $\alpha'$  (что не имеет цены именно потому, что  $\alpha$  и  $\alpha'$  бесконечно малы!), но и относительная погрешность также; действительно, из (19) непосредственно видно, что относительная погрешность  $\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha} = \gamma \rightarrow 0$ . [Ср. 26, 12.]

На этих соображениях основана замена, при вычислениях, одних бесконечно малых другими, им эквивалентными, но более простыми; много примеров этого читатель найдет в следующем п<sup>0</sup>.

Есть случаи, когда такая замена вовсе не влечет за собой никакой погрешности; напр.: если, при разыскании предела двух бесконечно малых величин  $\alpha$  и  $\beta$ , заменить эти величины эквивалентными им бес-

\* Справедливо и обратное утверждение: если  $\alpha' - \alpha = \delta$ , где  $\delta$  есть бесконечно малая высшего порядка, чем напр.  $\alpha$  (так что  $\frac{\delta}{\alpha} \rightarrow 0$ ), то, разделив это равенство на  $\alpha$ , найдем, что

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - 1 = \frac{\delta}{\alpha} \rightarrow 0,$$

т. е.  $\frac{\alpha'}{\alpha} \rightarrow 1$  и бесконечно малые  $\alpha'$  и  $\alpha$  будут эквивалентны.



конечно малыми  $\alpha'$  и  $\beta'$ , то это не изменит искомого предела. Действительно,

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta'} \quad \text{и} \quad \lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta},$$

так как пределы отношений  $\frac{\alpha'}{\alpha}$  и  $\frac{\beta}{\beta'}$  равны 1.

Этим удобно пользоваться при раскрытии неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$ ; см. задачу 13 следующего п<sup>0</sup>.

26. Некоторые приближенные формулы и их приложения. Если  $\alpha$  есть бесконечно малая величина, то, как мы видели, с точностью до бесконечно малых высших порядков, можно положить

$$\sin \alpha \doteq \alpha \quad (20)$$

(если угол выражен в радианах!); точно так же и

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha, \quad (21)$$

так как  $\sin \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha$  эквиваленты: их отношение  $\cos \alpha$ , при  $\alpha \rightarrow 0$ , стремится к  $\cos 0 = 1$ . Затем, мы имели

$$1 - \cos \alpha \doteq \frac{1}{2} \alpha^2, \quad (22)$$

откуда

$$\cos \alpha \doteq 1 - \frac{1}{2} \alpha^2. \quad (23)$$

Установим еще некоторые полезные приближенные формулы. Возьмем отношение  $\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}$ ; его можно представить в виде:

$$\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

(пользуясь тем, что логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени). Если  $\alpha \rightarrow 0$ , то, как мы знаем

[23], выражение  $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$  стремится к числу  $e$ , следовательно, логарифм его — к  $\ln e = \log_e e$ , т. е. к 1. Итак, имеем:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1, \quad (24)$$

так что бесконечно малые  $\ln(1+\alpha)^*$  и  $\alpha$  — эквивалентны; это даст нам новую приближенную формулу:

\* При  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\ln(1+\alpha)$  стремится к  $\ln 1$ , т. е. к 0, и будет бесконечно малой величиной.



$$\ln(1 + \alpha) \doteq \alpha. \quad (25)$$

Эта формула, в свою очередь, послужит источником для других. Рассмотрим выражение  $(1 + \alpha)^n$ , где  $n$  есть *любое* вещественное число, положительное или отрицательное, целое или дробное (даже—иррациональное!); при  $\alpha \rightarrow 0$  оно стремится к 1, следовательно можно положить [19]:

$$(1 + \alpha)^n = 1 + \beta, \quad (26)$$

где  $\beta$  — бесконечно малая. Прологарифмировав это равенство (по основанию  $e$ ), получим:

$$n \cdot \ln(1 + \alpha) = \ln(1 + \beta),$$

откуда, заменяя логарифмы по формуле (25), найдем:  $n\alpha \doteq \beta$ , или, подставляя сюда выражение  $\beta$  из (26):

$$(1 + \alpha)^n - 1 \doteq n\alpha \quad (27)$$

с точностью до бесконечно малой высшего порядка. Напомним, что точный смысл полученного приближенного равенства заключается в том, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 + \alpha)^n - 1}{\alpha} = n. \quad (28)$$

Из (27) вытекает важная приближенная формула для степени:

$$(1 + \alpha)^n \doteq 1 + n\alpha. \quad (29)$$

В виду приложений, которые она имеет, выпишем ряд ее частных случаев (полагая  $n = -1, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ; для удобства, при этом мы будем знак  $\alpha$  выделять явно, т. е. ставить его перед  $\alpha$ , считая само  $\alpha$  положительным:

$$\frac{1}{1 + \alpha} \doteq 1 - \alpha, \quad \frac{1}{1 - \alpha} \doteq 1 + \alpha, \quad (30)$$

$$\frac{1}{(1 + \alpha)^2} \doteq 1 - 2\alpha, \quad \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \doteq 1 + 2\alpha, \quad (31)$$

$$\sqrt{1 + \alpha} \doteq 1 + \frac{1}{2}\alpha, \quad \sqrt{1 - \alpha} \doteq 1 - \frac{1}{2}\alpha, \quad (32)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \alpha}} \doteq 1 - \frac{1}{2}\alpha, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}} \doteq 1 + \frac{1}{2}\alpha, \quad (33)$$

$$\sqrt[3]{1 + \alpha} \doteq 1 + \frac{1}{3}\alpha, \quad \sqrt[3]{1 - \alpha} \doteq 1 - \frac{1}{3}\alpha. \quad (34)$$



Заметим, что для целого и положительного показателя  $n$  формула (29) легко получается в результате непосредственного возведения в степень; напр., при  $n=3$ ,

$$(1 + \alpha)^3 = 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3,$$

откуда, отбрасывая бесконечно малые высших порядков  $3\alpha^2$  и  $\alpha^3$ , мы и получим:  $(1 + \alpha)^3 \doteq 1 + 3\alpha$ . Формула (32) была, в сущности, уже раньше выведена непосредственно [22.3] \*

Если для сложной бесконечно малой строится эквивалентная ей простая бесконечно малая, то эту последнюю иногда называют *главной частью* исходной бесконечно малой; термин этот удачно подчеркивает то обстоятельство, что за вычетом главной части остается величина, исчезающе малая по сравнению с ней. Таким образом, напр., главной частью бесконечно малой  $1 - \cos \alpha$  будет  $\frac{\alpha^2}{2}$  [(22)], главной частью  $(1 + \alpha)^n - 1$  является  $n\alpha$ , и т. п.

Осветим теперь изложенное в предыдущем и настоящем пп<sup>0</sup> на ряде примеров и задач.

*Примеры и задачи.* 1. Объем твердого тела при нагревании растет пропорционально кубу его линейного измерения; если через  $\alpha$  обозначить коэффициент линейного расширения, а через  $\beta$  — коэффициент объемного расширения, то  $1 + \beta t = (1 + \alpha t)^3$ , где  $t$  — температура. Пользуясь (29), выразить  $\beta$  через  $\alpha$ . *Отв.*  $\beta \doteq 3\alpha$ .

2. Площадь  $P$  кольцевого сечения трубы, с внутренним радиусом  $R$  и толщиной  $d$ , равна  $\pi [(R + d)^2 - R^2]$ ; какой вид надо придать формуле (полагая  $d$  малым по сравнению с  $R$ ), чтобы избежать, при ее вычислении, вычитания близких чисел [ср 6]? *Отв.*  $P \doteq 2\pi R d$ .

3. Исходя из формулы для бесконечно убывающей прогрессии [22, (3)], непосредственно установить (отбрасывая бесконечно малые высших порядков) приближенные формулы (30) и оценить их погрешность. *Отв.* Для первой формулы погрешность есть  $\frac{\alpha^2}{1 + \alpha} < \alpha^2$ , для второй —  $\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} < 2\alpha^2$  (если считать, что  $\alpha < \frac{1}{2}$ ).

4. Формулы (30) иной раз позволяют упростить деление чисел, как показывают следующие примеры:

$$a) \frac{1}{1,0033} \doteq 1 - 0,0033 = 0,9967,$$

причем все знаки верны; ибо погрешность, как мы видели, меньше, чем  $(0,0033)^2 \doteq 0,00001$ ;

$$b) \frac{55,24}{1,0033} \doteq 55,24 (1 - 0,0033) \doteq 55,058; \quad c) \frac{1}{0,9967} \doteq 1,0077.$$

5. Высота  $p$  ртутного столба (в барометре), наблюдаемая при температуре  $t^\circ$ , приводится к  $0^\circ$  по формуле:  $p_0 = p \frac{1 + \alpha' t}{1 + \alpha t}$ , где  $\alpha = 0,00018$  — коэффициент расширения ртути, а  $\alpha' = 0,000019 = 0,00002$  — коэффициент расширения латунной шкалы. Преобразовать эту формулу так, чтобы она не содержала дробей. *Отв.*  $p_0 = p [1 - (\alpha - \alpha') t] = p (1 - 0,00016 t)$ .

\* Эта формула (при  $\alpha > 0$ ) прекрасно иллюстрируется на логарифмической линейке: если помещать визир на отсчетах 2; 1,5; 1,2; 1,1; 1,2; ... шкалы  $Q$ , то на шкале  $L$  он все с возрастающей точностью будет отмечать отсчеты 1,5; 1,25; 1,1; 1,05; 1,01; ...



6. Если ускорение тяжести на уровне моря есть  $g$ , то ускорение тяжести  $g'$  на высоте  $h$  над уровнем моря найдется по формуле  $g' = g \frac{R^2}{(R+h)^2}$ , где  $R$  — радиус земли. Упростить эту формулу, принимая во внимание, что  $h$  мало сравнительно с  $R$ . Указание. Преобразовать формулу, так, чтобы она содержала отношение  $\frac{h}{R}$ . См. (31). Отв.  $g' = g \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ .

7. Формулы (32), (34) упрощают вычисление корней:

$$a) \sqrt[3]{1,0018} \doteq 1,0009; \quad b) \sqrt[3]{0,988} = \sqrt[3]{1 - 0,012} = 1 - 0,004 = 0,996;$$

$$c) \sqrt{150} = \sqrt{12^2 + 6} = 12 \sqrt{1 + \frac{1}{24}} \doteq 12 \left(1 + \frac{1}{48}\right) = 12,25;$$

$$d) \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{6^3 + 36} = 6 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{6}} \doteq 6 \left(1 + \frac{1}{18}\right) \doteq 6,3.$$

8. По плану в горизонталях измерено расстояние  $d$  между двумя точками, из которых одна находится на высоте  $h$  по отношению к другой; фактически  $d$  является лишь заложением (горизонтальной проекцией) истинного расстояния  $l$ . Найти  $l$  через  $d$  и  $h$  (если  $h$  мало сравнительно с  $d$ ). Какую ошибку мы сделали бы, приняв  $l = d$ , при  $d = 1200$  м и  $h = 25$  м? Отв.  $l = d + \frac{h^2}{2d}$ ; поправка  $l - d = \frac{h^2}{2d}$  в указанном случае  $= 0,26$  м! Проверить, не пользуясь приближенной формулой.

9. Вот другая задача подобного же типа. Пусть прямолинейное расстояние на местности измеряется с помощью мерной рейки длины  $l$  (м). Так как фактически рейка прикладывается не точно вдоль измеряемой прямой, то результат измерения оказывается несколько больше истинной длины. Сделаем самое невыгодное предположение, именно, что рейка прикладывается зигзагом, так что ее концы отстоят от прямой поочередно то в одну, то в другую сторону на расстояние  $\lambda$  (м). Требуется оценить погрешность.

При однократном прикладывании линейки абсолютная погрешность равна разности между длиной  $l$  рейки и ее проекцией на измеряемую прямую; проекция же эта будет:

$$2 \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \lambda^2} = l \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{l^2}} \doteq \left(1 - \frac{2\lambda^2}{l^2}\right) l = l - \frac{2\lambda^2}{l},$$

так что упомянутая погрешность есть  $\frac{2\lambda^2}{l}$ , а относительная погрешность, очевидно, будет  $\frac{2\lambda^2}{l^2}$ . Та же относительная погрешность сохранится и при многократном прикладывании рейки. Если для нее установлена граница  $\delta$ , т. е. должно быть:

$$\frac{2\lambda^2}{l^2} \leq \delta,$$

то отсюда:

$$\lambda \leq l \sqrt{\frac{\delta}{2}}.$$

Напр., при измерении двухметровой рейкой ( $l = 2$ ), для достижения относительной точности в 0,001 (1‰) нужно, чтобы уклонение  $\lambda$  не превосходило  $2 \sqrt{0,0005} \doteq 0,045$  м = 4,5 см.

10. В некоторых двигателях ось цилиндра не проходит через ось кривошипного вала, а сдвинута от нее на небольшое расстояние  $c$ . Ход поршня в этом случае дается выражением  $\sqrt{(l+r)^2 - c^2} - \sqrt{(l-r)^2 - c^2}$ , где  $l$  — длина шатуна, а



$r$  — длина кривошипа. Показать, что ход поршня приближенно выражается так:

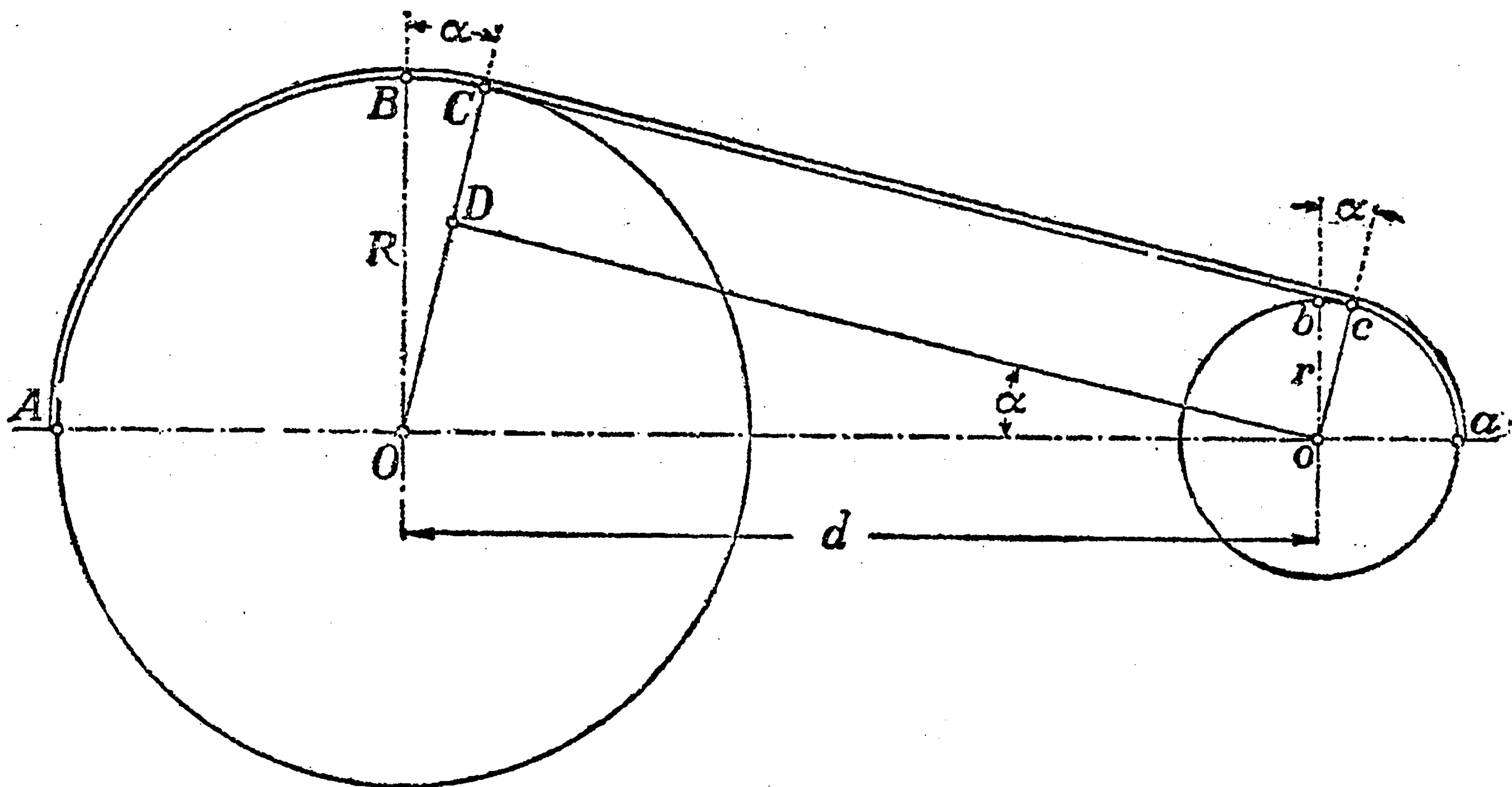
$$2r + \frac{rc^2}{l^2 - r^2}.$$

Имеем:

$$\sqrt{(l \pm r)^2 - c^2} = \sqrt{(l \pm r)^2 \left[ 1 - \frac{c^2}{(l \pm r)^2} \right]} = (l \pm r) \sqrt{1 - \frac{c^2}{(l \pm r)^2}},$$

а тогда, по формуле (32) — если  $c$  достаточно мало —

$$\sqrt{(l \pm r)^2 - c^2} \doteq (l \pm r) \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{(l \pm r)^2} \right] = (l \pm r) - \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{l \pm r},$$



Черт. 16.

так что, действительно,

$$\sqrt{(l+r)^2 - c^2} - \sqrt{(l-r)^2 - c^2} \doteq 2r + \frac{1}{2} c^2 \left( \frac{1}{l-r} - \frac{1}{l+r} \right) = 2r + \frac{rc^2}{l^2 - r^2}.$$

11. Найти длину  $l$  открытого ремня, надетого на данную пару шкивов радиусов  $R$  и  $r$ , с расстоянием  $d$  между центрами (черт. 16).

Обозначим через  $\alpha$  равные углы  $BOC$  и  $boc$ ; из чертежа имеем:

$$\frac{l}{2} = \cup AC + Cc + \cup ca,$$

но  $\cup AC = R \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right)$ ,  $\cup ca = r \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ ,  $Cc = d \cdot \cos \alpha$ , так что

$$l = \pi(R+r) + 2\alpha(R-r) + 2d \cdot \cos \alpha.$$

Формула эта неудобна, в виду присутствия здесь угла  $\alpha$ . Отрезок  $Cc = Dc$  можно определить иначе из  $\triangle ODO'$ :

$$Cc = \sqrt{d^2 + (R-r)^2} = d \sqrt{1 + \left( \frac{R-r}{d} \right)^2}$$



и, если  $R - r$  мало относительно  $d$ , по формуле (32),

$$Cc \doteq d \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R - r}{d} \right)^2 \right].$$

С другой стороны,  $\sin \alpha = \frac{R - r}{d}$ ; пользуясь (20), можем положить:

$$\alpha \doteq \frac{R - r}{d}.$$

После подстановки этих значений и преобразований получим окончательную формулу:

$$l \doteq \pi (R + r) + 2h + \frac{(R - r)^2}{h}.$$

12. Мы видели в 25, что (при  $x \rightarrow 0$ ) разности  $1 - \cos x$  и  $\operatorname{tg} x - \sin x$  являются бесконечно малыми, соответственно, второго и третьего порядков. Предлагается точно оценить эти разности, пользуясь тождествами (7), (8) и неравенствами (4).

Подставляя в (4)  $\frac{x}{2}$ , вместо  $x$ , получим:  $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$ , тогда из (7):

$$1 - \cos x < 2 \left( \frac{x}{2} \right)^2, \text{ т. е. } 1 - \cos x < \frac{1}{2} x^2.$$

С другой стороны, для достаточно малых  $x$ ,  $\cos x > \frac{1}{2}$  подставляя в последнюю часть равенства (8), вместо  $\sin x$  и  $1 - \cos x$ , большие выражения  $x$  и  $\frac{x^2}{2}$ , а вместо знаменателя  $\cos x$  — меньшее число  $\frac{1}{2}$ , приходим к неравенству

$$\operatorname{tg} x - \sin x < x^3$$

Заметим, что, так как угол  $x$  (выраженный в дуговой мере) содержится в силу (4) между  $\sin x$  и  $\operatorname{tg} x$ , то с тем большим основанием можно утверждать:

$$0 < x - \sin x < x^3, \quad 0 < \operatorname{tg} x - x < x^3.$$

Таким образом, если для малых  $x$  положить  $\sin x \doteq x$  и  $\operatorname{tg} x \doteq x$ , то абсолютная погрешность этих равенств будет меньше  $x^3$ , а относительная, очевидно, меньше  $x^2$ . Если взять  $x < 0,1$  (т. е.  $< 5^\circ 44'$ ), то относительная погрешность будет меньше 1%; она станет меньше 0,1% при  $x < 0,01$  (т. е.  $< 34' 23''$ ); на деле погрешность даже еще меньше, ибо наша оценка довольно груба. Этим объясняется возможность вычисления, для углов  $< 5^\circ 44'$ , синусов и тангенсов по одной и той же шкале на обратной стороне движка логарифмической линейки. Ясно, что общее значение  $\sin x$  и  $\operatorname{tg} x$  дает в то же время и угол в радианах. Точно также видим, что для углов, меньших  $34' 23''$ , вычисление  $\sin x$  и  $\operatorname{tg} x$  можно заменить вычислением угла  $x$  в радианах, с помощью штрихов  $\rho'$  и  $\rho''$  [17].

13. Рассмотрим такую задачу (имеющую значение в топографии, при разбивке окружностей): найти отношение стрелы  $f = DB$  дуги  $ABC$  окружности (радиуса  $r$ ) к стреле  $f_1 = D_1B_1$  половины  $AB_1B$  этой дуги (черт. 17). Если положить  $\sphericalangle AOB = \varphi$ , то  $\sphericalangle AOB_1 = \frac{\varphi}{2}$  и  $f = DB = OB - OD = r(1 - \cos \varphi)$ ,  $f_1 = r \left( 1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right)$ . Таким образом, искомое отношение равно

$$\frac{f}{f_1} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 - \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Выражение это слишком сложно, чтобы им удобно было пользоваться; найдем



предел его при  $\varphi \rightarrow 0$  (ибо для малых  $\varphi$  это выражение приближенно можно заменить его пределом). С этой целью, на основании принципа, упомянутого в конце 25, заменяем числитель и знаменатель их главными частями, по формуле (23), и сразу находим

$$\lim \frac{f}{f_1} = \lim \frac{\frac{\varphi^2}{2}}{\frac{\varphi^2}{8}} = 4.$$

Итак, для дуг, соответствующих небольшому центральному углу, приближенно можно считать, что стрела полудуги вчетверо меньше стрелы дуги. Это позволяет последовательно строить промежуточные точки дуги, для которой даны концы и середина.

14. Мы видели в 24 [(17)], что показания ртутного барометра  $b_1$  и  $b_2$  (в мм) в двух местах на земной поверхности позволяют вычислить высоту  $h$  (м) второго места по отношению к первому по так называемой барометрической формуле:  $h = 8000 (1 + 0,004 t) \ln \frac{b_1}{b_2}$ , где  $t$  — средняя температура этих мест. Для

упрощения этой формулы обратимся к приближенной формуле (25) для  $\ln(1 + \alpha)$ , в которой положим  $\alpha = x$  и  $\alpha = -x$ :

$$\ln(1 + x) \doteq x, \quad \ln(1 - x) \doteq -x.$$

Почленно вычитая эти равенства, найдем

$$\ln \frac{1 + x}{1 - x} \doteq 2x. \quad (35)$$

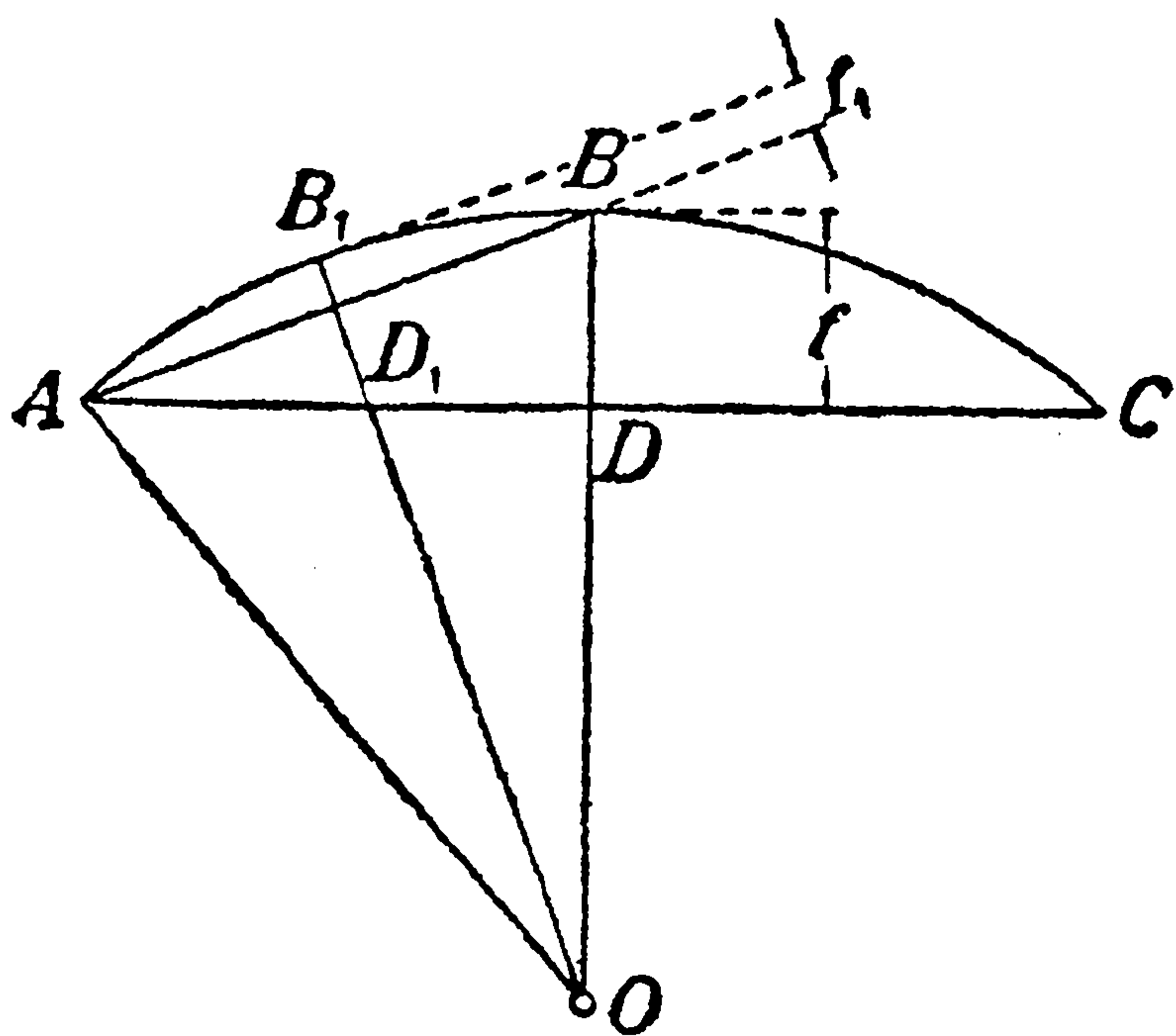
Для того чтобы выразить по этой формуле  $\ln \frac{b_1}{b_2}$ , фигурирующий в барометрической формуле, полагаем  $\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{b_1}{b_2}$ , откуда (если определить  $x$  из этого урав-

нения первой степени)  $x = \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2}$ ; так как разность отсчетов  $b_1 - b_2$  обыкновенно мала сравнительно с их суммой, то для  $x$  получается малое значение и применение формулы (35) даст с достаточной точностью:

$$h = 16\,000 (1 + 0,004 t) \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \text{ (метров).}$$

Это — упрощенная барометрическая формула (Бабине).

Отметим в заключение, что мы вернемся еще в главе XII к вопросу о приближенных формулах и укажем более систематический прием для их построения, и притом с любой точностью.



Черт. 17.



## ГЛАВА IV.

### ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ.

27. Зависимость между переменными величинами. Когда мы наблюдаем явления окружающего нас мира и пытаемся подметить в них закономерности, мы наталкиваемся прежде всего на то обстоятельство, что физические величины, характеризующие явления, могут *изменяться*, т. е. принимать различные числовые значения. При этом однако для нас представляет интерес не столько самый факт изменения той или иной величины в отдельности, сколько *зависимость*, существующая между изменениями различных величин.

Рассмотрим, для примера, такой опыт. Был взят стальной стержень при  $0^\circ$ ; этот стержень подвергся *нагреванию*, и при различных температурах  $t^\circ$  С измерялось его относительное удлинение  $l$ . \* Таким путем была составлена табличка:

$t$	60	90	105	120	144,5	165	180	210	229,5
1000 $l$	0,75	1,05	1,3	1,5	1,75	1,95	2,1	2,5	2,8

Эта табличка показывает, как с изменением температуры  $t$  изменяется удлинение  $l$ , и дает возможность находить при каждом значении  $t$ , помещенном в верхней строчке, соответствующее значение  $l$ . Можно было бы дополнить табличку, произведя измерение  $l$  еще и при других температурах, не указанных в верхней строчке, и тогда опять-таки каждому значению  $t$  соответствовало бы определенное значение  $l$ . Относительное удлинение  $l$  *зависит* от температуры  $t$  и ею определяется.

С тем же самым стержнем был проделан и другой опыт, а именно он был подвергнут *растяжению* при неизменной температуре ( $0^\circ$  С), причем к нему последовательно прилагались все более и более значительные растягивающие усилия. Если относительное удлинение стержня попрежнему обозначить через  $l$ , а растягивающее усилие, приходящееся на единицу площади поперечного сечения стержня — через  $P$  (в кг/см<sup>2</sup>), то результаты измерения  $l$  при различных значениях  $P$  могут быть сведены в такую табличку:

$P$	750	1095	1200	1440	1800	1950	2220	2400	2550
1000 $l$	0,35	0,50	0,55	0,65	0,85	0,9	1,0	1,1	1,2

\* Т. е. отношение удлинения стержня к первоначальной длине.



Этот второй опыт дает нам значение той же величины — относительного удлинения  $l$  стержня, но при различных значениях растягивающего усилия  $P$ , вместо температуры  $t$ : здесь  $l$  зависит от  $P$ .

В технических справочниках можно найти много таблиц, в которых приводятся полученные из опыта соответствующие значения двух величин, зависящих одна от другой. В виде примера, упомянем об известных таблицах Моллье, в которых указаны: температура, теплота испарения и полное количество тепла (на 1 кг), удельный вес и удельный объем насыщенного пара — в зависимости от давления.

Приведем еще примеры зависимостей между величинами. Площадь  $S$  круга зависит от его радиуса  $r$ , по формуле  $S = \pi r^2$  для каждого значения  $r$  может быть вычислено соответствующее значение  $S$ . Точно также, путь  $s$  (м), пройденный свободно падающим тяжелым телом, определяется промежутком времени  $t$  (сек.), протекшим от начала падения, по формуле:  $s = \frac{1}{2}gt^2$ , где  $g = 9,81$  м/сек.<sup>2</sup>.

Все эти примеры приводят нас к весьма важному понятию о функциональной зависимости между величинами.

Если имеем две переменные величины  $x$  и  $y$ , которые изменяются так, что каждому значению переменной величины  $x$  соответствует определенное значение переменной величины  $y$ , то будем говорить, что эти две величины находятся в функциональной зависимости между собой, и притом первую величину  $x$  назовем независимой переменной, а вторую  $y$  — функцией от  $x$ . Переменная  $x$  называется иногда аргументом функции  $y$ .

Таким образом, в наших опытах с нагреванием и растяжением стержня, функцией в обоих случаях оказывалось относительное удлинение  $l$  стержня, независимой же переменной в первом опыте была температура  $t$ , а во втором — растягивающее усилие  $P$ . Нетрудно установить роли переменных и в прочих примерах.

Если рассмотреть объем  $v$  (м<sup>3</sup>) и давление  $p$  (кг/см<sup>2</sup>) одного кг воздуха при 0°С, то зависимость между этими величинами обыкновенно дается в виде:

$$p \cdot v = 29,27 \cdot 273 \quad (1)$$

(закон Бойля-Мариотта); здесь не указано, какая из переменных выбирается в качестве независимой и какая — в качестве функции. Подобная зависимость, заданная неразрешенным уравнением, называется неявной; для того чтобы перейти к явной зависимости, нужно это уравнение решить относительно одной из переменных, тем самым выбирая ее за функцию. В нашем случае мы получим:

$$p = \frac{29,27 \cdot 273}{v}, \text{ или } v = \frac{29,27 \cdot 273}{p} \quad (2)$$

Какую из переменных выбрать за независимую — это вопрос удобства и целесообразности; решение его в конечном счете определяется сущностью того исследования или расчета, который мы производим. Часто оказы-



вается полезным даже в пределах одного какого-нибудь исследования переменить роли изучаемых величин и считать функцией ту величину, которая сперва рассматривалась, как независимая переменная, а за независимую переменную принять ту величину, которая сперва фигурировала как функция. Напр., если взятая масса воздуха заключена в цилиндр с поршнем и, передвигая поршень, мы произвольно меняем объем  $v$ , то естественно  $v$  считать независимой переменной и пользоваться первой из формул (2) для вычисления соответствующего давления; но если при этом нам почему либо станет интересным установить, какое же значение нужно придать  $v$  для того, чтобы получить то или иное давление  $p$ , то придется перейти ко второй из формул (2).

Необходимо отметить, что понятие о функциональной зависимости между двумя переменными величинами существенно отличается от понятия о *причинной зависимости* между ними: из того, что ряду значений независимой переменной соответствует ряд значений функции, не вытекает еще, что изменение независимой переменной есть истинная причина изменения функции; напр., хотя путь, пройденный падающим телом, мы выразили в зависимости от времени, но ясно, что изменение времени не есть истинная причина движения тела.

До сих пор речь шла о функциях, зависящих от *одной* независимой переменной; легко распространить понятие о функции и на случай *двух* или *нескольких* независимых переменных. Так, определяя объем  $V$  прямоугольного бруса по его измерениям  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , с помощью формулы  $V = abc$ , мы имеем дело с функцией от трех переменных; закон Ома

$$J = \frac{V}{R}$$

представляет силу тока  $J$  (амп.), как функцию от двух переменных — напряжения  $V$  (вольт) и сопротивления  $R$  (см). Затем, рассмотрим состояние определенной массы воздуха (скажем, 1 кг), если его температура  $t^{\circ}\text{C}$  не остается постоянной; тогда закон Бойля-Мариотта (1) заменяется более общей формулой (уравнение Клапейрона):

$$pv = 29,27 \cdot T,$$

где  $T = 273 + t$  есть абсолютная температура. Эта *невная* зависимость определяет любую из переменных  $p$ ,  $v$ ,  $T$  (или  $t$ ), как функцию от двух других

$$p = \frac{29,27 T}{v}, \quad v = \frac{29,27 T}{p}, \quad T = \frac{pv}{29,27}.$$

Наконец, примеры функций двух переменных можно заимствовать из технических справочников, где зачастую встречаются таблицы, у которых поверху и сбоку указаны значения двух независимых переменных (скажем, числа оборотов трансмиссионного вала в минуту и передаваемой мощности), а в пересечении соответствующих строки и столбца находится значение функции (диаметр вала).

В этой главе мы будем иметь дело почти исключительно с функциями от *одной* независимой переменной.

**28. Таблица и формула. Интерполирование.** Во всех разобранных выше примерах функциональная зависимость между двумя переменными



определялась либо *таблицей*, либо *аналитически*, т. е. *формулой*. Таблица имеет то ценное для техника преимущество, что позволяет непосредственно, без вычислений, по значению аргумента находить соответствующее значение функции. Формула же лишь указывает, какие *аналитические* операции (арифметические действия, извлечение корня, логарифмирование и т. п.) нужно произвести над аргументом, чтобы получить искомое значение функции. Конечно, по формуле нетрудно составить и таблицу, подставляя вместо аргумента ряд произвольно взятых его значений и производя указанные вычисления. Таблицы для наиболее встречающихся функций имеются во всех инженерных справочниках; выдержка из таких таблиц приведена ниже (стр. 83). Они содержат значения квадратов, кубов, корней квадратных и кубических переменной  $n$ , натуральных логарифмов  $\ln n$  [23] и обратных величин  $\frac{1000}{n}$ , а также длин окружностей и площадей кругов диаметра  $n$  (т. е. функций  $\pi n$  и  $\frac{\pi n^2}{4}$ ).

Однако *табличный* способ задания функции далеко не покрывает потребностей техники. Если площадь круга входит в какие-нибудь теоретические выкладки, то нам нужна именно формула, выражающая эту площадь, а не отдельные ее численные значения, которые находим в таблице. Это относится, конечно, и к другим случаям, например, если стальной стержень, о котором мы говорили выше, является составной частью какой-нибудь конструкции, и мы желаем учесть влияние изменения длины стержня вследствие изменения температуры или растягивающего усилия, то, при всей простоте таблиц на стр. 83, мы не можем удовлетвориться ими, и нам придется постараться *отыскать формулу*, выражающую зависимость удлинения стержня  $l$  от его температуры  $t$  или от растягивающего усилия  $P$ , другими словами — нужно будет найти *аналитическое* выражение функций, определяемых этими таблицами. Такой переход от таблицы значений функции, полученных из опыта, к формуле, выражающей ту же функцию (хотя бы приближенно!), представляет собой задачу, весьма важную для всего прикладного знания (в частности — и для техники), но трудную. Некоторые сведения о том, как она решается, будут даны ниже [94, 146; особенно же см. Дополнение I, в конце II части книги]; пока же читатель без труда проверит, что упомянутые таблички значений относительного удлинения  $l$ , в зависимости от температуры  $t$  или растягивающего усилия  $P$ , довольно точно (с относительной погрешностью, не превышающей 4%) соответствуют формулам:

$$l = 0,000\ 012\ t, \quad l = \frac{P}{2\ 200\ 000}.$$

Если функция задана таблицей своих значений, то возникает один важный вопрос о так называемом *интерполировании*. Дело в том, что в таблице указаны не все возможные значения независимой переменной, а лишь некоторые; как произвести интерполирование, т. е. как определить значения функции, соответствующие тем частным значениям независимой переменной, которых нет в таблице? С подобным вопросом чи-



тателю уже приходилось сталкиваться в курсе алгебры по отношению к таблицам логарифмов, когда он пользовался так называемыми „пропор-

Страница из математических таблиц помещенных в справочной книге для инженеров „Hütte“.

850—900

n	n <sup>2</sup>	n <sup>3</sup>	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	ln n	$\frac{1000}{n}$	$\pi n$	$\frac{\pi n^2}{4}$	n
850	72 25 00	614 125 000	29,1548	9,4727	6,74524	1,17647	2670,4	56 74 50	850
851	72 42 01	616 295 051	29,1719	9,4764	6,74641	1,17509	2673,5	56 87 86	851
852	72 59 04	618 470 208	29,1890	9,4801	6,74759	1,17371	2676,6	57 01 24	852
853	72 76 09	620 650 477	29,2062	9,4838	6,74876	1,17233	2679,8	57 14 63	853
854	72 93 16	622 835 864	29,2233	9,4875	6,74993	1,17096	2682,9	57 28 03	854
855	73 10 25	625 026 375	29,2404	9,4912	6,75110	1,16959	2686,1	57 41 46	855
856	73 27 36	627 222 016	29,2575	9,4949	6,75227	1,16822	2689,2	57 54 90	856
857	73 44 49	629 422 793	29,2746	9,4986	6,75344	1,16686	2692,3	57 68 35	857
858	73 61 64	631 628 712	29,2916	9,5023	6,75460	1,16550	2695,5	57 81 82	858
859	73 78 81	633 839 779	29,3087	9,5060	6,75577	1,16414	2698,6	57 95 30	859
860	73 96 00	636 056 000	29,3258	9,5097	6,75693	1,16279	2701,8	58 08 80	860
861	74 13 21	638 277 381	29,3428	9,5134	6,75809	1,16144	2704,9	58 22 32	861
862	74 30 44	640 503 928	29,3598	9,5171	6,75926	1,16009	2708,1	58 35 85	862
863	74 47 69	642 735 647	29,3769	9,5207	6,76041	1,15875	2711,2	58 49 40	863
864	74 64 96	644 972 544	29,3939	9,5244	6,76157	1,15741	2714,3	58 62 97	864
865	74 82 25	647 214 625	29,4109	9,5281	6,76273	1,15607	2717,5	58 76 55	865
866	74 99 56	649 461 896	29,4279	9,5317	6,76388	1,15473	2720,6	58 90 14	866
867	75 16 89	651 714 363	29,4449	9,5354	6,76504	1,15340	2723,8	59 03 75	867
868	75 34 24	653 972 032	29,4618	9,5391	6,76619	1,15207	2726,9	59 17 38	868
869	75 51 61	656 234 909	29,4788	9,5427	6,76734	1,15075	2730,0	59 31 02	869
870	75 69 00	658 503 000	29,4958	9,5464	6,76849	1,14943	2733,2	59 44 68	870
871	75 86 41	660 776 311	29,5127	9,5501	6,76964	1,14811	2736,3	59 58 35	871
872	76 03 84	663 054 848	29,5296	9,5537	6,77079	1,14679	2739,5	59 72 04	872
873	76 21 29	665 338 617	29,5466	9,5574	6,77194	1,14548	2742,6	59 85 75	873
874	76 38 76	667 627 624	29,5635	9,5610	6,77308	1,14416	2745,8	59 99 47	874
875	76 56 25	669 921 875	29,5804	9,5647	6,77422	1,14286	2748,9	60 13 20	875
876	76 73 76	672 221 376	29,5973	9,5683	6,77537	1,14155	2752,0	60 26 96	876
877	76 91 29	674 526 133	29,6142	9,5719	6,77651	1,14025	2755,2	60 40 73	877
878	77 08 84	676 836 152	29,6311	9,5756	6,77765	1,13895	2758,3	60 54 51	878
879	77 26 41	679 151 439	29,6479	9,5792	6,77878	1,13766	2761,5	60 68 31	879
880	77 44 00	681 472 000	29,6648	9,5828	6,77992	1,13636	2764,6	60 82 12	880
881	77 61 61	683 797 841	29,6816	9,5865	6,78106	1,13507	2767,7	60 95 95	881
882	77 79 24	686 128 968	29,6985	9,5901	6,78219	1,13379	2770,9	61 09 80	882
883	77 96 89	688 465 387	29,7153	9,5937	6,78333	1,13250	2774,0	61 23 66	883
884	78 14 56	690 807 104	29,7321	9,5973	6,78446	1,13122	2777,2	61 37 54	884
885	78 32 25	693 154 125	29,7489	9,6010	6,78559	1,12994	2780,3	61 51 43	885
886	78 49 96	695 506 456	29,7658	9,6046	6,78672	1,12867	2783,5	61 65 34	886
887	78 67 69	697 864 103	29,7825	9,6082	6,78784	1,12740	2786,6	61 79 27	887
888	78 85 44	700 227 072	29,7993	9,6118	6,78897	1,12613	2789,7	61 93 21	888
889	79 03 21	702 595 369	29,8161	9,6154	6,79010	1,12486	2792,9	62 07 17	889
890	79 21 00	704 969 000	29,8329	9,6190	6,79122	1,12360	2796,0	62 21 14	890
891	79 38 81	707 347 971	29,8496	9,6226	6,79234	1,12233	2799,2	62 35 13	891
892	79 56 64	709 732 288	29,8664	9,6262	6,79347	1,12108	2802,3	62 49 13	892
893	79 74 49	712 121 957	29,8831	9,6298	6,79459	1,11982	2805,4	62 63 15	893
894	79 92 36	714 516 984	29,8998	9,6334	6,79571	1,11857	2808,6	62 77 18	894
895	80 10 25	716 917 375	29,9166	9,6370	6,79682	1,11732	2811,7	62 91 24	895
896	80 28 16	719 323 136	29,9333	9,6406	6,79794	1,11607	2814,9	63 05 30	896
897	80 46 09	721 734 273	29,9500	9,6442	6,79906	1,11483	2818,0	63 19 38	897
898	80 64 04	724 150 792	29,9666	9,6477	6,80017	1,11359	2821,2	63 33 48	898
899	80 82 01	726 572 699	29,9833	9,6513	6,80128	1,11235	2824,3	63 47 60	899
900	81 00 00	729 000 000	30,0000	9,6549	6,80239	1,11111	2827,4	63 61 73	900



циональными частями"; аналогично этому поступают и в других случаях. Пусть в таблице имеются значения  $x_1$  и  $x_2$  аргумента и им соответствуют значения  $y_1$  и  $y_2$  функции, требуется же определить значение  $y$  функции, соответствующее некоторому значению  $x$  аргумента, промежуточному между  $x_1$  и  $x_2$ . Тогда смотрят, какую часть разности  $x_2 - x_1$  составляет разность  $x - x_1$  и принимают, что такую же часть от разности  $y_2 - y_1$  составляет неизвестная разность  $y - y_1$ , т. е. полагают:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \text{ откуда: } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1). \quad (3)$$

Это допущение, что приращение  $y - y_1$  функции изменяется пропорционально приращению  $x - x_1$  аргумента, конечно довольно произвольно, и указанный способ интерполирования (как впрочем и всякий другой) не может нам дать абсолютно точный и достоверный результат, а дает только вероятный и приближенный, но это как раз то, что нужно, так как даже непосредственное измерение, в виду неизбежных погрешностей наблюдения, тоже дает лишь приближенные результаты.

*Примеры:* 1. Любопытно применить указанный прием интерполирования к таблице на стр. 83, где результат может быть проверен и непосредственным вычислением. Вычислим, напр.,  $\sqrt[3]{873,3}$  по схеме:

874	$\sqrt[3]{874} = 9,5610$	$0,0036 \cdot 0,3 = 0,0011$
873	$\sqrt[3]{873} = 9,5574$	$\sqrt[3]{873,3} = 9,5574 + 0,0011$
1	$0,0036$	$= 9,5585$

Легко проверить, что все полученные знаки верны!

2. Подобным же образом вычислить  $\sqrt{856,72}$ ;  $\sqrt{8,774}$ ;  $\frac{1}{0,8634} = \frac{1000}{863,4}$  и проверить результаты. *Отв.* 29,2698; 2,96199; 1,15821 (все знаки верны).

В заключение, сделаем следующее замечание относительно обозначения функциональной зависимости. Если мы знаем, что переменная величина  $y$  есть функция от независимой переменной  $x$ , но не хотим или не можем указать конкретную формулу, выражающую зависимость  $y$  от  $x$ , то мы будем писать сокращенно:

$$y = f(x), y = F(x), y = \varphi(x) \dots,$$

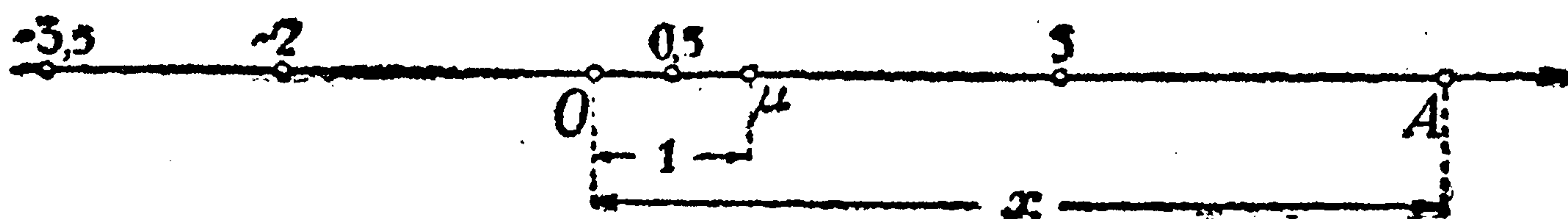
произнося это так: „ $y$  есть эф малое от  $x$ “; „ $y$  есть эф большое от  $x$ “; „ $y$  есть фи от  $x$ “ и т. д. Понятно, что буквы  $f$ ,  $F$ ,  $\varphi$ , которые были выбраны именно в связи со словом „функция“, могут быть в случае надобности заменены какими угодно другими буквами. Частные значения функции, отвечающие тем или иным частным значениям  $x$ , мы будем обозначать так же, но подставляя, вместо  $x$ , его значения. Так,  $f(5)$  [„эф малое от пяти“] есть не переменная величина, а постоянное число — именно, то значение функции  $f(x)$ , которое соответствует значению  $x$ , равному 5.

Аналогичные обозначения:  $f(x, y)$ ,  $F(x, y, z)$  и т. п. — употребляются и для функций нескольких переменных.

**29. Прямоугольные координаты точек на плоскости.** В этом  $p^0$  мы установим некоторые простые, но важные геометрические идеи, которые приведут нас к графической иллюстрации функциональной зависимости между двумя переменными величинами.



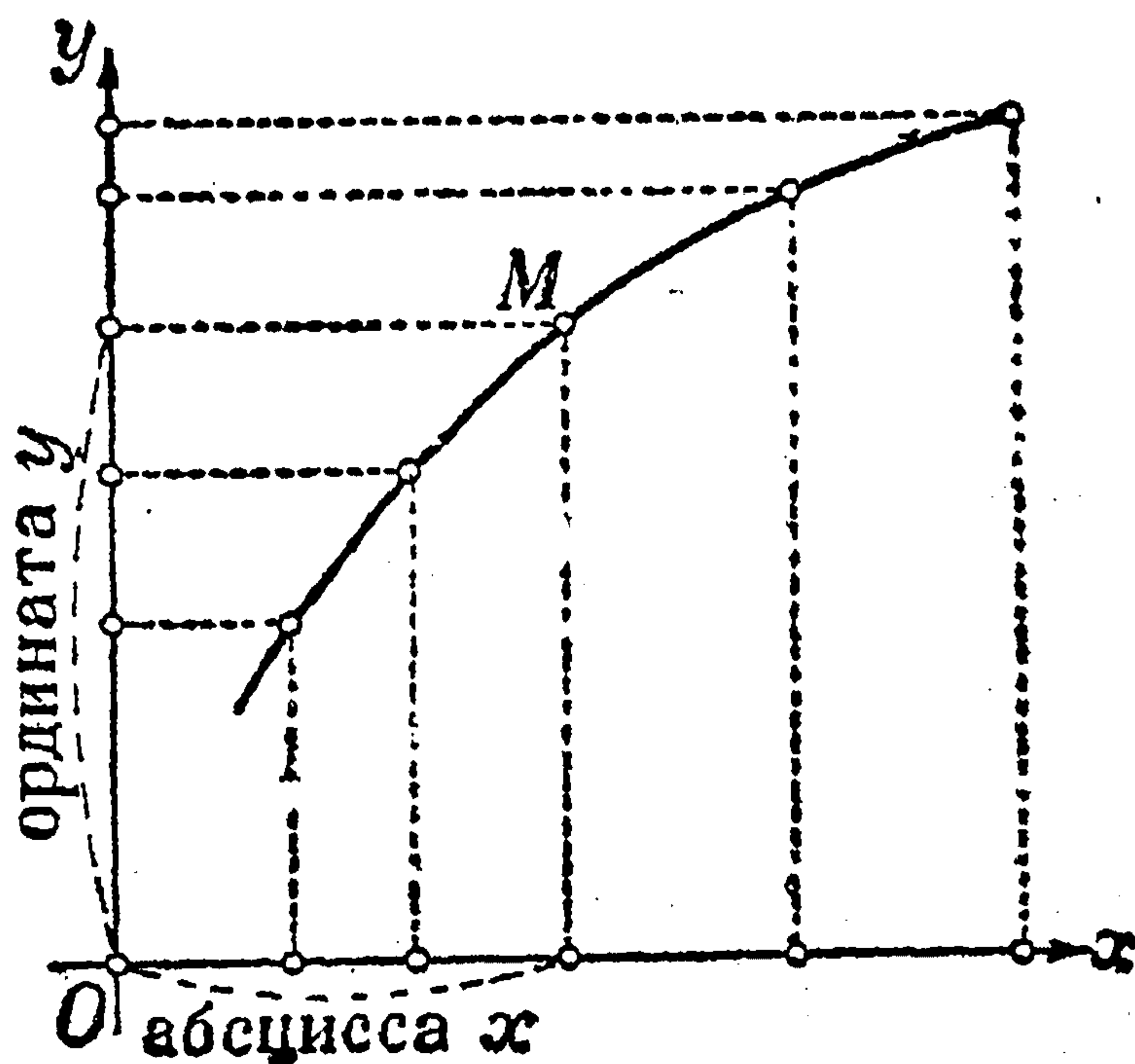
Рассмотрим произвольную прямую и придадим ей определенное *направление* (одно из двух возможных); его обыкновенно обозначают стрелкой (черт. 18); направленную прямую будем называть *осью*. Возьмем на оси произвольную точку  $O$ , которую будем считать *начальной*, и установим определенный *масштаб*, т. е. выберем какой-нибудь отрезок  $O_1$  за единицу длины. Теперь, для любого *положительного* числа  $x$  отложим от точки  $O$  в направлении оси (в *положительном* направлении) такой отрезок  $OA$ , отношение которого к единице длины равно именно  $x$ ;



Черт. 18.

так, числу 3 мы отнесем отрезок, втрое больший отрезка  $O_1$ , числу 0,5 — половину отрезка  $O_1$ , и т. п. Аналогичным образом мы отнесем отрезки и *отрицательным* числам, но откладываем их будем от начальной точки в направлении, противоположном оси (в *отрицательном* направлении); на черт. 18, для примера, отмечены концы отрезков, соответствующих числам  $-2$  и  $-3,5$ . Наконец, числу  $0$  отнесем *нулевой* отрезок, „стянувшийся“ в точку  $O$ .

Итак, *каждому числу  $x$  соответствует один определенный отрезок  $OA$  или, если угодно, одна определенная точка  $A$  — конец этого отрезка*. Изменение значений *переменной* величины  $x$  можно иллюстрировать перемещением соответствующей ему точки. Очевидно также, что и, наоборот, *каждой точке  $A$  на оси соответствует одно определенное число  $x$  — именно длина отрезка  $OA$ , взятая со знаком  $(+)$ , если  $A$  лежит в положительном направлении от начальной точки, и со знаком  $(-)$  в противном случае*. Это число  $x$  вполне определяет *положение точки  $A$  на оси* и называется ее *абсциссой*.



Черт. 19.

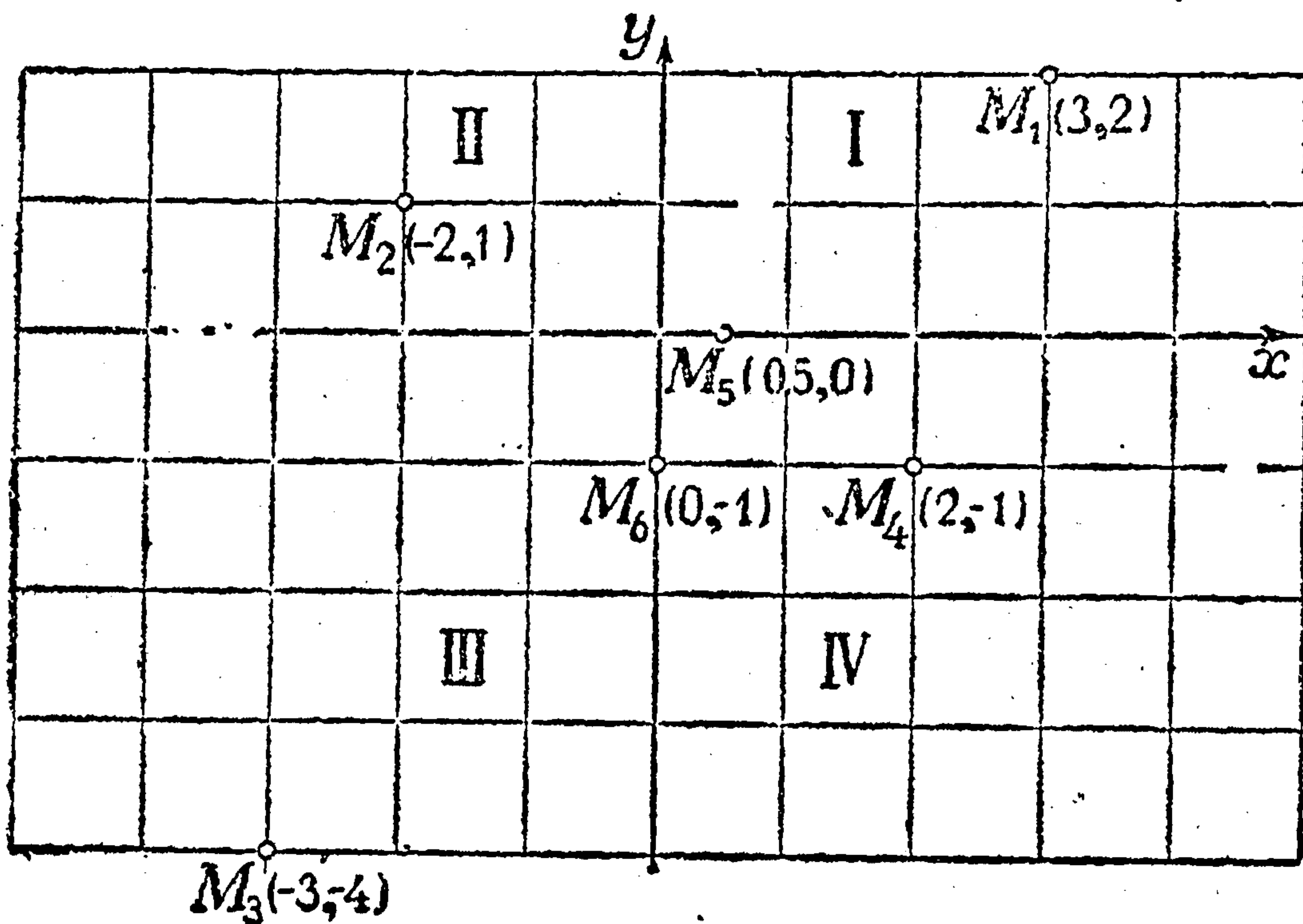
Переходя к определению *положения точки на плоскости*, проведем на плоскости две взаимно перпендикулярных оси  $Ox$  и  $Oy$  (черт. 19). \*Выбрав для них определенные *масштабы*\* и взяв за начальную точку — точку  $O$  их пересечения, мы спроектируем любую точку  $M$  плоскости на каждую из осей, и тем отсечем на них некоторые отрезки. Обозначим, соответственно, через  $x$  и  $y$  величины этих отрезков с *надлежащими знаками*, т. е., считаясь с т. м., в какую сторону от начальной точки они лежат. Если, как это делают обыкновенно, ось  $Ox$  направить вправо, а ось  $Oy$  — вверх, то отрезки на оси  $Ox$  будут выражаться

\* Масштабы могут быть и неодинаковыми для обеих осей.



положительными или отрицательными числами  $x$  в зависимости от того, лежат ли они вправо или влево от  $O$ ; аналогично, отрезки на оси  $Oy$  будут выражаться положительными или отрицательными числами  $y$ , смотря по тому, лежат ли они вверх или вниз от  $O$ .

Величины  $x$  и  $y$ , вполне определяющие положение точки на плоскости чертежа и, обратно, вполне определяемые заданием точки  $M$ , называются (прямоугольными) координатами точки  $M$ , причем  $x$  называется абсциссой,  $y$  — ординатой точки  $M$ . Для того, чтобы указать, что точка  $M$  имеет абсциссу  $x$  и ординату  $y$ , пишут просто:  $M(x, y)$ .



Черт. 20.

Прямые  $Ox$  и  $Oy$ , по которым откладываются абсцисса  $x$  и ордината  $y$ , называются *координатными осями*, или *осями координат*, и притом прямая  $Ox$  — *осью абсцисс*, прямая  $Oy$  — *осью ординат*. Точка их пересечения  $O$ , от которой откладываются  $x$  и  $y$ , называется *началом координат*.

Перенумеровав четыре угла, образуемые координатными осями, — эти углы называются *координатными углами*, — так, как это сделано на черт. 20, мы увидим, что

точка $M_1(3, 2)$	лежит в	I координатном угле,
» $M_2(-2, 1)$	»	» II
» $M_3(-3, -4)$	»	» III
» $M_4(2, -1)$	»	» IV
» $M_5(0, 5; 0)$	»	на оси $Ox$ ,
» $M_6(0, -1)$	»	» на оси $Oy$ .

Следующая табличка указывает, какие знаки имеют координаты точки  $M(x, y)$  в зависимости от того, в каком координатном угле находится эта точка.

$M$	I	II	III	IV	$Ox$	$Oy$
$x$	+	-	-	+	$\pm$	0
$y$	+	+	-	-	0	$\pm$

Самый способ определения положения точки  $M$  на плоскости путем задания пары значений  $x, y$ , откладываемых на осях  $Ox, Oy$ , называется



способом прямоугольных прямолинейных координат и был введен знаменитым французским математиком и философом Декартом (Descartes, 1596 — 1650). Впоследствии [116] мы познакомимся еще с другими координатами точки; при отсутствии опасности смешения, мы будем *прямоугольные координаты* точки называть просто ее *координатами*.

**30. График функции. Графическое интерполирование.** Вернемся теперь к функциональной зависимости между двумя переменными  $x$  и  $y$ , из которых первая пусть будет независимой переменной, а вторая — функцией:  $y = f(x)$ . Возьмем систему координатных осей (черт. 19) и станем откладывать по оси абсцисс значения независимой переменной  $x$ , а по оси ординат — значения функции  $y$ , выбрав предварительно *масштабы* для каждой из осей, т. е. условившись, какими отрезками будут изображаться на них единицы рассматриваемых величин. Отложив отрезки  $x$  и  $y$ , мы из концов их восставим перпендикуляры к осям, которые пересекутся в некоторой точке  $M(x, y)$ . \* Изменяя  $x$ , а с ним вместе и  $y$ , мы заставим точку  $M$  описывать некоторую кривую (или прямую) линию, которая и служит *графическим изображением* или просто — *графиком* \*\* нашей функции. Наоборот, равенство  $y = f(x)$  называют *уравнением* графика или линии.

Графический способ изображения функциональной зависимости, по сравнению с табличным и аналитическим, имеет несомненное преимущество *наглядности*. Вследствие этого очень часто стараются изобразить графически функцию или построить график функции даже и тогда, когда она определена с помощью таблицы или формулы. Проще всего это осуществить, воспользовавшись листом разграфленной бумаги, хотя бы так называемой миллиметровой бумаги. Если функция задана таблицей своих значений, найденных, скажем, опытным путем, то отмечают в плоскости чертежа точки, определяемые парами соответствующих значений  $(x, y)$ , и соединяют их, по возможности, *плавной* линией, которую и принимают за график функции.

Проделаем это построение для графика зависимости между относительным удлинением стержня  $l$  и его температурой  $t$ , или растягивающим усилием  $P$ ; по табличкам п<sup>0</sup> 27 мы получим сперва лишь некоторое число отдельных точек, обозначенных кружками и кружками с точками на черт. 21. Оказывается, однако, что часть этих точек можно соединить плавной линией (в рассматриваемом случае прямой), которая, если и не проходит в точности через все построенные точки, то во всяком случае проходит достаточно близко к ним. На черт. 21 объединены результаты обоих опытов, описанных выше, — нагревания и растяжения стержня, причем первому соответствует сплошная, второму — пунктирная линия; переменная величина  $l$  (функция) в обоих случаях одна и та же

\* Вместо того, чтобы откладывать значение  $y$  на прямой  $Oy$ , можно откладывать его непосредственно на перпендикуляре, восставленном в точке  $x$  к прямой  $Ox$ ; хотя первый способ предпочтительней, в виду большей симметричности построения, второй способ также применяется очень часто.

\*\* В некоторых случаях *графики* получают особые названия, напр., говорят об *эпюре* изгибающего момента или гидростатического давления и т. п.



и откладывается по вертикальной прямой в масштабе 1 деление = 0,5 мм; \* независимая же переменная, откладываемая по горизонтальной прямой, — для сплошной линии есть температура  $t$  (масштаб: 1 деление = 30° С), а для пунктирной — растягивающее усилие  $P$  (масштаб: 1 деление = 300 кг/см<sup>2</sup>), на что и указывает двойная шкала на горизонтальной прямой. Мы получили *различные графики для одной и той же величины  $l$*  по той простой причине, что характер зависимости  $l$  от  $t$  и  $l$  от  $P$  не один и тот же и дает нам поэтому различные функции.

То обстоятельство, что проведенные нами линии, которые мы принимаем за графическое выражение функциональных зависимостей  $l$  от  $t$  и  $l$  от  $P$ , не проходят в точности через *все* построенные точки, можно объяснить неизбежными погрешностями наблюдения и измерения; благодаря этим погрешностям результаты опыта всегда будут уклоняться от графика, даже если он изображает функциональную зависимость „идеально“ точно.

Усмотрев из расположения точек, что графиком является прямая, уже нетрудно [см. ниже, 34] установить и соответствующие уравнения. Таким образом, построение графика иногда значительно облегчает тот переход от таблицы к формуле, о котором была речь в 28.

Подобно тому, как мы сейчас строили графики для функций, определяемых по таблице, можно строить график и для функции, заданной аналитически, т. е. формулой, если предварительно по формуле составить таблицу. На черт. 22 таким путем построен график функции  $S = r^2$ , по таблице вычисленных ее значений:

$d$	1	2	3	4	5	6	7	8 (см)
$S$	0,8	3,1	7,1	12,6	19,6	28,3	38,5	50,3 (см <sup>2</sup> )

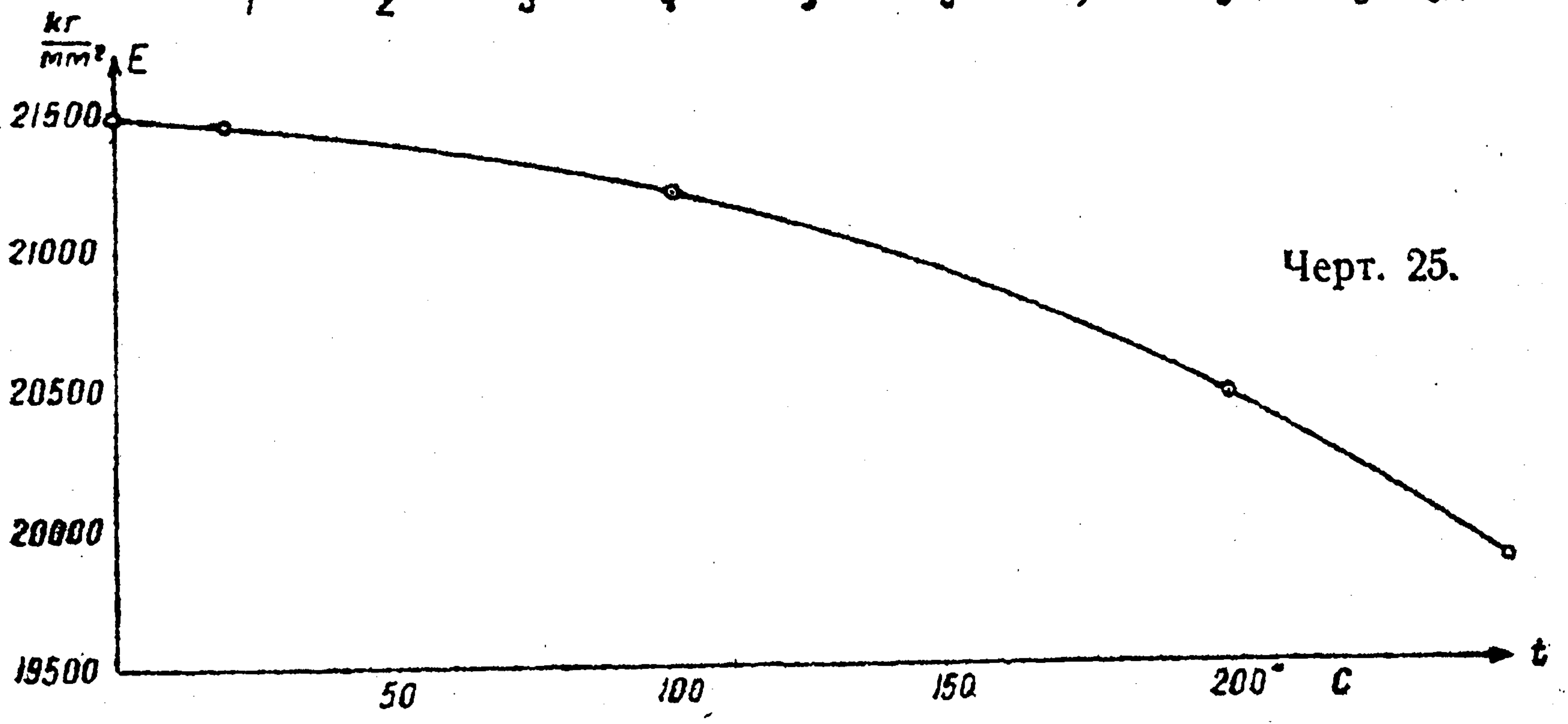
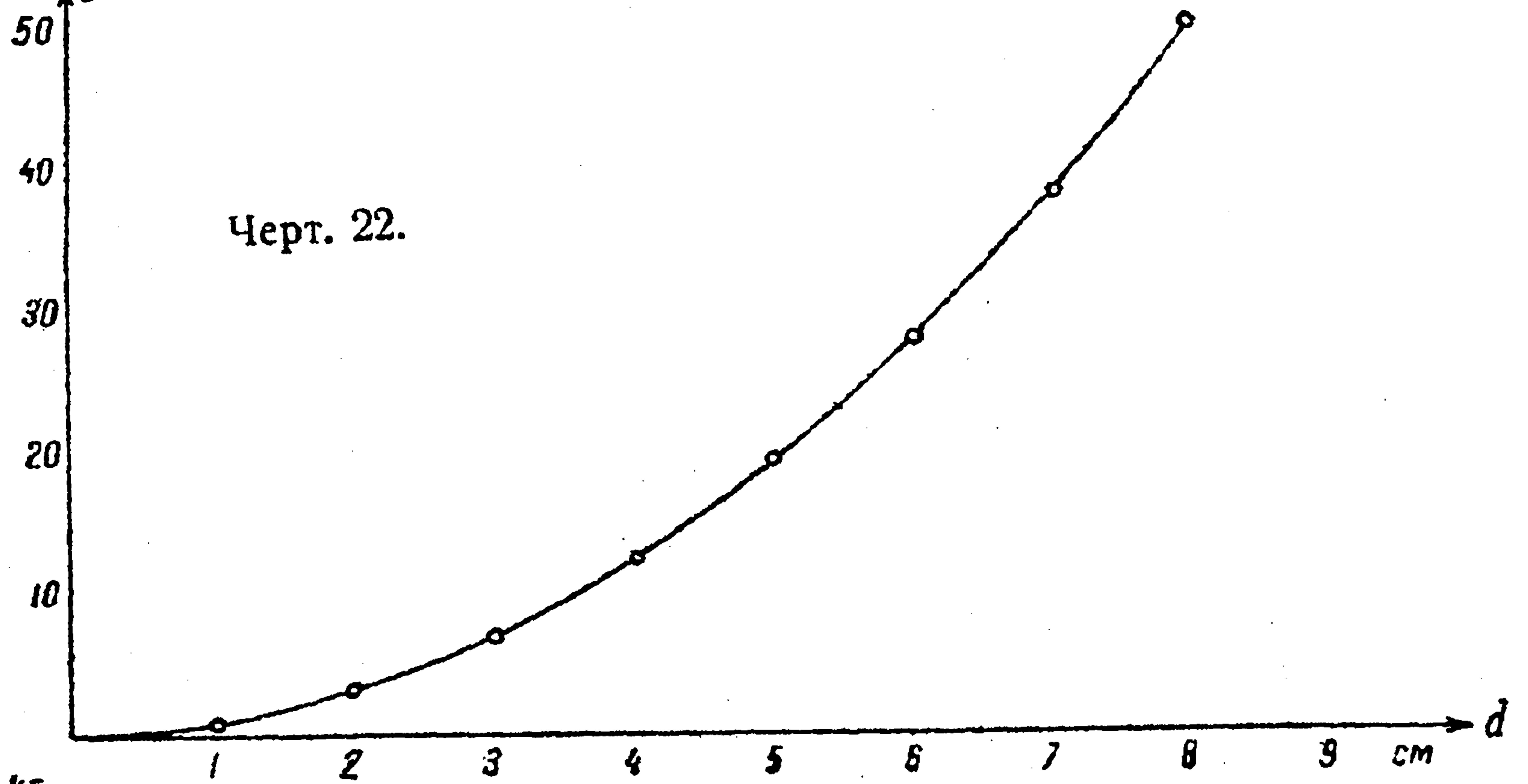
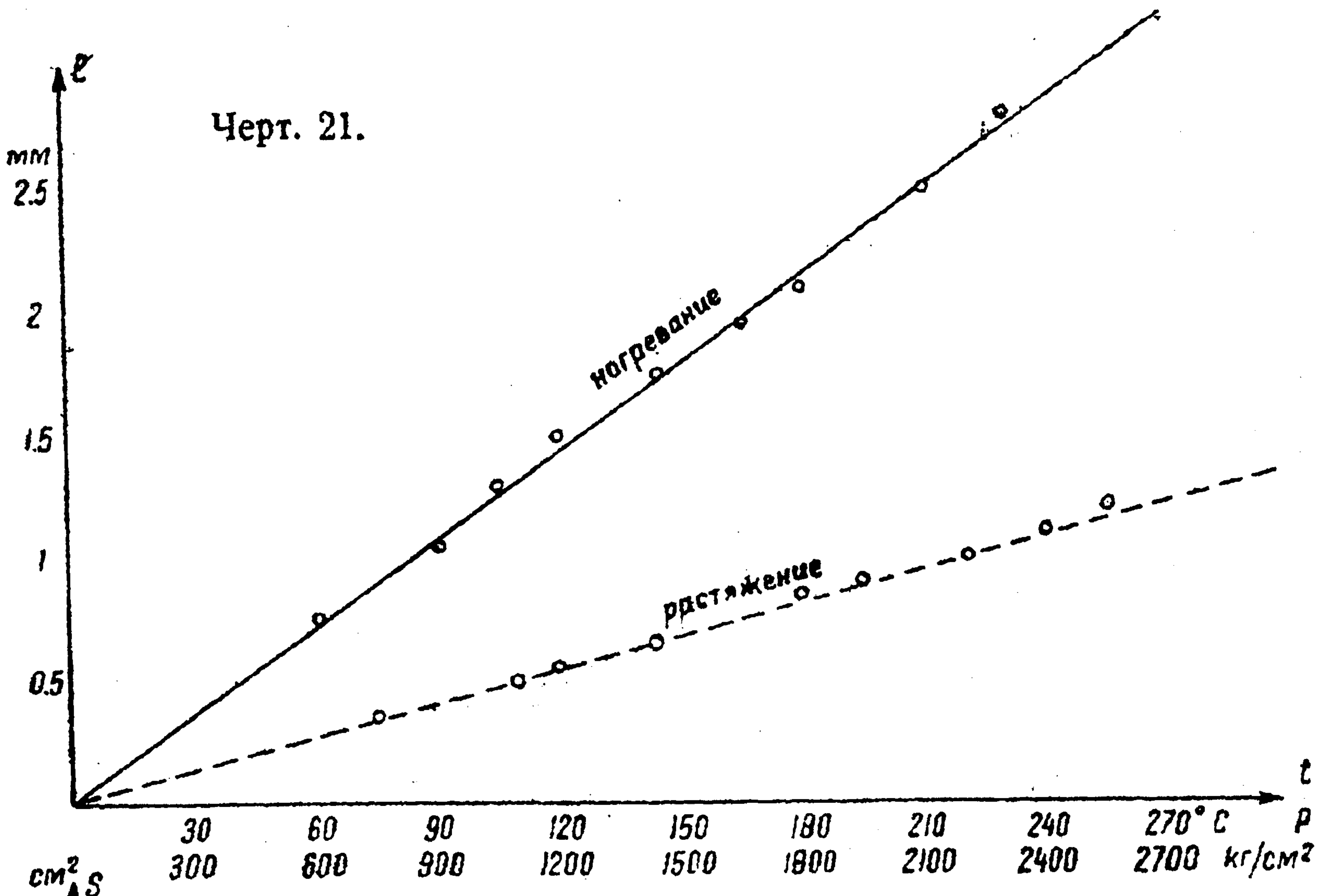
При этом, по горизонтальной оси выбран масштаб: 1 деление = 1 см, а по вертикальной, в виду быстрого возрастания квадрата, — меньший масштаб: 1 деление = 50 см<sup>2</sup>.

Переход от таблицы к графику решает вместе с тем и задачу интерполирования: график дает легкую возможность находить значения функции, соответствующие таким значениям аргумента, которых не было в первоначальной таблице — стоит лишь измерить соответствующие ординаты. Напр., по черт. 21 можно установить, что растягивающему усилию  $P = 1700$  кг/см<sup>2</sup> соответствует удлинение  $l = 0,75$  мм. Аналогично, по черт. 22 сразу видим, что при  $d = 4,5$  (см) площадь круга  $S = 15,9$  (см<sup>2</sup>), хотя этого значения мы не вычисляли для построения графика.

Этот метод носит название *графического интерполирования*. При пользовании им однако надлежит иметь в виду, что сколько-нибудь надежные результаты он может дать только в том случае, когда „интер-

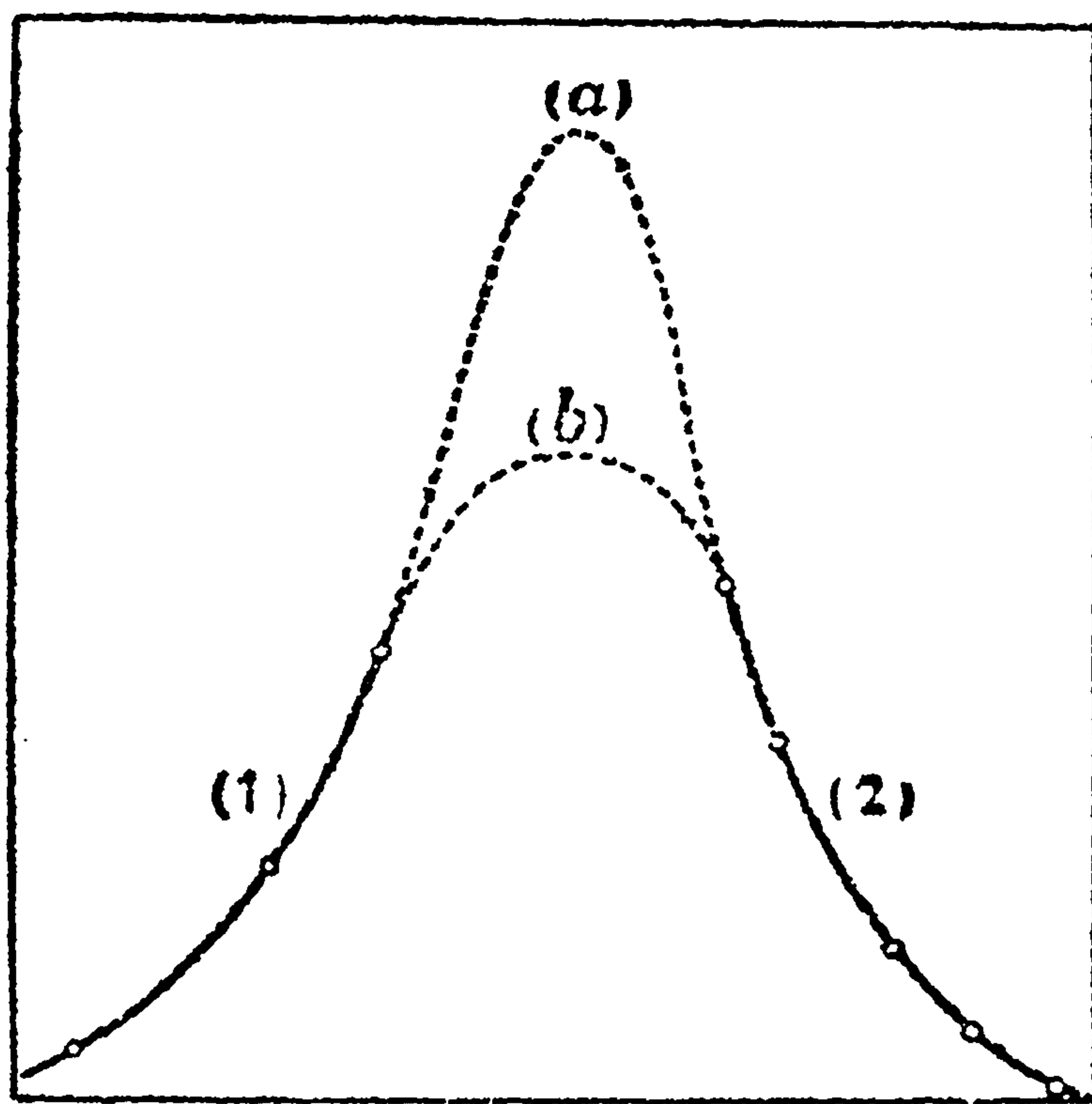
\* Для простоты мы предполагаем первоначальную длину стержня равной 1 м и, вместо *относительного* удлинения в тысячных долях, откладываем по вертикальной оси самое удлинение в мм





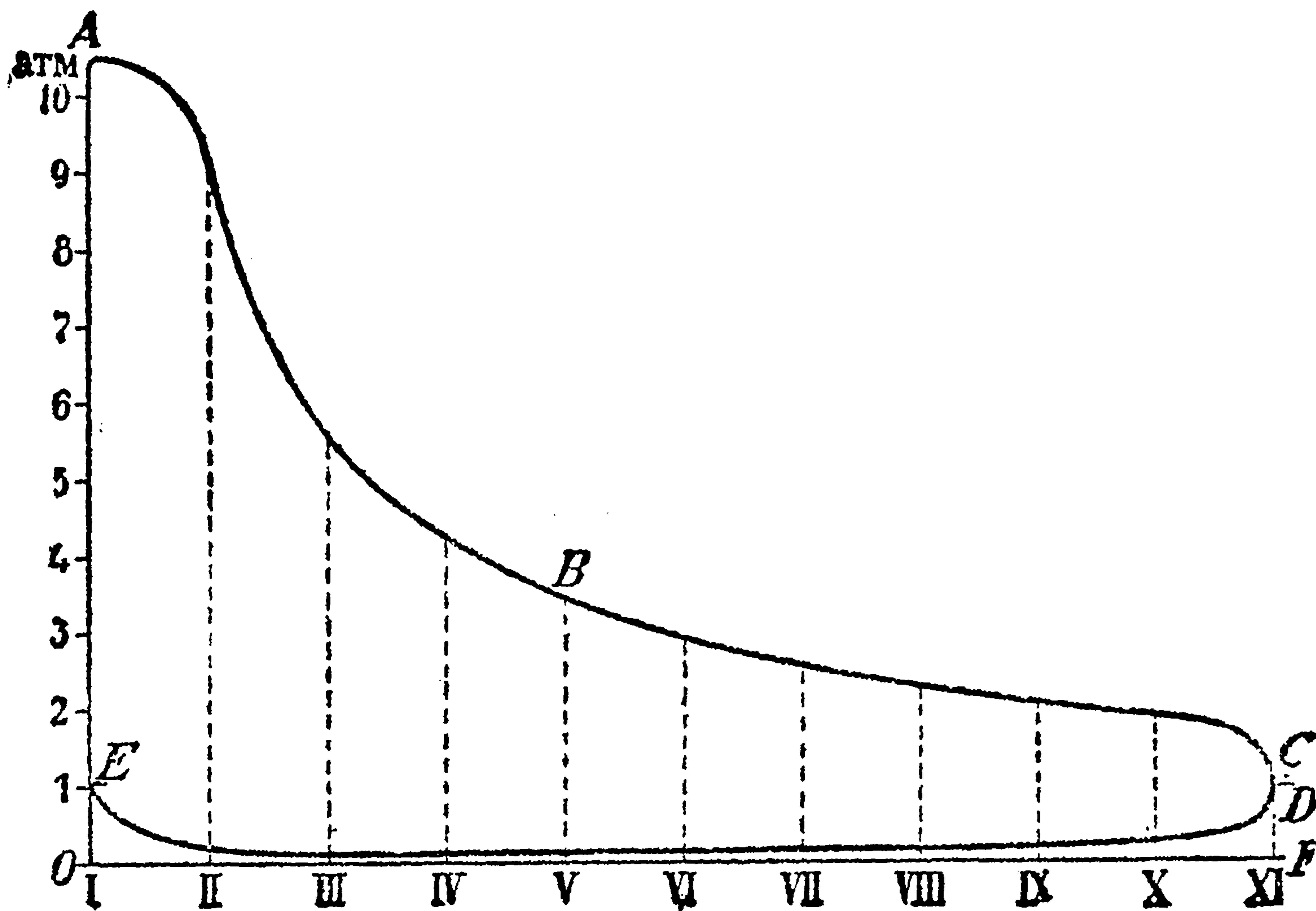


полирующая кривая", т. е. кривая, проведенная через данные точки, достаточно гладкая; если же она имеет колебания, т. е. идет то вверх то вниз,—такая кривая не годится для интерполирования. Так, напр. если нам даны точки, указанные кружками на черт. 23, то части (1) и (2) могут быть проинтерполированы более или менее точно, но совершенно гадательной является промежуточная часть кривой, соединяющая части (1) и (2): любая из начерченных пунктиром кривых (а), (б) может служить для цели интерполирования, и чтобы решить, какую именно нужно выбрать, необходимо указать еще ряд промежуточных точек.



Черт. 23.

До сих пор мы говорили о получении графика для функции заданной таблицей или формулой. Однако есть случаи, когда функция непосредственно задается графиком, получающимся в самопишущем приборе. Достаточно вспомнить барографы, автоматически записывающие суточные изменения атмосферного давления, индикаторы — для записи зависимости между положением



Черт. 24.

поршня и давлением газа или пара в двигателе, осциллографы — для записи колебаний в напряжении или в силе тока динамомашин, тахографы — для записи изменений в скорости поезда или машины, и т. п. Напр., на черт. 24 представлена индикаторная диаграмма;



отрезок  $OF$  в масштабе дает ход поршня, верхняя кривая соответствует прямому движению (впуск пара и расширение), а нижняя — обратному (выпуск пара и сжатие). Ход поршня разделен на 10 частей, и, измерив соответствующие ординаты, можно установить, что начальное давление было 10,4 атм., затем, 9,1 атм., 5,5 атм. и т. д. Таблица значений функции здесь получается уже по графику!

31. Примеры и задачи на графики. 1. Модуль упругости  $E$  ковального железа ( $\text{кг/мм}^2$ ) зависит от температуры  $t^\circ \text{C}$  по таблице:

$t$	0	20	100	200	250
$E$	21 480	21 440	21 210	20 460	19 870

Нанесем все указанные точки и соединим их плавной кривой (черт. 25). По этому поводу сделаем очень важное практическое замечание. Если бы в выбранном для  $E$  масштабе (1 деление = 500  $\text{кг/мм}^2$ ) мы откладывали по вертикали все значение  $E$ , то наша диаграмма в высоту имела бы 43 см (!); поэтому мы откладываем лишь превышение  $E$  над 19 500. Таким образом, точка пересечения осей не есть истинное начало координат, а ось  $t$  не есть ось абсцисс, а лишь параллельная ей вспомогательная ось. Этим приемом часто пользуются для того, чтобы избежать бесполезного увеличения размеров чертежа; разумеется, он применим и в другой оси. Его следует иметь в виду при дальнейших построениях.

Теперь мы можем найти вероятные значения  $E$  при  $t = 50^\circ, 150^\circ, 225^\circ \text{C}$ , а именно  $E = 21 380, 20 900, 20 190$ .

2. Давление  $p$  ( $\text{кг/см}^2$ ) насыщенного пара при температуре  $t^\circ \text{C}$  определяется по таблице:

$t$	105	110	115	120	125
$p$	1,232	1,462	1,726	2,027	2,371

Каково будет давление при  $108,4^\circ$ ? При какой температуре давление пара будет  $2100 \text{ кг/см}^2$ ? (Отв.  $1,90 \text{ кг/см}^2$ ;  $121,1^\circ$ )

3. При давлении  $p$  ( $\text{кг/см}^2$ ), 1 кг насыщенного пара занимает объем  $v$  ( $\text{м}^3$ ).

$p$	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
$v$	0,472	0,422	0,382	0,350	0,322

Найти объем  $v$  при давлениях: 4,21; 5,43; 6,37  $\text{кг/см}^2$  (Отв. 0,449; 0,353; 0,305  $\text{м}^3$ ).

4.  $L$  есть скрытая теплота пара при  $t^\circ \text{C}$ .

$t$	75	90	100	115	125
$L$	554	544	536	526	519



Какой вид имеет график этой зависимости? Найти с его помощью значения  $L$  при  $t = 83^\circ, 117^\circ$ . (Отв. Прямая; 559 543 кал.)

5. При испытании подъемного крана получились следующие значения усилия  $P$  (кг), необходимого для подъема тяжести  $W$  (кг):

$W$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$P$	1	1,63	2,13	2,63	3,25	3,75	4,25	5,0	5,5	6

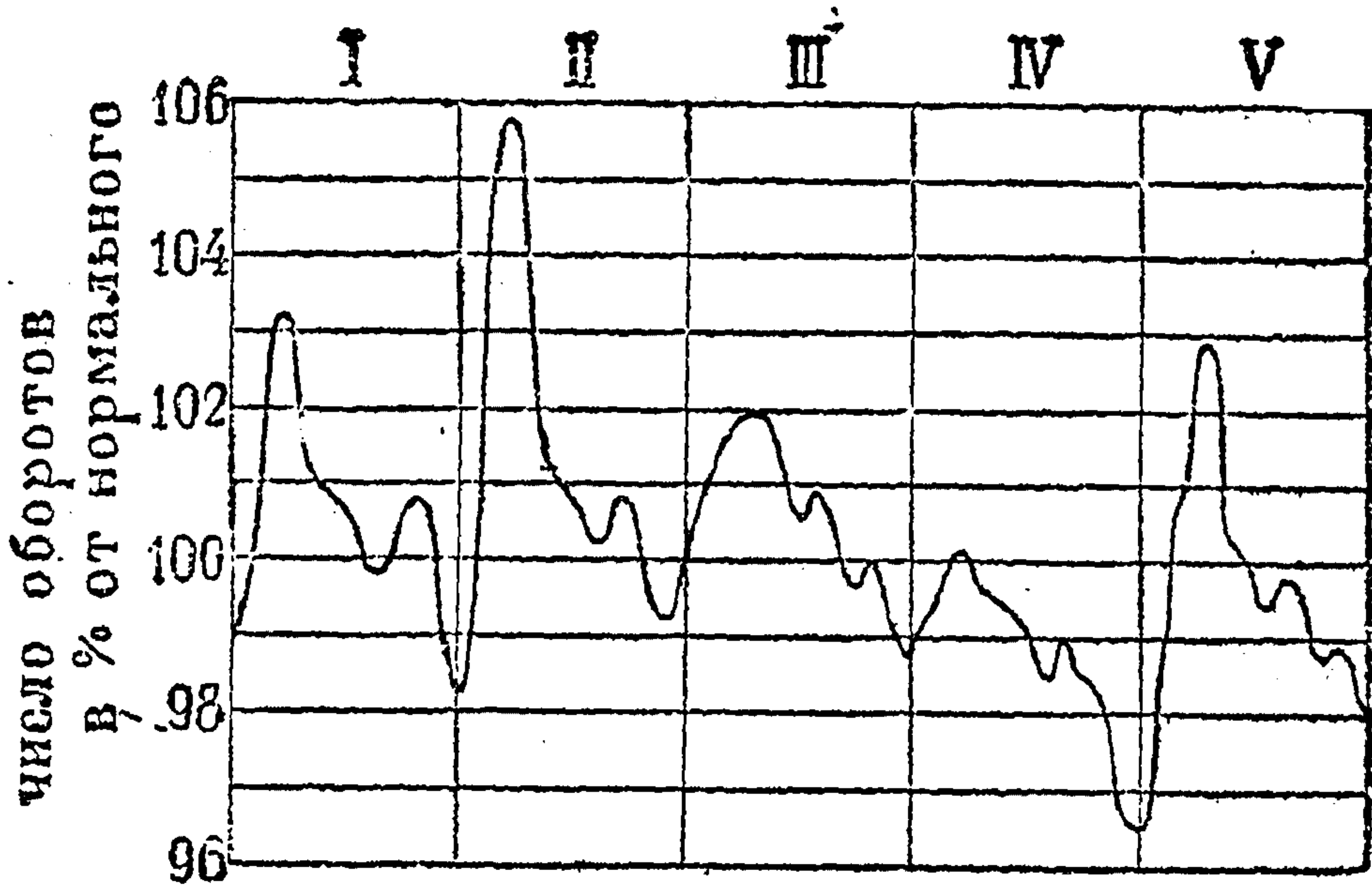
Определить вид графика; найти  $P$ , соответствующие  $W = 45, 87$  кг (Отв. Прямая; 2,95, 5,3.)

6. При испытании газомотора получена следующая зависимость между индикаторной мощностью  $J$  и действительной мощностью  $E$  (в лош. силах):

$J$	1,54	3,09	4,58	5,67	6,50
$E$	0	1,62	3,33	4,71	5,81

Построить график зависимости коэффициента полезного действия  $\eta = \frac{P}{J}$  от  $E$ ; какой коэффициент  $\eta$  отвечает  $E = 2,5$  л.с.? (Указ. Вычислить значения  $\eta$ , отвечающие табличным значениям  $E$ , напр., с помощью логарифмической линейки.)

7. На черт. 26 представлена тахограмма газового двигателя в течение пяти последовательных полных периодов. Определить «степень неравномерности» в каждом из них (т. е. разность между наибольшим и наименьшим числом оборотов, в % среднего числа) (Отв. 4,9%; 7,4%; 3,1%; 3,8%; 6,5%).



Черт. 26.

8. На черт. 27 представлены графики изменения пути  $s$  (см) и скорости  $v$  (см/сек), для определенной точки некоторого механизма, в зависимости от времени ( $t$  сек). Построить график зависимости  $v$  от  $s$ .

Таким образом, здесь предлагается, исходя из графического задания функций, изменить роль одной из них,  $s$ , сделав ее независимой переменной! Выполнить это можно, установив по чертежу несколько соответствующих пар значений  $s$  и  $v$ , напр.,  $s = 10, v = 13,2$  и т. д.

Перейдем теперь к упражнениям в построении графиков функций, заданных формулами, причем сначала — для простоты — не будем их связывать с прикладными вопросами.

9. Построить графики функций: 1)  $y = 3x - 4$  (изменяя  $x$  от  $-1$  до  $+3$ , через 0,5); 2)  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  ( $x$  от  $-5$  до  $5$ , через 1); 3)  $y = \frac{3}{2}x + 1$ ; 4)  $y = -0,13x - 0,32$  ( $x$  от  $-3$  до  $+3$ , через 0,5; для  $y$  избираем в 5—10 раз больший масштаб, чем для  $x$ ).

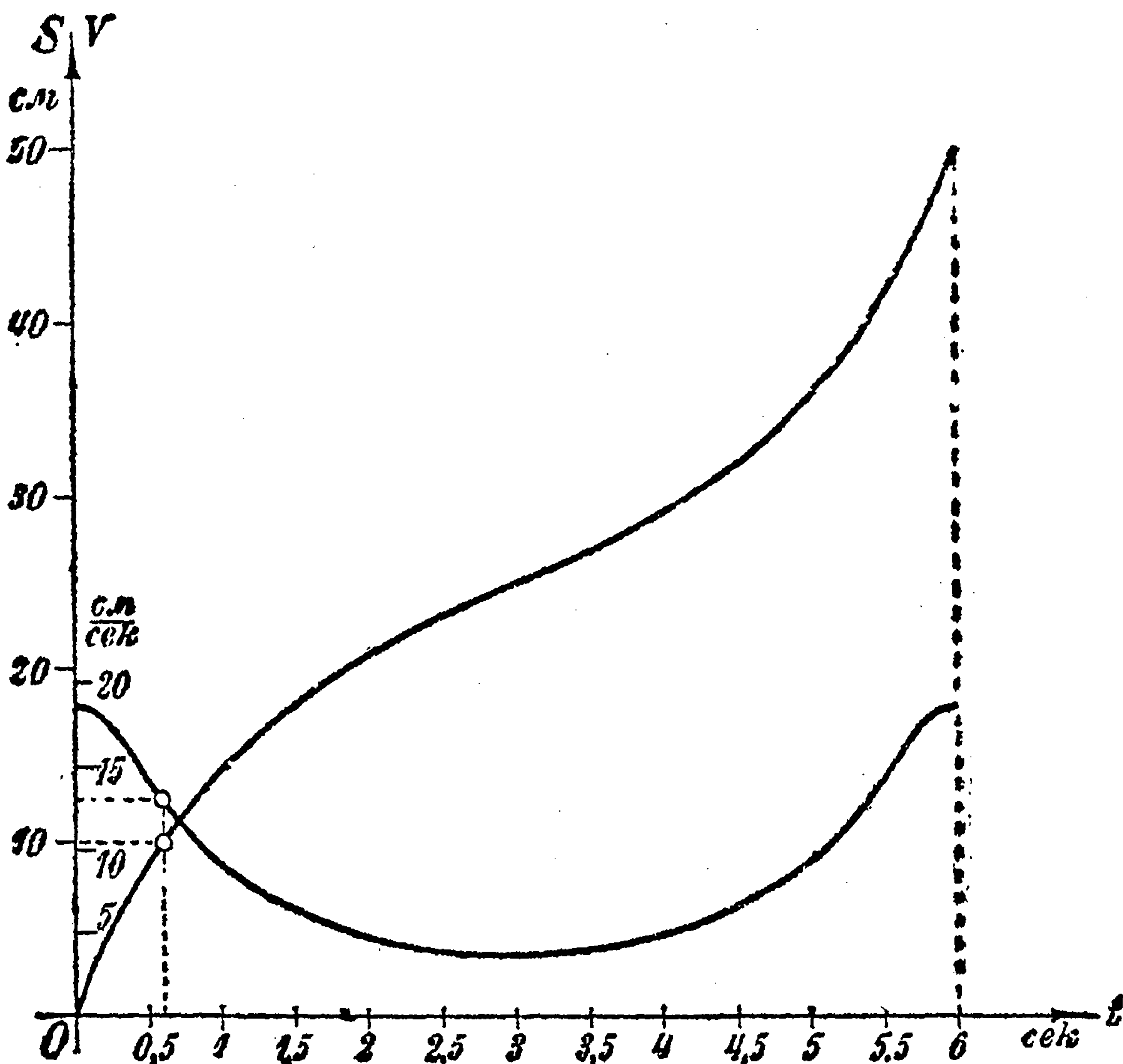


Напр., для первого случая составляем табличку:

$x$	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y$	-7	-5,5	-4	-2,5	-1	0,5	2	3,5	5

и отметив все точки  $(-1; -7)$ ,  $(-0,5; -5,5)$ , ... на чертеже, проводим через них линию; она оказывается *прямой*. То же — и в остальных случаях.

10. Построить графики, соответствующие таблицам на стр. 83, выбрав надлежащие масштабы и передвинув оси, в согласии с замечанием, сделанным по поводу задачи 1, чтобы избежать чрезмерного увеличения чертежа.



Черт. 27.

11. Построить графики функций: 1)  $y = x^2$  ( $x$  от  $-10$  до  $+10$  через 1, или от  $-1$  до  $+1$  через 0,1; для каждого случая выбрать удобные масштабы); 2)  $y = x^3$  ( $x$  от 0 до  $+10$ , через 1; масштаб!); 3)  $y = 0,5x^2 - 2x + 1$ , ( $x$  от 0 до 4, через 0,5); 4)  $y = -2x^2 + 6x - 1$  (то же); 5)  $y = \frac{1}{x}$  (для  $x$  от 0,2 до 1 через 0,1 и от 1 до 5 через 1); 6)  $y = 2x + \frac{1}{x} - 2$  (для  $x$  от 2,5 до 6, через 0,5); 7)  $y = \pm \sqrt{x}$  (для  $x$  от 0 до 100, через 10).

В случае 1), очевидно, изменение знака  $x$  вовсе не отразится на  $y$ , а в случаях 2) и 5) вызовет лишь изменение знака  $y$ ; пользуясь этим замечанием, дополнить графики в указанных случаях и для отрицательных значений  $x$ . Как получить графики функций:  $y = -x^2$ ,  $y = -x^3$ ,  $y = -\frac{1}{x}$ ?

12. Начертить график функции:  $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 7$  (для  $x$  от  $-4$  до 4, через 1; по вертикальной оси выбрать масштаб, в 20 раз меньший, чем по горизонтальной).



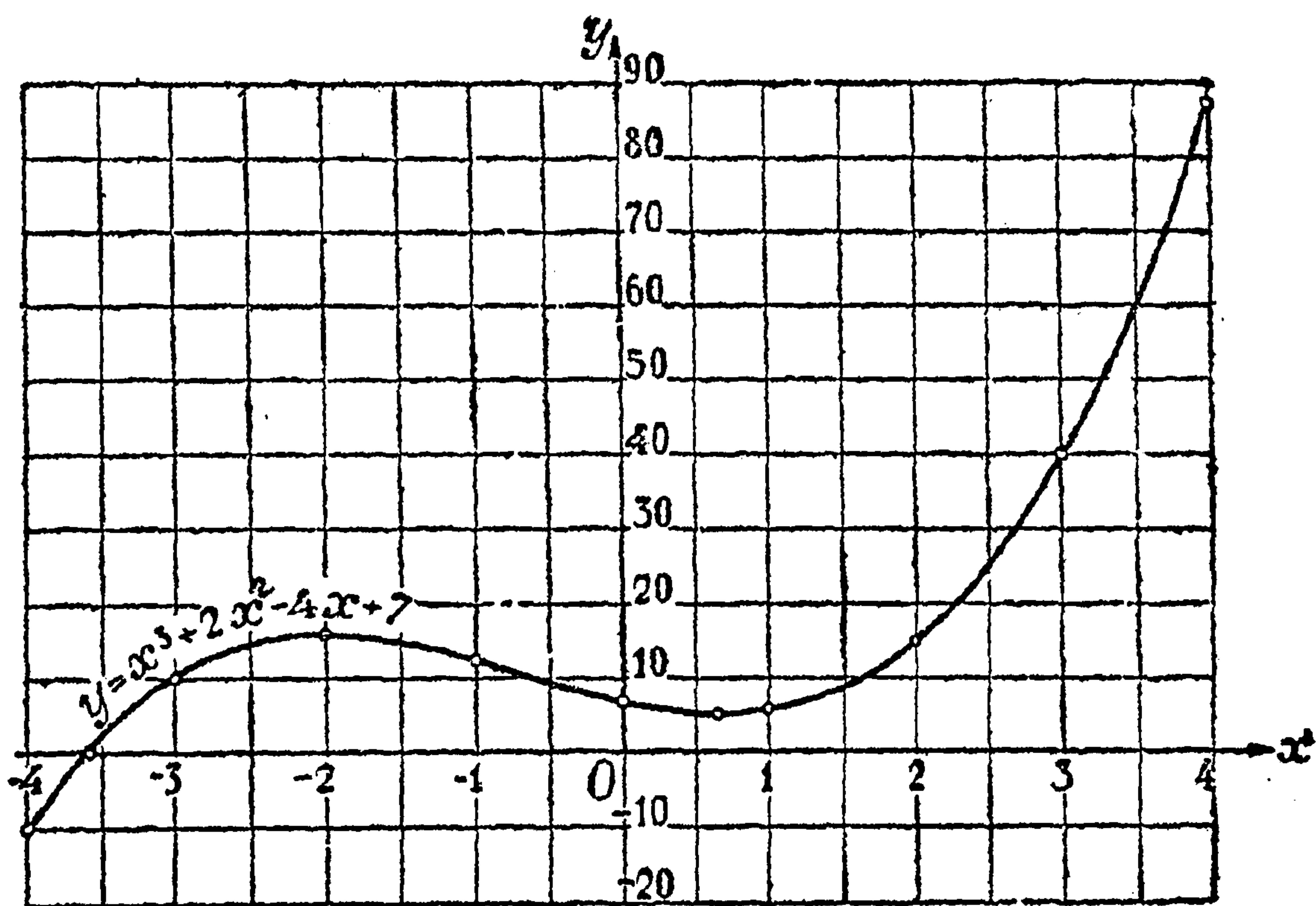
Составляем табличку:

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16
$x^3$	-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64
$y$	-9	10	15	12	7	6	15	40	87

и по ней строим график (см. черт. 28).

По графику можно усмотреть, что при  $x = -2$  функция переходит от возрастания к убыванию, а при  $x \approx 0,7$ , — наоборот; далее, что при  $x \approx -3,6$  функция обращается в 0. Для того чтобы точнее установить последние два значения  $x$  ( $x \approx 0,67$ ,  $x \approx -3,63$ ), можно было бы перерисовать в большем масштабе непосредственные окрестности соответствующих точек кривой.

13. Построить графики зависимости: 1) пути  $s$  свободно падающего тяжелого тела (в м) от времени падения  $t$  (в сек.), по формуле:  $s = 0,5 gt^2$  (где  $g = 9,81$ ), для  $t$  от 0 до 10, через 1 (масштаб!); 2) тепла  $Q$  (в джоулях), выделяемого при прохождении тока в проводнике с сопротивлением  $R$  (омов), от силы тока  $J$  (ампер), по формуле:  $Q = RJ^2$ , принимая  $R = 10$  и изменяя  $J$  от 0 до 10, через 1 (масштаб!).



Черт. 28.

14. Выразить графически зависимость 1) диаметра  $d$  заклепки (в см) от

толщины  $s$  (см) склепываемой части сооружения, по формуле:  $d = \sqrt{5s - 0,2}$ , от  $s = 0,5$  до  $s = 5$ , через 0,5; 2) скорости  $v$  (м/сек) свободно падающего тела от высоты  $h$  (м), с которой оно падает, по формуле:  $v = \sqrt{2gh}$ , где  $g = 9,81$  м/сек<sup>2</sup>, изменяя  $h$  от 0 до 20 м, через 5 м.

15. Построить графики для зависимостей, выражаемых формулами: 1)  $K = -8290 - 1,81\theta + 0,0015\theta^2$ , где  $K$  — модуль кручения стали (в кг мм<sup>2</sup>), а  $\theta$  — температура (°С) (для  $\theta$  от 0° до 100°, через 10°; передвинуть горизонтальную ось и выбрать надлежащие масштабы!); 2)  $W = 1 + 0,16V + 0,02V^2$ , где  $W$  — удельное сопротивление паровоза определенного типа (в кг на тонну веса), а  $V$  — скорость его (в км час) (для  $V$  от 0 до 60, через 10).

16. Изобразить графически зависимости: 1)  $p = \frac{273 \cdot 29,27}{v}$ , для  $p$  от 300 до 1500, через 300 (закон Бойля-Мариотта, см. (?)); 2)  $W = \frac{750}{R}$ , для  $R$  от 300 до 1500 через 300 (где  $R$  радиус кривизны железнодорожного закругления в м а  $W$  — сопротивление поезда от кривой, в кг на тонну веса поезда).

17. Построить графики функций:

$$1) S = \frac{144,3}{144,3 + n}, \quad 2) \mu = \beta \frac{1 + 0,0112V}{1 + 0,06V}.$$



В случае 1)  $S$  есть удельный вес жидкости (легкой) при  $15^\circ\text{C}$ , а  $n$  — число градусов ареометра с рациональной шкалой Бомэ ( $n$  от  $0^\circ$  до  $50^\circ$ ). В случае 2)  $\mu$  есть коэффициент трения при скольжении тормозных колодок из литой стали по стальным бандажам, а  $V$  — скорость поезда, в км/час ( $V$  от 0 до 80; для  $\mu$  взять увеличенный масштаб); коэффициент  $\beta$ , при определенных условиях, можно принять равным 0,45.

18. В трубе, подвергнутой наружному давлению, в точке на расстоянии  $r$  (см) от оси развиваются напряжения 1) радиальное:  $p = A + \frac{B}{r^2}$  и 2) перпендикулярное к радиусу:  $q = A - \frac{B}{r^2}$  (в кг/см<sup>2</sup>), где  $A$  и  $B$  — некоторые постоянные. Если внутренний диаметр трубы = 8 см а наружный = 24 см, то при наружном давлении в 100 кг/см<sup>2</sup> следует положить  $A = 112,5$ ,  $B = -1800$ . Построить графики обеих зависимостей, меняя  $r$  от 4 до 12.

19. Пусть на горизонтально расположенную балку длины  $l$  (= 200) см действует равномерно распределенная нагрузка  $Q$  (= 960) кг. Тогда прогиб  $y$  (см) в сечении на расстоянии  $x$  (см) от левого конца балки, при некоторых условиях закрепления балки, выразится одной из следующих формул:

$$1) y = \frac{Ql^3}{24EJ} \left( \frac{x^4}{l^4} - 4 \frac{x^3}{l^3} + 6 \frac{x^2}{l^2} \right); \quad 2) y = \frac{Ql^3}{24EJ} \left( \frac{x^4}{l^4} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right);$$

$$3) y = \frac{Ql^3}{48EJ} \left( 2 \frac{x^4}{l^4} - 3 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x}{l} \right); \quad 4) y = \frac{Ql^3}{24EJ} \left( \frac{x^4}{l^4} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Здесь  $E$  — модуль упругости материала (=  $2 \cdot 10^8$  кг/см<sup>2</sup>), а  $J$  — экваториальный момент инерции сечения балки (=  $5 \cdot 10^2$  см<sup>4</sup>). Первое уравнение относится к случаю балки, наглухо закрепленной лишь левым концом; второе — к балке, покоящейся на опорах; в третьем случае — левый конец балки оперт, а правый — наглухо заделан в стену; наконец, в последнем случае — оба конца наглухо заделаны. Предлагается построить графики прогибов во всех этих случаях, при указанных числовых значениях, меняя  $x$  от 0 до 200 (см) через 20 (иными словами; меняя отношение  $\frac{x}{l}$  от 0 до 1 через 0,1). При этом рекомендуется по горизонтали положить 1 деление = 20 см, а по вертикали: 1) 1 дел. = 0,5 см; 2) 1 дел. = 0,05 см; 3) 1 дел. = 0,02 см; 4) 1 дел. = 0,01 см. Ось  $Oy$  направить вниз!

20. Расходы  $N$  (в руб.) на покрытие судном одного км пути определяются формулой:

$$N = 0,54 \left( \frac{a}{v} + bv^2 \right),$$

где  $v$  есть скорость судна в морских узлах (1 узел = 1,85 км/час), а  $a$ ,  $b$  — эмпирические коэффициенты, определяемые отдельно для каждого судна. Полагая  $a = 40$ ,  $b = 0,01$ , построить график этой зависимости, для  $v$  от 8 до 15, через 0,5; найти наиболее выгодную скорость. (Отв.  $v \doteq 12,5$  узлов.)

21. Если батарея с электродвижущей силой  $E$  (вольты) и внутренним сопротивлением  $r$  (омы) замкнута проводником с сопротивлением  $R$  (омы), то мощность получающегося тока  $W$  (ватты) выражается формулой:

$$W = \frac{E^2 \cdot R}{(R + r)^2}.$$

Полагая  $E = 10$  вольт и  $r = 0,57$  ома, построить график зависимости  $W$  от  $R$ , в промежутке для  $R$  от 0 до 1, через 0,1; когда  $W$  достигает наибольшего значения? (Отв. При  $R \doteq 0,57$ .)

22. В заключение предлагаем читателю построить графики зависимостей, заданных неявными уравнениями:

$$I. y^2 - 10x = 0; \quad II. 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0; \quad III. x^2 - y^2 - 9 = 0.$$



Решая эти уравнения относительно  $y$ , получим:

$$I. y = \pm \sqrt{10x}; \quad II. y = \pm \frac{1}{3} \sqrt{36 - 4x^2}; \quad III. y = \pm \sqrt{x^2 - 9}.$$

Во всех трех случаях при извлечении корня пришлось взять *двойной* знак; следовательно, каждому значению  $x$  отвечают *два* значения  $y$  (разнящихся лишь знаками); таким образом, в каждом случае мы получаем собственно *две* функции, напр.,  $y = +\sqrt{10x}$  и  $y = -\sqrt{10x}$  (или, как говорят, *двузначную* функцию). Очевидно, что достаточно построить график одной из них, скажем — с плюсом перед корнем, а график второй получится просто, если перегнуть чертеж по оси  $Ox$ . В случае I для того, чтобы корень был вещественным (а не мнимым), нужно брать  $x \geq 0$ ; в случае II для той же цели  $x$  надлежит изменять лишь между  $-3$  и  $3$ , наконец, в случае III, наоборот, либо  $x \geq 3$ , либо  $x \leq -3$ . Составим теперь таблички:

I.

$x$	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7
$y$	0	2,2	3,2	4,5	5,5	6,3	7,1	7,7	8,4

II.

$x$	0	$\pm 1$	$\pm 2$	$\pm 2,5$	$\pm 3$
$y$	2	1,9	1,5	1,1	0

III.

$x$	$\pm 3$	$\pm 3,5$	$\pm 4$	$\pm 5$	$\pm 6$	$\pm 7$
$y$	0	1,8	2,6	4	5,2	6,3

и по ним построим графики (они даны на черт. 29).

Кривые подобного типа носят название, соответственно, *параболы*, *эллипса* и *гиперболы*; впоследствии они будут рассмотрены подробнее. Кривые на черт. 22 и в задачах 11, 1), 3), 4), 7); 13; 14; 15 — также параболы, а кривые в задачах 11, 5), 6); 16; 17 — гиперболы.\*

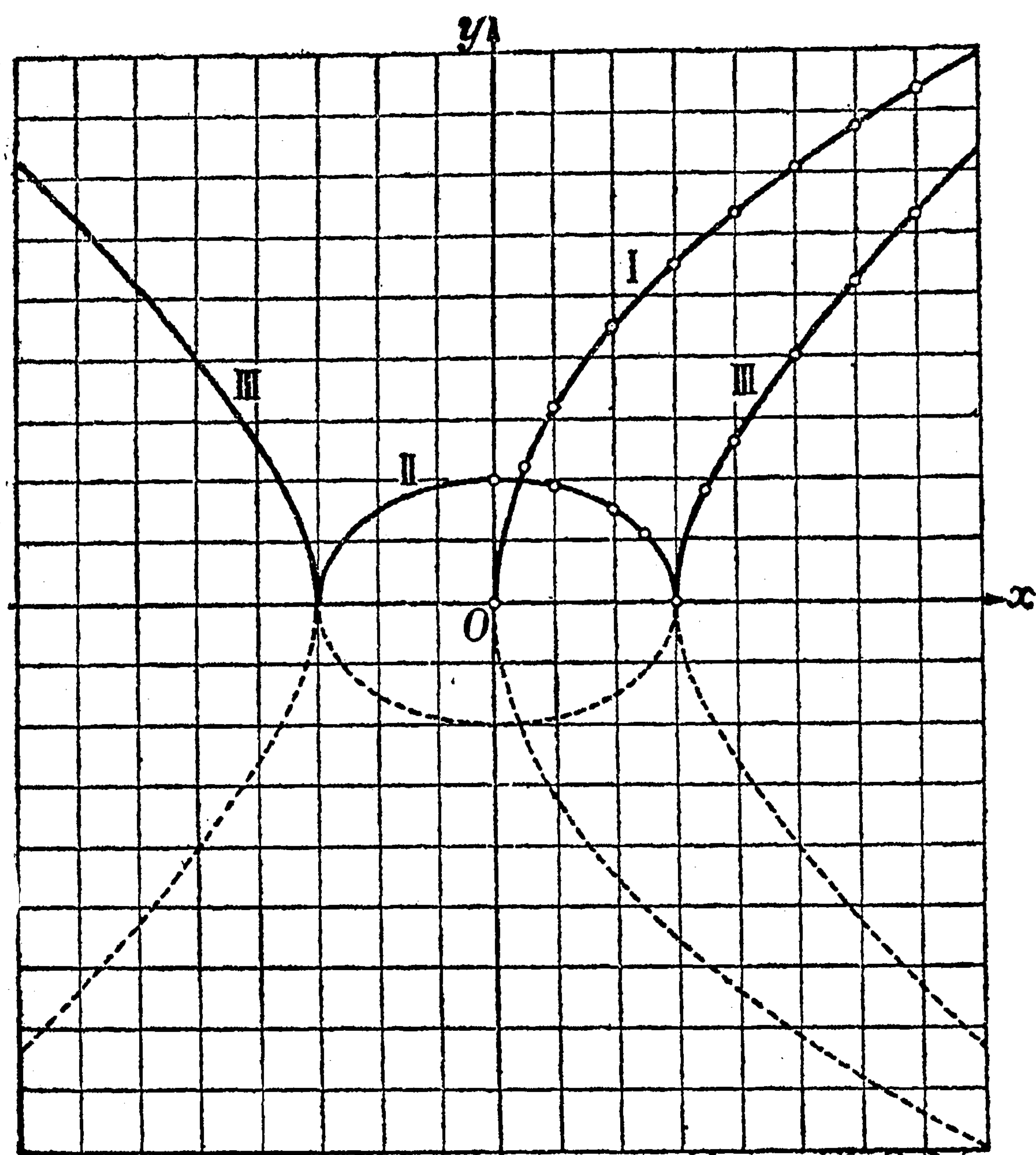
Перейдем теперь к систематическому изучению различных элементарных функций.

**32. Закон пропорционального изменения.** Самый простой вид функциональной зависимости — это тот, когда изменение функции *пропорционально* изменению независимой переменной.

\* Ниже мы укажем более удобные чисто графические приемы для построения этих кривых, не требующие вычислений.



*Примеры.* 1. Рассмотрим для примера *равномерное движение*, хотя бы поезд,двигающийся с постоянной скоростью между Ленинградом и Москвой. Положение поезда в каждый данный момент  $t$  определяется расстоянием его от некоторого определенного пункта пути, скажем, от станции Бологое (черт. 30).



Черт. 29.

Условимся считать это расстояние положительным, если поезд находится от Бологое в сторону Москвы, и отрицательным — в сторону Ленинграда, и обозначим его буквой  $s$ . Величина  $s$ , очевидно, есть функция от независимой переменной  $t$ , называемая „*пройденным путем*“.\*

Рассмотрим два каких-нибудь момента времени:  $t_1$  и  $t_2$ , и пусть соответствующие значения пройденного пути  $s$  будут  $s_1$  и  $s_2$ . За промежуток времени  $(t_2 - t_1)$  поезд пройдет, очевидно, путь, равный  $(s_2 - s_1)$ , и если движение совершается с постоянной скоростью  $v$ , то отношение пройден-

ного пути к промежутку времени должно сохранять постоянную величину  $v$ , т. е.

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v, \text{ или } s_2 - s_1 = v \cdot (t_2 - t_1). \quad (4)$$



Черт. 30.

Разность  $(t_2 - t_1)$  можно назвать изменением или *приращением времени*, разность  $(s_2 - s_1)$  — соответствующим изменением или *приращением*

\* Не следует смешивать  $s$  с путем, который фактически пройден поездом; так, например, если поезд находится на станции Бологое, то надлежит считать  $s = 0$ , хотя бы ему пришлось для того, чтобы попасть в Бологое, пройти весь путь от Ленинграда до Бологое.



пути, и тогда закон равномерного движения (4) гласит не что иное, как то, что приращение пути  $s$  пропорционально приращению времени  $t$ , причем коэффициент пропорциональности, т. е. постоянная величина отношения этих приращений, есть скорость движения  $v$ .

На основании этого закона нетрудно получить и самую формулу, выражающую зависимость между  $s$  и  $t$ . В самом деле, пусть в начальный момент времени,  $t=0$ , поезд находился в некоторой точке на расстоянии  $s_0$  от  $O$ ; эту величину  $s_0$  назовем начальным значением пройденного пути. К моменту  $t$  пройденный путь имеет значение  $s$ ; полагая в формуле (4)  $t_1=0$ ,  $s_1=s_0$ ,  $t_2=t$ ,  $s_2=s$ , мы получим

$$s - s_0 = v(t - 0), \text{ т. е. } s = s_0 + vt.$$

Итак, при равномерном движении пройденный путь  $s$  оказывается *двучленом первой степени* от независимой переменной  $t$ , или, как говорят короче, *линейной функцией* от  $t$ .

Если бы в начальный момент  $t=0$  поезд находился в Бологом, то мы должны были бы положить  $s_0=0$  и получили бы более простую формулу:  $s=vt$ , которая дает частный случай закона пропорционального изменения, когда не только *изменение* функции пропорционально изменению независимой переменной, но и сама *функция* пропорциональна независимой переменной.

2. Другой пример пропорционального изменения функции и независимой переменной представляет *зависимость между различными шкалами температур*. Сравним между собой, например, отсчеты одной и той же температуры на шкалах Цельсия (С) и Фаренгейта (F); совершенно понятно, что когда температура меняется, то изменение отсчета  $f$  на шкале F пропорционально изменению отсчета  $c$  на шкале С. Но на шкале С промежуток, соответствующий точке замерзания и точке кипения воды, разделен на 100 частей, а на шкале F — на 180 частей; поэтому, если разности отсчетов  $(c_2 - c_1)$  на шкале С соответствует на шкале F разность отсчетов  $(f_2 - f_1)$ , то

$$\frac{f_2 - f_1}{c_2 - c_1} = \frac{180}{100} = 1,8, \text{ или } f_2 - f_1 = 1,8 (c_2 - c_1).$$

Так как при этом  $0^\circ\text{C}$  соответствует  $32^\circ\text{F}$ , то при  $c^\circ\text{C}$  мы получим  $f^\circ\text{F}$  по формуле:

$$\frac{f - 32}{c - 0} = 1,8, \text{ откуда: } f = 32 + 1,8c;$$

и здесь мы имеем дело с линейной функцией.

Сравнивая шкалы Цельсия и Реомюра (R), мы получили бы не только пропорциональность изменений отсчетов  $r^\circ\text{R}$  и  $c^\circ\text{C}$ , но и пропорциональность самих отсчетов, ибо без труда можно найти, что  $r=0,8c$ . Подобно тому, как и в случае формул равномерного движения, упрощение здесь получается потому, что значение функции  $r$ , соответствующее значению  $c=0$ , т. е. начальное значение функции — тоже есть  $r=0$ , в то время как начальное значение функции  $f$  есть 32.



**33. Основное свойство линейной функции.** В обоих разобранных примерах мы видели, что свойство пропорциональности изменений функции и независимой переменной приводит к тому, что рассматриваемая функция оказывается линейной функцией или двучленом первой степени от независимой переменной; мы сейчас увидим, что это заключение можно обобщить на случай какой угодно функции, если только эта функция обладает свойством пропорциональности между изменениями функции и независимой переменной.

Обозначим независимую переменную через  $x$ , а функцию от нее через  $y$ , и положим  $y = f(x)$ .

Пусть независимая переменная перешла от частного значения  $x_1$  к частному значению  $x_2$ ; разность  $(x_2 - x_1)$  называется *приращением независимой переменной*, значение  $x_1$  называется *исходным*, значение  $x_2$  — *конечным* значением независимой переменной. Исходному и конечному значениям независимой переменной соответствуют исходное и конечное значение функции:  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ , разность которых:  $y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$  мы назовем *приращением функции, соответствующим приращению  $(x_2 - x_1)$  независимой переменной*.\*

Для сокращения обычно приращение какой-нибудь переменной обозначают греческой буквой  $\Delta$ , поставленной перед буквой, означающей эту переменную: таким образом, символы  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta f$  означают: „приращение  $x$ “, „приращение  $y$ “, „приращение  $f$ “ (и в них буквы  $\Delta$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $f$  ни в коем случае не следует рассматривать как множители!). В изучаемом нами случае мы имеем:  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = \Delta f$ .

Свойство пропорциональности изменений функции и независимой переменной можно выразить формулой:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a, \text{ или } \Delta y = a \Delta x, \quad (5)$$

где коэффициент пропорциональности  $a$  есть *постоянная* величина, не зависящая ни от приращения, получаемого  $x$ , ни от приращения, получаемого  $y$ .

Нетрудно обнаружить, что функция  $y$ , обладающая свойством (5), есть *обязательно линейная функция от  $x$* , и притом оказывается, что

$$y = ax + b, \quad (6)$$

где  $a$  есть коэффициент пропорциональности,  $b$  — начальное значение функции, т. е. значение  $y$ , соответствующее значению  $x = 0$ , так что  $b = f(0) = y_0$ .

В самом деле, примем в формуле (5) за исходное значение независимой переменной значение  $x = 0$ , а за конечное — любое значение  $x$ ;

\* Из этого определения ясно, что „приращение“ переменной (как независимой, так и функции) может быть и отрицательным, если исходное значение больше конечного, т. е. если переменная уменьшается; так, напр., если объем  $v$  1 кг воздуха в формуле (2), 27, возрастает, то функция, т. е. давление  $p$  получит отрицательное „приращение“; если же мы будем воздух сжимать, то сама независимая переменная будет иметь отрицательное „приращение“.



тогда приращение независимой переменной будет, очевидно,  $\Delta x = x$ . Соответствующие значения функции будут:  $y_0 = f(0)$  и  $y = f(x)$ , а потому приращение функции будет:  $\Delta y = y - y_0$ . Формула (5) дает нам тогда:  $\Delta y = y - y_0 = a \Delta x = ax$ , откуда, положив  $y_0 = b$ , мы и получим формулу (6).

Обратно, всякая линейная функция, т. е. функция вида (6):  $y = ax + b$ , обладает свойством пропорциональности между приращениями функции и независимой переменной, причем коэффициент пропорциональности равен  $a$ , т. е. коэффициенту при  $x$  в первой степени, а свободный член  $b$  равен начальному значению функции,  $y_0$ , которое она принимает при  $x = 0$ .

В самом деле, подставив в формулу (6) 0 вместо  $x$ , мы получаем:  $y_0 = a \cdot 0 + b = b$ , т. е.  $b$  действительно есть начальное значение функции. Возьмем два какие угодно значения  $x$ : исходное  $x_1$  и конечное  $x_2$ . Соответствующие значения функции  $y$  будут:  $y_1 = ax_1 + b$  и  $y_2 = ax_2 + b$ ; приращение функции, соответствующее приращению  $\Delta x = x_2 - x_1$  независимой переменной, будет очевидно:  $\Delta y = y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) = a \Delta x$ , откуда и вытекает свойство пропорциональности (5).

Итак, мы можем сказать, что среди всех функций одна только линейная функция обладает свойством пропорциональности между приращениями функции и приращениями независимой переменной.

Коэффициент пропорциональности  $a$ , который равен, как мы видели, постоянному отношению  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  приращения функции к приращению неза-

висимой переменной, дает нам величину изменения функции, когда независимая переменная изменяется на единицу, и потому, по аналогии с равномерным движением,  $a$  называется скоростью изменения функции  $y$  по отношению к независимой переменной  $x$ : чем больше  $a$ , тем большее изменение функция получит при одинаковых изменениях независимой переменной, т. е. тем быстрее функция будет меняться. Зная скорость  $a$  изменения функции и ее начальное значение  $b$ , сразу можем написать функцию:  $y = ax + b$ .

Если независимая переменная есть время  $t$ , а функция — пройденный в равномерном движении путь  $s$ , скорость изменения функции  $s$  по отношению к  $t$  совпадает с самой скоростью движения  $v$ .

**34. График линейной функции.** Найдем теперь график линейной функции

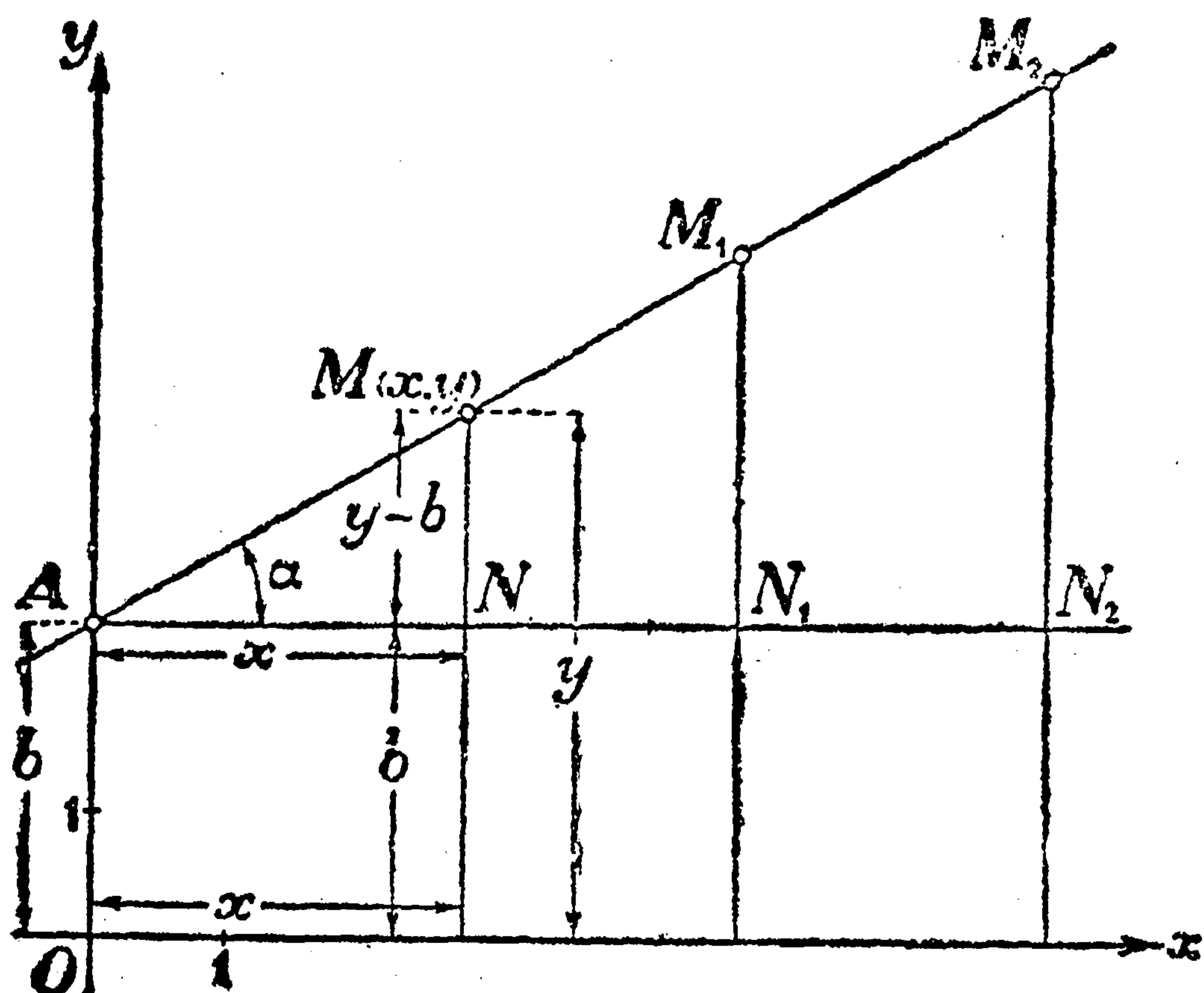
$$y = ax + b. \quad (6)$$

Отметим прежде всего точку пересечения  $A$  нашей линии с осью  $Oy$  (черт. 31); эта точка лежит на оси  $Oy$  и потому ее абсцисса равна 0; ордината же ее будет не что иное, как начальное значение функции  $y$ , т. е. значение  $y$  при  $x = 0$ , которое равно  $b$ .

Пусть теперь  $M(x, y)$  есть любая другая точка исследуемого графика. Уравнение (6) можно переписать в виде:  $\frac{y - b}{x} = a$ . Считая, по началу, что масштабы для величин  $x$  и  $y$  одинаковы, мы имеем из чертежа:  $y - b = NM$ ,  $x = AN$ , а потому отношение  $\frac{NM}{AN} = a$  есть величина



постоянная, не зависящая от положения точки  $M$ . Но это отношение есть не что иное, как тангенс угла  $\alpha = \sphericalangle MAN$ ; следовательно, и этот угол будет одним и тем же для всевозможных положений точки  $M$ . Таким образом, если мы возьмем на нашем графике (вида которого мы еще не знаем!) ряд точек  $M, M_1, M_2, \dots$ , то все углы  $\sphericalangle MAN, \sphericalangle M_1AN_1, \sphericalangle M_2AN_2, \dots$  будут равны между собой, так что все точки  $M, M_1, M_2, \dots$  лежат на одной и той же прямой, проведенной через точку  $A$ . Эта прямая линия будет графиком функции  $y = ax + b$  \* (которая потому и называется *линейной*). Таким образом, уравнение (6) является *уравнением прямой* [30].



Черт. 31.

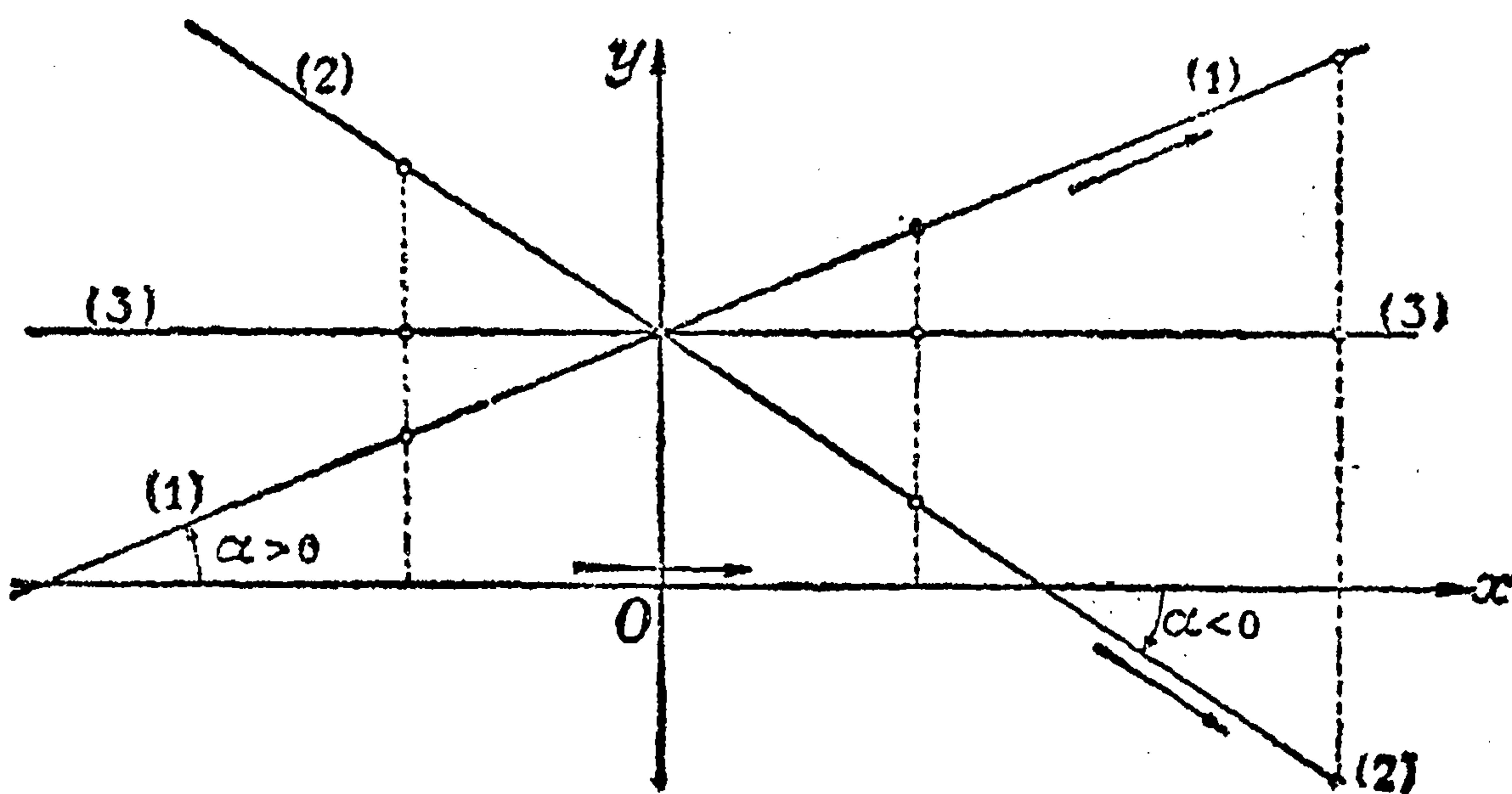
Постоянная

$$a = \operatorname{tg} \alpha \quad (7)$$

характеризует наклонение прямой по отношению к оси  $Ox$  и потому называется *уклоном* или *угловым коэффициентом* прямой. Если  $a > 0$ , то *острый* угол  $\alpha$ , отсчитываемый от оси  $Ox$  до прямой в направлении, обратном вращению часовой стрелки (вверх), также будет положительным; в этом случае прямая — при передвижении по ней слева направо (в сторону возрастания  $x$ ) — идет снизу вверх и  $y$  увеличивается [см. прямую (1) на черт. 32].

Если же  $a < 0$ , то *острый* угол  $\alpha$ , отсчитываемый по вращению часовой стрелки (вниз), будет отрицательным; прямая идет сверху вниз, и  $y$  уменьшается [прямая (2)].

Наконец, если  $a = 0$ , то  $y$  сохраняет постоянное значение  $b$ , прямая будет параллельна оси  $Ox$ , так что можно считать и  $\alpha = 0$  [прямая (3)].



Черт. 32.

\* Вспомним графики в примере 9, 31; мы видим, что прямые линии там получились не случайно! Конечно теперь, когда мы знаем наперед, что графиком линейной функции всегда является прямая, нам не было бы надобности строить много точек, чтобы выявить график; достаточно было бы двух.

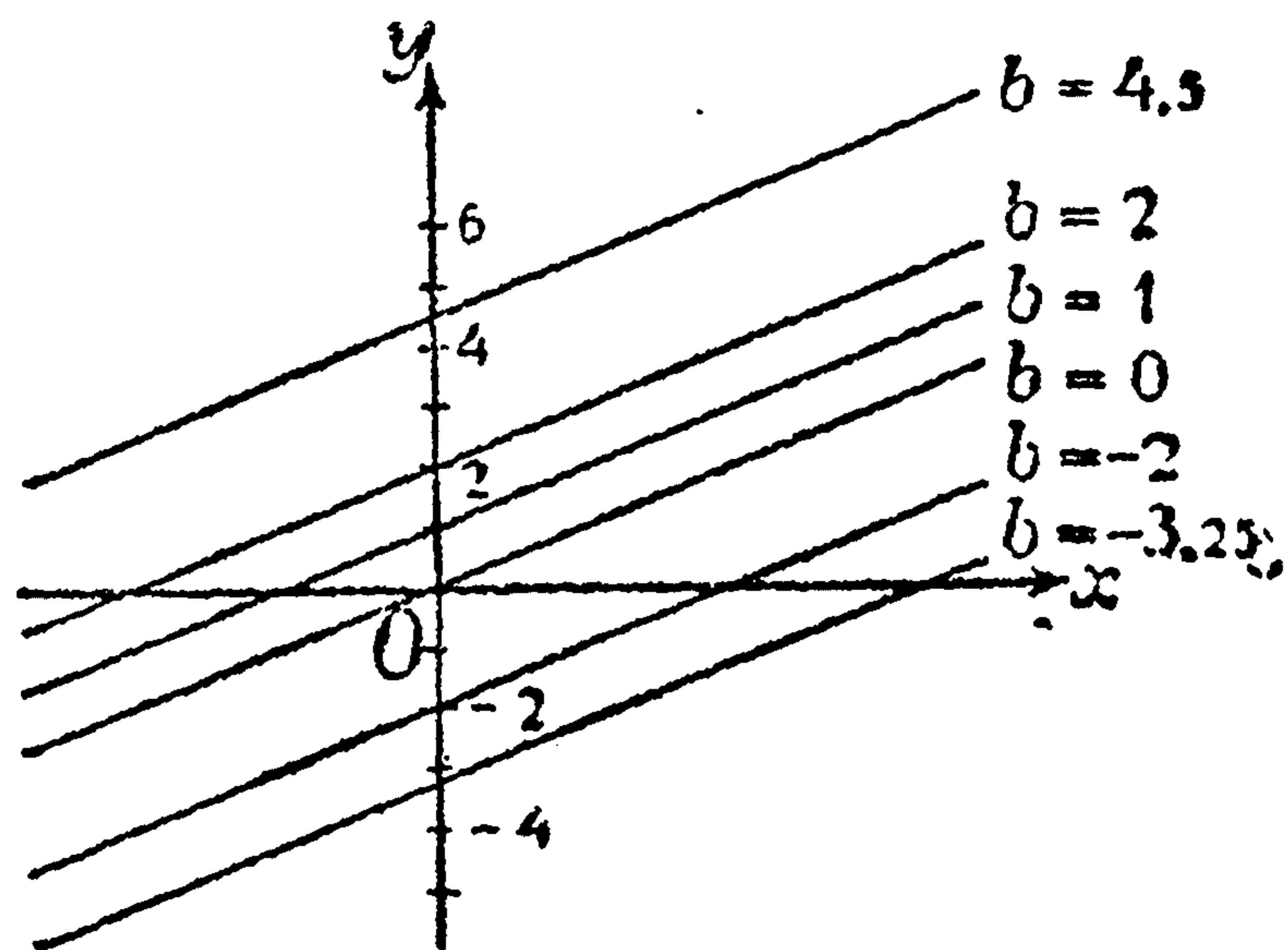
Интересно также вернуться к примерам 4 и 5, 31 и проверить по данным там табличкам, что приращения  $y$  (приблизительно) пропорциональны приращениям  $x$ ; потому-то там в виде графика (приблизительно) и получились прямые.



В предыдущем п<sup>0</sup> мы видели, что  $a$  дает скорость изменения нашей функции, а потому мы можем сказать, что *уклон прямой, графически изображающей линейную функцию, дает скорость изменения функции по отношению к независимой переменной.*

Постоянная  $b$ , которая называется *начальной ординатой прямой*, так как она дает ординату точки  $A$  — пересечения прямой с осью  $Oy$ , совпадает с начальным значением исследуемой функции.

Если величина  $b$  изменяется, то прямая будет *передвигаться, оставаясь параллельной самой себе* (ибо ее угол  $\alpha$  с осью  $Ox$  остается неизменным); если же величина  $a$  меняется (а с ней и угол  $\alpha$ ), то прямая будет *вращаться вокруг точки  $A(0, b)$* , что и изображено на черт. 33 и 34.

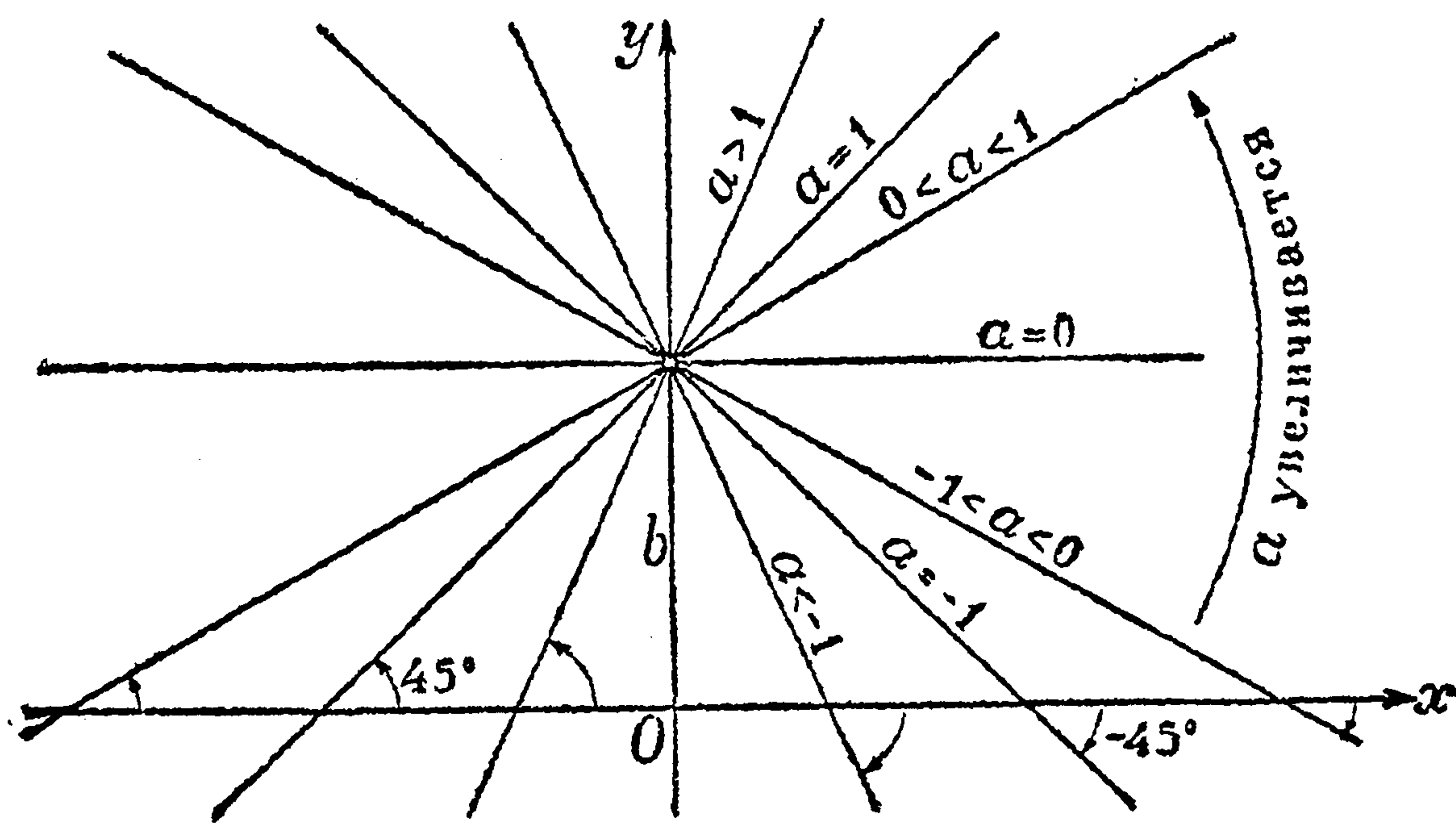


Черт. 33.

Теперь нетрудно показать, что и обратно, произвольная прямая линия, которой уклон равен  $a$ , а начальная ордината есть  $b$ , имеет уравнение  $y = ax + b$ , т. е. является графиком именно этой линейной функции.

Это видно непосредственно из черт. 31, который показывает, что для произвольной точки  $M(x, y)$  нашей прямой:

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{NM}{AN} = \frac{y - b}{x}, \text{ откуда } y - b = ax \text{ и } y = ax + b.$$



Черт. 34.

Между тем на практике (как мы видели) очень часто приходится откладывать величины  $x$  и  $y$  в *разных масштабах*. Нетрудно понять, что график и в этом случае будет прямой линией, но только *уклон графика* уже не совпадает со *скоростью изменения* представляемой им линейной функции.

Обозначим через  $\mu_1$  и  $\mu_2$  масштабы величины  $x$  и  $y$ , т. е. длины

В предыдущих рассуждениях мы предполагали, что масштабы, в которых откладываются величины  $x$  и  $y$  на чертеже, одинаковы. Только при таком предположении и можно было считать, что отношение чисел  $\frac{y - b}{x} = a$  совпадает с отношением изображающих их отрезков:  $\frac{NM}{AN} = \operatorname{tg} \alpha$ .

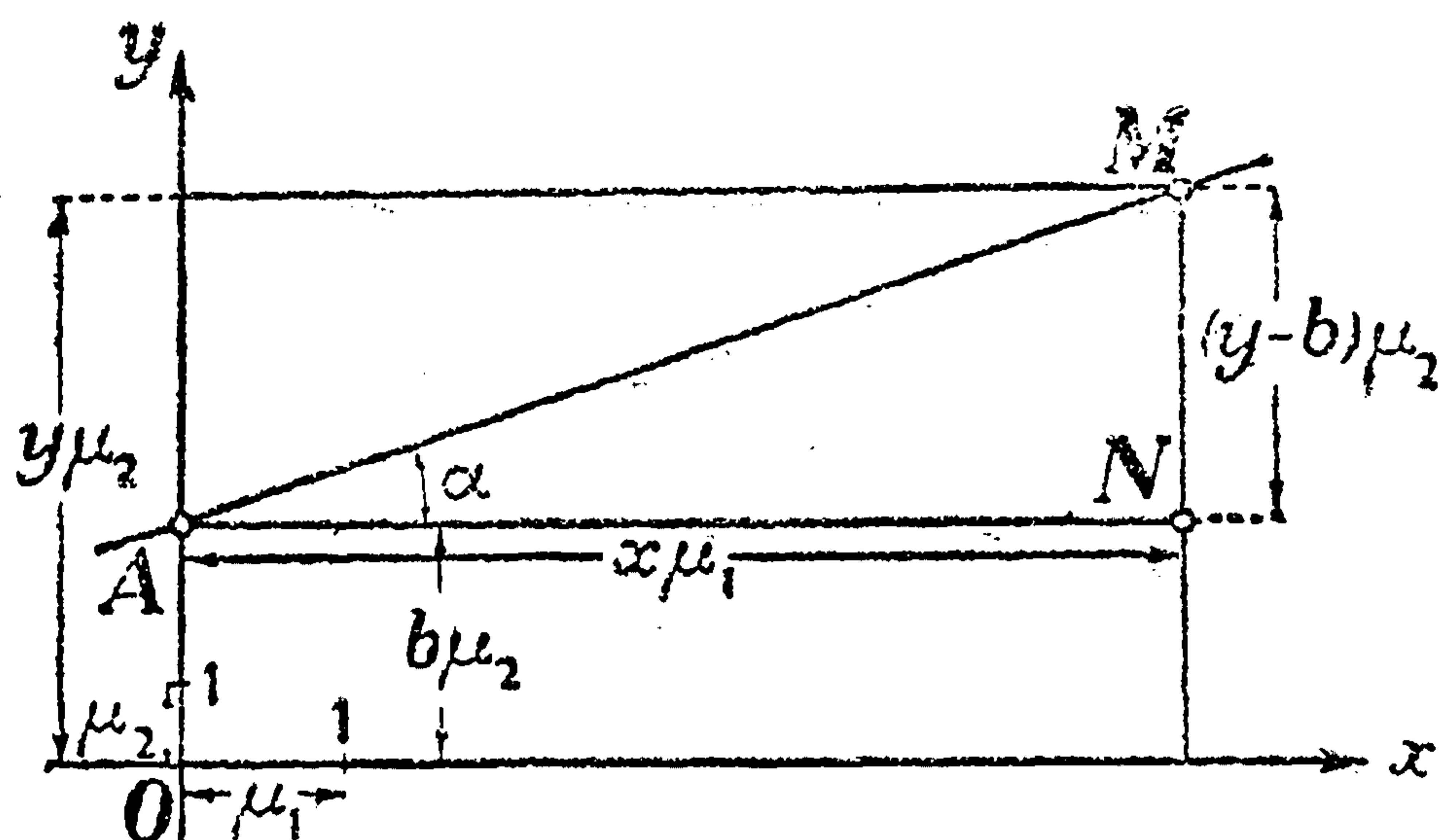


тех отрезков, которые изображают соответственно единицы величин  $x$  и  $y$  (черт. 35). Тогда ясно, что длина  $AN = x\mu_1$ , длина  $NM = (y-b)\mu_2$ , а потому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{NM}{AN} = \frac{y-b}{x} \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot a.$$

Таким образом, и здесь угол  $\alpha$  постоянен для всех точек  $M$ , т. е. график будет прямой. Определяя же отсюда  $a$ , получим:

$$a = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (8)$$



Черт. 35.

так что скорость изменения линейной функции равна произведению уклона ее графика на отношение масштабов для независимой переменной и для функции.

## 35. Примеры и задачи. 1.

График равномерного движения [32]  $s = s_0 + vt$  изобразится, в

силу сказанного выше, прямой (черт. 36), которой начальная ордината есть начальное значение пути  $s_0$ , а уклон пропорционален скорости  $v$ . Чем больше будет скорость движения, тем круче будет наш график; если скорость движения отрицательна (движение в обратном направлении), график представит прямую, идущую сверху вниз, т. е. образующую отрицательный угол с осью  $Ot$ .

На основании этих замечаний нетрудно изобразить графически движение, напр., *автомобиля*, который в течение различных промежутков времени движется с различными скоростями, останавливается, двигается обратно и т. п.

На черт. 37 сплошная линия дает график движения автомобиля между пунктами  $A-B-C-D$ , расстояния между которыми равны:

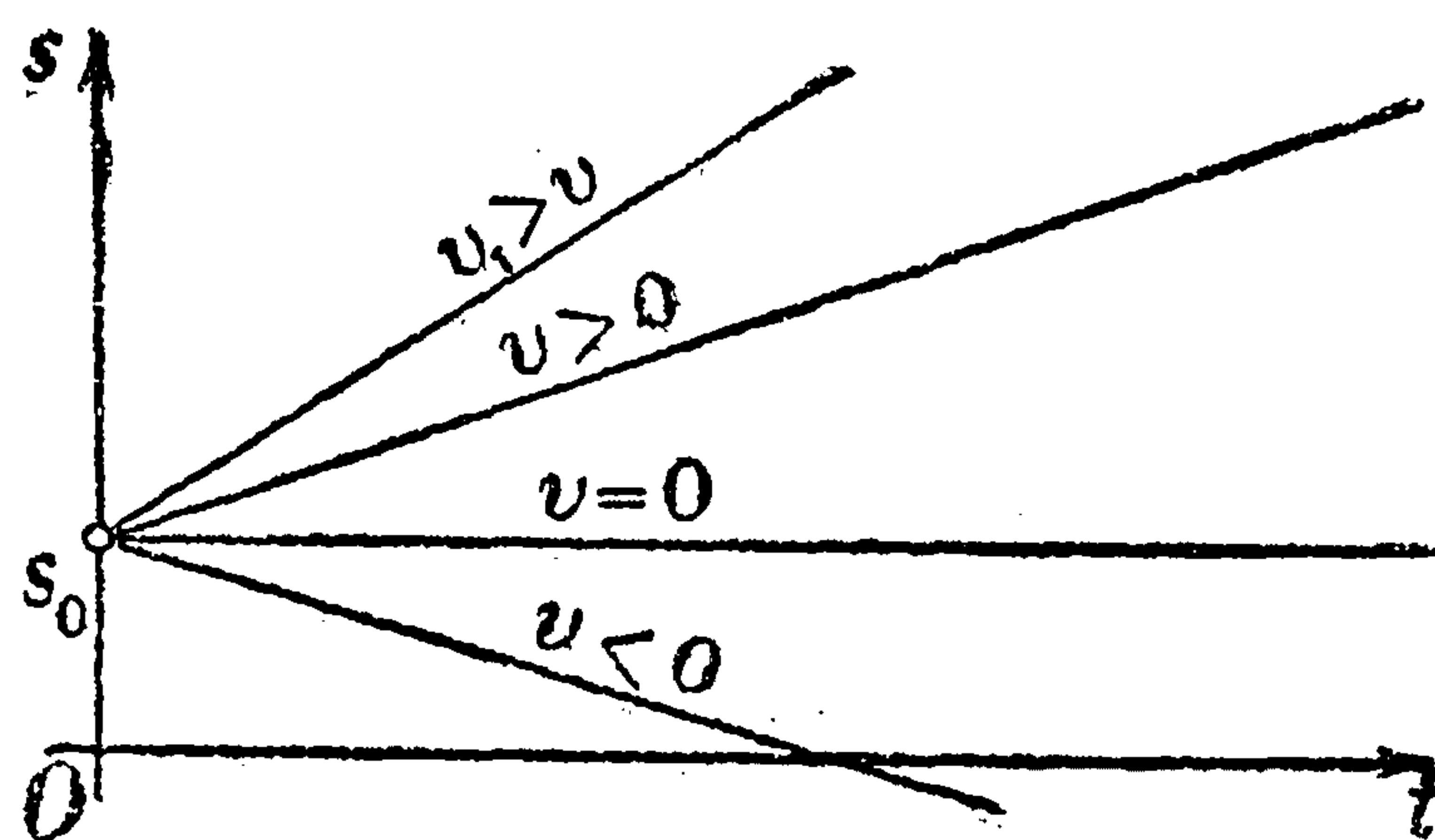
$$AB = 20 \text{ км}, \quad AC = 50 \text{ км}, \quad AD = 70 \text{ км}$$

и отсчитываются от пункта  $A$ . Автомобиль в 12 часов ночи (0 ч.) выезжает из пункта  $A$  и на участке  $AC$  движется со скоростью 80 км в час, останавливаясь в  $B$  на 3 мин. и в  $C$  на  $5\frac{1}{2}$  минут; на участке  $CD$  он движется со скоростью 60 км в час, а затем, после 25-мин. остановки в  $D$ , он возвращается в  $B$  со скоростью 100 км в час.

Пунктирная линия на том же чертеже дает график движения *велосипедиста*, выехавшего в 0 ч. из пункта  $B$  и едущего в  $C$  со скоростью 15 км в час. Из чертежа видно, что велосипедист встретится с автомобилем два раза: в 0 ч. 22,5 мин. и в 1 ч. 45,6 мин.

Читатель непосредственным вычислением найдет, что на самом деле момент первой встречи есть 0 ч.  $22\frac{2}{13}$  мин., и таким образом графический способ, который не требовал почти никаких вычислений, дал нам точность выше 2%.

2. После разобранного примера нетрудно понять, как можно следить за движением системы поездов по одному пути, имея его график. Черт. 38 представляет уменьшенную копию части графика движения Октябрьской железной



Черт. 36.



дороги между станциями Любань и Окуловка. Легко отличить здесь поезда товарные и пассажирские по уклону их графиков.

3. Начертить прямые: 1)  $y = 2x$ ; 2)  $y = x$ ; 3)  $y = -0,5x$ ; 4)  $y = 4,5x$ ; 5)  $y = -x$ ; 6)  $y = -3,2x$ ; 7)  $y = 2x - 5$ ; 8)  $y = 2x + 1$ ; 9)  $y = x - 3,6$ ; 10)  $y = 0,5x - 2$ ; 11)  $y = 4,5x - 2$ ; 12)  $y = -x + 1$ ; 13)  $y = -3,2x + 0,5$ .

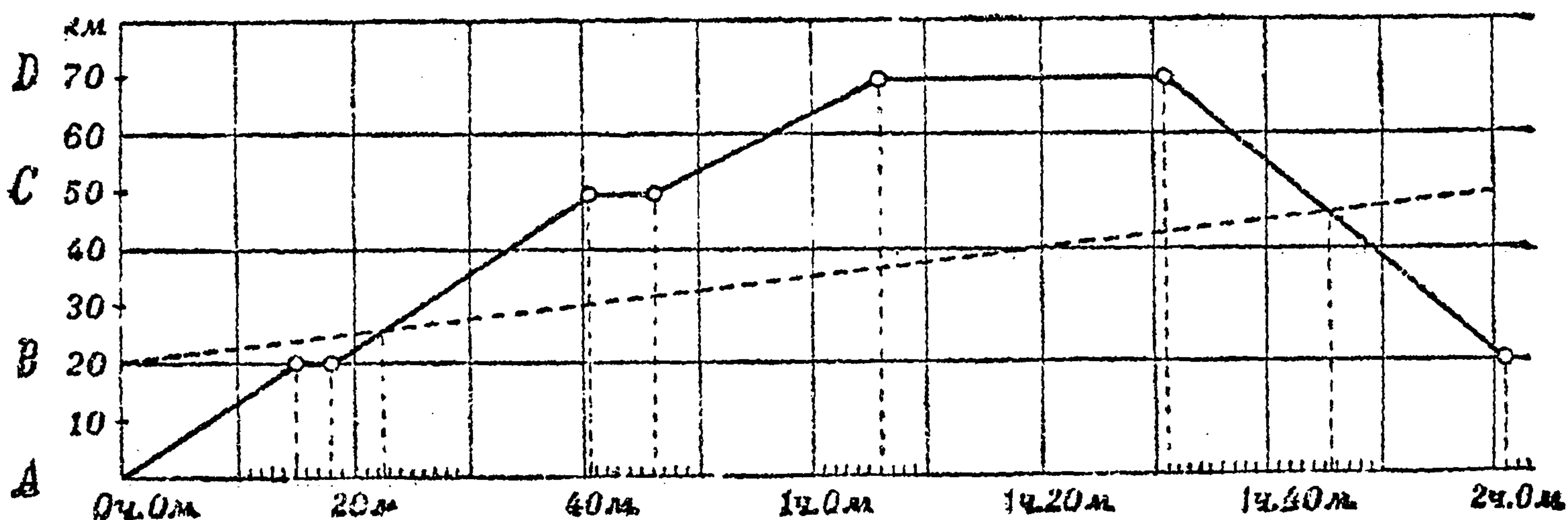
При этом во всех случаях рекомендуется сначала установить и отложить начальную ординату ( $b$ ), что даст уже одну точку искомой прямой; в частности, для прямых 1) — 6)  $b = 0$ , так что эти прямые проходят через начало  $O$ . Затем, следует построить угол  $\alpha$ , по его тангенсу ( $a$ ), считаясь со знаком, и через найденную точку провести прямую под этим углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ . Проще однако определить еще одну точку прямой, взяв любое значение  $x$  и вычислив соответствующее  $y$ . Полезно поупражняться в применении обоих приемов.

4. Установить уравнения, соответствующие прямым, представленным на черт. 21 (ср. 28).

5. Построить графики для определения температуры по Фаренгейту и Реомюру, когда известна температура по Цельсию. Найти уклоны соответствующих прямых. Какое значение имеют точки пересечения этих графиков с осями координат?

6. Составить график для перевода веса в фунтах в килограммы, зная, что  $1 \text{ ф.} = 0,41 \text{ кг}$ .

7. Некоторое количество газа занимает при  $0^\circ \text{C}$  объем  $100 \text{ см}^3$ . Объем его  $V$  при температуре  $t^\circ \text{C}$  выражается по формуле  $V = 100 + 0,366 t$ . Начертить график в промежутке  $0^\circ - 100^\circ$ . 1) Если бы газ всегда подчинялся этому закону, может ли объем, занимаемый газом, обратиться в 0, и если может, то при какой температуре? 2) Какова скорость изменения объема  $V$  по отношению к температуре  $t$ ? 3) Каков уклон начерченного графика, если при его черчении одна и та же длина (хотя бы 1 мм), отложенная на горизонтальной оси, изображает  $2^\circ \text{C}$ , а отложенная



Черт. 37.

на вертикальной оси означает  $1 \text{ см}^3$ ? 4) Где следует поместить нуль шкалы температуры, чтобы объем  $V$  стал просто пропорционален температуре. *Отв.* 1) —  $273^\circ$ ; 2)  $0,366$ ; 3)  $0,732$ ; 4) в точку  $-273^\circ$ .

8. В токарном станке скорость резания  $v$  (м/мин.), число оборотов  $n$  (в мин.) и диаметр обрабатываемого предмета  $d$  (мм) связаны зависимостью:

$$v = \frac{\pi d \cdot n}{1000}$$

Пусть, скажем, токарный станок имеет 8 чисел оборотов:

$$n_1 = 8, n_2 = 14, n_3 = 23, n_4 = 39, n_5 = 65, n_6 = 111, n_7 = 189, n_8 = 320.$$

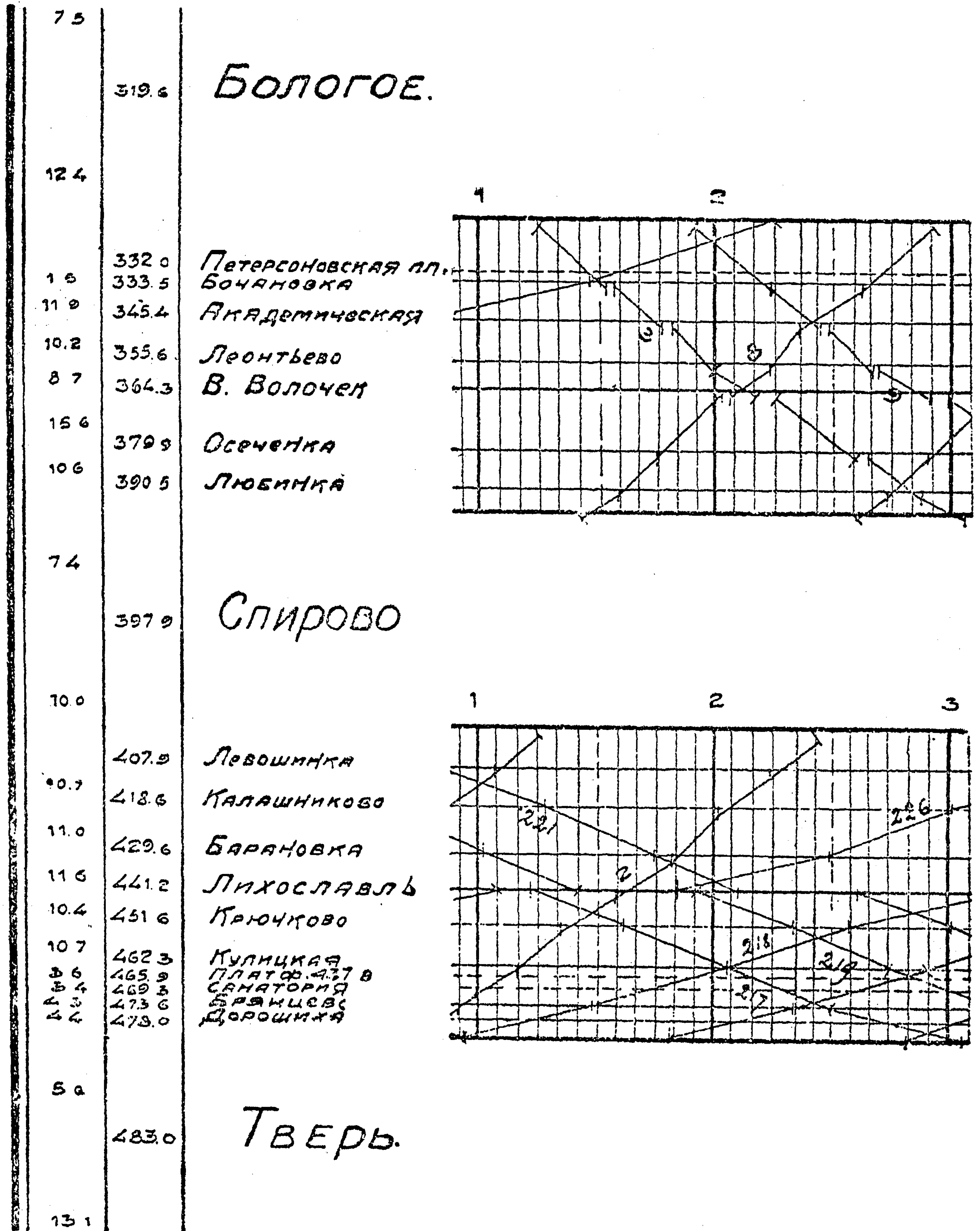
Для всех этих значений  $n$  построить графики зависимости  $v$  от  $d$  (на одном чертеже отметив их соответственными номерами. При этом изменение  $d$  ограничить пределами от 0 до 300 мм, а  $v$  — от 0 до 20 м/мин.; примерные размеры диаграммы —  $10 \times 10 \text{ см}$ ).



При работе на станке подобной диаграммой пользоваться очень удобно. Для примера, предлагается с помощью построенной диаграммы решить следующие задачи:

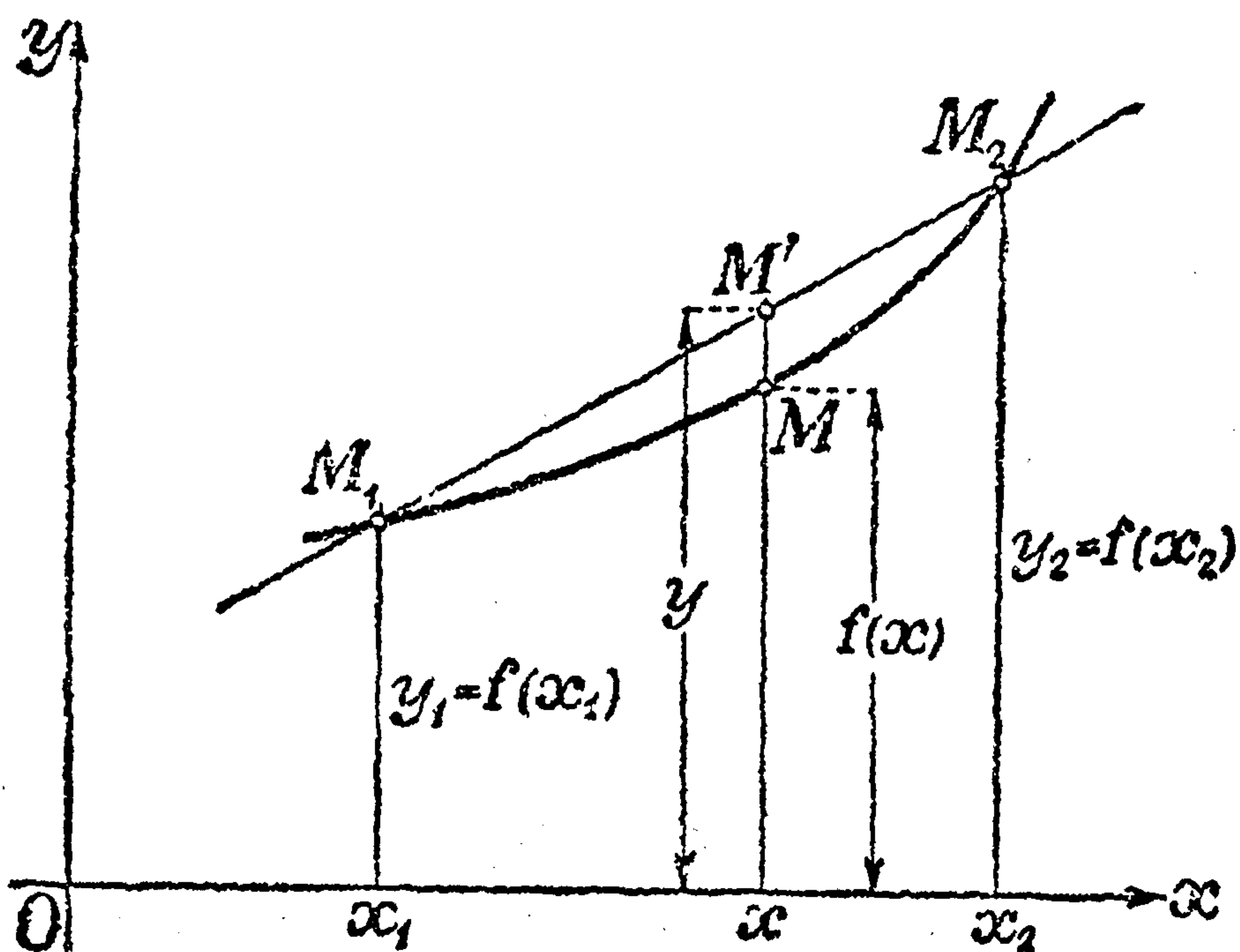
1) Дано, что для машинной стали скорость  $v$  должна содержаться между 8 и 12 м/мин.; какое число оборотов допустимо при обработке стального вала диаметром в 150 мм? (Отв.  $n_s = 23$ .)

2) Аналогичные пределы для медной отливки будут: 15 — 20 м/мин.; установить число оборотов для этого случая при  $d = 75$  мм. (Отв.  $n_s = 65$ .)





9. Теперь легко геометрически истолковать тот способ численного интерполирования, который был изложен в [28] [см. (3)]. Пусть имеем функцию  $y = f(x)$ , для которой в таблице даны значения  $y_1 = f(x_1)$  и  $y_2 = f(x_2)$ ; им соответствуют



Черт. 39.

на графике функции точки  $M_1$  и  $M_2$  (черт. 39). Для промежуточных значений  $x$  мы выражаем  $y$  по формуле (3), 28, в виде *линейной* функции, которая, при  $x = x_1$  и  $x = x_2$  дает правильные значения функции  $f(x)$ , именно  $y_1$  и  $y_2$ , но для промежуточных значений  $x$  вообще от нее отличается. График этой линейной функции есть *прямая линия*, соединяющая точки  $M_1$  и  $M_2$ , и мы ординату  $f(x)$  точки  $M$  кривой заменяем ординатой  $y$  точки  $M'$  этой прямой, вычисленной по формуле (3). Итак, геометрический смысл упомянутого метода интерполирования состоит в *приближенной замене кривой — ее хордой*. В связи с этим и самый метод получил название *линейного интерполирования*.

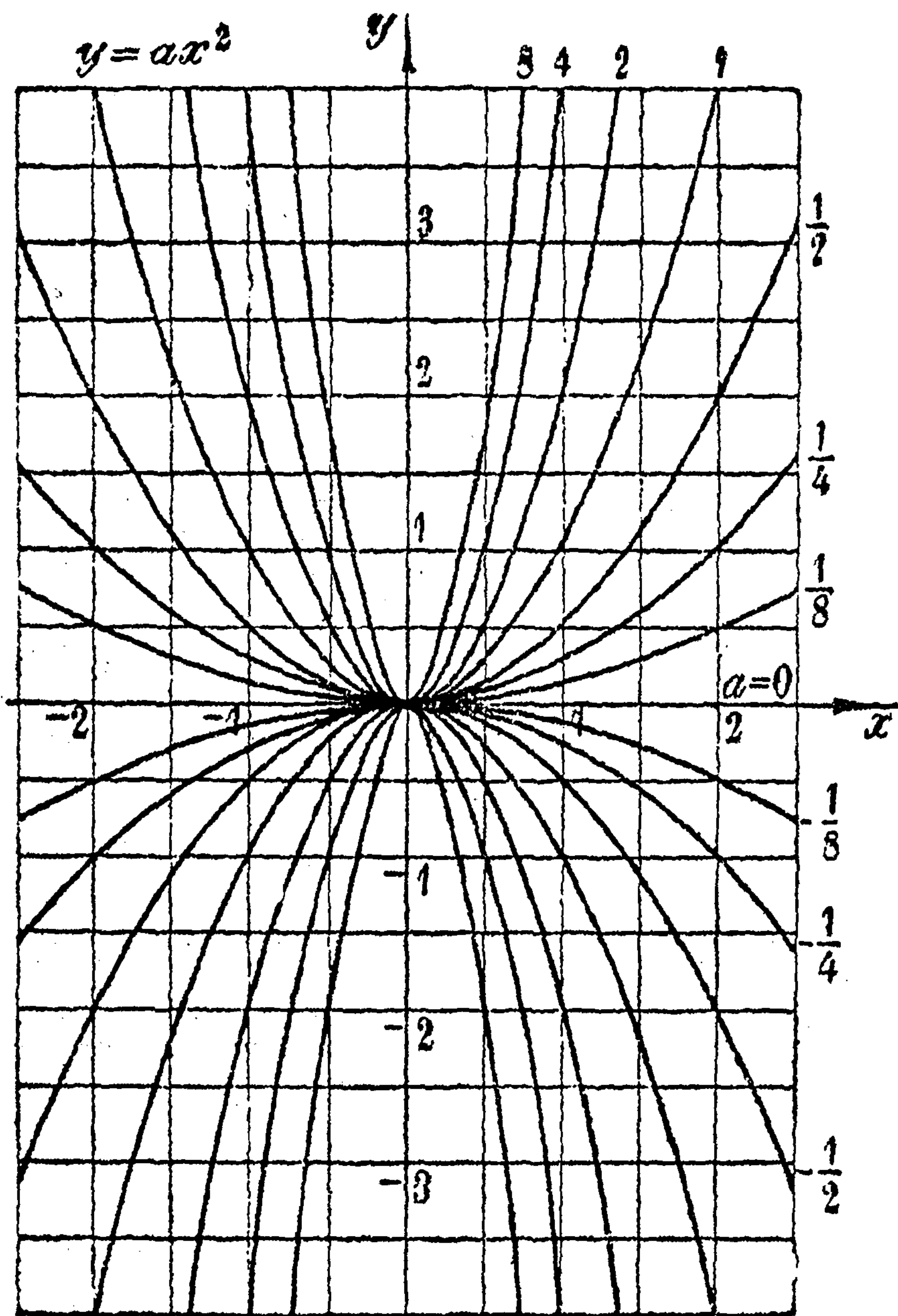
36. Квадратичная функция и парабола. После линейной функции наиболее простой и важной является *квадратичная функция*, т. е. функция, выражаемая *трехчленом второй степени*:

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (9)$$

Начнем с частного случая такой функции:

$$y = ax^2. \quad (10)$$

Читателю уже приходилось строить графики ее при некоторых частных значениях  $a$  [см. задачи 11, 1) и 13 н<sup>о</sup> 31, а также черт. 22 и н<sup>о</sup> 30], иногда лишь иначе обозначая переменные. На черт. 40 изображены кривые (10) при различных значениях постоянной  $a$ ; мы видим, что для всех этих кривых вершина находится в начале координат, но при  $a > 0$  это будет *наимизшая* точка (ей отвечает *наименьшее* значение функции, 0), и кривая направлена *отверстием* кверху; при  $a < 0$  эта



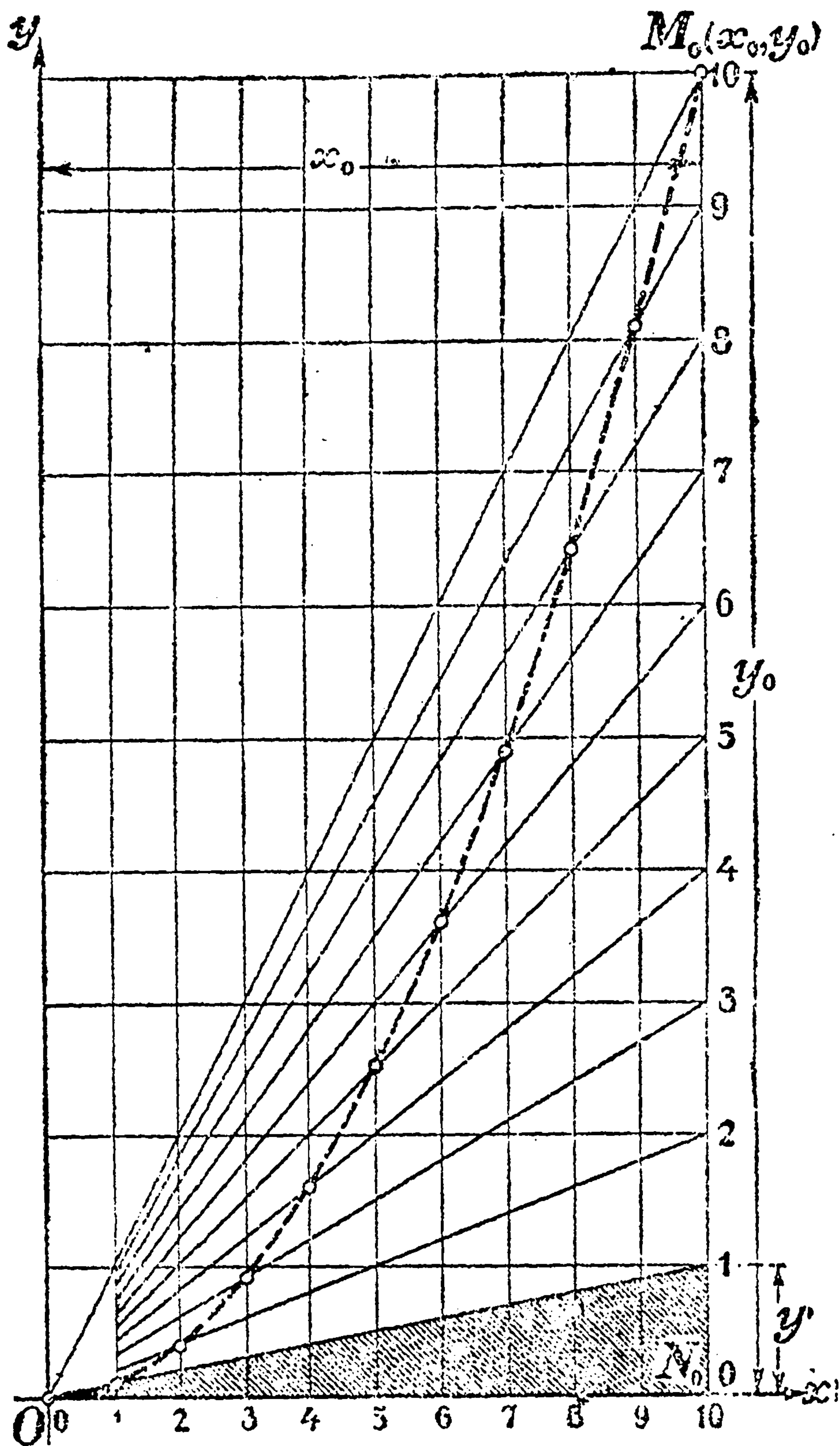
Черт. 40.

точка будет *наивысшей* (0 будет *наибольшим* значением функции), и кривая направлена *отверстием* книзу. Все эти кривые носят название



параболы (точнее: квадратичной параболы, или параболы второй степени, в отличие от других парабол, которые будут упомянуты ниже).

Заметим, что все кривые  $y = ax^2$  симметричны относительно оси  $Oy$ , т. е., согнув чертеж по оси  $Oy$ , мы совместим правую и левую половины кривой; это ясно из того, что одно и то же значение  $y$  соответствует двум значениям  $\pm x$ , ибо  $y = ax^2 = a(-x)^2$ . Ось  $Oy$  называется поэтому осью симметрии (или просто — осью) параболы.



Черт. 41.

Существует весьма удобный графический прием, позволяющий строить (без вычислений!) любое число точек параболы (10), если известна одна отличная от вершины ее точка  $M_0(x_0, y_0)$  (черт. 41). Величины  $x_0$  и  $y_0$  связаны, очевидно, соотношением:

$$y_0 = ax_0^2,$$

которое получим из уравнения параболы:  $y = ax^2$ , подставляя сюда  $x_0, y_0$  вместо  $x, y$ .

Пусть теперь мы желаем между  $O$  и  $M_0$  построить еще несколько, скажем  $n - 1$ , других точек параболы; для этой цели мы делим отрезок  $ON_0 = x_0$  на  $n$  равных частей (на чертеже на 10) и в точках деления:

$$x_1 = \frac{x_0}{n}, \quad x_2 = \frac{2x_0}{n}, \dots,$$

$$x_{n-1} = \frac{(n-1)x_0}{n}, \quad x_n = x_0$$

восстанавливаем к оси  $Ox$  перпендикуляры, обозначив их номерами  $1, 2, \dots, (n-1), n$ . Отрезок  $N_0M_0$  делим также на  $n$  частей и точки деления соединяем лучами  $1, 2, \dots, (n-1), n$  с точкой  $O$ . Как нетрудно показать, в пересечении лучей и перпендикуляров с одинаковыми номерами получаются как раз точки параболы, что и даст нам еще  $(n - 1)$  точек.

Мы докажем это, в виде примера, только для точки  $M_1$  пересечения луча и перпендикуляра с номером 1. Абсцисса точки  $M_1$  есть, очевидно,  $x_1 = \frac{x_0}{n}$ ; обозначим через  $y_1$  ординату точки  $M_1$ ; нам нужно доказать, что и величины  $x_1, y_1$  связаны соотношением:  $y_1 = ax_1^2$ . Из подобия треугольников (зачерченного и заштрихованного) ясно, что  $y_1 = \frac{y'}{n}$ , где  $y'$  есть отрезок  $\overline{O1}$  перпендикуляра

$N_0M_0$ ; этот же отрезок, в свою очередь, равен  $\frac{y_0}{n}$ , так что  $y_1 = \frac{y_0}{n^2}$ , или иначе:

$$y_1 = \frac{ax_0^2}{n^2} = a \left( \frac{x_0}{n} \right)^2 = ax_1^2, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Если переставить между собою  $x$  и  $y$ , что сводится геометрически



к замене оси  $Ox$  осью  $Oy$ , а оси  $Oy$  осью  $Ox$ , то вместо уравнения  $y = ax^2$  мы получим уравнение  $x = ay^2$ , или, решая относительно  $y^2$ ,

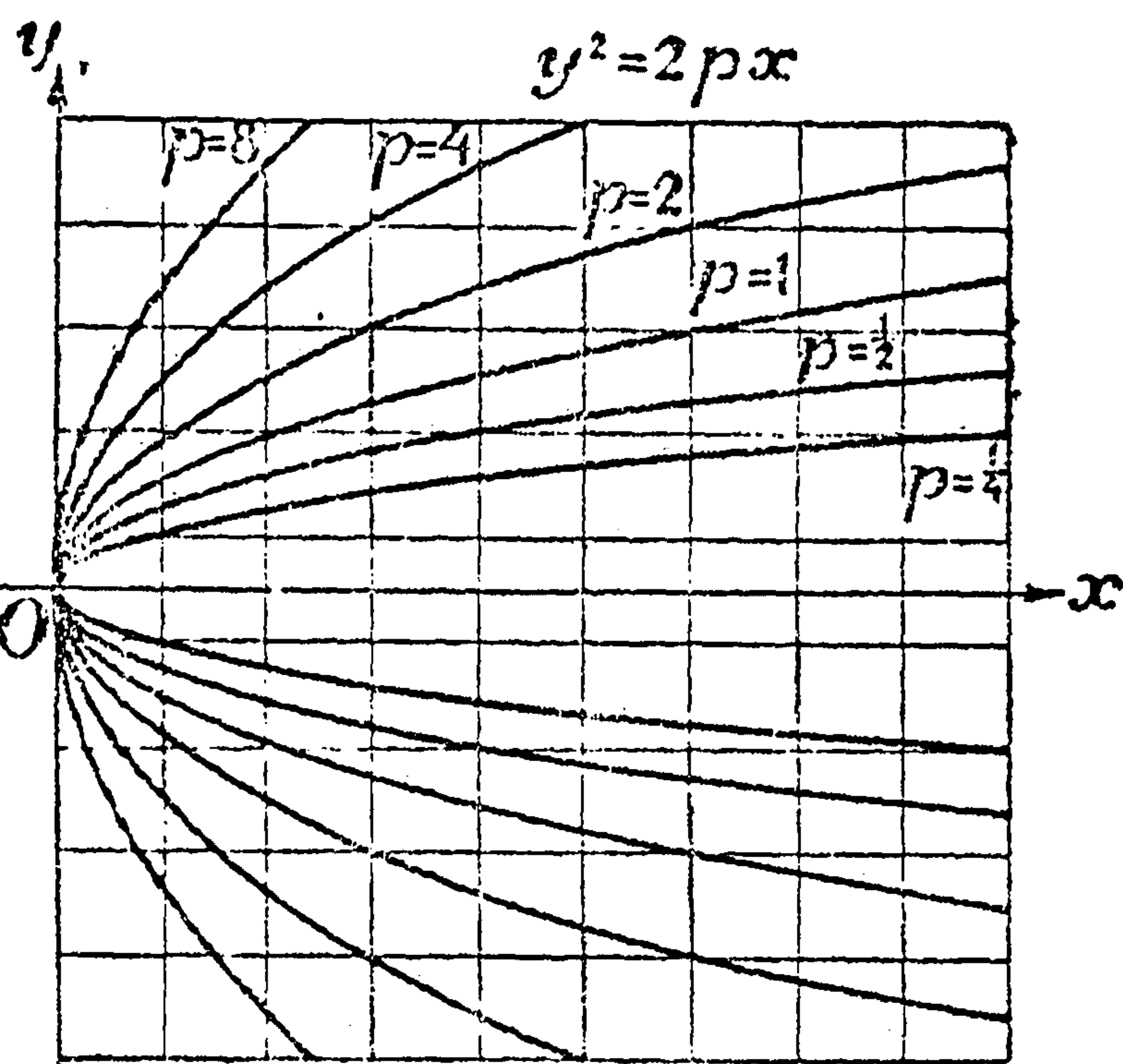
$$y^2 = \frac{x}{a}.$$

Это уравнение обычно пишут в виде  $y^2 = 2px$ ; оно соответствует также параболе второй степени, но в другом положении (черт. 42), когда осью симметрии является не ось  $Oy$ , а ось  $Ox$ . [Ср. 31, зад. 11, 7); 22, I); 14, 2)].

Ниже мы встретимся с параболой [194] еще с другой точки зрения.

**37. Перенос начала координат.** Для того чтобы установить вид графика квадратичной функции (9) в общем случае, мы нуждаемся в некоторых весьма простых формулах, связанных с переносом начала координат.

Вообразим, что вместо данной системы координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  (черт. 43), мы вводим в рассмотрение новые оси, параллельные прежним (и одинаково с ними направленные), но пересекающиеся в другой точке  $O_1$  с координатами  $\alpha, \beta$  — по отношению к старым осям. Если взять на плоскости произвольную точку  $M$ , имевшую раньше координаты  $x, y$ , то по отношению к новым осям она будет иметь, очевидно, другие координаты, скажем  $\xi, \eta$  (в согласии с этими обозначениями мы будем называть новые оси — осями  $O_1\xi$  и  $O_1\eta$ ). Задачей нашей является установить соотношения между  $x, y$  (старыми координатами точки  $M$ ) и  $\xi, \eta$  (новыми координатами той же точки). Непосредственно из чертежа ясно, что



Черт. 42.

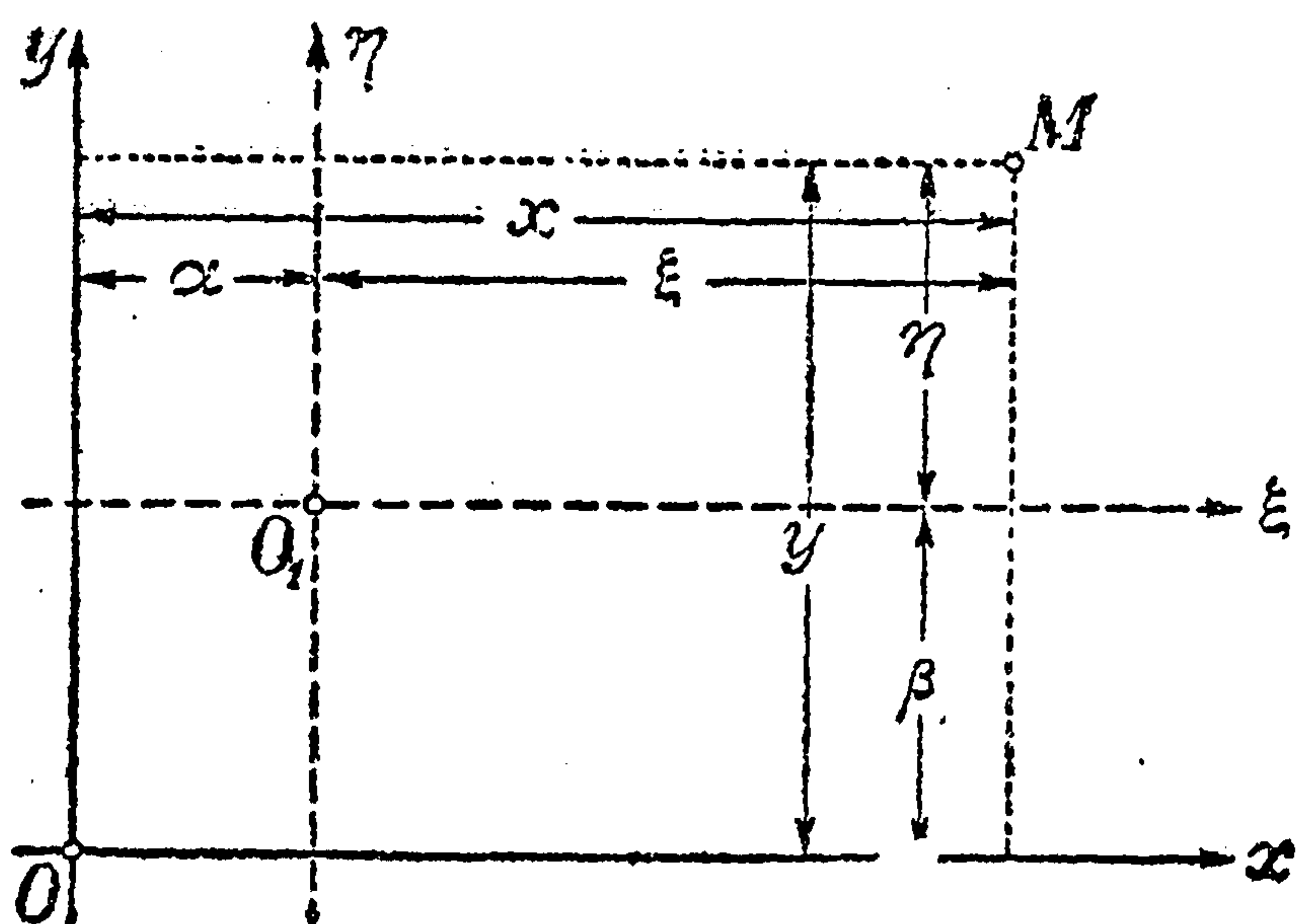
будет иметь, очевидно, другие координаты, скажем  $\xi, \eta$  (в согласии с этими обозначениями мы будем называть новые оси — осями  $O_1\xi$  и  $O_1\eta$ ). Задачей нашей является установить соотношения между  $x, y$  (старыми координатами точки  $M$ ) и  $\xi, \eta$  (новыми координатами той же точки). Непосредственно из чертежа ясно, что

с этими обозначениями мы будем называть новые оси — осями  $O_1\xi$  и  $O_1\eta$ ). Задачей нашей является установить соотношения между  $x, y$  (старыми координатами точки  $M$ ) и  $\xi, \eta$  (новыми координатами той же точки). Непосредственно из чертежа ясно, что

$$x = \alpha + \xi, \quad y = \beta + \eta, \quad (11)$$

откуда и, обратно,

$$\xi = x - \alpha, \quad \eta = y - \beta. \quad (12)$$



Черт. 43.

Правда, чертеж наш относится к простейшему случаю, когда все рассматриваемые величины положительны. Однако полученные нами формулы верны во всех случаях, если только под  $x, y, \alpha, \beta, \xi, \eta$  разумеать координаты с их знаками [29], так что эти знаки включаются в обозначения координат. Для примера, на черт. 44, начало  $O$  перенесено в точку  $O_1 (2, -5)$ , так что  $\alpha = 2, \beta = -5$ ; для точки  $M$ , старые коор-



динаты которой были  $x = -3$  и  $y = -2$ , новые координаты, очевидно, будут:  $\xi = -5$  и  $\eta = 3$ . Нетрудно проверить, что формулы (11) [или (12)] удовлетворены:

$$-3 = 2 + (-5), \quad -2 = (-5) + 3.$$

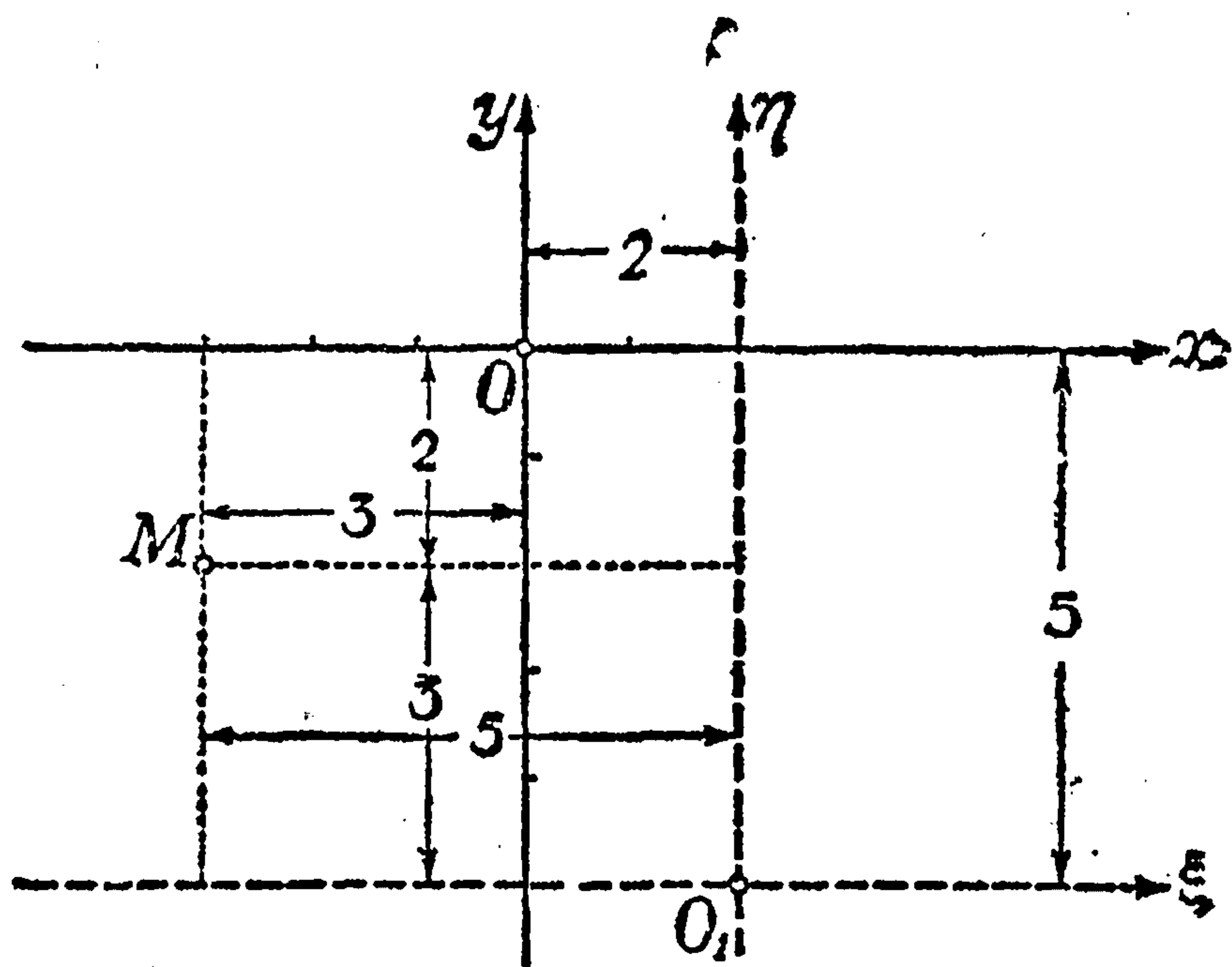
Итак, независимо от того, в какую точку перенесено начало, и где расположена точка  $M$ , ее старые и новые координаты всегда связаны соотношениями (11) [или (12)].

38. Общий случай квадратичной функции. Парабола общего вида:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad (9)$$

как мы сейчас увидим, лишь *положением* своим отличается от параболы  $y = ax^2$  и может быть получена из этой последней просто передвижением чертежа. Мы начнем с численного примера. Пусть нам дана функция:

$$y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}. \quad (13)$$



Черт. 44.

Мы покажем, что график этой функции получается простым передвижением графика функции  $y = \frac{1}{4}x^2$ , который был уже построен. В самом деле, уравнение (13) можно переписать в виде:

$$y = \frac{1}{4}(x^2 + 2x) - \frac{3}{4};$$

в скобках мы имеем первые два члена, которые получаются при возвышении в квадрат двучлена  $(x + 1)$ , а потому, прибавив и вычтя в скобках по 1, имеем:

$$y = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1 - 1) - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1) - \frac{1}{4} - \frac{3}{4},$$

или

$$y = \frac{1}{4}(x + 1)^2 - 1,$$

откуда окончательно:

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x + 1)^2. \quad (14)$$

Чтобы обнаружить теперь, что кривая (14) может быть получена из уже построенной параболы  $y = \frac{1}{4}x^2$ , мы перенесем начало в точку  $O_1(-1, -1)$  (черт. 45). Тогда для точки  $M$ , которая раньше имела координаты  $x$  и  $y$ , новые координаты [см. (12)] будут:  $\xi = x - (-1) = x + 1$ ,



$\eta = y + 1$ . Подставив это в уравнение (14), мы получим:  $\eta = \frac{1}{4} \xi^2$ , что лишь обозначением координат ( $\xi$  вместо  $x$ ,  $\eta$  вместо  $y$ ) отличается от знакомого нам уравнения  $y = \frac{1}{4} x^2$ . Это показывает, что кривая (13) [или (14), что все равно] есть уже построенная выше парабола, но перенесенная в другое положение: ее вершиной является теперь точка  $O_1 (-1, -1)$ , а ось симметрии  $O_1\eta$  параллельна прежней оси  $Oy$ .

Полученный результат можно обобщить, а именно, не трудно теперь подыскать такую точку  $O_1 (\alpha, \beta)$ , чтобы при переносе начала координат в эту точку (черт. 46) парабола общего вида (9) привелась к изученной уже в 36 параболе:

$$\eta = a\xi^2. \quad (15)$$

Подставляя выражения (11) вместо  $x$  и  $y$  в уравнение (9), мы получим:

$$\eta + \beta = a(\xi + \alpha)^2 + b(\xi + \alpha) + c = a\xi^2 + (2a\alpha + b)\xi + (a\alpha^2 + b\alpha + c).$$

Если мы желаем, чтобы это уравнение совпало с (15), достаточно положить:

$$2a\alpha + b = 0, \quad \beta = a\alpha^2 + b\alpha + c,$$

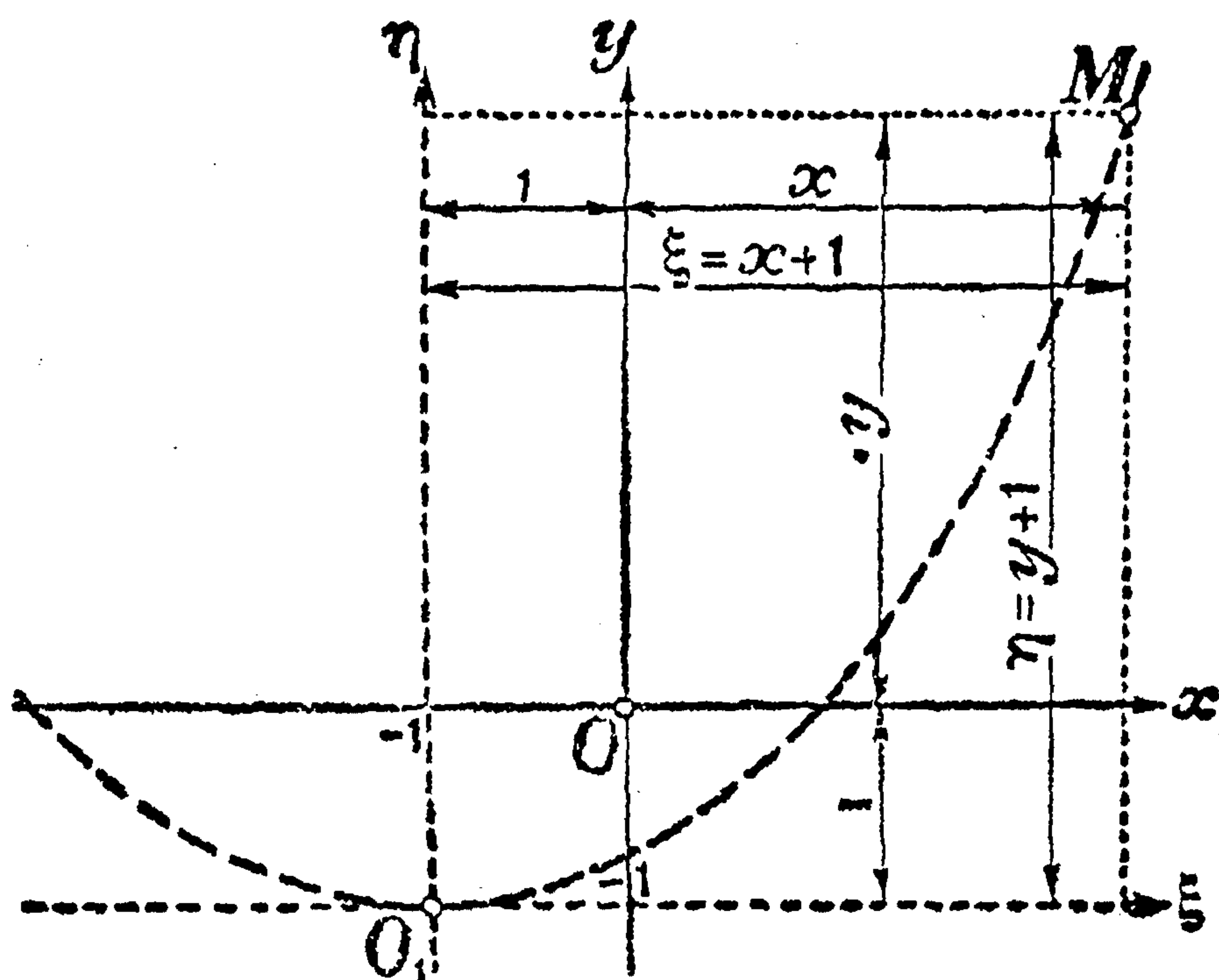
откуда находим искомые значения  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\frac{b}{2a}, \\ \beta &= a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - b \cdot \frac{b}{2a} + c = c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned} \right\} (16)$$

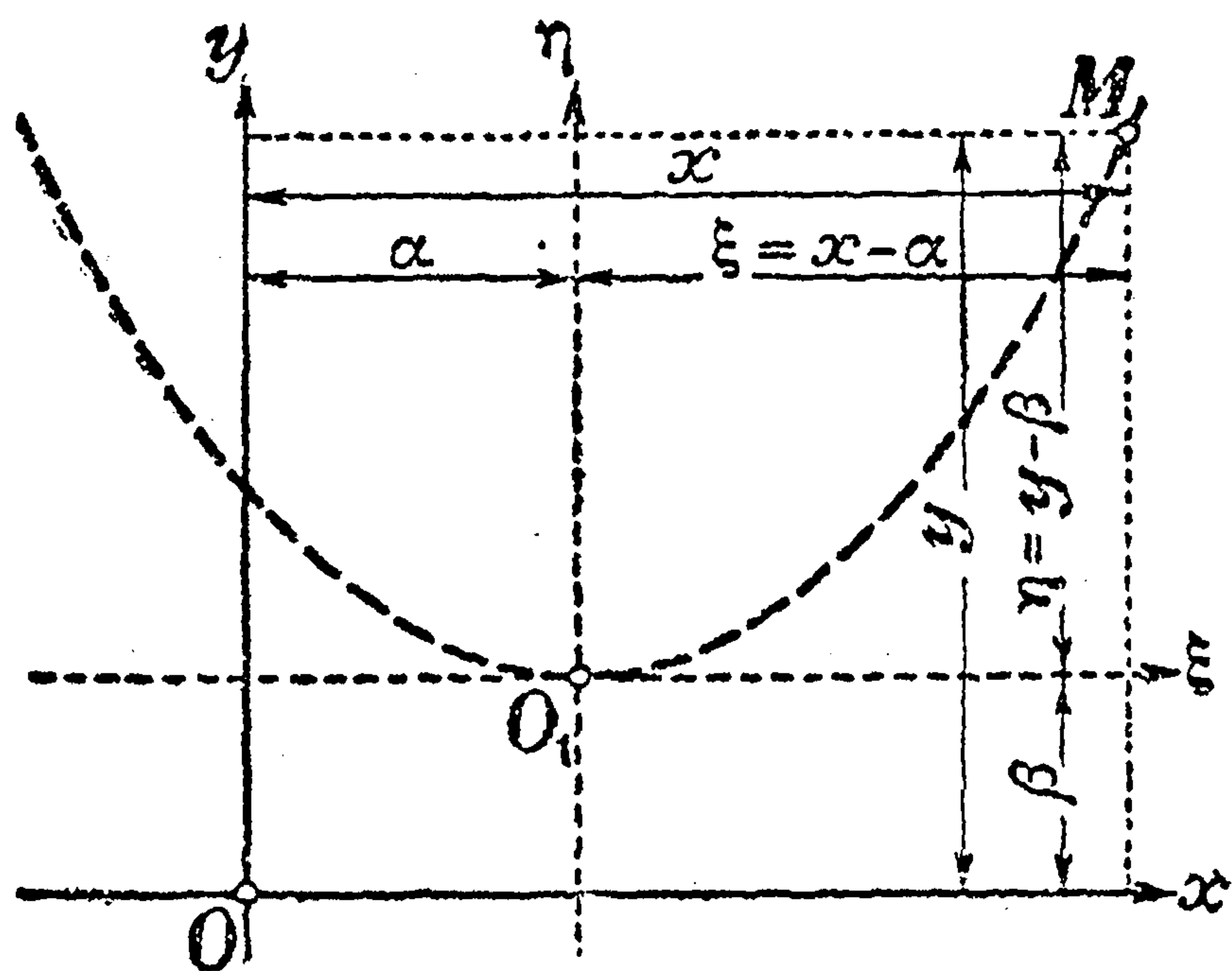
Так как в новых координатах  $\xi, \eta$  уравнение нашей кривой имеет вид (15), то кривая (9) есть парабола с вершиной в точке

$$O_1 \left( -\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

и с осью симметрии, направленной по прямой  $O_1\eta$ , параллельной оси  $Oy$ .



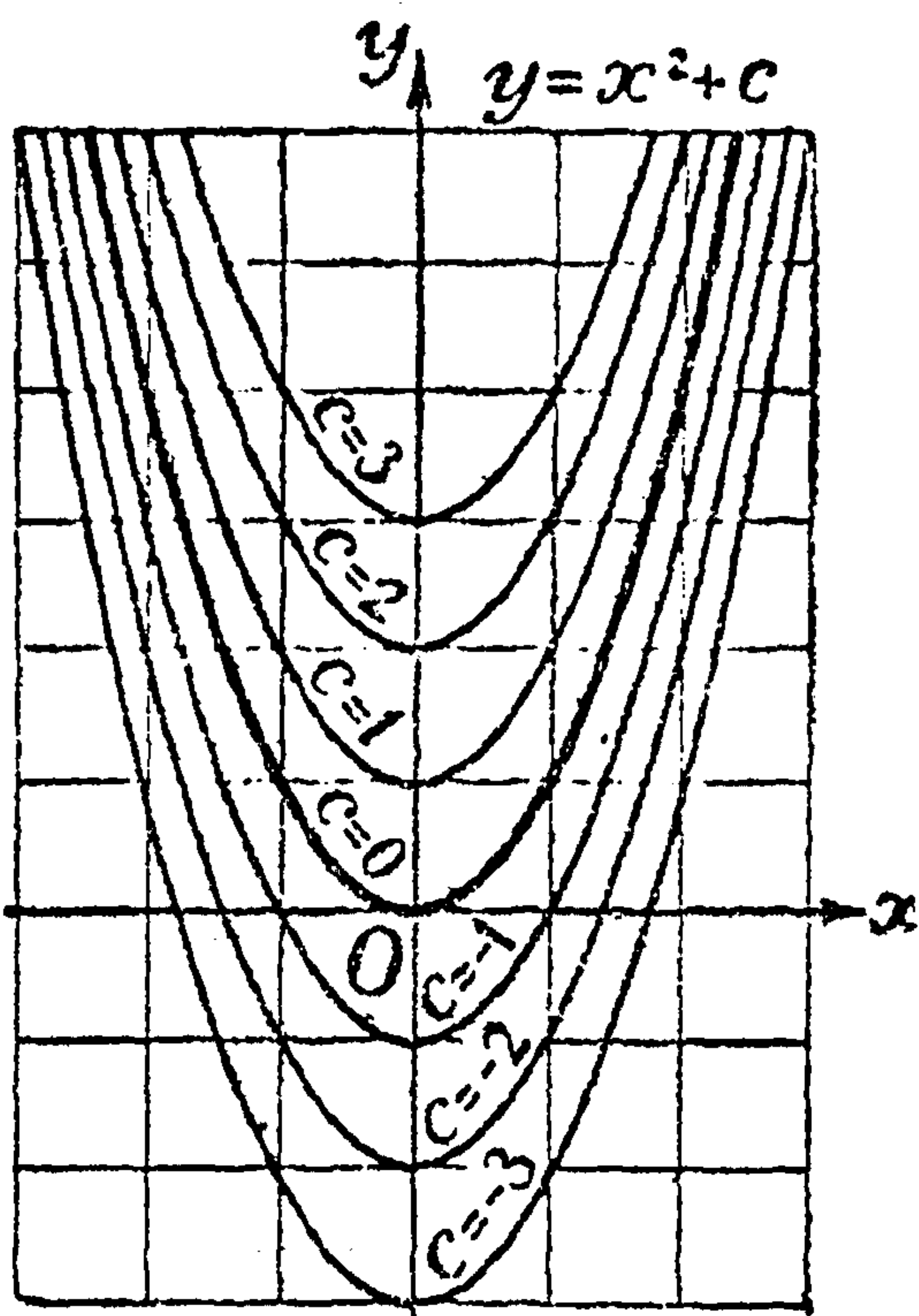
Черт. 45.



Черт. 46.



Как и в случае кривой  $y = ax^2$ , отверстие параболы направлено кверху при  $a > 0$ , и книзу при  $a < 0$ . Вершина параболы  $O_1$  есть ее наинизшая точка при  $a > 0$  и наивысшая при  $a < 0$ . Таким образом, квадратичная функция (9) достигает своего наименьшего (при  $a > 0$ ) или наибольшего (при  $a < 0$ ) значения:



Черт. 47.

$$y = c - \frac{b^2}{4a} \text{ при } x = -\frac{b}{2a}. \quad (17)$$

Черт. 47, 48 показывают, как изменяется положение параболы  $y = x^2 + bx + c$ , когда коэффициент  $b$  или  $c$  меняется (в первом случае  $b = 0$  и  $c$  меняется, а во втором  $c = 1$  и  $b$  меняется).

**Примеры и задачи.** 1. С помощью графика функции (9) можно проверить некоторые известные из алгебры свойства квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ . Именно, если 1)  $b^2 - 4ac < 0$ , то он вовсе не обращается в нуль и при всех значениях  $x$  сохраняет тот же знак, какой имеет коэффициент  $a$ ; если же 2)  $b^2 - 4ac > 0$ , то трехчлен имеет два вещественных корня и может принимать, как положительные, так и отрицательные значения; наконец, если 3)  $b^2 - 4ac = 0$ , то трехчлен обращается в нуль при одном только значении  $x = -\frac{b}{2a}$ , а при прочих совпадает по знаку с  $a$ .

Действительно, представляя выражение (16) для ординаты  $\beta$  вершины параболы (9) в виде:

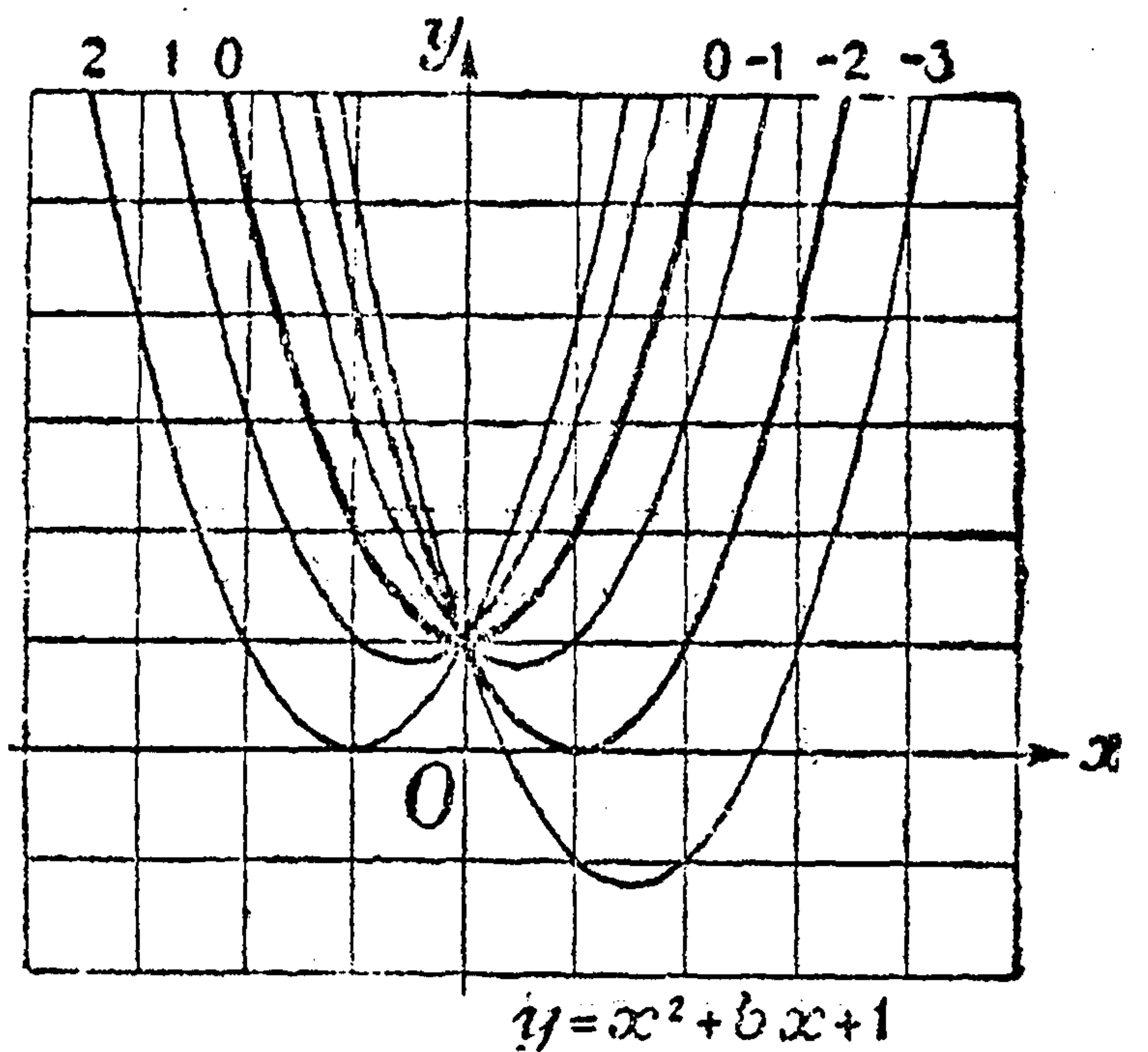
$$\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

убеждаемся в том, что при условии 1)  $\beta$  и  $a$  будут одного знака, так что вершина  $O_1$  параболы лежит с той же стороны от оси  $Ox$ , куда параболы направлены своим отверстием (сделать чертеж!), т. е. параболы не пересекают оси  $Ox$ , и ординаты  $y$  ее точек, не обращаясь в нуль, сохраняют знак  $a$ . При условии 2) числа  $\beta$  и  $a$  будут разных знаков; следовательно, либо вершина  $O_1$  лежит под осью  $Ox$ , а параболы направлены вверх (сделать чертеж!), либо  $O_1$  — над осью  $Ox$ , а параболы направлены вниз; в обоих случаях, очевидно, параболы дважды пересекают ось  $Ox$ , и ординаты  $y$  дважды обращаются в нуль, меняя при этом знак. Аналогично исчерпывается случай 3).

2. Если материальная точка, находящаяся на поверхности земли, будет брошена вертикально вверх с начальной скоростью 125 м/сек (ядро), то пройденный путь  $s$  (м), отсчитываемый от поверхности земли, если пренебречь сопротивлением воздуха, выразится формулой:

$$s = 125t - 4,905t^2,$$

где  $t$  (сек) — время, протекшее от начала движения [74, 4]. Определить, какова будет наибольшая высота подъема, и в какой момент она будет достигнута; нарисовать график этой зависимости.



Черт. 48.



Отв.  $s \doteq 796$  м при  $t \doteq 12,7$  сек по формулам (17), при  $a = -4,905$ ,  $b = 125$ ,  $c = 0$ ; график представлен на черт. 49.

3. Определить наибольшее значение функции

1)  $y = 3 + 4x - 2x^2$ ,      2)  $y = -3x^2 + 7,5x - 2,3$

и значение  $x$ , при котором оно достигается.

[Отв. 1) При  $x = 1$ ,  $y = 5$ ; 2) при  $x = 1,25$ ,  $y \doteq 2,39$ .]

Построить графики.

4. Определить наименьшее значение функции

1)  $y = 3,6x^2 + 1,3x + 2,8$ ,  
2)  $y = -1,73 - 3,25x + 2x^2$

и значение  $x$ , при котором оно достигается.

[Отв. 1) При  $x \doteq -0,18$ ,  $y \doteq 2,68$ ; 2) при  $x \doteq 0,81$ ,  $y \doteq -3,05$ .] Построить графики.

**39. Полином третьей степени и кубическая парабола.** Функцию, выражаемую целым относительно  $x$  полиномом (многочленом):

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

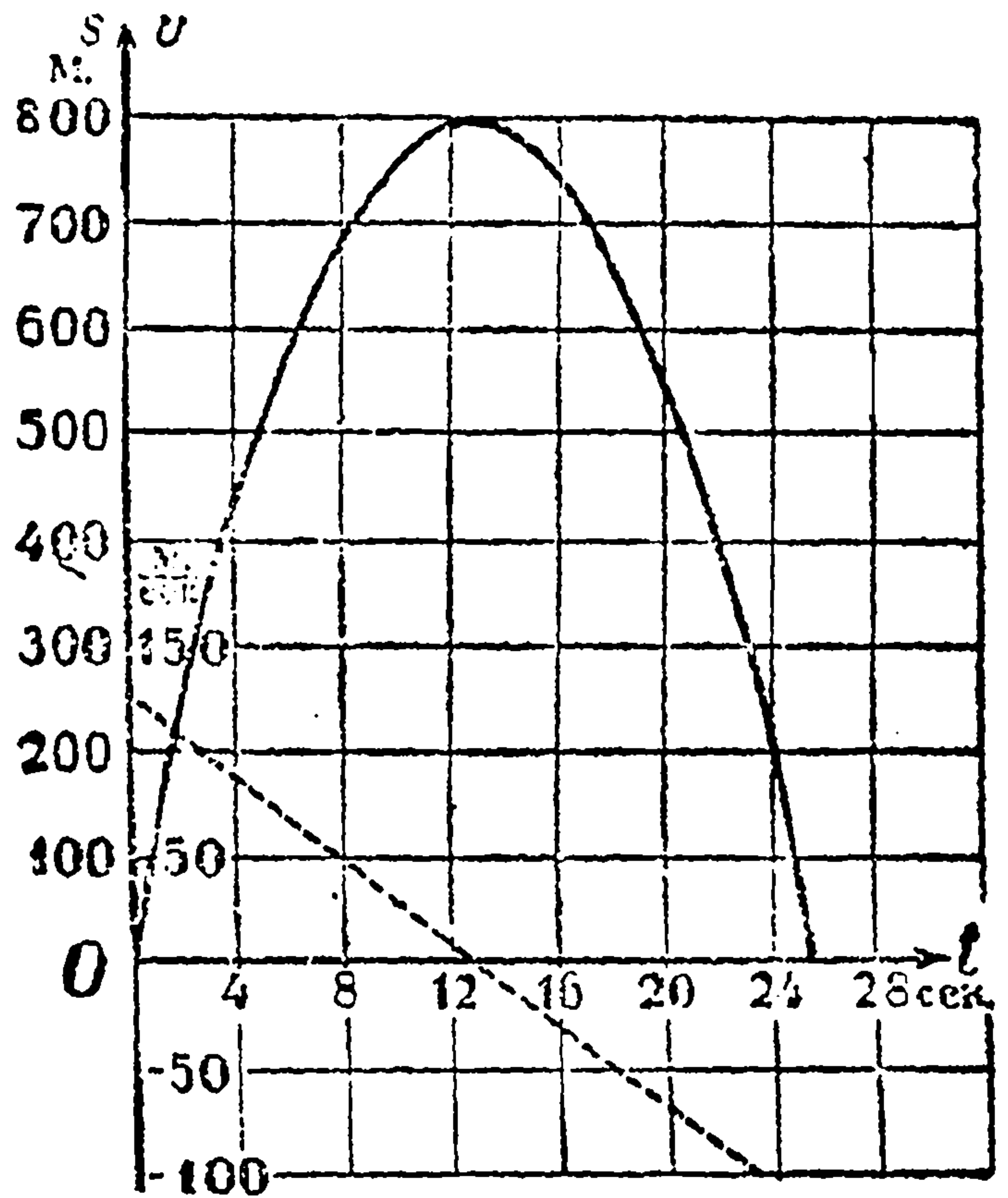
называют *целой рациональной функцией*, а ее график — *параболой  $n$ -ой степени*. Случай, когда  $n = 1$  и  $n = 2$ , уже рассмотрены выше. Кроме них, мы остановимся еще на полиноме третьей степени:

$$y = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \quad (18)$$

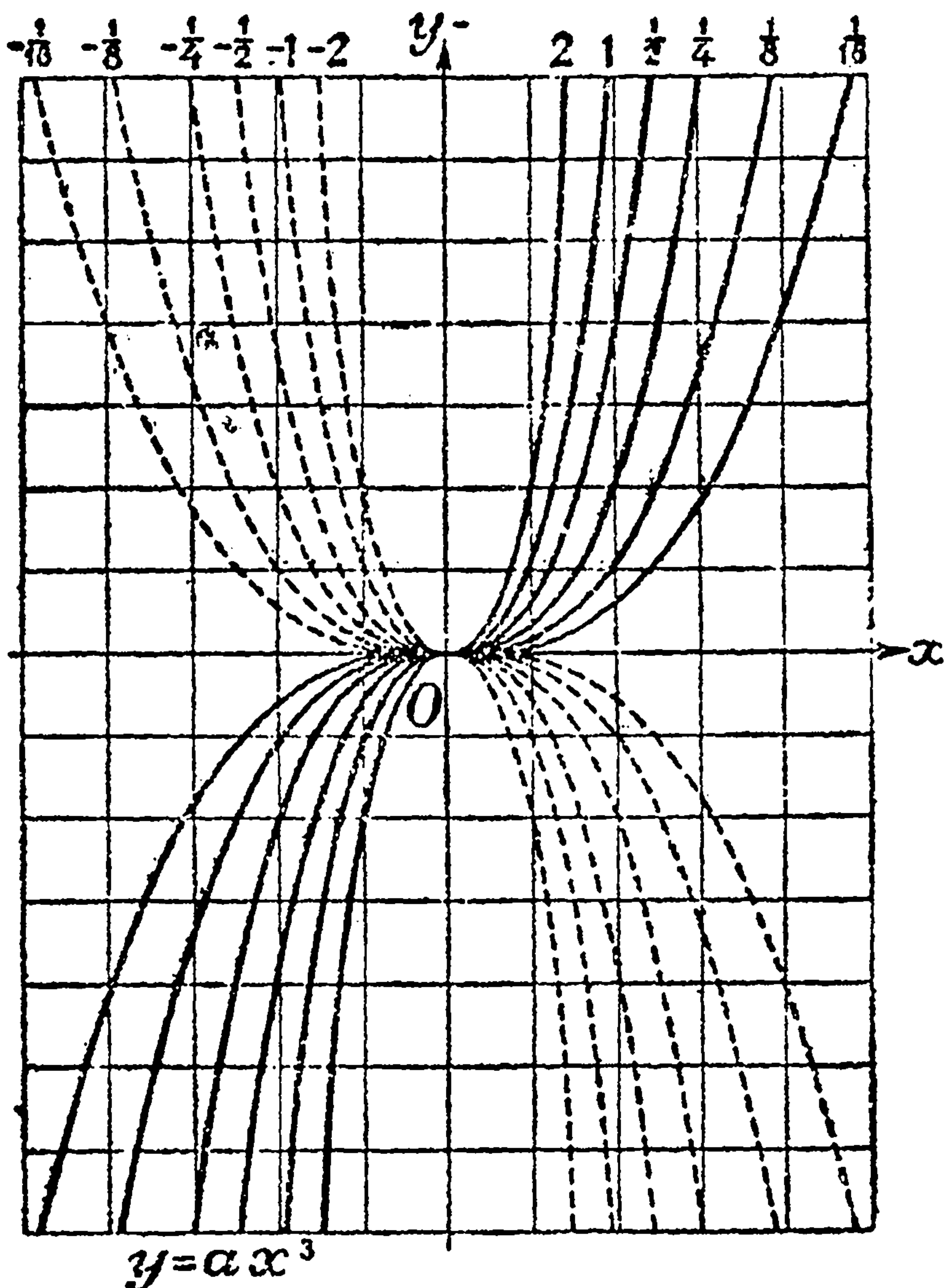
которому соответствует *парабола третьей степени* или *кубическая парабола*. Простейший случай этого полинома представляет функция  $y = ax^3$  [ср. 31, 11, 2].

Черт. 50 изображает вид этой кривой при различных значениях  $a$ . Общее уравнение (18) можно привести к более простому виду  $y = ax^3 + cx$ , если надлежащим образом перенести начало координат [ср. 15]. В самом деле, в 37 мы видели, что если перенести начало координат в точку  $O_1(a, \beta)$ , заменив оси  $Ox$ ,  $Oy$  параллельными им осями  $O_1\xi$ ,  $O_1\eta$ , то между старыми и новыми координатами любой точки  $M$  существует зависимость:

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + \beta.$$



Черт. 49.



Черт. 50.



Посмотрим, какое уравнение имеет наша кривая в новых координатах; для этого подставляем выражения для  $x$  и  $y$  в уравнение (18).

Мы находим:

$$\eta + \beta = a_0 (\xi + \alpha)^3 + a_1 (\xi + \alpha)^2 + a_2 (\xi + \alpha) + a_3 = a_0 \xi^3 + (3a_0 \alpha + a_1) \xi^2 + (3a_0 \alpha^2 + 2a_1 \alpha + a_2) \xi + (a_0 \alpha^3 + a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3).$$

Выберем  $\alpha$  под условием, чтобы член с  $\xi^2$  в правой части пропал, т. е. так, чтобы было:  $3a_0 \alpha + a_1 = 0$ ; это дает:

$$\alpha = -\frac{a_1}{3a_0}; \quad (19)$$

определив  $\alpha$  указанным образом, мы можем считать известными: коэффициент при  $\xi$ , который мы обозначим через  $c$ :

$$c = 3a_0 \alpha^2 + 2a_1 \alpha + a_2,$$

и свободный от  $\xi$  член. Положив еще:

$$\beta = a_0 \alpha^3 + a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3,$$

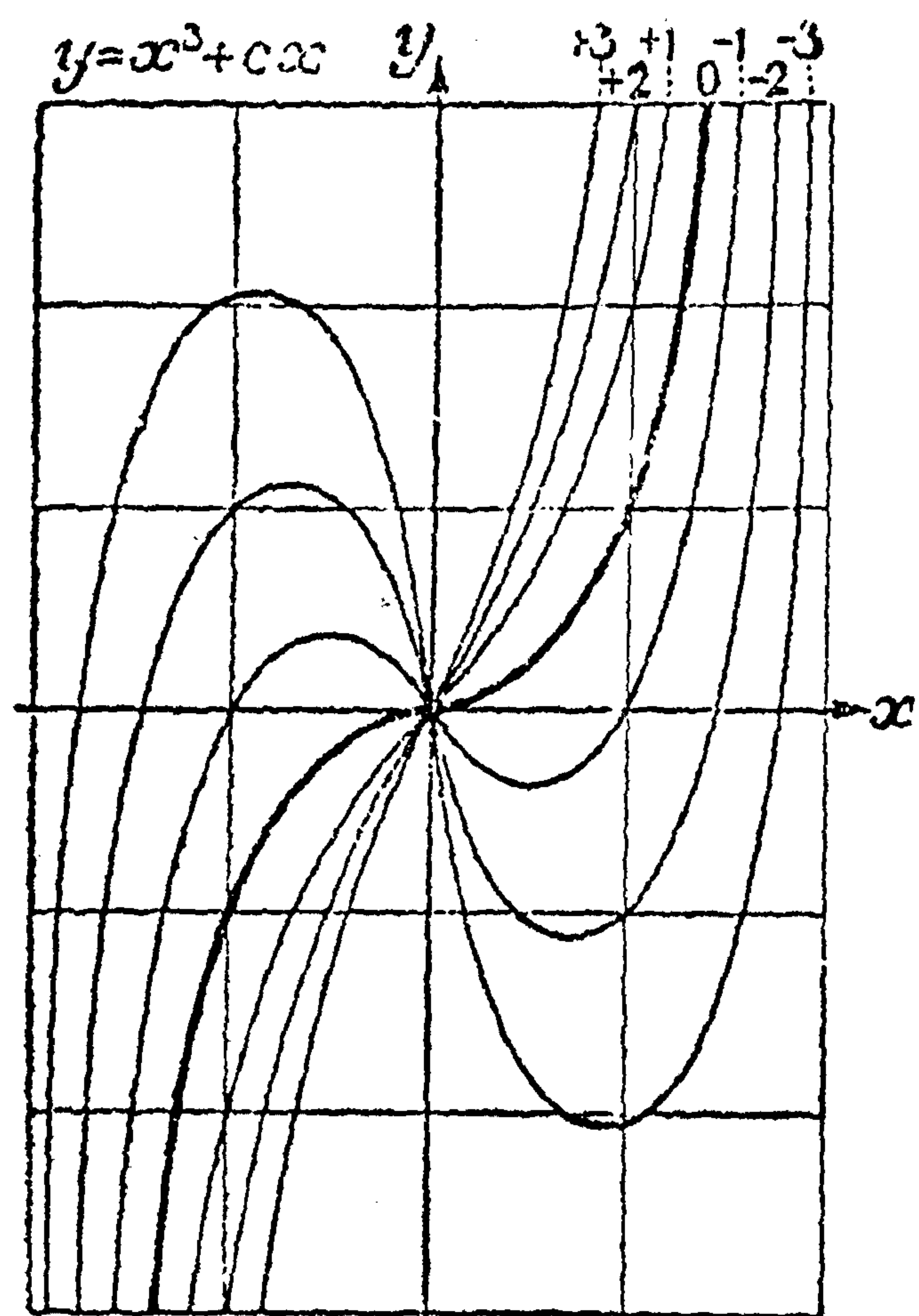
мы можем переписать полученное уравнение в виде:  $\eta = a_0 \xi^3 + c\xi$ , или, написав  $a$  вместо  $a_0$ :  $\eta = a\xi^3 + c\xi$ . Это уравнение имеет требуемый вид, но только в нем  $x$  заменен на  $\xi$ . Если мы предположим, что указанный перенос начала координат уже сделан, и что следовательно  $O_1$  совпадает с  $O$ , то мы и получим уравнение  $y = ax^3 + cx$ . Кривые:

$$y = x^3 + cx \quad (a=1) \quad (20)$$

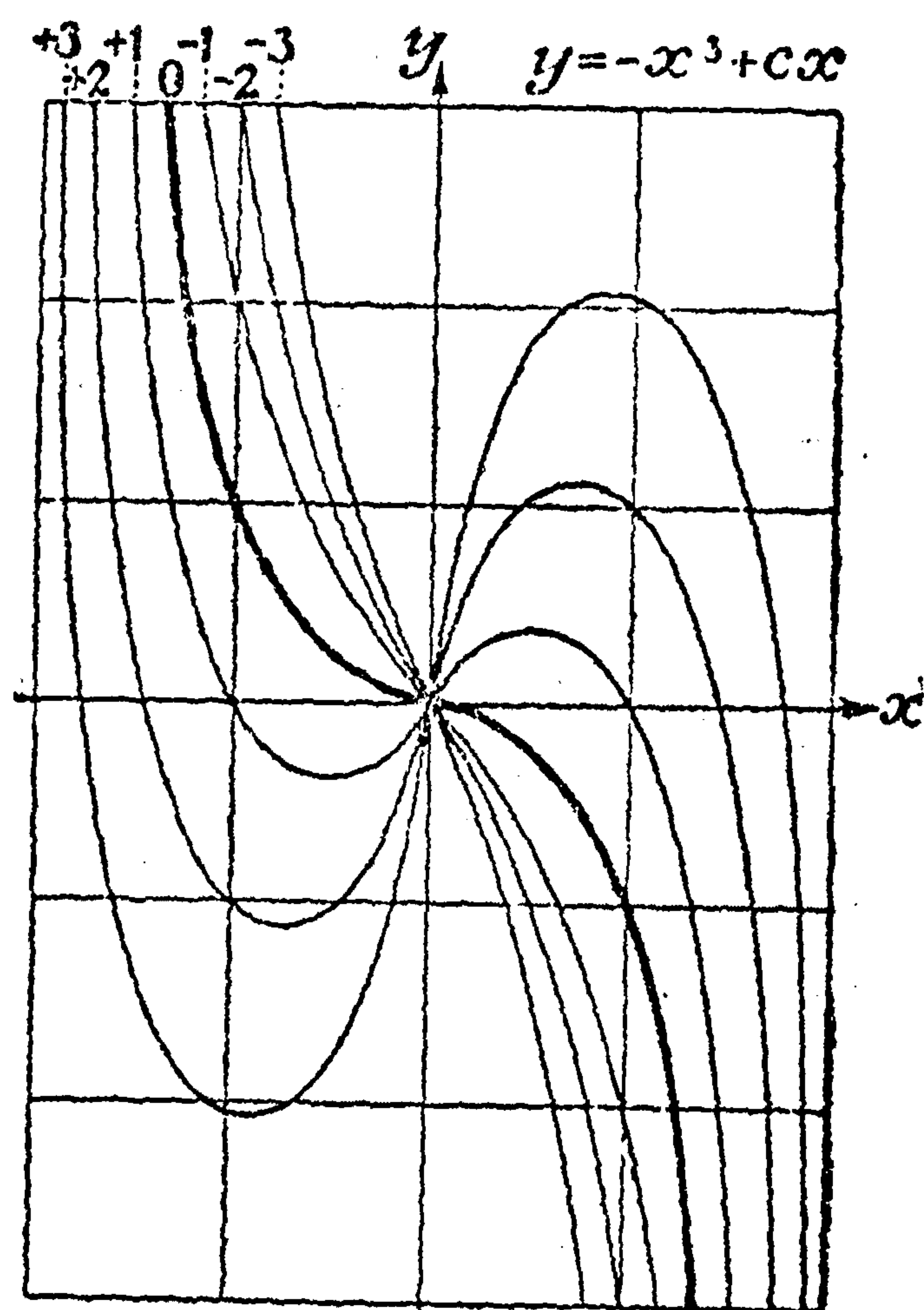
при различных значениях  $c$  начерчены на черт. 51. Мы видим, что среди этих кривых встречаются два различных типа: одни все время возрастают, другие же сначала возрастают до некоторого максимума, затем убывают до минимума, после чего снова возрастают. Ниже [148] мы вернемся к вопросу о признаках того или иного поведения функции (20). Кривые

$$y = -x^3 + cx \quad (a=-1) \quad (21)$$

изображены на черт. 52. Кривые (18) вообще имеют вид, аналогичный (20) при  $a_0 > 0$  и (21) при  $a_0 < 0$ . [Ср. 31, 12, черт. 28.]



Черт. 51.



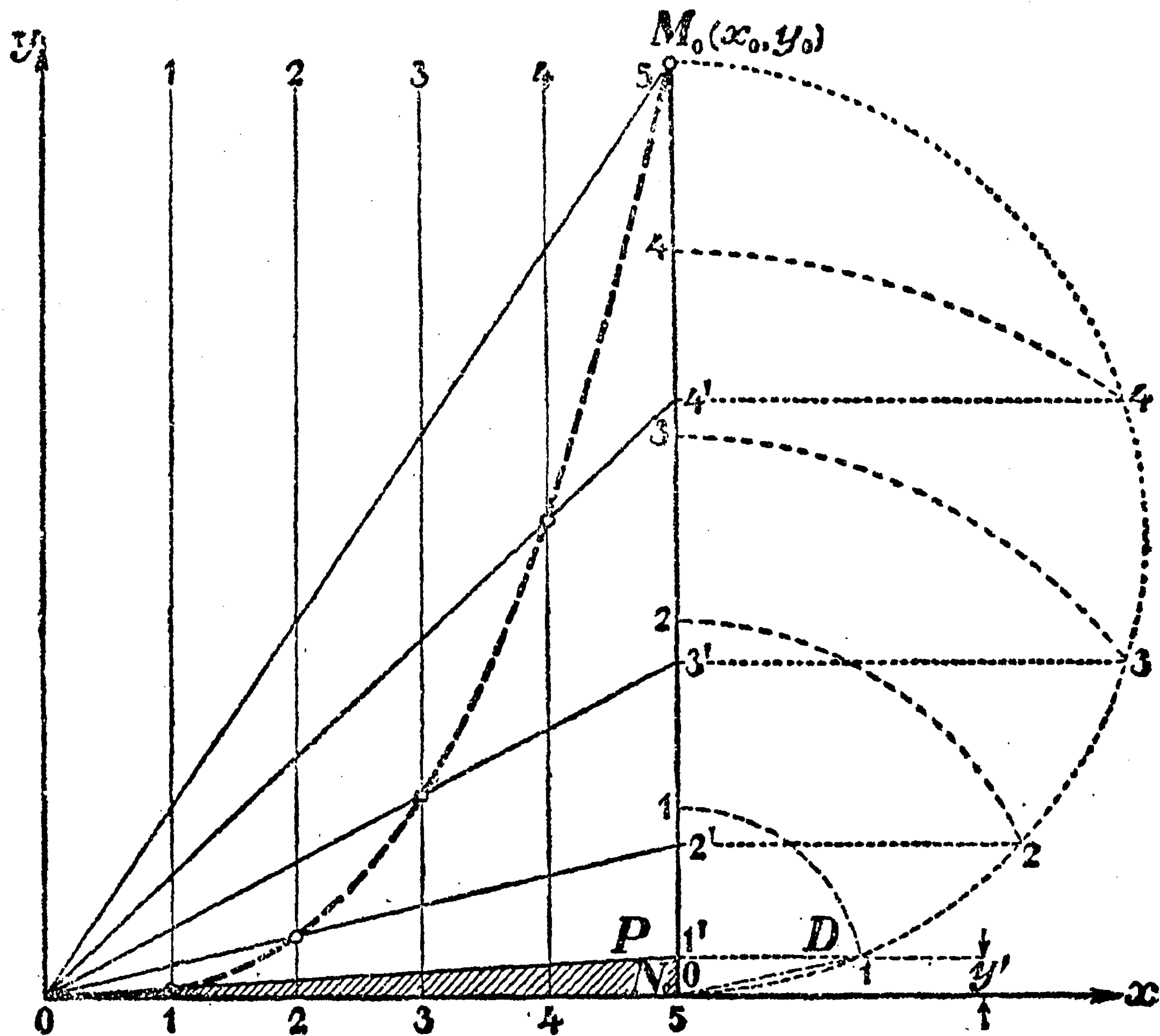
Черт. 52.



Парабола третьей степени  $y = ax^3$ , подобно параболе  $y = ax^2$ , легко может быть построена по точкам графически, когда — кроме положения координатных осей и, следовательно, точки  $O$  — известна еще какая-нибудь точка  $M_0(x_0, y_0)$  кривой. Для этого мы, как и в случае кривой  $y = ax^2$ , делим отрезок  $ON_0 = x_0$  и перпендикуляр  $N_0M_0 = y_0$  на  $n$  равных частей (черт. 53). На отрезке  $N_0M_0$ , как на диаметре, строим полуокружность, и из точки  $N_0$ , как центра, описываем дуги радиусами, равными

$$\frac{y_0}{n}, \frac{2y_0}{n}, \dots, \frac{(n-1)y_0}{n},$$

до пересечения их с полуокружностью; опустив из этих точек пересечения перпендикуляры на  $N_0M_0$ , проводим из  $O$  лучи к основаниям этих перпендикуляров.



Черт. 53.

Точки пересечения лучей с соответствующими перпендикулярами, восстановленными к оси  $Ox$  в точках деления отрезка  $ON_0$ , и будут лежать на нашей кривой. Докажем это для точки  $M_1(x_1, y_1)$  пересечения луча и перпендикуляра с номером 1. Мы имеем очевидно:  $x_1 = \frac{x_0}{n}$ ,  $y_1 = \frac{y'}{n}$ , где  $y' = N_0P$ . По теореме о перпендикуляре, опущенном из точки окружности на диаметр, имеем:

$$N_0D^2 = N_0P \cdot N_0M_0, \text{ т. е. } \left(\frac{y_0}{n}\right)^2 = y_0 y' \text{ и } y' = \frac{y_0}{n^2}.$$

По условию точка  $M_0$  лежит на нашей кривой, т. е.  $y_0 = ax_0^3$ ; нам же нужно доказать, что и  $M_1$  лежит на кривой, т. е.  $y_1 = ax_1^3$ . Это вытекает из предыдущих формул, так как они дают:

$$y_1 = \frac{y'}{n} = \frac{y_0}{n^3} = \frac{ax_0^3}{n^3} = a \left(\frac{x_0}{n}\right)^3 = ax_1^3,$$



что и требовалось доказать. Аналогично мы докажем, что и другие полученные указанным путем точки лежат на исследуемой кривой.

Отметим, что построенные нами параболы второй и третьей степени (и вообще все *параболы  $n$ -й степени*) обладают той особенностью, что

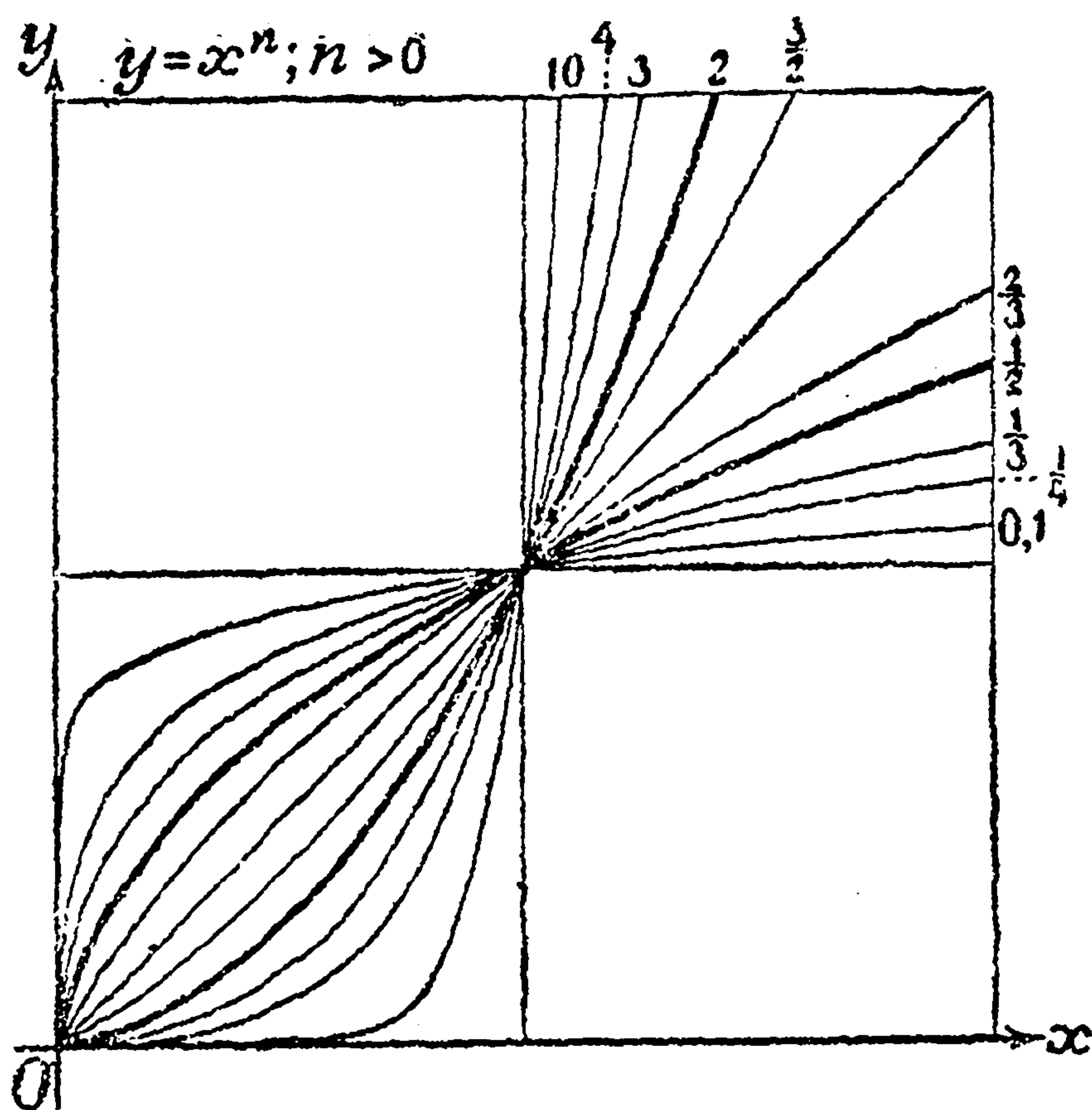
при беспредельном возрастании абсолютного значения  $x$ , т. е. при  $x \rightarrow \pm \infty$ , их ордината весьма быстро идет кверху или книзу, т. е. тоже  $\rightarrow \pm \infty$ , и притом так, что, в конце концов, обгоняет ординату любой прямой, начерченной на плоскости, если только эта прямая не параллельна оси  $Oy$ . Про такие кривые говорят, что они имеют *параболические бесконечные ветви*.

40. Степенная функция. Весьма важное значение в приложениях имеет функция вида:  $y = ax^n$ , которая называется *степенной функцией*; при этом показатель  $n$  здесь может быть положительным

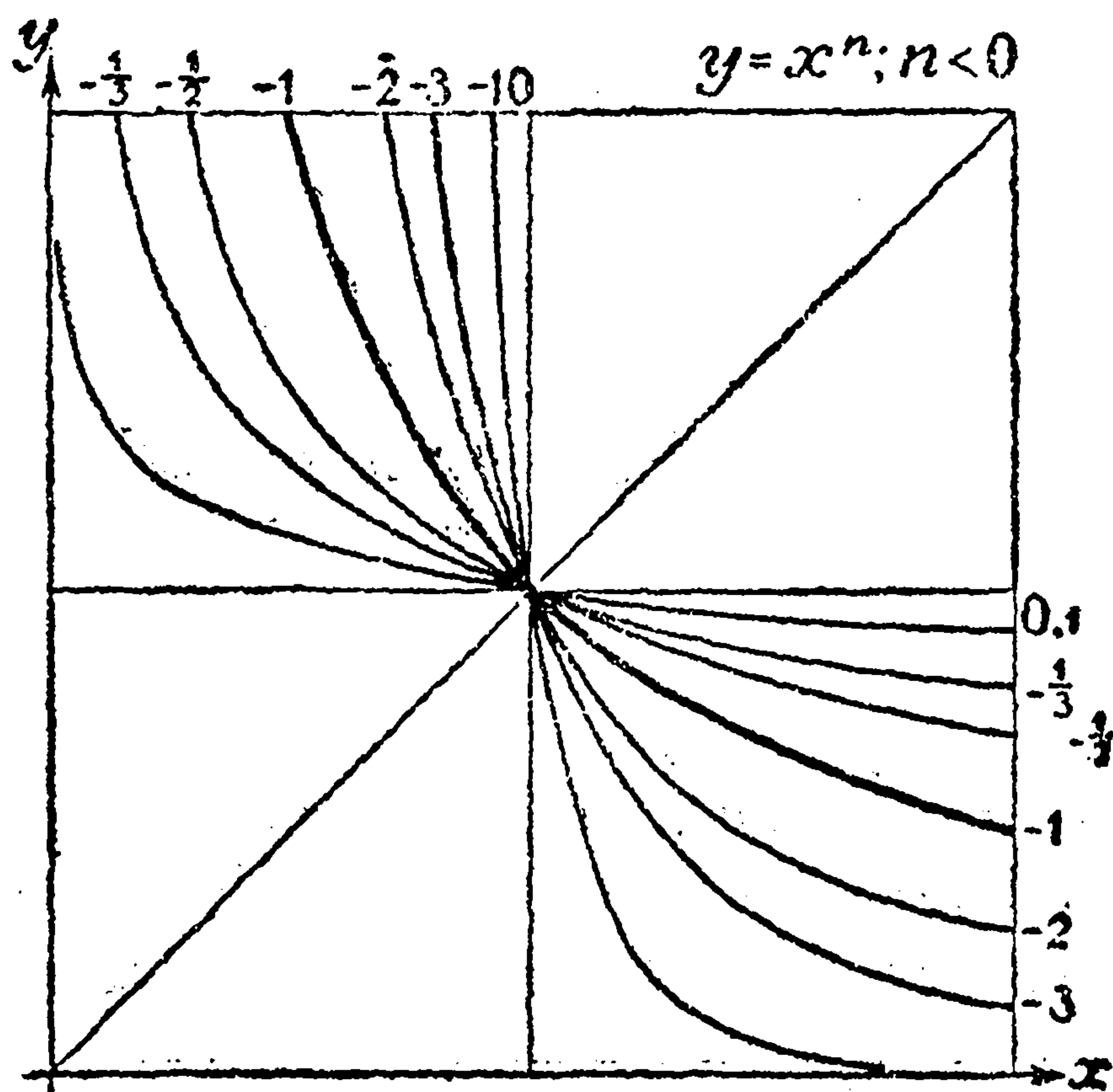
или отрицательным, целым или дробным. Считая  $a = 1$ , чего всегда можно достигнуть надлежащим изменением масштаба, мы имеем кривые:  $y = x^n$ , которые при различных значениях  $n$  изображены на черт. 54 и 55 (причем мы ограничились лишь положительными значениями  $x$ ).

Черт. 54 соответствует значениям  $n > 0$ . Все кривые проходят через начало координат и через точку  $C(1, 1)$ , и все время возрастают, причем каждая из них имеет параболическую ветвь. Черт. 55 соответствует значениям  $n < 0$ . Ни одна из этих кривых не проходит через начало координат, ибо  $y \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ . Но зато наши кривые сколь угодно близко подходят к осям  $Ox$ ,  $Oy$ , точнее, расстояние между переменной точкой кривой и прямой  $Ox$  или  $Oy$  стремится к нулю по мере удаления по кривой в бесконечность; в ту или другую сторону. Такие прямые называются *асимптотами* кривой, и можно сказать поэтому, что кривые  $y = ax^n$  при  $n < 0$  имеют координатные оси своими асимптотами; соответствующие ветви кривых называются *гиперболическими*, по имени гиперболы, которую мы получаем при  $n = -1$  [см. ниже 41].

Зная две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  кривой  $y = ax^n$ , мы можем опреде-



Черт. 54.



Черт. 55.



лить постоянные  $a$  и  $n$ , а также графически построить какое угодно число других ее точек. В самом деле, так как точки  $M_1$  и  $M_2$  лежат на нашей кривой, то координаты их  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  удовлетворяют соотношениям

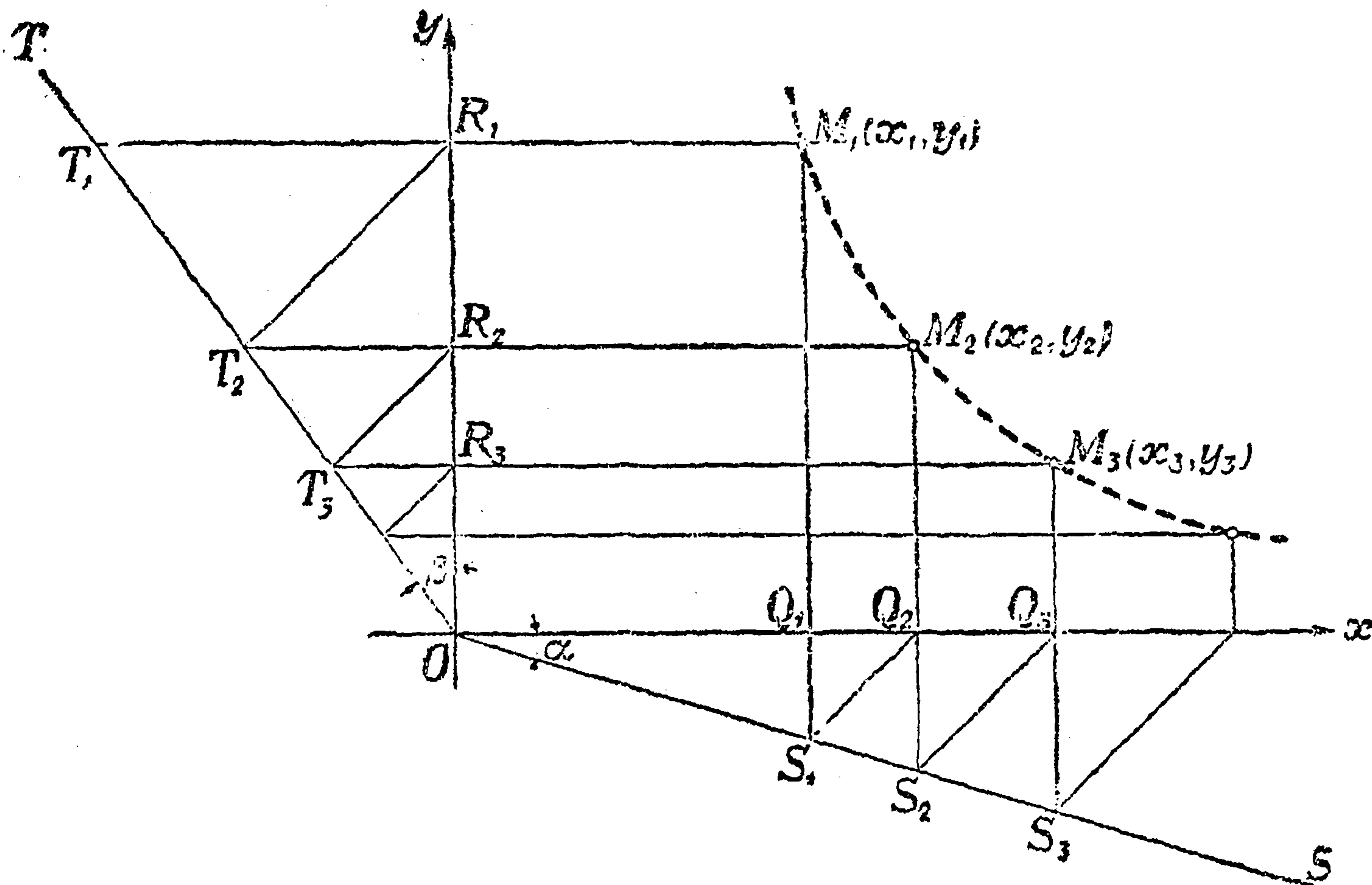
$$y_1 = ax_1^n, \quad y_2 = ax_2^n. \quad (22)$$

Деля первое уравнение на второе, находим  $\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n$ , откуда, логарифмируя, имеем:

$$\log \frac{y_1}{y_2} = n \log \frac{x_1}{x_2} \quad \text{и} \quad n = \frac{\log y_1 - \log y_2}{\log x_1 - \log x_2}.$$

Определив  $n$ , мы можем найти и  $a$  хотя бы из первого из уравнений (22).

Для построения точки  $M$  кривой, отличной от точек  $M_1$  и  $M_2$ , применяем



Черт. 56.

следующий способ (черт. 56): проводим лучи  $OS$  и  $OT$  под произвольными углами к осям  $Ox$  и  $Oy$ . Из данных точек  $M_1$  и  $M_2$  опускаем перпендикуляры  $M_1Q_1, M_2Q_2$  и  $M_1R_1, M_2R_2$  на оси координат, продолжив их до пересечения в точках  $S_1, S_2, T_1, T_2$  с лучами  $OS$  и  $OT$ . Проводим прямые  $S_1Q_2$  и  $R_1T_2$ , а затем из точек  $S_2, R_2$  — параллельные им прямые  $S_2Q_3$  и  $R_2T_3$ . Мы докажем, что точка  $M_3(x_3, y_3)$ , лежащая в пересечении перпендикуляров к осям, проведенных из точек  $Q_3, R_3$ , будет лежать на нашей кривой. Для этого достаточно обнаружить, что  $y_3 = ax_3^n$ . Из подобия треугольников  $OS_2Q_3$  и  $OS_1Q_2$ , а также  $OS_2Q_2$  и  $OS_1Q_1$ , мы имеем:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{OS_2}{OS_1} = \frac{x_2}{x_1}, \quad \text{т. е.} \quad x_2 = \frac{x_2^2}{x_1},$$

и точно также найдем:

$$y_3 = \frac{y_2^2}{y_1}.$$

В силу же уравнений (22) мы получим тогда:

$$y_3 = \frac{(ax_2^n)^2}{ax_1^n} = a \left(\frac{x_2^2}{x_1}\right)^n = ax_3^n,$$

что и требовалось доказать.



Если показатель  $n$  в уравнении  $y = ax^n$  известен, то кривую можно графически построить по точкам, зная лишь одну ее точку  $M_1(x_1, y_1)$ . Построение при  $n > 0$  и при  $n < 0$  почти одинаково, мы ограничимся случаем  $n < 0$ , часто встречающимся в термодинамике (политропические кривые), причем для удобства положим  $n = -m$ , где  $m > 0$ . Итак, речь идет о графике функции  $y = ax^{-m}$ , так что для точки  $M_1$  имеем:

$$y_1 = ax_1^{-m} \text{ или } x_1^m y_1 = a. \quad (23)$$

Построение сходно с предыдущим (черт. 56), но прямые  $OS$  и  $OT$  на этот раз проводятся под углами  $\alpha$  и  $\beta$ , из которых (как мы увидим ниже) только один произволен; что же касается прямых  $S_1Q_2$ ,  $R_1T_2$  и т. д., то все они проводятся под углами в  $45^\circ$  к соответствующим осям. Обратимся к точке  $M_2$ , построение которой ясно из чертежа. Очевидно,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q_1S_1}{OQ_1} = \frac{Q_1Q_2}{OQ_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_1}$$

и

$$x_2 = x_1 \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha)$$

и аналогично

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{T_2R_2}{OR_2} = \frac{R_1R_2}{OR_2} = \frac{y_1 - y_2}{y_2}$$

и

$$y_2 = y_1 \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \beta}.$$

Поэтому

$$x_2^m y_2 = x_1^m y_1 \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^m}{1 + \operatorname{tg} \beta}$$

и, для того чтобы точка  $M_2(x_2, y_2)$  удовлетворяла равенству  $x_2^m y_2 = a$ , аналогичному (23), нужно связать углы  $\alpha$  и  $\beta$  соотношением

$$1 + \operatorname{tg} \beta = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^m.$$

Напр., имеем:

$m =$	1	1,3	1,4	1,414
при $\alpha = 30^\circ, \beta =$	$30^\circ$	$39^\circ$	$41 \frac{3}{4}^\circ$	$42^\circ$
при $\alpha = 45^\circ, \beta =$	$45^\circ$	$55 \frac{2}{3}^\circ$	$58 \frac{1}{2}^\circ$	$59^\circ$

**Примеры и задачи.** 1. Если газ расширяется или сжимается *адиабатически*, т. е. без теплового обмена с окружающей средой, то его объем  $v$  и давление  $p$  связаны зависимостью  $pv^k = c$ , где  $c$  и  $k$  — постоянные. Зная начальные значения  $v=1$  и  $p=35$  и полагая  $k=1,414$  (воздух), построить график этой зависимости, для значений  $v$  от 1 до 5. [Воспользоваться вторым из указанных приемов;  $\alpha = 30^\circ, \beta = 42^\circ$ .]

2. Зависимость между абсолютной температурой  $T$  и давлением  $p$  газа при упомянутом адиабатическом процессе выражается формулой:

$$p = c_1 \cdot T^{\frac{k-1}{k}}.$$

Начертить график зависимости  $p$  от  $T$  в промежутке от  $300^\circ$  до  $400^\circ$ , если известно, что  $p=35$  атм. при  $T=300^\circ$  ( $k=1,414$ ). [Воспользоваться первым приемом, взяв в качестве второй опорной точки, напр.  $T=320^\circ$  и  $p=43,6$ .]



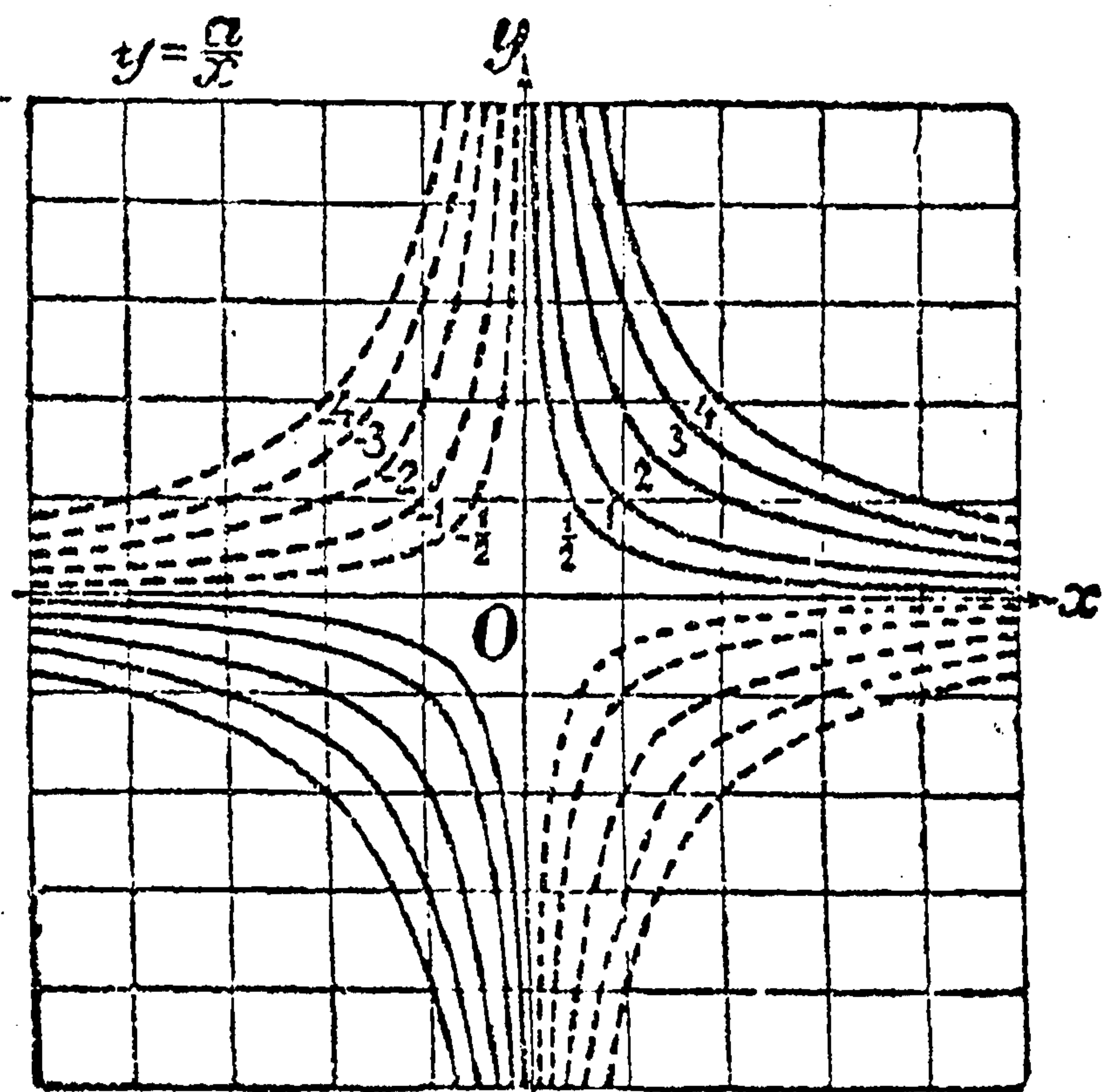
3. Начертить график зависимости  $i = 0,016 v^{0,6}$  между силой тока  $i$  и напряжением  $v$  для некоторой лампы накаливания, при изменении  $v$  от 10 до 200 вольт. [Первый прием; исходить из вычисленных координат двух точек, напр.,  $v = 50$ ,  $i = 0,17$  и  $v = 100$ ,  $i = 0,26$ .]

41. Гипербола. Особенно интересен частный случай кривой  $y = ax^n$ , при  $n = -1$ :

$$y = \frac{a}{x}, \quad (24)$$

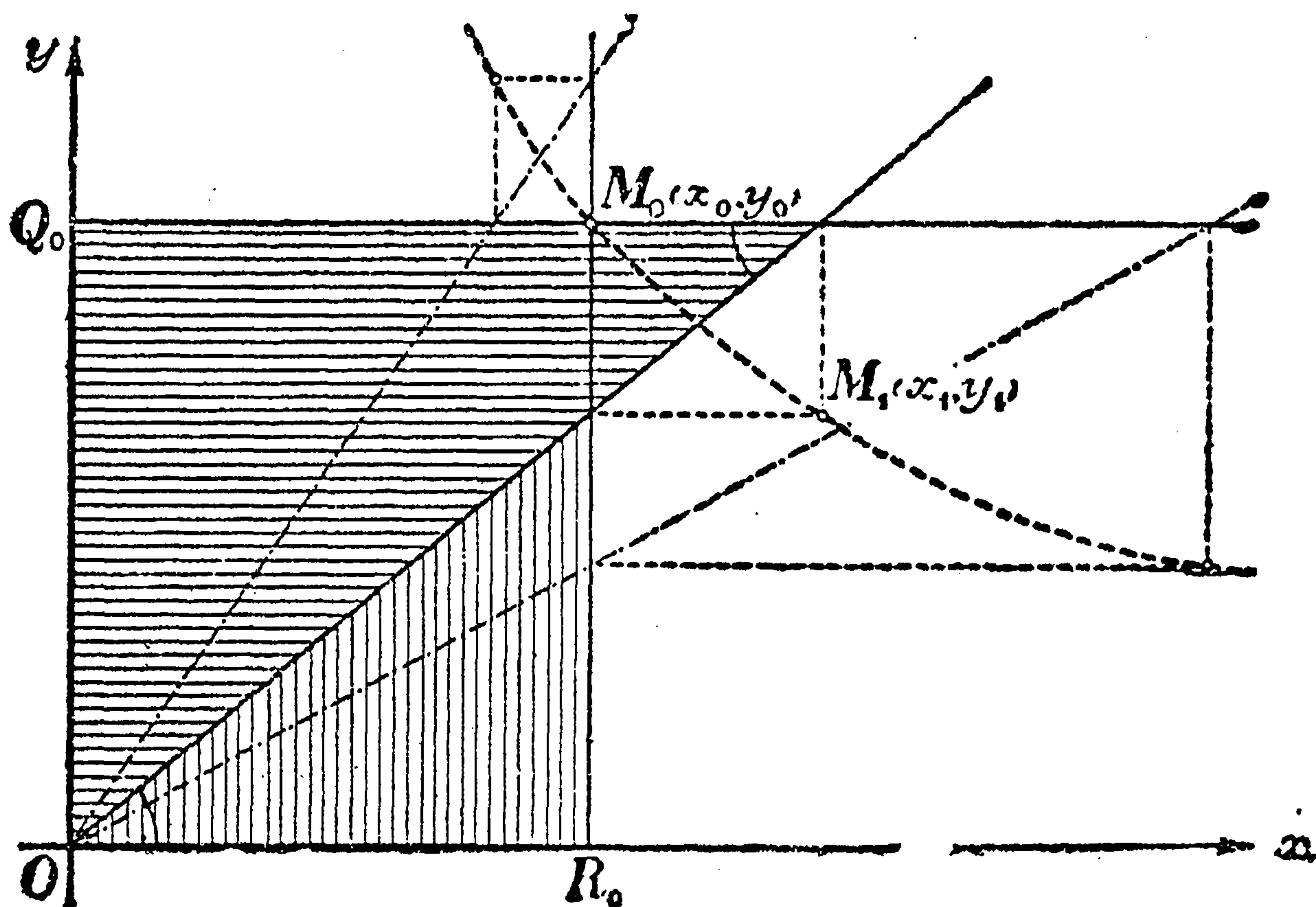
ибо он выражает закон обратной пропорциональности между функцией и независимой переменной.

Кривые (24) при различных значениях  $a$  изображены на черт. 57 и притом сплошной линией при  $a > 0$ , пунктирной при  $a < 0$  [ср. 31, 11, 5) и 15]. Все эти кривые называются *равнобочными гиперболами* и имеют, как уже было указано выше, координатные оси своими асимптотами.



Черт. 57.

Для построения кривой (24) годятся общие способы, указанные выше для кривой  $y = ax^n$ ; но существует и более простой способ построения какого угодно числа точек гиперболы, если известна *только одна точка* кривой (и, разумеется, оси, т. е. ее асимптоты). Способ этот состоит



Черт. 58.

в следующем: через данную точку кривой  $M_0(x_0, y_0)$  (черт. 58) проводим перпендикуляры  $M_0R_0$ ,  $M_0Q_0$  к осям  $Ox$  и  $Oy$  и пересекаем их произвольным лучом из точки  $O$ . Через точки пересечения луча с этими перпендикулярами проводим прямые, параллельные осям  $Ox$ ,  $Oy$ ; точка  $M_1(x_1, y_1)$  пересечения этих прямых будет также точкой кривой (24).



Для доказательства мы заметим, что величины  $x_0, y_0$  связаны соотношением  $y_0 = \frac{a}{x_0}$ , и такое же соотношение нам нужно вывести для  $x_1$  и  $y_1$ , т. е.

$y_1 = \frac{a}{x_1}$ . Из подобия заштрихованных треугольников мы имеем непосредственно:

$$\frac{y_1}{x_0} = \frac{y_0}{x_1},$$

откуда

$$y_1 = \frac{x_0 y_0}{x_1} = \frac{a}{x_1},$$

что и требовалось доказать.

График более сложной функции:

$$y = \frac{mx + n}{px + q}, \quad (25)$$

которая называется *дробно-линейной функцией*,\* приводится к кривой (24) при помощи переноса начала координат [ср. 31, 11, 6) и 16].

Начнем опять с численного примера. Положим:

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1}; \quad (26)$$

деля числитель на знаменатель, мы имеем  $2x + 3 = 2(x - 1) + 5$ , откуда

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1} = 2 + \frac{5}{x - 1},$$

или

$$y - 2 = \frac{5}{x - 1},$$

Если мы положим здесь  $\xi = x - 1$ ,  $\eta = y - 2$ , т. е. введем вместо осей  $Ox, Oy$  новые оси, им параллельные,  $O_1\xi, O_1\eta$ , с началом в точке  $O_1(1, 2)$ , то по отношению к этим новым осям наше уравнение будет:

$$\eta = \frac{5}{\xi},$$

что отвечает равнобочной гиперболой. Кривая (26) будет поэтому равнобочной гиперболой, имеющей асимптотами новые координатные оси  $O_1\xi, O_1\eta$ , т. е. прямые, проведенные через точку  $O_1(1, 2)$  параллельно прежним осям.

\* Это частный случай *дробной рациональной функции*, представляемой частным двух многочленов.



Те же рассуждения можно применить и в общем случае дробно-линейной функции (25). Мы можем здесь считать  $p \neq 0$ , так как при  $p = 0$  функция (25) приводится к линейной функции:

$$y = \frac{m}{q}x + \frac{n}{q}.$$

Деля числитель выражения (25) на знаменатель, находим без труда:

$$mx + n = (px + q) \frac{m}{p} + \left( n - \frac{mq}{p} \right),$$

откуда:

$$y = \frac{m}{p} + \frac{px - mp}{p(px + q)} = \frac{m}{p} + \frac{px - mp}{p^2} \cdot \frac{1}{x + \frac{q}{p}}.$$

Полагая для краткости:

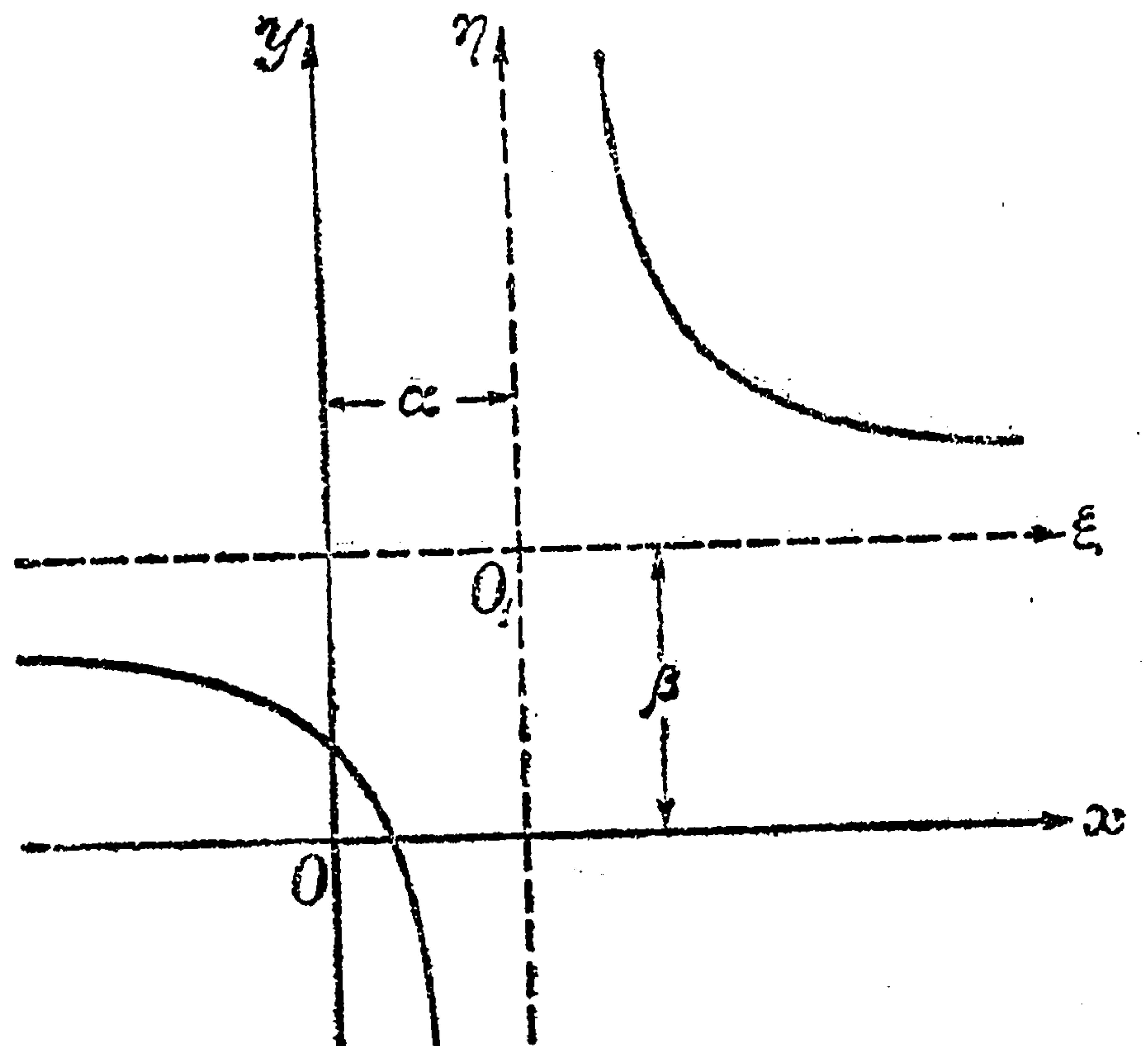
$$\frac{m}{p} = \beta, \quad \frac{q}{p} = -\alpha,$$

$$\frac{px - mp}{p^2} = a,$$

мы можем написать уравнение (25) в виде:

$$y - \beta = \frac{a}{x - \alpha},$$

а это последнее приводится к виду (24), если положить  $x - \alpha = \xi$ ,  $y - \beta = \eta$ , т. е. перенести начало координат в точку  $O_1(\alpha, \beta)$  и заменить оси  $Ox$ ,  $Oy$  параллельными им осями  $O_1\xi$ ,  $O_1\eta$ . Отсюда ясно, что кривая (25) имеет тот же вид, что и кривая:



Черт. 59.

$$y = \frac{a}{x}, \quad \text{при } a = \frac{px - mp}{p^2},$$

с тою лишь разницей, что асимптотами ее будут не координатные оси, а прямые им параллельные (черт. 59), проходящие через точку:

$$x = \alpha = -\frac{q}{p}, \quad y = \beta = \frac{m}{p}.$$

**Примеры и задачи.** 1. Построить график для закона *Бойля-Мариотта* [ср. 31, 16, 1)] и сравнить с построенным путем вычисления. То же сделать для графиков в задаче 17, 31.



2. Построить графики функций:

$$1) y = \frac{5x + 2}{2x - 3}, \quad 2) y = \frac{6,4x - 9,3}{2x + 1}$$

[Отв. 1)  $\alpha = 1,5$ ,  $\beta = 2,5$ ,  $a = 4,75$ ; 2)  $\alpha = -0,5$ ,  $\beta = 3,2$ ,  $a = -6,25$ .]

3. Опытным путем было получено, что напряжение  $V$  (вольт) и сила тока  $J$  (ампер) в некоторой вольтовой дуге связаны зависимостью

$$V = 41 + \frac{22}{J}.$$

Построить ее график, взяв за опорную точку:

$$J = 5, \quad V = 45,4.$$

[Отв.  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 41$ ,  $a = 22$ .]

4. Построить график эмпирической зависимости между коэффициентом трения  $\mu$  и скольжением  $\sigma$  для фрикционных передач из фибры:

$$\sigma = \frac{0,18\mu - 0,22}{\mu - 0,50}.$$

[Отв.  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0,18$ ,  $a = -0,13$ ; обращаем внимание на отрицательный знак  $a$ !]

42. Полукубическая парабола. В некоторых приложениях встречается кривая:

$$y = ax^{\frac{3}{2}},$$

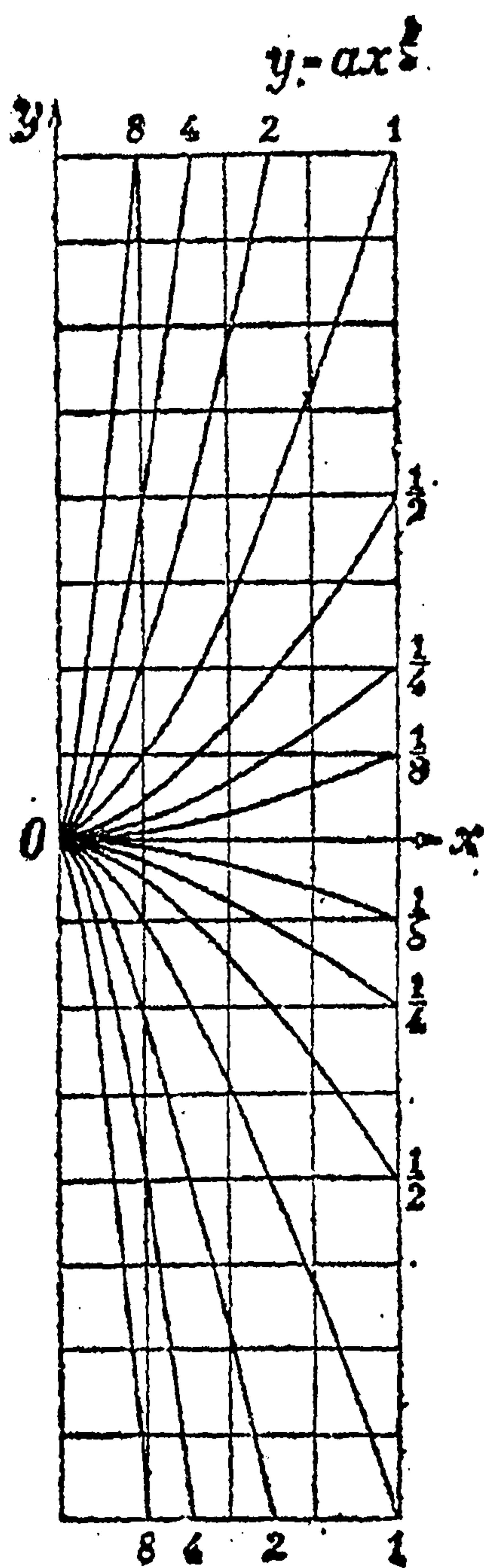
которая называется *полукубической параболой*. Так как  $y$  получается извлечением квадратного корня из  $x^3$ , то для вещественности результата должно быть  $x^3 \geq 0$ , т. е.  $x \geq 0$ , и, стало быть, *кривая лежит направо от оси  $Oy$* . Мы знаем, что при извлечении квадратного корня получается двойной знак ( $\pm$ ); таким образом, если считать, что каждому значению  $x$  соответствуют два значения  $y$ , отличающиеся лишь знаком, то кривую можно представить себе состоящей из *двух ветвей* (черт. 60), симметрично расположенных относительно оси  $Ox$ . Точка  $O$  называется *точкой возврата* кривой; в ней кривая имеет *острие*.

На черт. 60 представлены полукубические параболы при различных значениях  $a$ .

Зная ось симметрии  $Ox$ , точку возврата  $O$  и еще одну точку полукубической параболы, можно графически построить ее по точкам, подобно параболам второй и третьей степени. Для этой цели существует построение, которое вполне аналогично построениям в 36 и 39. Само построение ясно из черт. 61; доказательство предоставляем читателю.

Зная ось симметрии  $Ox$ , точку возврата  $O$  и еще одну точку полукубической параболы, можно графически построить ее по точкам, подобно параболам второй и третьей степени. Для этой цели существует построение, которое вполне аналогично построениям в 36 и 39. Само построение ясно из черт. 61; доказательство предоставляем читателю.

43. Понятие об обратной функции. Мы уже говорили выше [27], что, исследуя зависимость между двумя переменными  $x$  и  $y$ , мы можем



Черт. 60.



любую из них рассматривать как независимую. Таким образом, если дана функция

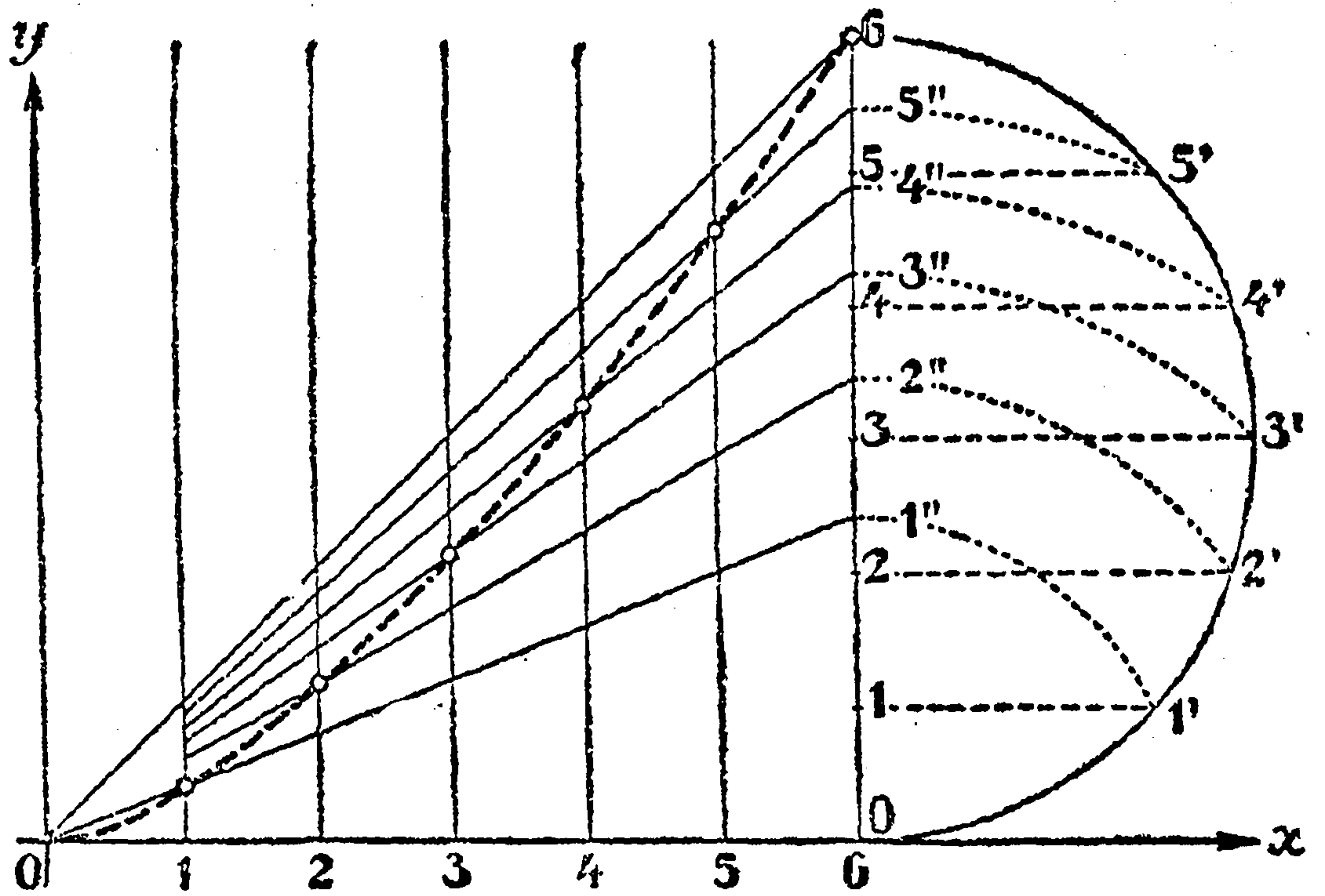
$$y = f(x), \quad (27)$$

то можно, переменив роли переменных, принять  $y$  за независимую переменную, а  $x$  считать функцией от  $y$ . Определенная таким путем функция называется *обратной* данной функции  $f(x)$ .

Аналитически, для получения обратной функции нужно решить уравнение (27) относительно  $x$ ; пусть мы получим:

$$x = \varphi(y). \quad (28)$$

Чтобы не отступать от привычного нам обозначения независимой переменной буквой  $x$ , а функции буквой  $y$ , нам остается еще в полученной формуле (28) заменить  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$ , и таким образом функция, обратная данной функции (27), будет  $\varphi(x)$ . Очевидно, что функцией, обратной  $\varphi(x)$ , будет снова  $f(x)$ , так что эти функции являются *взаимно обратными*.



Черт. 61.

Примеры. 1. Функция, обратная *линейной* функции  $y = ax + b$ , есть также *линейная* функция  $x = \frac{y-b}{a}$ , или, заменяя  $x$  на  $y$ , а  $y$  на  $x$ :

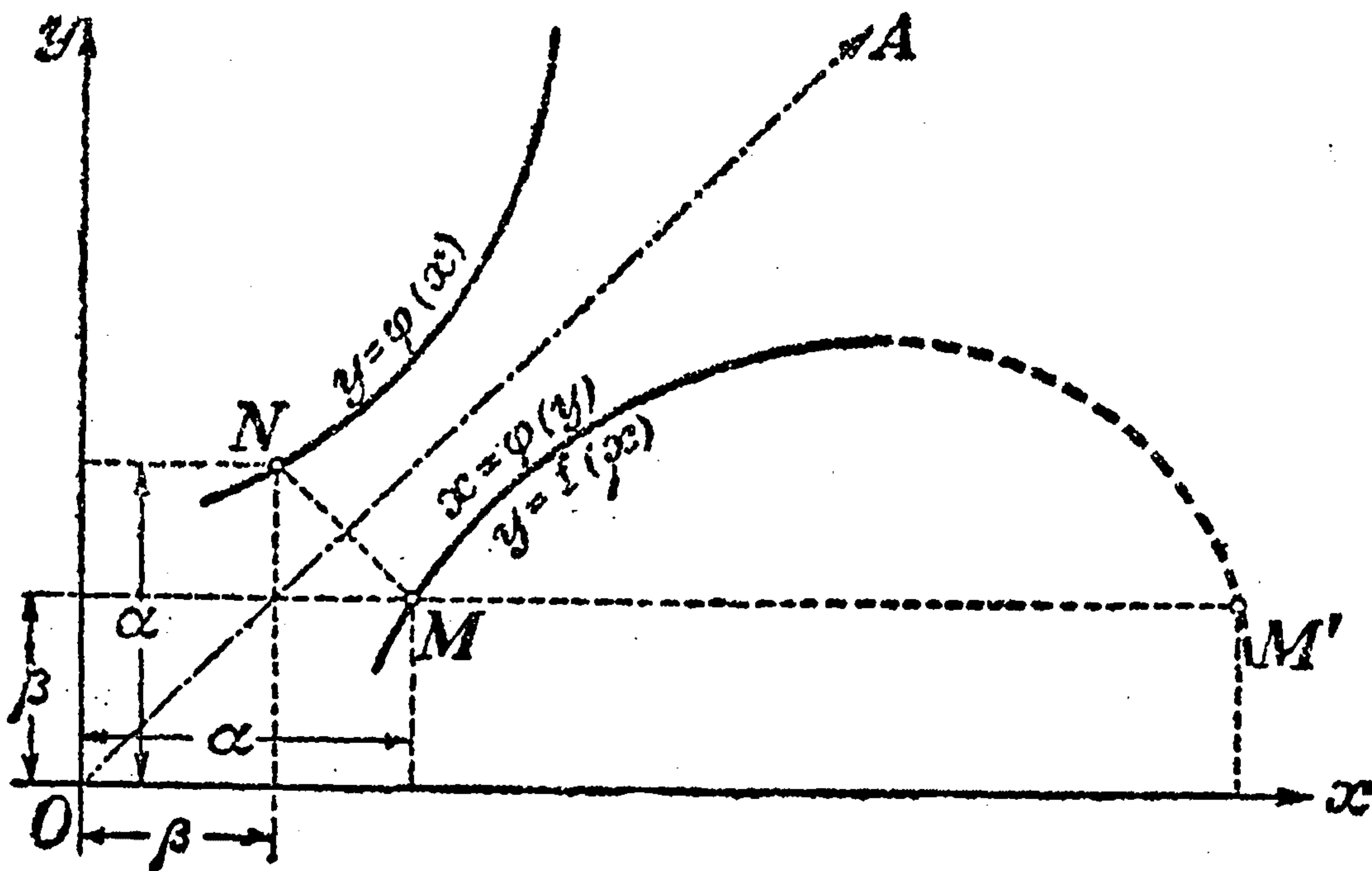
$$y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}.$$

2. Функция, обратная *степенной* функции  $y = x^n$ , есть также *степенная* функ-

ция:  $x = y^{\frac{1}{n}}$ , или, заменяя  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ :  $y = x^{\frac{1}{n}}$ .

(Мы ограничиваемся здесь положительными значениями  $x$ .)

Геометрически, обратная функция получается еще проще. Решение уравнения (27) относительно  $x$  графически достигается тем, что мы откладываем произвольное значение  $y = \beta$  на оси  $Oy$ , и с помощью графика определяем соответствующее значение  $x = \alpha$ , проведя прямую параллельно оси  $Ox$ , до пересечения ее с кривой в точке  $M$  (черт. 62). Таким обра-



Черт. 62.



зом, тот же график кривой  $y=f(x)$  может служить и для определения обратной функции  $x=\varphi(y)$ .

Но при таком способе независимую переменную приходится откладывать по вертикальной, а функцию по горизонтальной оси; если же мы хотим изобразить график обратной функции обычным способом, откладывая независимую переменную по горизонтальной, а функцию — по вертикальной оси, то нужно будет старую ось  $Oy$  направить по оси  $Ox$ , а ось  $Ox$  — по оси  $Oy$ , что можно сделать, повернув весь чертеж на  $180^\circ$  вокруг биссектрисы  $OA$  первого координатного угла, что и показано на черт. 62.

Итак, для получения графика функции  $\varphi(x)$ , обратной данной функции  $f(x)$ , достаточно повернуть график данной функции на  $180^\circ$  вокруг прямой, делящей пополам первый координатный угол.

Этим объясняется очевидная симметрия черт. 54 и 55 по отношению к упомянутой прямой, ибо каждой функции  $y=x^n$  отвечает „обратная“

ей:  $y=x^{\frac{1}{n}}$ .

Заметим, что при переходе от данной функции (27) к ей обратной можно столкнуться и с таким обстоятельством, что выбранному значению  $y$  окажется соответствующим не одно, а несколько значений  $x$ . Это будет, очевидно, тогда, когда график функции (27) идет то вверх, то вниз, так что прямая, параллельная оси  $Ox$ , может пересечь ее больше, чем в одной точке (см., напр., пунктирное продолжение кривой  $y=f(x)$  на черт. 62). В этом случае обратная функция оказывается, как говорят, *многозначной* (двузначной, трехзначной и т. п.). Мы уже имели дело с такими функциями; если, напр.,  $y=ax^2$  (скажем, при  $a > 0$ ), то обратная функция *двузначна*, в виду двойного знака квадратного корня:  $x = \pm \sqrt{\frac{y}{a}}$

или, меняя роли переменных,  $y = \pm \sqrt{\frac{x}{a}}$ . [Эту зависимость можно пред-

ставить и в виде:  $y^2 = \frac{x}{a}$  или, если положить  $\frac{1}{a} = 2p$ , в виде:  $y^2 = 2px$ ;

вот почему черт. 42 получается из верхней части черт. 40 путем уже упоминавшегося поворота на  $180^\circ$ .] Если ограничиться, в случае функции  $y=ax^2$ , положительными значениями  $x$  (для этих значений график идет

только вверх!), то обратная функция  $x = + \sqrt{\frac{y}{a}}$  (или  $y = + \sqrt{\frac{x}{a}}$ )

окажется уже однозначной.

44. Показательная и логарифмическая функции. В то время как в степенной функции  $y=x^n$  мы считали основание степени  $x$  переменным, а показатель  $n$  — постоянным, в приложениях часто приходится сталкиваться с случаем, когда — при постоянном основании — *показатель оказывается переменным* [ср., напр., 24, (16)]. Поэтому важно познакомиться с так называемой *показательной функцией*:

$$y = a^x. \quad (a = \text{пост.}).$$

При положительном  $a$  всегда  $y > 0$ ; на черт. 63 представлены графики

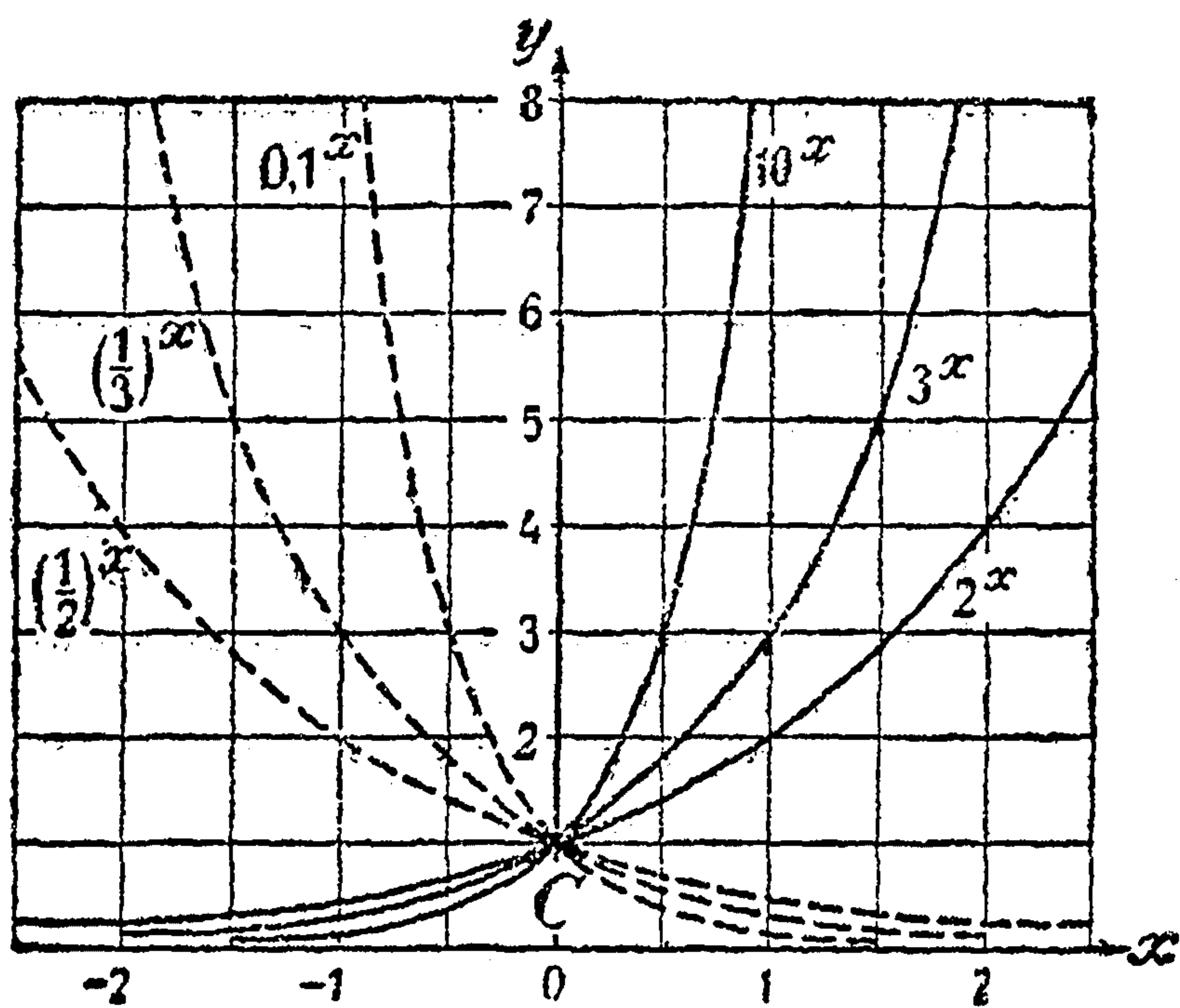


этой функции при различных значениях основания  $a$ , причем бо́льший интерес представляет случай  $a > 1$  (сплошные линии). Все кривые проходят через точку  $C(0, 1)$ , имеют с одной стороны ось  $Ox$  асимптотой, а с другой *весьма быстро* идут кверху. Можно показать, что они при этом обгоняют, в конце концов, любую параболу  $y = x^n$ , как бы велико ни было  $n$ .

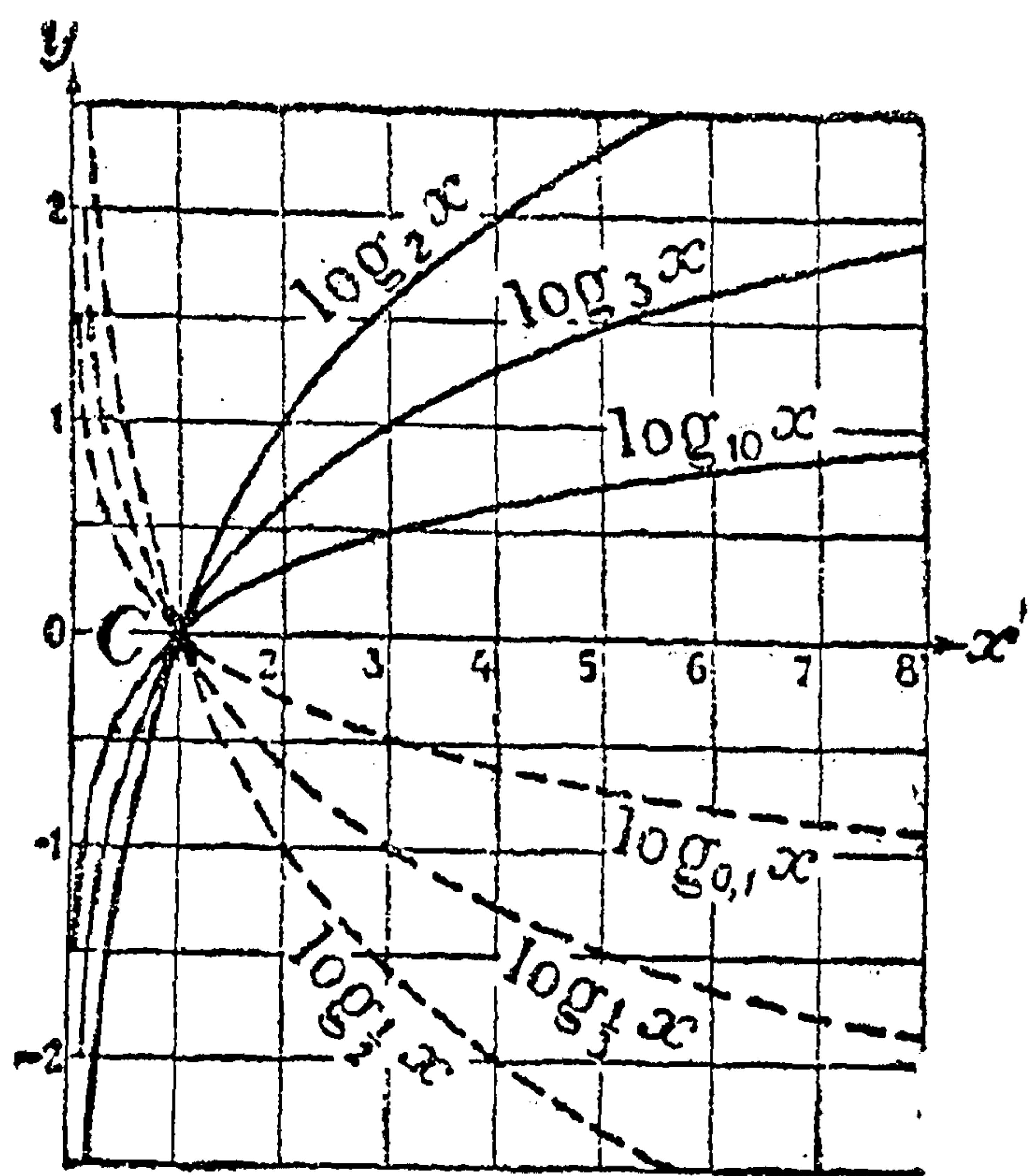
Если  $y = a^x$ , то  $x = \log_a y$ , и мы приходим к логарифмической функции, которую (снова переменяя роли переменных) можно записать в виде:

$$y = \log_a x$$

(„логарифм числа  $x$  по основанию  $a$ “). Таким образом, показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными. Из сказанного в предыдущем п<sup>о</sup> ясно, что график логарифмической функции по-



Черт. 63.



Черт. 64.

лучается из графика степенной простым поворотом; ср. черт. 63 с черт. 64, где даны графики логарифмической функции, при различных значениях  $a$ . Эти графики, естественно, лежат вправо от оси  $Oy$  и все проходят через точку  $C(1, 0)$ ; они имеют слева ось  $Oy$  своей асимптотой, а справа (при  $a > 1$ ) хотя и идут кверху, так что ординаты растут до бесконечности, но *очень медленно*: любая параболка  $y = x^n$ , при  $n > 0$ , как бы мало ни было  $n$ , в конце концов, обгонит логарифмическую кривую.

Черт. 63 и 64 хорошо иллюстрируют различные свойства показательной и логарифмической функции, известные читателю из алгебры. Пусть, напр., читатель установит по графикам (для  $a > 1$ ), что

$$\begin{cases} a^0 = 1; & a^x > 1 \text{ при } x > 0; & a^x < 1 \text{ при } x < 0; \\ \log_a 1 = 0; & \log_a x > 0 \text{ при } x > 1; & \log_a x < 0 \text{ при } x < 1; \end{cases}$$

а также:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0; & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty. \end{cases} \quad (29)$$



Мы уже видели [23, (10)], что логарифмы чисел, взятые по одному основанию  $a$ , получаются из логарифмов тех же чисел, но по другому основанию  $b$ , путем умножения их на постоянный множитель

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (30)$$

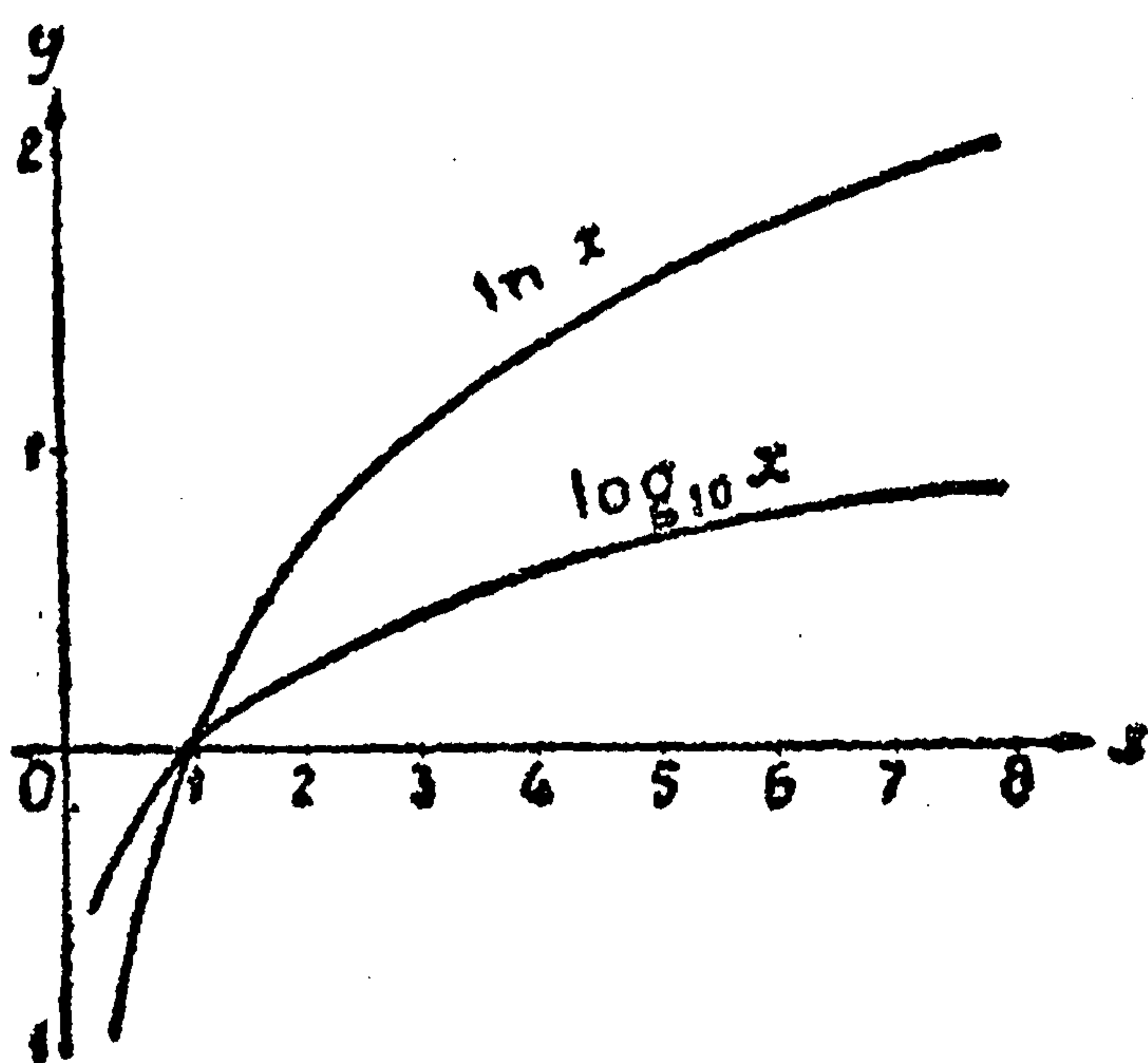
[23, (11)]. Вот почему соответственные ординаты любых двух кривых на черт. 64 пропорциональны.

Особую важность имеет, как уже указывалось [23], натуральная система логарифмов  $\ln x$ , основанием которой служит Нэперово число  $e = 2,718 \dots$ . Если положить  $b = e$ , то в частности

$$\log_a x = \ln x \cdot \log_a e; \quad (31)$$

наконец, если взять  $a = 10$ , то получим:

$$\log x = \ln x \cdot M, \quad (32)$$



где модуль  $M = \log e = 0,43429 \dots$  [23, (12) и (13)]. На черт. 65 сопоставлены графики функций  $y = \log x$  и  $y = \ln x$ .

В инженерных справочниках обыкновенно приводятся таблицы значений функций  $\ln x$  и  $e^x$ .

*Примеры и задачи.* Пусть цепь содержит сопротивление  $R$  и самоиндукцию (коэффициент самоиндукции  $L$ ); тогда затухание тока после разобращения цепи с источником постоянной электродвижущей силы будет происходить по закону:

$$J = J_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Полагая  $J_0 = 50$  (амп),  $R = 0,32$  (ома),  $L = 0,004$  (генри), построить график этой зависимости для  $t$  от 0 до 0,05 (сек).

Имеем:

$$J = 50 e^{-80t}$$

Если нет под рукой таблицы значений  $e^x$ , то следует прибегнуть к логарифмированию:

$$\log J = \log 50 - 80t \cdot \log e$$

или, так как

$$\log 50 = 1,699, \log e = 0,4343, \text{ то } \log J = 1,699 - 34,74t.$$

Таким образом составляется табличка:

$t$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\log J$	1,699	1,352	1,004	0,657	0,309	$\bar{1},962$
$J$	50	22,5	10,1	4,54	2,04	0,92

а по ней, выбрав надлежащие масштабы, строится график.



2. При помощи каната, переброшенного через барабан, сила  $P$  (кг) на одном его конце может уравновесить, благодаря трению, большую силу  $Q$  на другом. Отношение  $\frac{Q}{P}$  выражается показательной функцией:  $e^{\mu\theta}$ , где  $\mu$  есть коэффициент трения, а  $\theta$  — угол обхвата (в радианах), т. е. центральный угол, отвечающий дуге, по которой канат прилегает к барабану. В случае пенькового каната и деревянного барабана можно положить  $\mu = 0,4$ . Начертить график функции  $e^{0,4\theta}$  для  $\theta$  от 0 до  $5\pi$ , через  $\frac{\pi}{2}$ . Взяв  $\theta = \pi$ , начертить график функции  $e^{\pi\mu}$  для  $\mu$  от 0,1 до 0,5.

45. Тригонометрические функции. Так называются функции:

$$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x,$$

известные читателям из курса тригонометрии; мы напомним здесь некоторые их свойства:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}; \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b;$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b;$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b};$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\sin a \pm \sin b = 2 \sin \frac{a \pm b}{2} \cos \frac{a \mp b}{2};$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2};$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

Иногда величины, обратные  $\cos x$  и  $\sin x$ , рассматривают как особые функции, и обозначают символами:

$$\operatorname{sc} x = \frac{1}{\cos x}, \operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x}.$$

В этих обозначениях имеем:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sc}^2 x, 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{csc}^2 x.$$

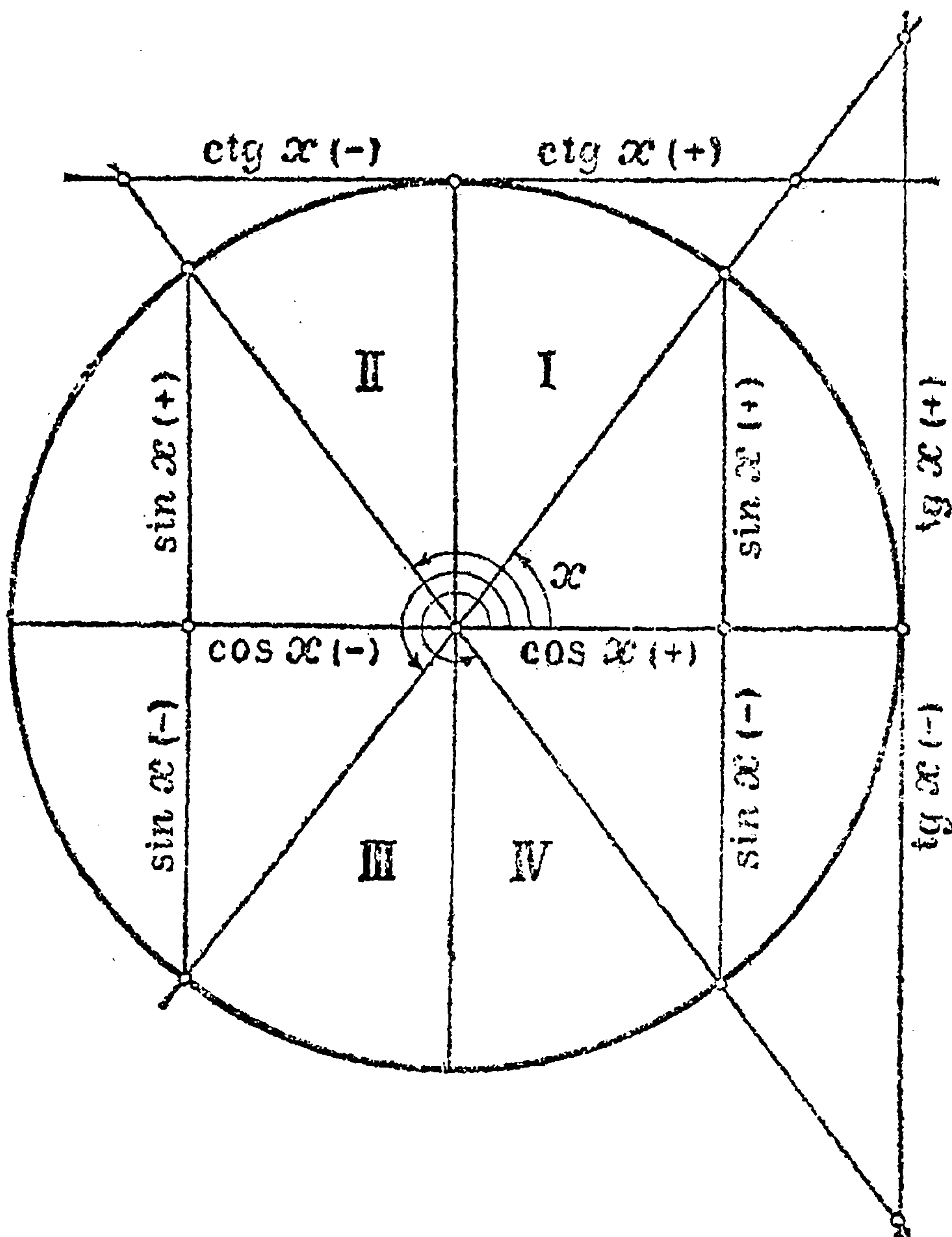


В дальнейшем, там, где не оговорено противное, мы будем измерять  $x$  не в градусной, а в *дуговой мере*, при которой за единицу принимается „радиан“ — угол, опирающийся на дугу окружности, по длине равную ее радиусу. Этот угол, выраженный в градусах и его долях, равен:

$$57^{\circ}17'44,8'' = 20626,15''.$$

В дуговой мере угол  $360^{\circ}$  измеряется числом  $2\pi$ , угол  $180^{\circ}$  — числом  $\pi$ ,  $90^{\circ}$  — числом  $\frac{\pi}{2}$ , вообще угол  $\alpha^{\circ}$  — числом

$$\frac{\alpha \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi \alpha}{180}.$$



Черт. 66.

При таких обозначениях напомним следующие формулы:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \cos x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \pm \sin x;$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x;$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x;$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x;$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \pm \operatorname{ctg} x;$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x;$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x.$$

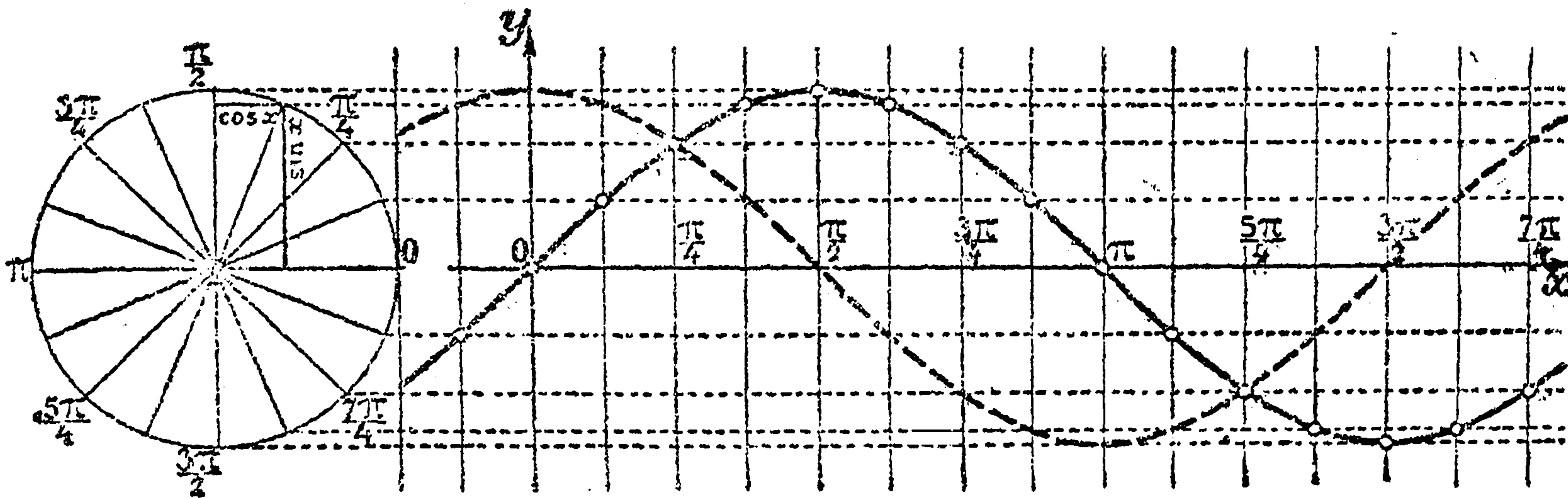
Из определения тригонометрических функций угла, с помощью так называемого „тригонометрического круга“ радиуса 1 (см. черт. 66), вытекает простой способ построения графиков этих функций. Поместим круг радиуса 1 так, чтобы центр его находился на оси  $Ox$  (черт. 67); проведя радиус под углом  $x$  к этой оси, в пересечении его с окружностью получим точку, ордината которой равна  $\sin x$ , и для построения точки кривой  $y = \sin x$  (называемой *синусоидой*) нам достаточно через полученную точку провести прямую, параллельную оси  $Ox$ , до встречи ее с перпендикуляром, восставленным к оси  $Ox$  в точке с абсциссой  $x$ .

График функции  $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  мы получим, передвинув



построенный только-что график на отрезок  $\frac{\pi}{2}$  влево по оси  $Ox$ , или перенеся начало координат на такой же отрезок вправо (почему?)

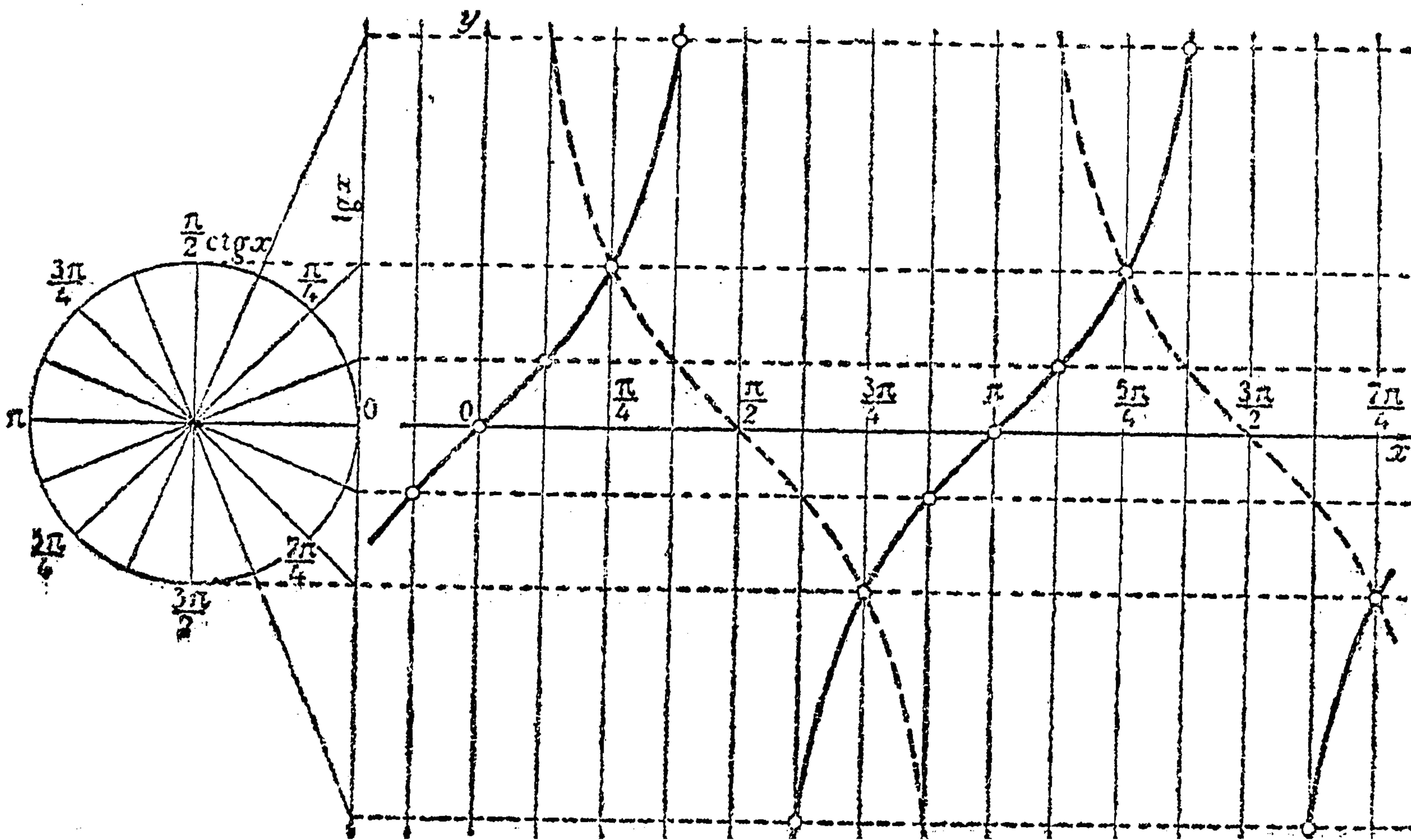
Для получения графика функции  $y = \operatorname{tg} x$  (черт. 68) нужно продол-



Черт. 67:

жить упомянутый выше радиус до пересечения его с касательной к окружности, через точку пересечения провести прямую, параллельную оси  $Ox$ , и т. д.

Наконец, предлагаем читателям выяснить самим, как можно получить график функции  $y = \operatorname{ctg} x$ .



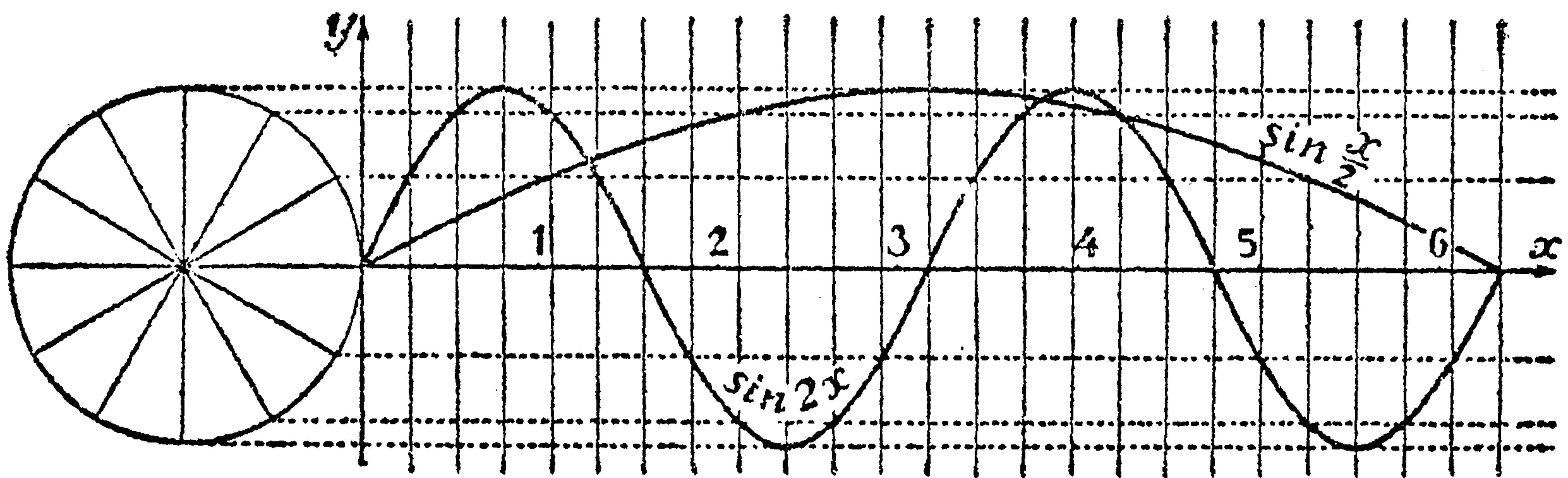
Черт. 68.

Построенные графики хорошо иллюстрируют многие свойства тригонометрических функций. Из них, напр., прежде всего ясно, что функции  $\sin x$  и  $\cos x$  — *периодические*, периода  $2\pi$ , так как кривая повторяется в том же виде через промежуток длины  $2\pi$ ; функции же  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  — *периодические*, но периода  $\pi$ , так как соответствующие кривые повторяются через промежуток длины  $\pi$ . Поэтому, построив график  $\sin x$  или  $\cos x$  в каком-нибудь промежутке длины  $2\pi$ , мы получим полный график



функции, передвигая построенный кусок его на отрезок  $2\pi$  вправо или влево вдоль оси  $Ox$ . \* Для построения же графиков  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  достаточно построить эти графики в промежутке длины  $\pi$  и передвигать их на отрезок  $\pi$  вправо или влево.

Легко „проверить“ на графиках и указанные выше формулы приведения. Наконец, обратим внимание читателя на то, что график функции  $y = \operatorname{tg} x$  состоит из ряда отдельных ветвей; при приближении абсциссы  $x$  к значениям  $\pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\pm \frac{3\pi}{2}$ , и т. д. слева, ордината  $y$  растет до  $+\infty$ , при приближении же  $x$  к тем же значениям справа,  $y$  убывает до  $-\infty$ . Это обстоятельство и выражают, говоря, что, напр., при  $x = \frac{\pi}{2}$  тангенс „обращается в бесконечность“ или что  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm \infty$ .



Черт. 69.

Если через точки оси  $Ox$ , с абсциссами  $\pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\pm \frac{3\pi}{2}$ , и т. д. провести вертикальные прямые, то, они, очевидно, будут служить *асимптотами* для нашей кривой [ср. 40].

46. Синусоидальные величины. Рассмотрим более сложные функции

$$y = \sin \omega x, \quad y = \cos \omega x.$$

Для построения их графиков можно применять прежний метод с тем различием, что при каждом значении  $x$  нужно проводить радиус вспомогательной окружности под углом  $\omega x$  к оси  $Ox$ . Указанное построение проделано на черт. 69 для функций:

$$y = \sin 2x, \quad y = \sin \frac{x}{2}.$$

Таким же способом можно построить и кривые:

$$y = A \sin \omega x, \quad y = A \cos \omega x,$$

нужно только вспомогательную окружность описать радиусом  $A$  вместо 1.

Наконец, кривая:

$$y = A \sin (\omega x + \alpha), \tag{33}$$

\* Можно также сказать, что кривые  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  состоят из ряда тождественных между собою волн, длина каждой из которых равна  $2\pi$ , и которые для  $\cos x$  смещены на отрезок  $\frac{\pi}{2}$  влево по сравнению с  $\sin x$ .



которая включает, как частный случай, все рассмотренные выше кривые, может быть построена совершенно таким же путем, с помощью вспомогательной окружности радиуса  $A$ , если только заранее провести через ее центр прямую под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  и откладывать углы  $\omega t$  именно от этой прямой.\*

Особенно важное значение функция (33) имеет, когда независимая переменная  $x$  есть *время*, которое обычно обозначают через  $t$ , так что

$$y = A \sin(\omega t + \alpha); \quad (34)$$

при изменении  $t$  радиус вспомогательной окружности вращается вокруг его центра, и притом так, что к моменту  $t$  он поворачивается на угол  $\omega t + \alpha$ . За единицу времени он, очевидно, описывает угол  $\omega$ , так что  $\omega$  есть *угловая скорость* вращения радиуса.

Величины типа (34) часто называются *синусоидальными величинами*, причем постоянная  $\omega$  называется *частотой* величины (34).

*Период*  $T$  функции  $y$  соответствует *времени полного оборота* радиуса вокруг центра, т. е. определяется из соотношения  $\omega T = 2\pi$ , так что  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  и  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ; то же выражение  $\frac{2\pi}{\omega}$  дает нам *длину волны* синусоиды (34). Введя вместо частоты  $\omega$  период  $T$  в выражение (34), представим его в виде:

$$y = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right).$$

Очень часто вместо частоты  $\omega$  вводят „число периодов“ или „число оборотов“ в единицу времени, например, в одну секунду. Это число  $n$  (которое, очевидно, может быть и не целым) определится по формуле:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \quad \omega = 2\pi n.$$

Постоянная  $A$  в формуле (34) называется *амплитудой* величины  $y$ , во все время изменения  $y$  колеблется между пределами ( $\pm A$ ).

Переменный угол  $\omega t + \alpha$  носит название *фазы* синусоидальной величины. Наконец, постоянная  $\alpha$  в формуле (34) называется *начальной фазой* величины  $y$  и дает угол, образуемый с осью  $Ox$  *начальным* положением вращающегося радиуса, т. е. положением его в момент  $t = 0$ .

Напр., начальные фазы величин:

$$A \sin \omega t, \quad A \cos \omega t = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad -A \sin \omega t = A \sin(\omega t + \pi)$$

будут соответственно равны:

$$0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi.$$

Заметим, что, изменив начало отсчета времени, всегда можно начальную фазу привести к 0; именно, так как

$$\omega t + \alpha = \omega \left(t + \frac{\alpha}{\omega}\right),$$

то для этого, очевидно, достаточно отсчитывать время от момента  $-\frac{\alpha}{\omega}$ .

\* Можно было бы попрежнему проводить радиусы под углами  $\omega x$  к оси  $Ox$ , но тогда после построения пришлось бы передвинуть начало координат на отрезок  $\frac{\alpha}{\omega}$  (направо при положительном и налево при отрицательном  $\alpha$ ).



Механическую интерпретацию синусоидальной величины (34) можно получить с помощью той же окружности радиуса  $A$ , которая служила для построения ее графика. Опуская из переменной точки  $Q$  (черт. 70), вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по этой окружности, перпендикуляр на ось  $Oy$ , мы увидим, что точка  $P$ , служащая проекцией точки  $Q$ , совершает колебательное движение по отрезку оси между точками  $M$  и  $M'$ ; это движение называется гармоническим колебательным движением.

Если отсчитывать путь  $s$ , пройденный точкой  $P$  от точки  $O$ , то  $s = y$ , так что зависимость  $s$  от  $t$  выражается формулой:

$$s = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (35)$$

Начальное значение пути, отвечающее  $t = 0$ , очевидно, будет

$$s_0 = A \sin \alpha.$$

Аналогичный результат мы получим, если мы будем проектировать точку  $Q$  на любую другую прямую, проходящую через  $O$ , изменится лишь начальная фаза.

Синусоидальные величины типа (34) встречаются в технике переменного тока: переменное напряжение и переменная сила тока чаще всего следуют (по крайней мере, приближенно) синусоидальному закону (34).

Они возрастают от 0 до некоторого наибольшего своего значения  $A$ , затем убывают до 0 и снова возрастают до  $A$ , но в другом направлении [выражение (34) меняет знак], после чего возвращаются к 0, и т. д. Так как там рассматриваются синусоидальные величины одной и той же частоты  $\omega$ , то для полного их определения достаточно знать их амплитуду  $A$  и начальную фазу  $\alpha$ . В связи с этим, в теории переменного тока величину (34) обыкновенно характеризуют направленным отрезком (вектором)  $Oa$  (черт. 71) длины  $A$ , составляющим с осью  $Ox$  угол  $\alpha$ . Во избежание недоразумений, мы подчеркиваем, что здесь переменная величина (34), зависящая от времени  $t$ , условно представляется постоянным отрезком, который лишь выявляет ее амплитуду и начальную фазу (частота предполагается наперед установленной).

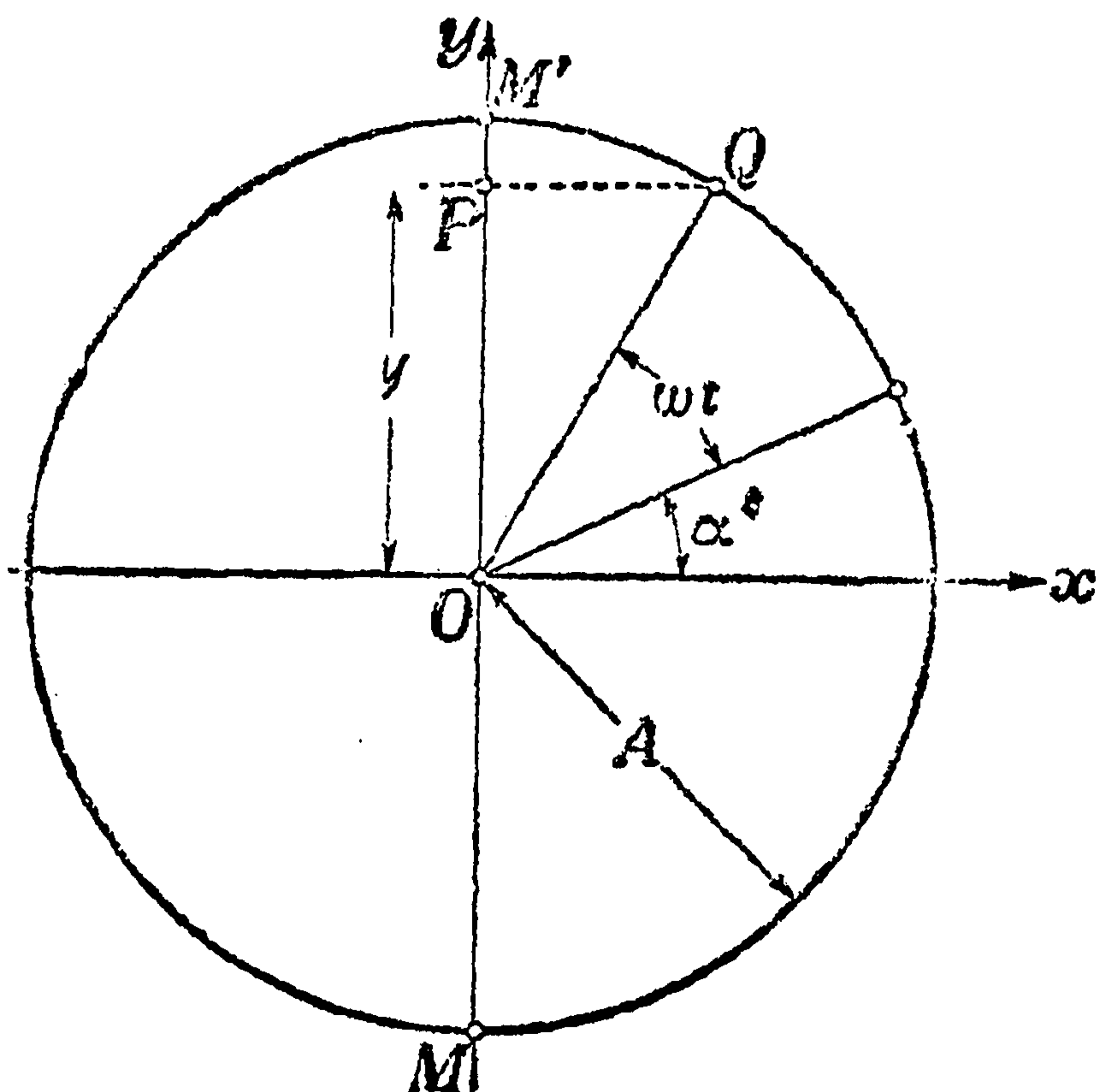
**Примеры.** 1. В цепи переменного тока между током  $i$  и временем  $t$  имеется зависимость:  $i = 3,5 \sin(800t + 1,26)$ ; определить максимальное значение тока, число периодов в секунду и начальную фазу; начертить график.

**Отв.** 3,5; 127; 1,26 рад. = 72°.

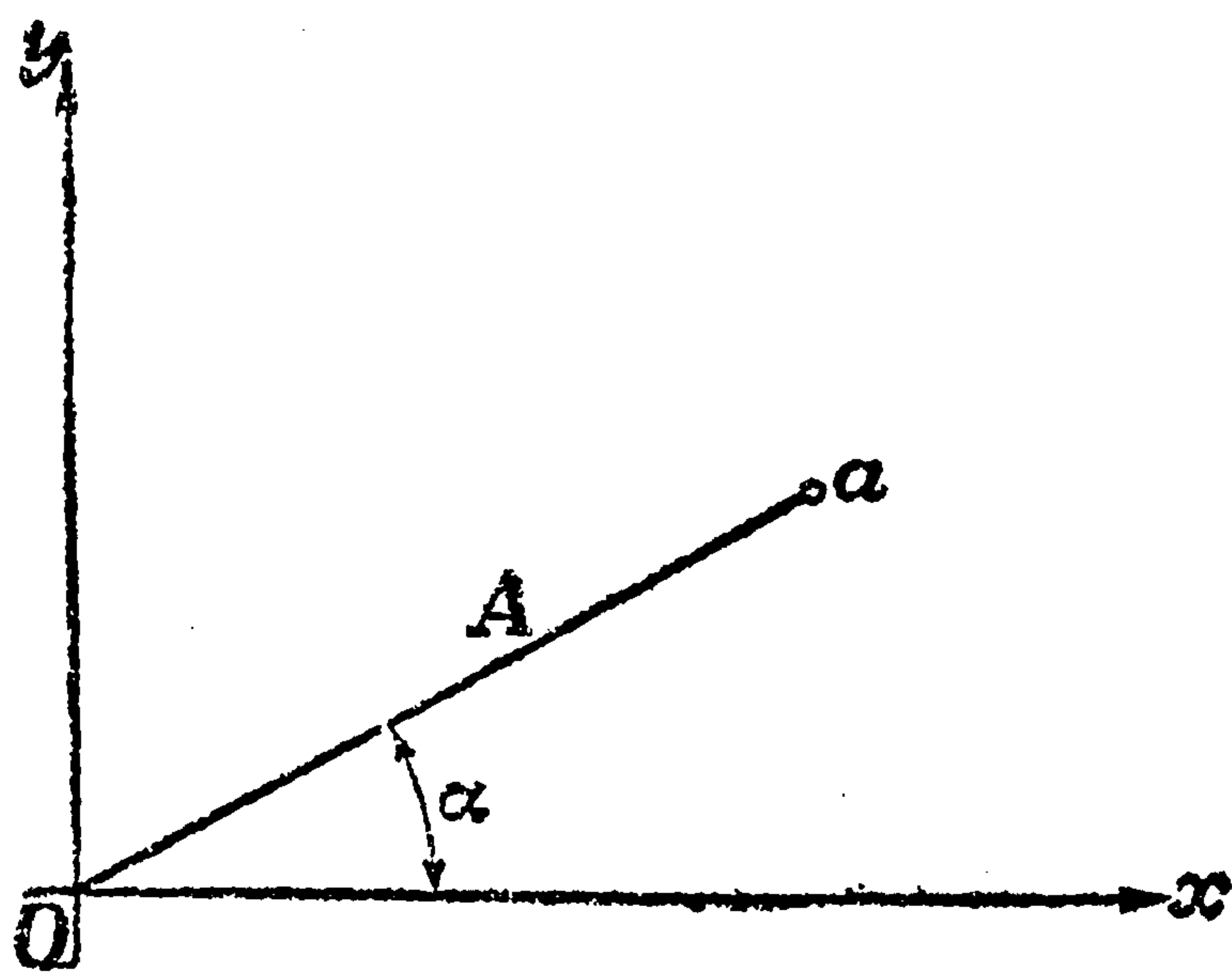
2. Кривошип  $OQ$  длины 15 см вращается в вертикальной плоскости, обратно часовой стрелке, с угловой скоростью 120 оборотов в минуту, имея в начальный момент направление под углом 55° к оси  $Ox$ . Определить движение точки  $P$ , проекции точки  $Q$  на вертикальное направление. Решить ту же задачу, когда кривошип вращается по часовой стрелке. Время измеряется в секундах. Начертить графики.

**Отв.**  $y = 15 \sin(4\pi t + 0,96)$ ;  $y = 15 \sin(-4\pi t + 0,96)$ .

3. Гармоническое колебательное движение осуществляется на практике в кривошипном механизме с поступательно движущейся кулисой (кривошип без шатуна) (черт. 72). Палец  $Q$  кривошипа скреплен с ползуном (камнем), ко-



Черт. 70.

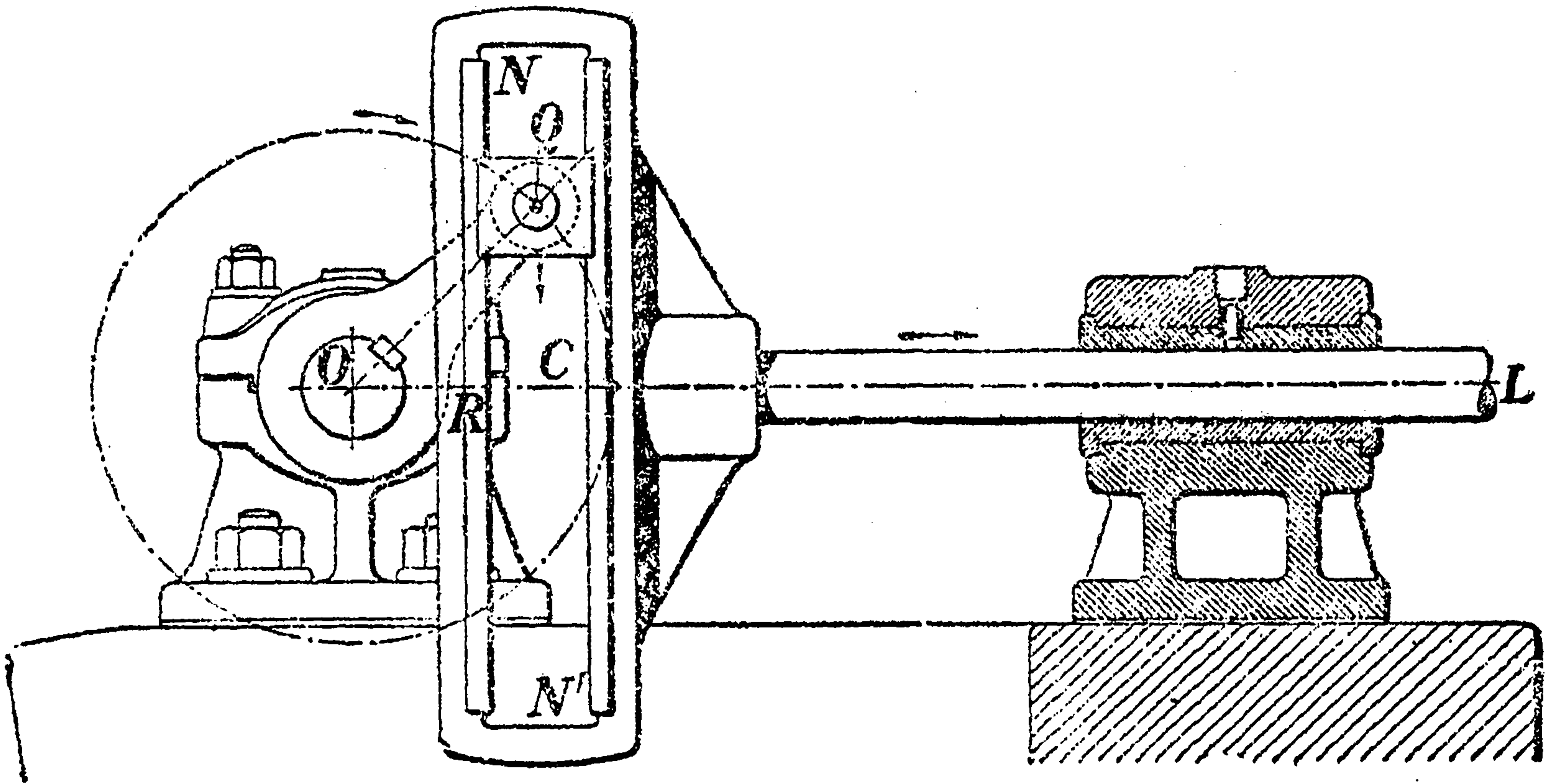


Черт. 71.



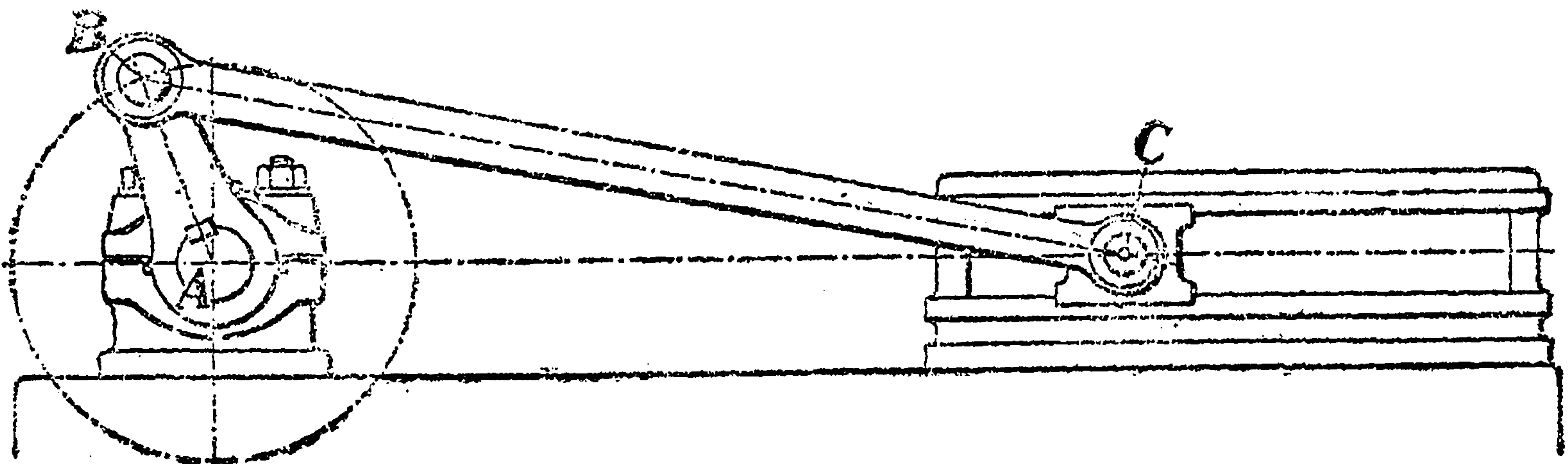
торый может скользить в пазу  $NN'$ , проделанном в кулиссе (раме)  $R$ ; при равномерном вращении кривошипа увлекаемая им кулисса, а вместе с нею и шток  $L$  совершают гармоническое колебательное движение, ибо таковое совершает центр  $C$  кулиссы, являющийся проекцией точки  $Q$  на горизонтальное направление. Указанный механизм применяется в небольших паровых машинах, преимущественно в паровых насосах прямого действия.

4. Обычный кривошипный механизм (черт. 73), в котором кривошип  $AB$  связан с ползуном (или крейцкопфом)  $C$  при помощи шатуна  $BC$ , при равно-



Черт. 72.

мерном вращении кривошипа  $AB$  сообщает ползуну движение *отличающееся* от гармонического колебательного движения. В этом можно дать себе отчет, если из точки  $C$ , как из центра, провести дугу радиусом  $BC$  до пересечения ее в точке  $E$  с горизонтальной осью. Очевидно, движение точки  $C$  будет вполне подобно движению точки  $E$ ; из черт. 74 видно, что последнее несколько разнится от гармонического колебания, производимого проекцией  $D$  точки  $B$  на горизонтальную ось. На чертеже взято  $BC = 5 AB$ , как это бывает обычно; если беско-



Черт. 73.

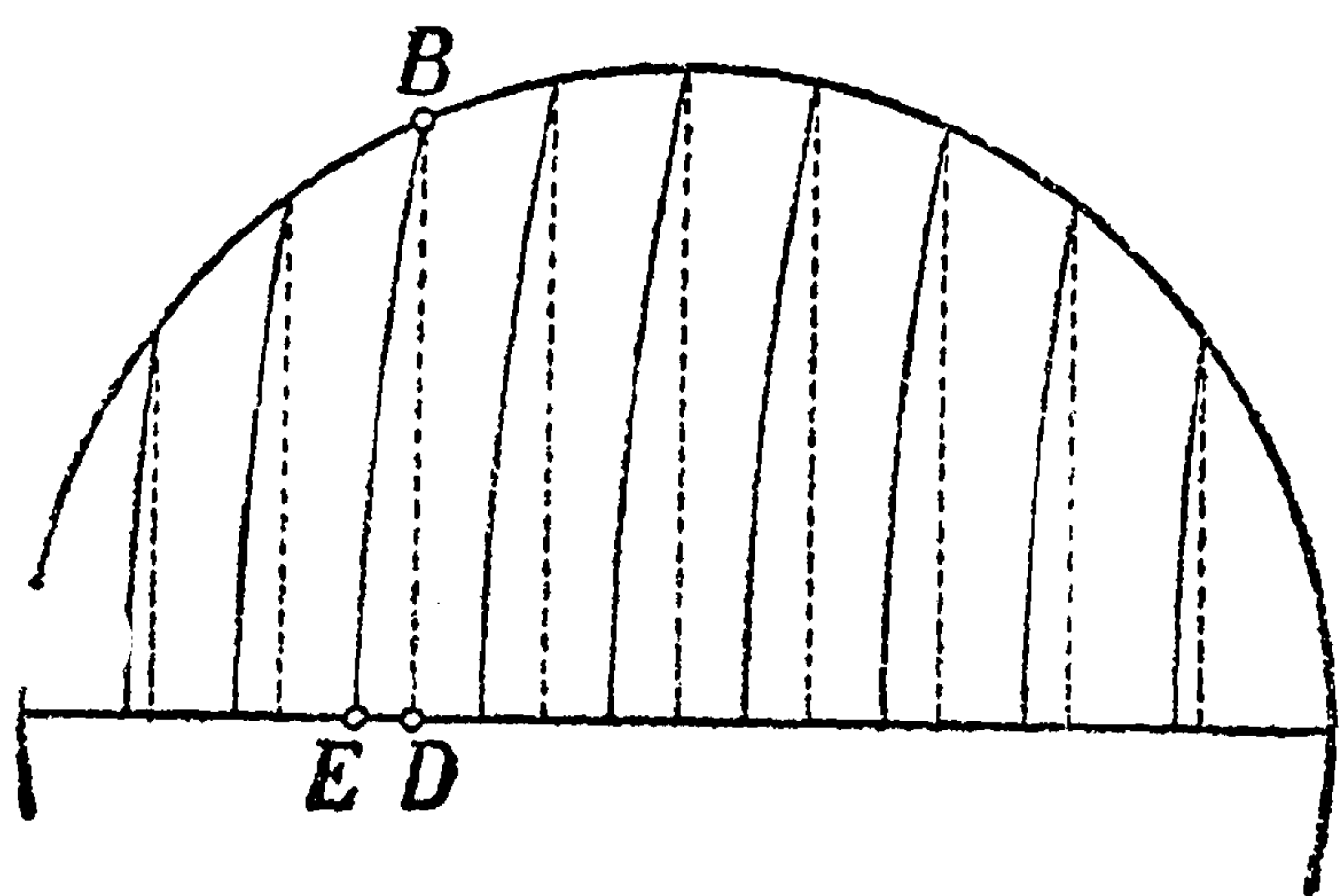
нечно увеличивать это отношение, то дуги  $BE$  сливаются с перпендикулярами  $BD$ , так что при „бесконечно большом“ шатуне движение  $C$  становится гармоническим колебанием.

Разберем теперь точнее движение ползуна  $C$  при „конечной“ длине шатуна. Когда палец кривошипа  $B$  описывает, скажем, по часовой стрелке, верхний полукруг, ползун движется вправо (*прямое* движение), когда же  $B$  описывает нижний полукруг, ползун перемещается влево (*обратное* движение). Положениям  $B_1$  и  $B_2$  точки  $B$  (см. схематический черт. 75), соответствуют так называемые мертвые точки  $C_1$  и  $C_2$ : в них скорость  $C$  обращается в нуль и меняет напра-



вление. Мы будем отдельно рассматривать прямое и обратное движения, и будем путь  $s$ , пройденный точкой  $C$ , отсчитывать в первом случае от  $C_1$ , а во втором — от  $C_3$ . Полагаем  $AB=r$ ,  $BC=l$ ,  $C_1C=s$ ,  $\sphericalangle B_1AB=\alpha$ ,  $\sphericalangle ACB=\theta$ . Тогда из чертежа имеем:  $DA+AC_1+C_1C=DC$ , но  $DA=r \cos \alpha$ ,  $AC_1=l-r$ ,  $C_1C=s$ ,  $DC=l \cos \theta$ ; в результате, выражая отсюда  $s$ , найдем:  $s=r(1-\cos \alpha)-l(1-\cos \theta)$ . Аналогично, для обратного движения полагаем:  $C_3C'=s$ ,  $\sphericalangle B_3AB'=\alpha$ ,  $\sphericalangle AC'B'=\theta$ . Из чертежа получим для этого случая:  $AC_3-AD'-C'C_3=D'C'$  и, снова подставляя:  $AC_3=l+r$ ,  $AD'=r \cos \alpha$ ,  $C'C_3=s$ ,  $D'C'=l \cos \theta$ , найдем для  $s$  выражение:  $s=r(1-\cos \alpha)+l(1-\cos \theta)$ . Оба результата объединяем в равенстве:

$$s=r(1-\cos \alpha) \mp l(1-\cos \theta),$$



Черт. 74.

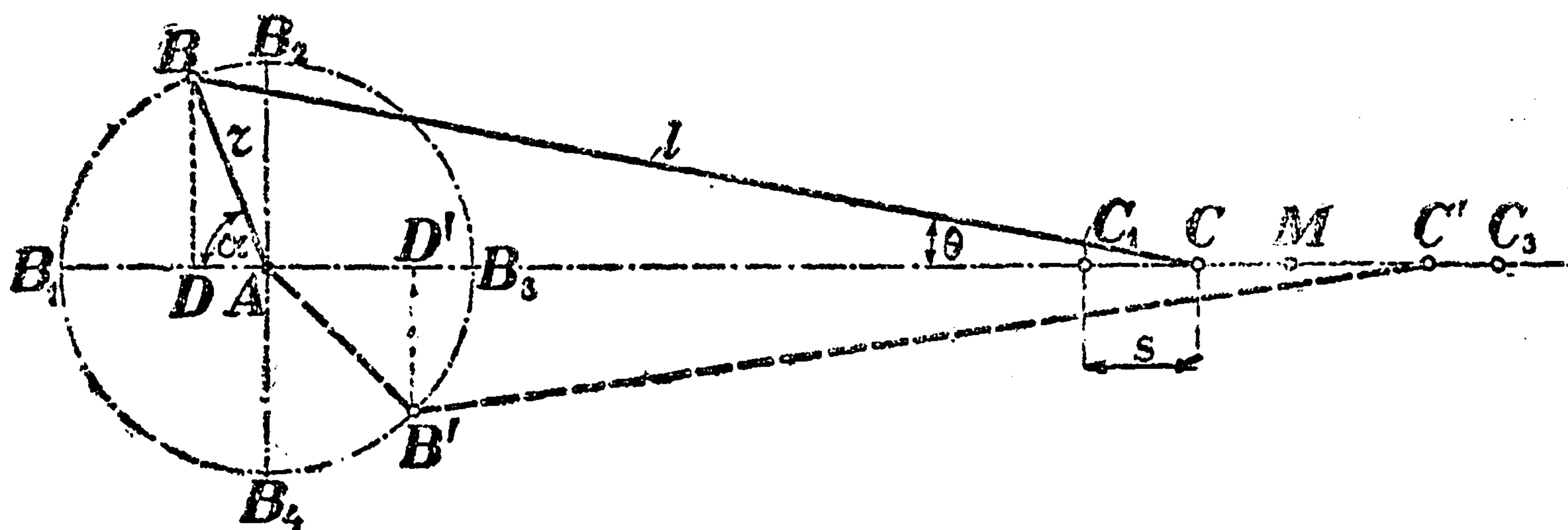
помня, что верхний знак относится к прямому движению, а нижний — к обратному. Определяя катет  $BD$  ( $B'D'$ ) из двух прямоугольных  $\Delta$ -ов  $ABD$  и  $CBD$  ( $AB'D'$  и  $C'B'D'$ ), находим равенство:  $r \sin \alpha=l \sin \theta$ , откуда угол  $\theta$  может быть выражен через  $\alpha$ . Имеем:

$$\sin \theta=\frac{r}{l} \sin \alpha, \text{ так что}$$

$$\cos \theta=\sqrt{1-\frac{r^2}{l^2} \sin ^2 \alpha}.$$

Так как отношение  $\frac{r}{l}$  обыкновенно равно  $\frac{1}{5}$ , так что второй член под корнем мал, то по формуле (32) п<sup>о</sup> 23 заменяют корень через  $1-\frac{r^2}{2l^2} \sin ^2 \alpha$ , и в результате получают хотя и приближенное, но для практических целей достаточно точное равенство:

$$s=r(1-\cos \alpha) \mp \frac{r^2}{2l} \sin ^2 \alpha. \quad (36)$$



Черт. 75.

Предлагается, в виде упражнения, с его помощью установить (в предположении, что  $\frac{r}{l}=\frac{1}{5}$ ): 1) какие положения  $C$  соответствуют положениям  $B_2$  и  $B_4$  точки  $B$ ; 2) какой угол  $\alpha$  соответствует среднему положению ползуна; 3) при каком  $\alpha$  кривошип будет перпендикулярен к шатуну.

Отв. и реш. 1) при  $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ,  $s=r \mp \frac{r^2}{2l}$ ,  $s_2=0,9 r$ ,  $s_4=1,1 r$  (ползун не в среднем положении  $M$ ); 2)  $\cos \alpha=\mp \frac{r}{2l}=\mp 0,1$ ,  $\alpha=95^{\circ}45'$  (при прямом ходе) или  $84^{\circ}15'$  (при обратном); 3)  $\cotg \alpha=\mp \frac{r}{l}=\mp 0,2$ ,  $\alpha=101^{\circ}19'$ , или  $78^{\circ}41'$ .



Формула (36) справедлива при любом законе вращения кривошипа, ибо устанавливает чисто геометрические соотношения между положением пальца кривошипа и ползуна. Если же вращение происходит равномерно, с угловой скоростью  $\omega$ , и время отсчитывается от момента прохождения через точку  $B_1$  ( $B_2$ ), так что  $\alpha = \omega t$ , то формула (36) переписывается так:

$$s = r(1 - \cos \omega t) \mp \frac{r^2}{2l} \sin^2 \omega t. \quad (37)$$

47. Сложение гармонических колебаний одного периода. Если даны две синусоидальные величины одинаковой частоты  $\omega$ :

$$y_1 = A_1 \sin \omega t, \quad y_2 = A_2 \cos \omega t \quad (38)$$

(с разностью фаз  $\frac{\pi}{2}$ ), то легко показать, что их сумма  $y = y_1 + y_2$  также представляет синусоидальную величину той же частоты:

$$y = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (39)$$

причем

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1}. \quad (40)$$

В самом деле, очевидно,

$$y = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cdot \left( \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \sin \omega t + \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} \cos \omega t \right).$$

Множители при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  таковы, что сумма их квадратов равна 1 (с этой целью и вынесен был за скобку  $\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ ); поэтому их можно принять за косинус и синус некоторого угла  $\alpha$ :

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}} = \sin \alpha, \quad (41)$$

так что, полагая  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ , имеем:

$$y = A(\sin \omega t \cdot \cos \alpha + \cos \omega t \cdot \sin \alpha)$$

и остается лишь применить формулу для синуса суммы, чтобы прийти к (39).

Заметим, что все преобразование остается в силе и в том случае, если какая-либо из величин  $A_1$ ,  $A_2$  будет отрицательной. Но тогда при определении начальной фазы  $\alpha$  по ее тангенсу [см. (40)], для установления четверти, в которой лежит угол  $\alpha$ , нужно учесть знаки его синуса и косинуса, т. е. знаки  $A_1$  и  $A_2$ ; вот табличка возможных случаев:

$A_1$	+	-	-	+
$A_2$	+	+	-	-
$\alpha$	I	II	III	IV

Рассмотрим теперь более общий случай сложения величин:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1), \quad y_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Переписав их в виде:

$$y_1 = A_1 \cos \alpha_1 \cdot \sin \omega t + A_1 \sin \alpha_1 \cdot \cos \omega t, \quad y_2 = A_2 \cos \alpha_2 \cdot \sin \omega t + A_2 \sin \alpha_2 \cdot \cos \omega t,$$



для суммы  $y$  этих величин будем иметь:

$$y = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t,$$

так что этот случай приводится к уже изученному случаю сложения величин (38), если там заменить  $A_1$  и  $A_2$  выражениями в скобках. Таким образом и здесь сумма синусоидальных величин  $y_1$  и  $y_2$  представляется в виде (39). При этом, в силу первой из формул (40),

$$\begin{aligned} A^2 &= (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)^2 = \\ &= A_1^2 (\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1) + A_2^2 (\cos^2 \alpha_2 + \sin^2 \alpha_2) + 2 A_1 A_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2), \end{aligned}$$

т. е. (пользуясь формулой для косинуса разности)

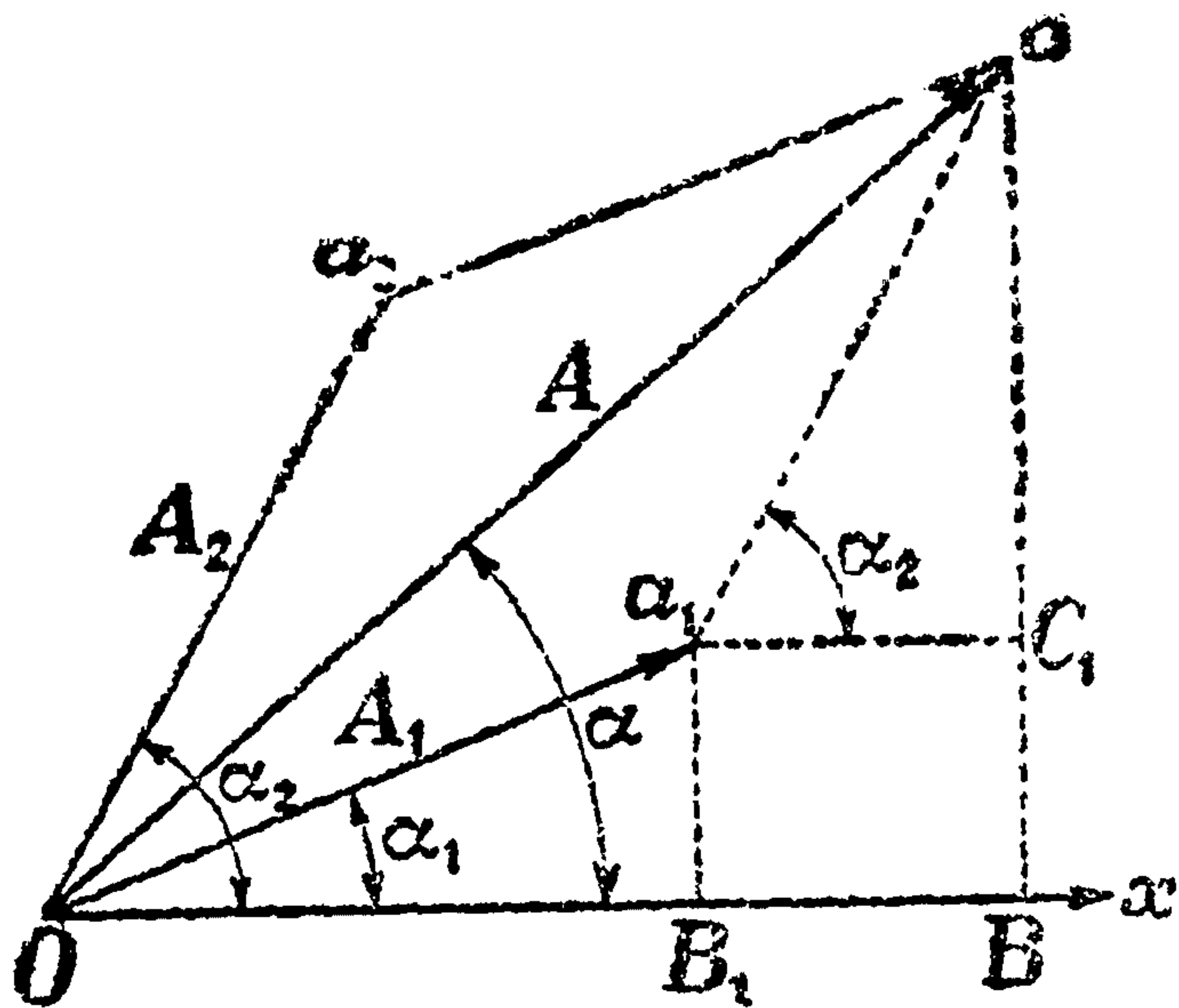
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2),$$

или, наконец,

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \delta}, \quad (42)$$

где  $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$  есть не что иное, как разность фаз величин  $y_1$  и  $y_2$ . \* Угол же  $\alpha$  определяется, согласно (41), равенствами:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}{A}, \\ \sin \alpha &= \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A}. \end{aligned} \quad (43)$$



Черт. 76.

Для фактического определения величин  $A$  и  $\alpha$  удобнее однако использовать геометрическое представление синусоидальных величин, о котором была речь в 46, тогда величина  $y$  определяется простым геометрическим построением. Из точки  $O$  (черт. 76) проводим две прямые под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  к оси  $Ox$  и откладываем на них отрезки  $Oa_1 = A_1$  и  $Oa_2 = A_2$ ; на сторонах  $Oa_1$  и  $Oa_2$  строим параллелограмм,

тогда диагональ его  $Oa$  и представит искомую синусоидальную величину  $y$ , т. е. длина ее  $A$  даст нам амплитуду этой величины, а угол  $\alpha$  ее с осью  $Ox$  — начальную фазу величины  $y$ . Действительно, из  $\triangle Oaa_1$  получается:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2 A_1 A_2 \cdot \cos \sphericalangle Oa_1 a,$$

но  $\cos \sphericalangle Oa_1 a = -\cos \sphericalangle a_1 Oa_2 = -\cos \delta$ , так что  $A$  определяется формулой (42).

С другой стороны, из прямоугольных  $\triangle$ -ов  $OBa$ ,  $OB_1 a_1$  и  $a_1 C_1 a$  имеем:

$$\begin{aligned} OB_1 &= A_1 \cos \alpha_1; \quad B_1 B = a_1 C_1 = a_1 a \cos \alpha_2 = A_2 \cos \alpha_2; \\ BC_1 &= B_1 a_1 = A_1 \sin \alpha_1; \quad C_1 a = a_1 a \sin \alpha_2 = A_2 \sin \alpha_2; \\ OB &= A \cos \alpha = OB_1 + B_1 B = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2; \\ Ba &= A \sin \alpha = BC_1 + C_1 a = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что и угол  $\alpha$  определяется формулами (43). Справедливость нашего построения, таким образом, оправдана.

\* Отсюда ясно, что наибольшее значение амплитуды получается при  $\delta = 0$  (фазы одинаковы), когда  $\cos \delta$  имеет наибольшее значение 1, и  $A$  равно сумме амплитуд  $A_1 + A_2$ ; наименьшее же значение будет при  $\delta = \pi$  (фазы противоположны), когда  $\cos \delta$  имеет наименьшее значение  $(-1)$ , и  $A$  совпадает с разностью амплитуд  $A_1$  и  $A_2$ .



**Задачи.** 1. Начертить кривую, дающую отклонение  $y$  золотника от его среднего положения, если  $y = -1,2 \cos \omega t - 1,8 \sin \omega t$ , где  $\omega$  есть угловая скорость кривошипа, делающего 300 оборотов в минуту. [Указ.  $\omega = 10 \pi$ ; по формулам (40),  $A \doteq 2,16$ ,  $\alpha = 0,59$  ( $33^\circ 40'$ ),  $y = -2,16 \sin(10 \pi t + 0,59) = 2,16 \sin(10 \pi t + 3,73)$ .]

2. Сложить синусоидальные величины:

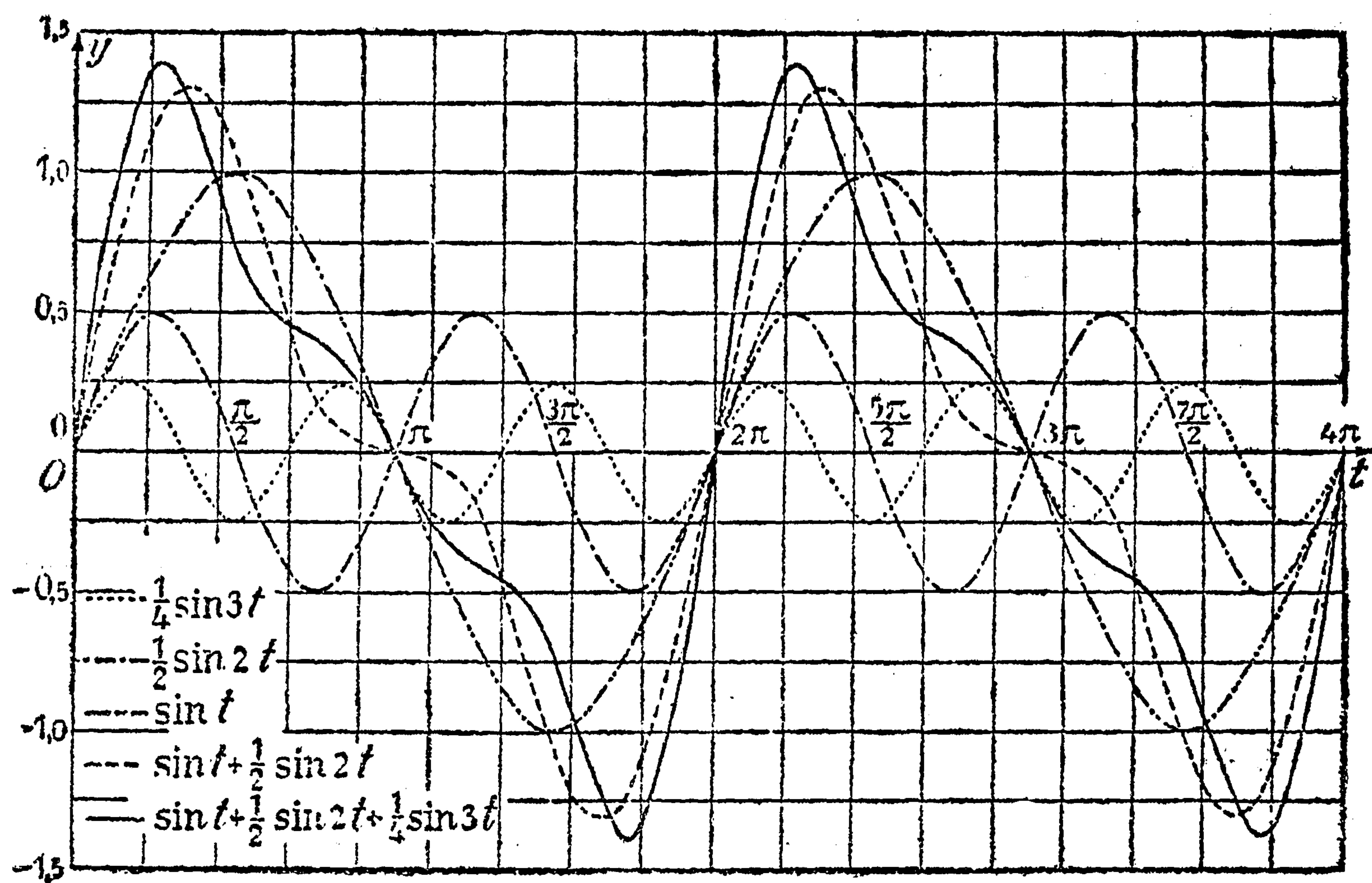
$$y_1 = 4 \sin(t + 0,64), \quad y_2 = 3 \sin(t - 0,71).$$

[Отв.  $A \doteq 5,5$ ;  $\alpha \doteq 0,08$  ( $4,5^\circ$ ).]

48. Сложение гармонических колебаний разных периодов. Биения. Рассмотрим теперь вопрос о сложении двух гармонических колебаний в предположении, что их частоты не равны:

$$y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), \quad y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \quad (\omega_1 \neq \omega_2).$$

С подобным вопросом в технике приходится встречаться, напр., в вопросе о вынужденных колебаниях под влиянием двух возмущающих сил разных периодов или в практике переменного тока.



Черт. 77.

Вообще, хотя периодические явления часто для упрощения считают происходящими по синусоидальному закону, но иной раз такое предположение оказывается слишком грубым приближением и приходится к одной синусоидальной величине прибавлять — в виде поправки — другую такую же величину, но другой частоты, иногда даже и третью и т. д. Обыкновенно амплитуды этих присоединяемых величин значительно меньше амплитуды первой: на основное колебание налагаются, слегка его искажая, более частые, но менее значительные добавочные колебания.

Поставленный вопрос сводится к исследованию хода функции:

$$y = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (44)$$

Хотя в этом случае также можно было бы применить указанное в 45 геометрическое построение, но удобнее, пожалуй, выразив углы в градусах, воспользоваться для вычисления синусов (косинусов) таблицами натуральных тригонометрических величин.

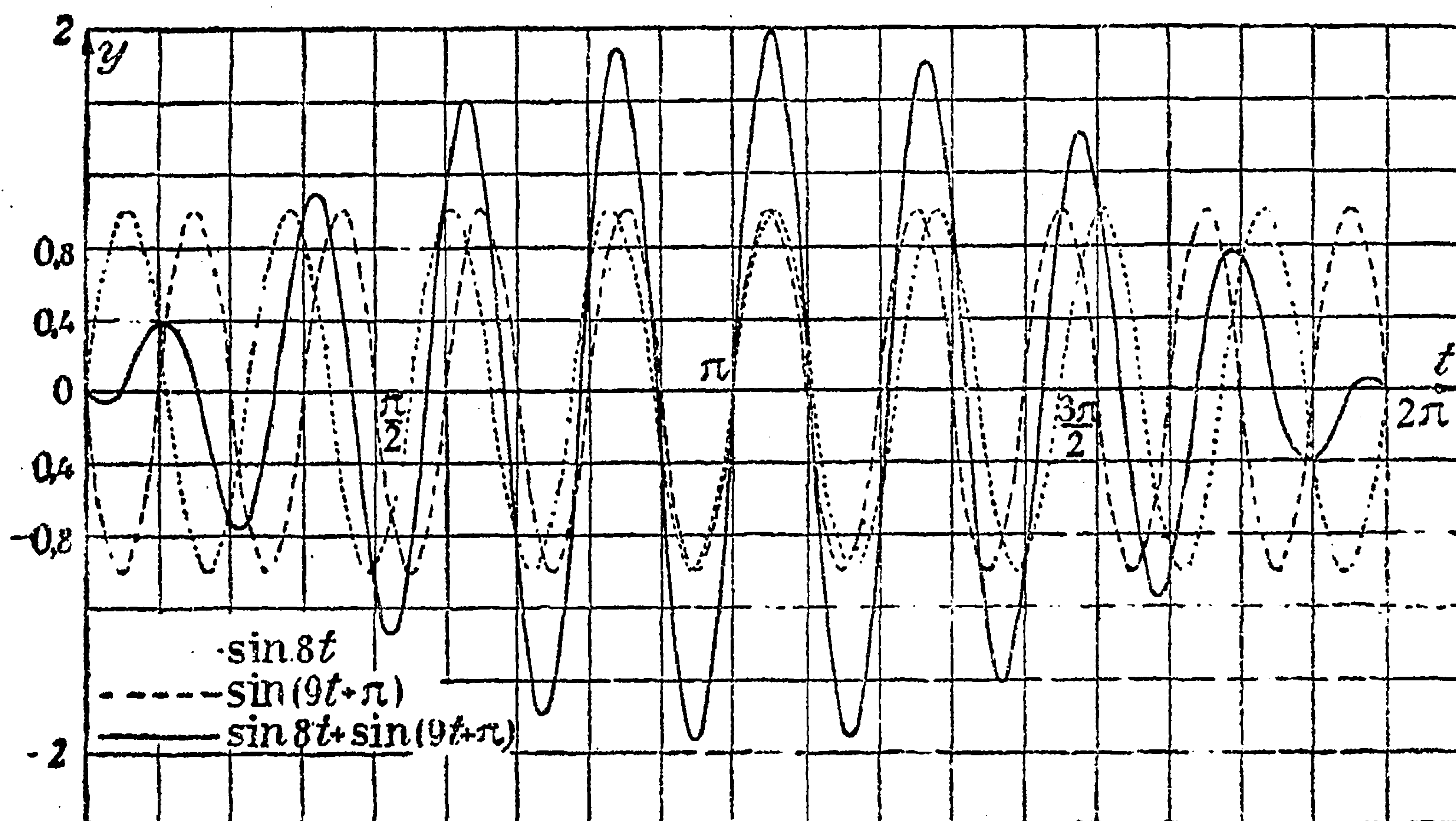


Задачи. 1. Построить графики функций: 1)  $y = \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t$ , 2)  $y = \sin t + \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \sin 3t$ . [Оба графика изображены на черт. 77.]

2. Ускорение поршня в паровой машине, в зависимости от угла  $\alpha$  кривошипа с горизонтальной осью, дается формулой:

$$\omega = \frac{\pi^2 n^2 r}{900} \left( \cos \alpha + \frac{r}{l} \cos 2\alpha \right),$$

где  $n$  — число оборотов в минуту,  $r$  — длина кривошипа, а  $l$  — длина шатуна. Построить график этой зависимости, для  $\alpha$  от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , полагая  $n = 120$ ,  $r = 0,5$  (м),  $l = 2,5$  (м).



Черт. 78.

3. Перемещение  $y$  золотника, считая от его среднего положения, выражается так:

$$y = 2,6 \sin(\alpha + 32^\circ) + 0,2 \sin(2\alpha + 105^\circ).$$

Начертить эту кривую, меняя  $\alpha$  от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .

4. Изменение напряжения в цепи переменного тока дается уравнением:

$$E = 150 \sin 100 \pi t + 50 \sin(300 \pi t + \pi).$$

Построить график для  $t$  от 0 до 0,02 (масштаб!).

5. Построить графики:

$$1) y = \sin 8t + \sin(9t + \pi) \text{ (черт. 78);}$$

$$2) y = \frac{1}{2} \sin 10t + \frac{1}{3} \sin 9t \text{ (черт. 79).}$$

Графики на черт. 78 и 79 подводят нас к явлению так называемых *биений*, имеющих место при сложении гармонических колебаний, отношение периодов которых близко к 1. Биения состоят в том, что амплитуда суммарного колебания периодически то возрастает, то почти затухает и т. д. Особенно это заметно, если амплитуды колебаний равны (как в задаче 5, 1).



Биения можно наблюдать, например, на двухвинтовом корабле: числа оборотов обоих винтов очень близки, но, обыкновенно, не совпадают, так что их отношение ничтожно разнится от 1.

Такие же „биения“ можно наблюдать и в лампочке накаливания, если две динамо-машины переменного тока соединены вместе.

Для объяснения явления биений рассмотрим снова выражение (44). Обозначая разность аргументов обоих синусов через  $\psi$ :

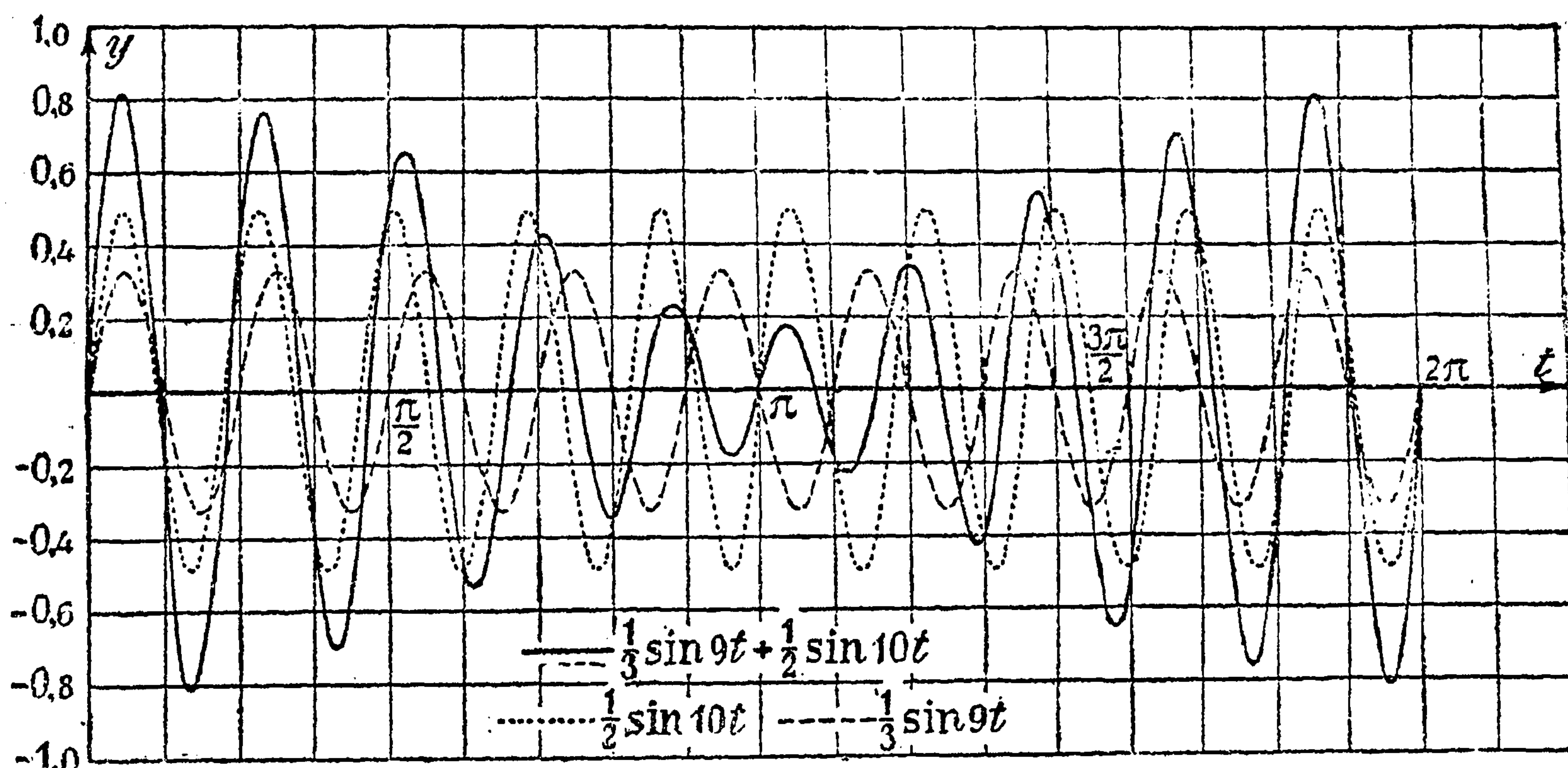
$$\psi = (\omega_2 - \omega_1) t + \alpha_2 - \alpha_1. \quad (45)$$

перепишем (44) в следующем виде:

$$y = A_1 \sin (\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin (\omega_1 t + \alpha_1 + \psi),$$

или, преобразуя второе слагаемое по формуле синуса суммы,

$$y = (A_1 + A_2 \cos \psi) \sin (\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin \psi \cdot \cos (\omega_1 t + \alpha_1).$$



Черт. 79.

Эту сумму можно представить в виде одной синусоидальной величины подобно тому, как это сделано в 47. Именно, вынося за скобку

$$B = \sqrt{(A_1 + A_2 \cos \psi)^2 + (A_2 \sin \psi)^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \psi}.$$

доби  $\frac{A_1 + A_2 \cos \psi}{B}$  и  $\frac{A_2 \sin \psi}{B}$  можно принять за косинус и синус некоторого угла  $\theta$  (ибо сумма их квадратов равна 1!)

$$\cos \theta = \frac{A_1 + A_2 \cos \psi}{B}, \quad \sin \theta = \frac{A_2 \sin \psi}{B},$$

так что выражение для  $y$  (снова применяя формулу для синуса суммы) окончательно перепишется в виде:

$$y = B \sin (\omega_1 t + \alpha_1 + \theta).$$

Следует помнить, что  $B$  и  $\theta$  зависят от  $\psi$ , т. е. в виду (45) и от времени  $t$ ! Однако, если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  очень близки (или отношение их близко к 1), то  $\psi$  меняется очень медленно, так что на протяжении небольшого промежутка времени коле-



бание можно считать происходящим как бы по синусоидальному закону — при постоянных  $B$  и  $\theta$ . Амплитуда колебания  $B$  сама меняется от своего наименьшего значения  $|A_1 - A_2|$ , соответствующего  $\cos \psi = -1$ , до наибольшего значения  $A_1 + A_2$  при  $\cos \psi = 1$ , и обратно, причем возврат к прежней величине амплитуды происходит по истечении промежутка времени  $\tau = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$ , как это ясно из (45), так как именно за этот промежуток времени  $\psi$  получает приращение в  $2\pi$ . Вводя числа периодов в единицу времени [46],

$$N_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2\pi}, \quad N_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{\omega_2}{2\pi} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{1}{\tau},$$

из найденного для  $\tau$  выражения (считая для простоты  $N_1 > N_2$ ), получим:

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = N_1 - N_2,$$

т. е. число биений в единицу времени равно разности между числами периодов обоих колебаний в единицу же времени.

**49. Обратные тригонометрические или круговые функции.** Перейдем к изучению функций, обратных [43] тригонометрическим функциям  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ .

Если задано значение *синуса*, равное  $y$ , то, как известно из тригонометрии, ему соответствует не один угол, а бесчисленное множество углов.

Так, напр., если  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , то соответствующие углы будут  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$  и все те, которые получаются из этих углов прибавлением или вычитанием любого целого числа полных окружностей, т. е. прибавлением слагаемого вида  $2k\pi$ , где  $k$  — любое целое число, положительное или отрицательное. Это становится ясным и из рассмотрения графика функции  $y = \sin x$  (черт. 67), бесконечно продолженного вправо и влево: если на оси  $Oy$  отложить отрезок  $y$  и через конечную точку провести прямую, параллельную оси  $Ox$ , то она встретит график в бесконечном множестве точек, которые и определяют бесконечное множество значений  $x$ , соответствующих данному  $y$ ; сама извилистость формы синусоиды обуславливает [по замечанию в 43] множественность этих значений! Таким образом, функция, обратная функции  $y = \sin x$ , оказывается *многозначной* и даже, можно сказать, бесконечно-многозначной. Эту функцию обозначают так:  $x = \operatorname{arcsin} y$ , или (переставляя, как всегда,  $x$  и  $y$ ):  $y = \operatorname{arcsin} x$ \* (читается: „арксинус  $x$ “), „угол (собственно — дуга), синус которой равен  $x$ “. Напр.,

$$\operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{или} \quad \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

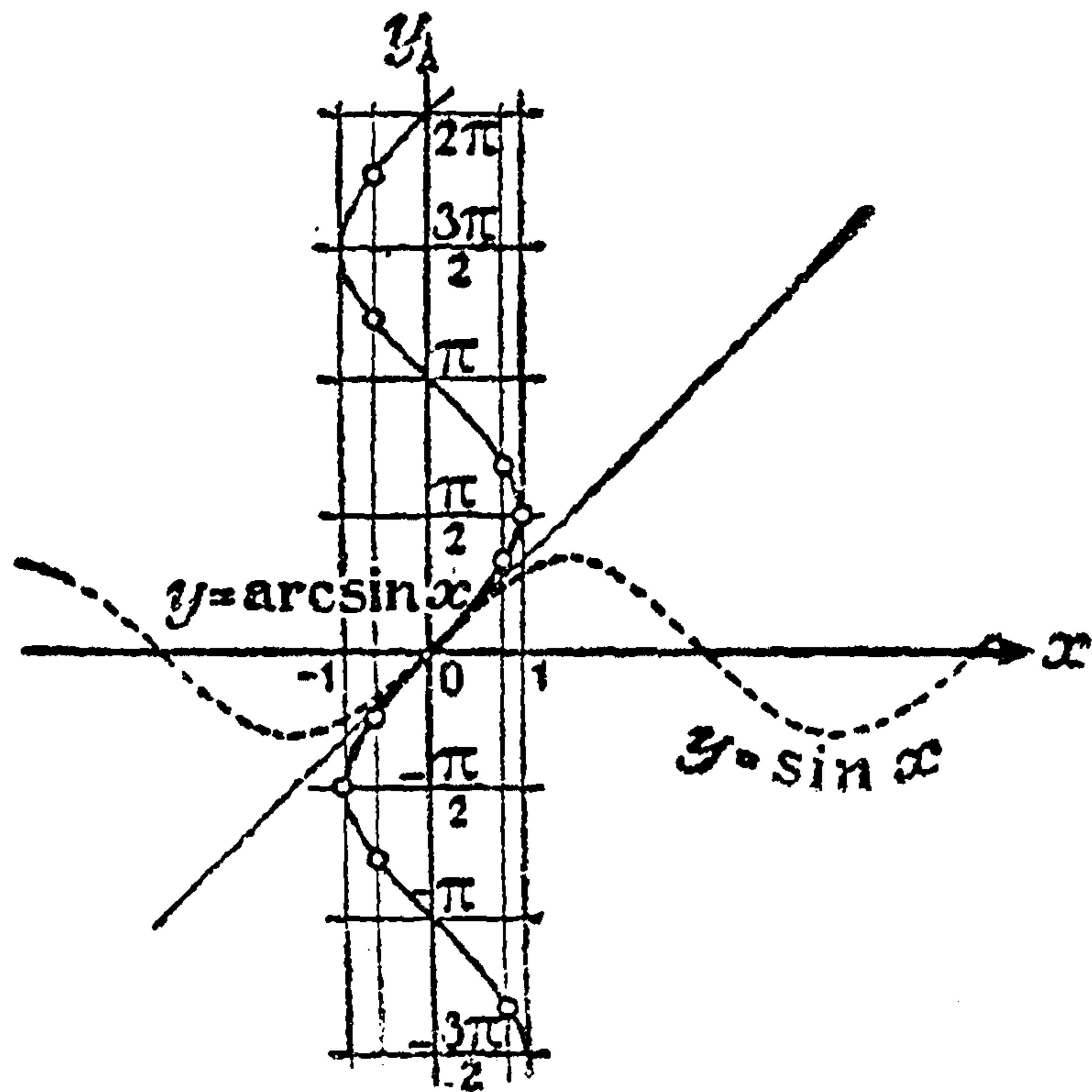
Напомним еще раз, что угол здесь *всегда* выражается в дуговой мере.

\* Следует помнить, что в обозначении „arcsin“ нашей функции нельзя отделять „arc“ от „sin“; это — цельное функциональное обозначение! Нельзя, конечно, и рассматривать „arc“ как множитель.

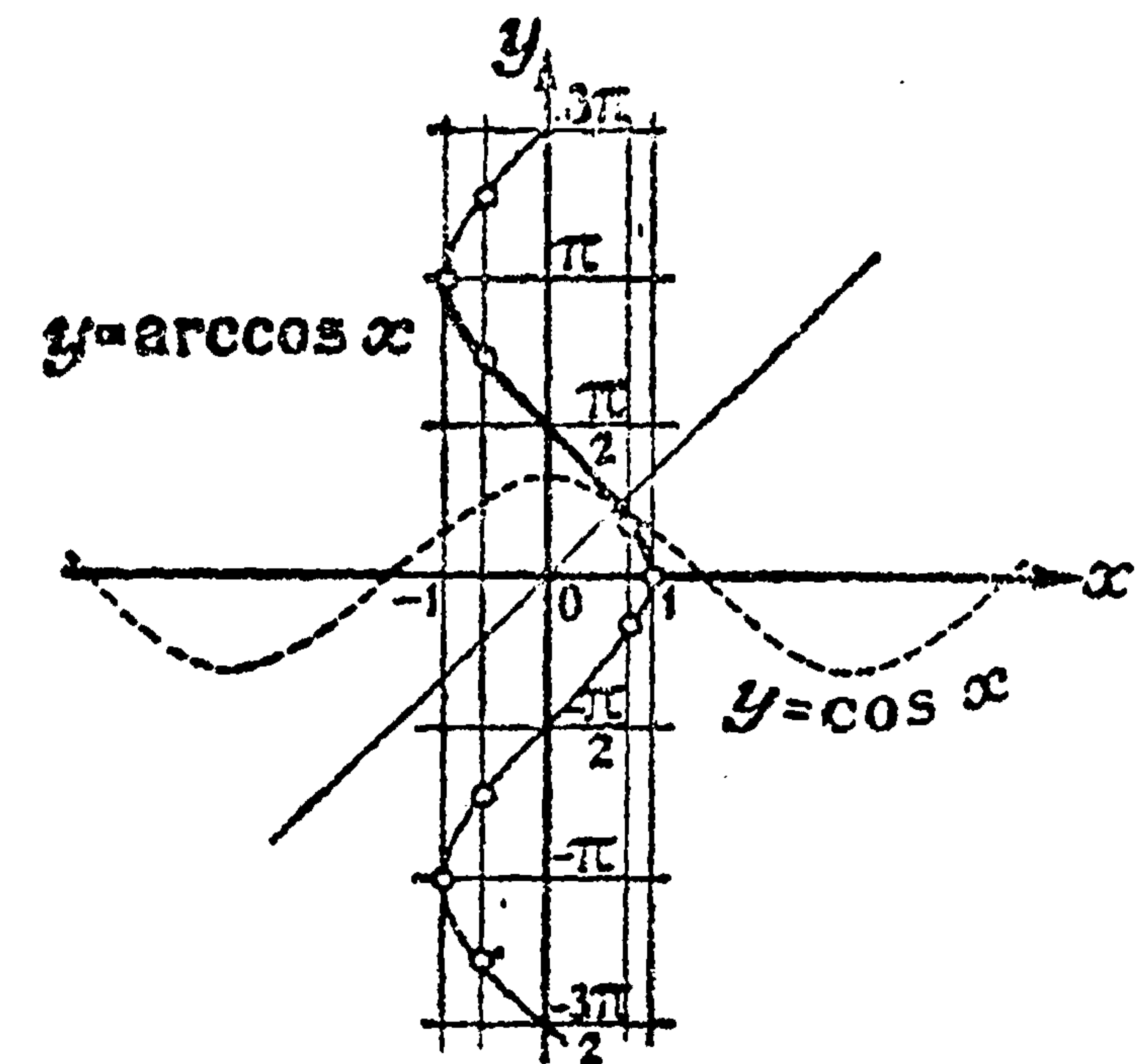


График функции  $y = \arcsin x$  (черт. 80) получается из графика функции  $y = \sin x$  обычным приемом [43]: поворачиванием чертежа на  $180^\circ$  вокруг биссектрисы первого координатного угла. Теперь, естественно, прямая, параллельная оси  $Oy$ , пересекает график в бесконечном множестве точек, так что данному значению абсциссы  $x$  соответствует бесконечное множество ординат  $y$ .

Для того, чтобы можно было действовать с такой многозначной функцией, нужно ввести дополнительное условие, указывающее, какое из многих значений мы должны брать; другими словами, нужно ввести условие, превращающее нашу функцию в *однозначную*. В рассматриваемом случае функции  $y = \arcsin x$  это проще всего можно сделать геометрически, — достаточно выделить из всей кривой такую ее часть, чтобы она пересекалась любой прямой, параллельной оси  $Oy$ , *только в одной точке*. Мы видим, что этому требованию удовлетворяет как раз часть кривой, начерченная жирно, и кроме того



Черт. 80.



Черт. 81.

ясно, что эта часть не может быть продолжена в ту или иную сторону без нарушения поставленного требования однозначности. Выделение же из всего графика функции  $y = \arcsin x$  лишь указанной части сводится к тому, что мы из всех возможных значений угла  $y = \arcsin x$  выбираем только те, которые лежат в пределах от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ ; при этом дополнительном условии функция  $y = \arcsin x$  становится однозначной. В дальнейшем, говоря о функции  $y = \arcsin x$ , мы будем подразумевать именно то значение угла  $y$ , которое лежит в промежутке  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , т. е. в первой или в четвертой четверти. Поэтому, напр.,

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\arcsin (-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Аналогичное рассуждение для функции  $y = \arccos x$  („угол  $y$ , которого косинус равен  $x$ “) приводит нас к графику черт. 81, из которого для однозначности  $y$  нам нужно сохранить лишь жирно начерченную часть. Это равносильно ограничению угла  $y$  промежутком  $(0, \pi)$ .



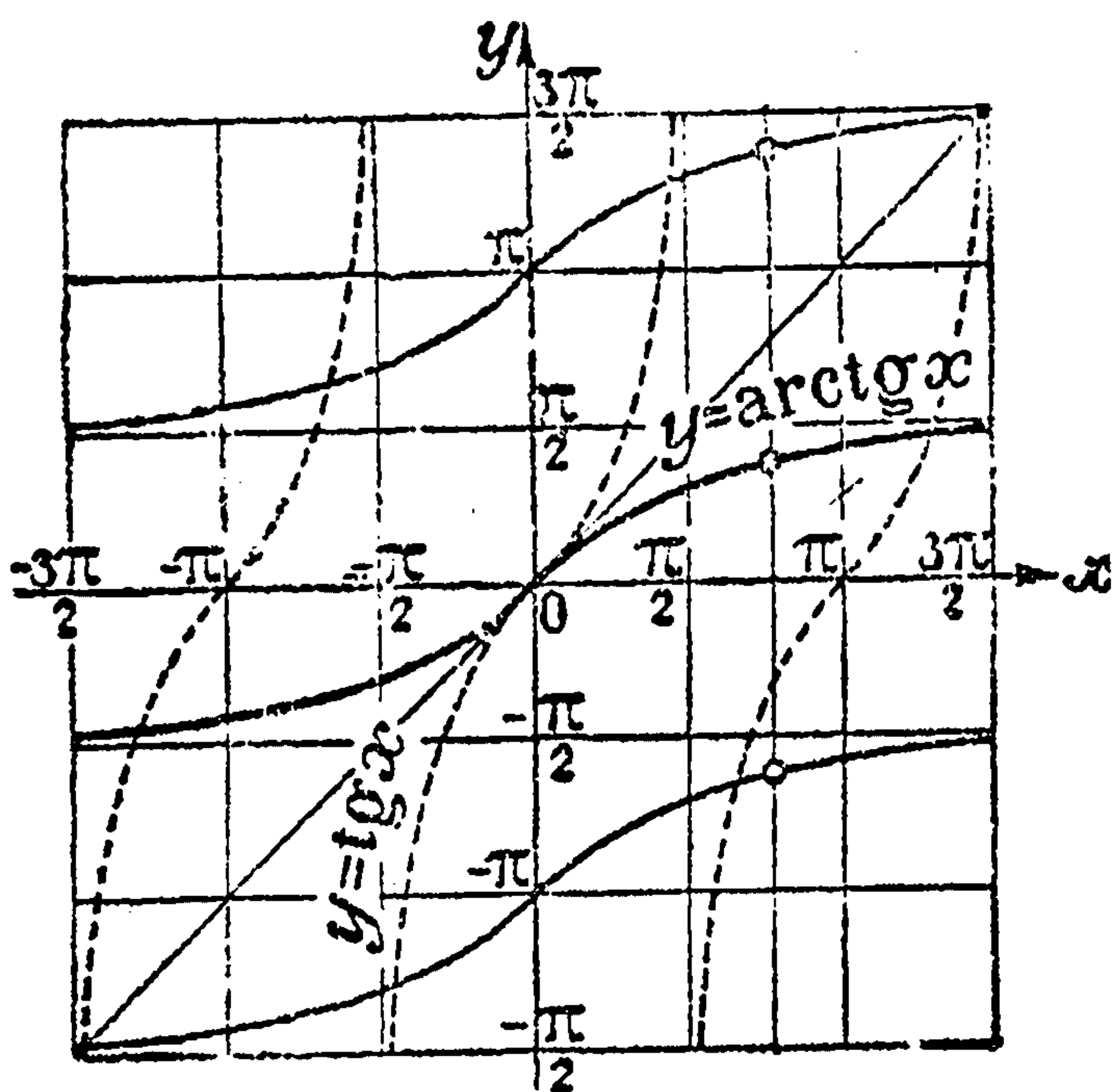
Очевидно, аргумент  $x$  функций  $\arcsin x$  и  $\arccos x$  может принимать значения лишь от  $-1$  до  $1$  (ибо  $x$  должно быть синусом или косинусом некоторого угла).

Функция, обратная  $\operatorname{tg} x$ , называется  $\operatorname{arctg} x$  и означает „угол, которого тангенс равен  $x$ “; эта функция изображена на черт. 82. Условие однозначности выполнено для жирной части кривой, что приводит к ограничению угла  $y = \operatorname{arctg} x$  промежутком  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , как и в случае  $\arcsin x$ . Таким образом, напр.,

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Если  $x \rightarrow \pm \infty$ , то, как видно из графика,  $\operatorname{arctg} x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ . Можно сказать, что прямые  $y = \pm \frac{\pi}{2}$  являются *асимптотами* для нашей кривой.

Предоставляем читателю самому исследовать функцию  $y = \operatorname{arccotg} x$  („угол  $y$ , которого котангенс равен  $x$ “), значения которой берутся между  $0$  и  $\pi$ , подобно  $\arccos x$ .



Черт. 82.

Все эти функции  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ ,  $\operatorname{arccotg} x$  носят общее название *обратных тригонометрических* или *круговых* функций.

Известные свойства тригонометрических функций приводят к ряду соотношений, связывающих и обратные им функции. Напр., из того, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y (= x), \text{ следует:}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - y, \quad \arcsin x = y,$$

так что

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

**50. Гиперболические функции.** В некоторых вопросах техники (провисание канатов и проводов, очертание мостовых арок, и др.) встречаются функции:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Они получили даже особое название, именно первую из них называют *гиперболическим косинусом*, а вторую — *гиперболическим синусом*, и обозначают символами:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

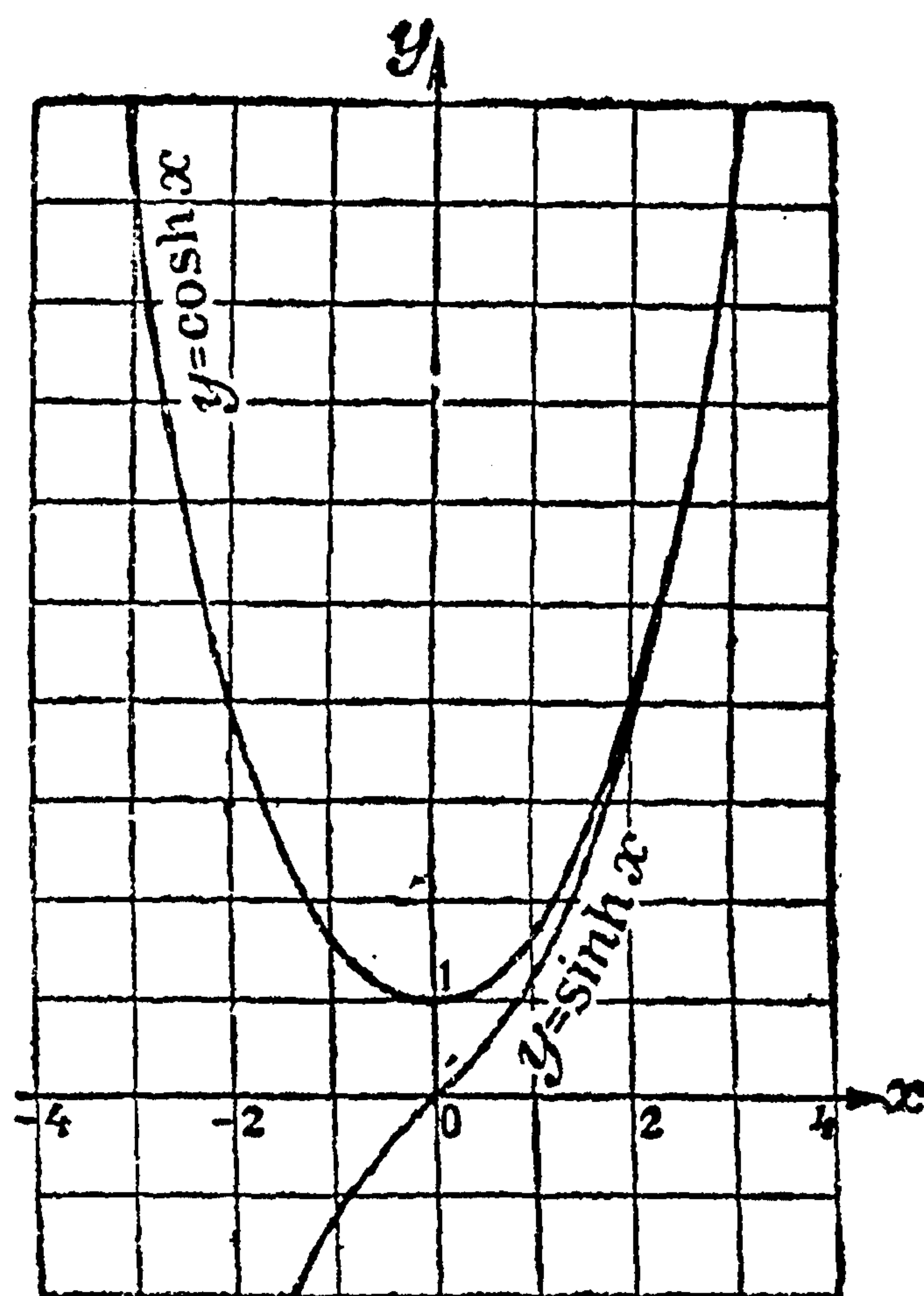


Графики этих функций изображены на черт. 83. Кривая  $y = \operatorname{ch} x$  симметрична по отношению к оси  $Oy$ , потому что  $\operatorname{ch} x$  сохраняет значение при изменении знака аргумента, и весьма быстро [43] идет кверху по обе стороны от нее; в точке  $x=0$  она имеет наименьшее значение 1. Функция  $y = \operatorname{sh} x$  все время возрастает; она отрицательна при  $x < 0$  и положительна при  $x > 0$ . При больших значениях  $x$  обе функции  $\operatorname{ch} x$  и  $\operatorname{sh} x$  с достаточной степенью точности можно заменить просто показательной функцией  $\frac{1}{2}e^x$ , ибо они отличаются от  $\frac{1}{2}e^x$  слагаемым вида  $\pm \frac{1}{2}e^{-x}$ , которое быстро убывает, когда  $x \rightarrow +\infty$  [44, (29)].

Кроме функции  $\operatorname{sh} x$  и  $\operatorname{ch} x$ , в приложениях встречаются также *гиперболические тангенс и котангенс*, которые определяются аналогично обыкновенным тангенсу и котангенсу и обозначаются символами

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$



Черт. 83.

Графики этих функций изображены на черт. 84.

Все эти функции объединяются под общим названием *гиперболических функций*. Между ними и равнобочной гиперболой [41, 101] существует связь, аналогичная связи между обыкновенными синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом и кругом [см. ниже, 110 и 171, 10]; этим и объясняется их название.

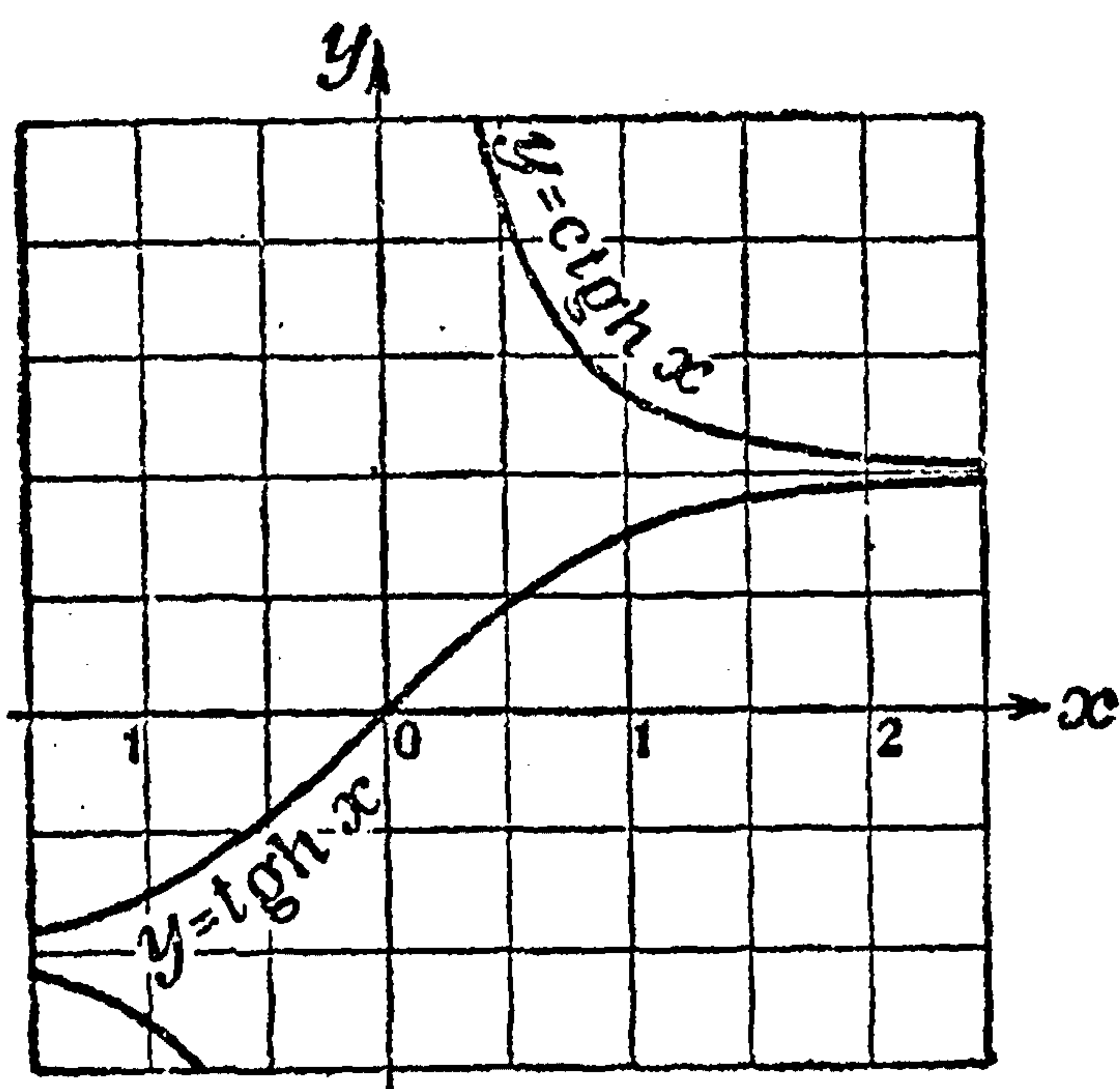
Гиперболические функции обладают многими свойствами, аналогичными свойствам тригонометрических функций; мы докажем только свойство:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (46)$$

предоставив доказательство остальных, в виде упражнения, читателям. Очевидно, имеем:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1,$$



Черт. 84.



что и требовалось доказать. Аналогичным путем доказываются и другие свойства:

$$\operatorname{sh}(a \pm b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b; \quad \operatorname{ch}(a \pm b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b \pm \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x; \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

В инженерных справочниках часто приводятся таблицы значений как самих гиперболических функций, так и их логарифмов.

Приведем примеры использования этих функций.

*Примеры.* 1. Провисание провода (каната, цепи и т. п.) происходит по так называемой *цепной линии*, уравнение которой (при некотором выборе осей) будет:  $y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ , где  $a$  — некоторая постоянная. (К этой линии мы ниже многократно будем возвращаться.) Если расстояние между точками привеса (предполагая их на одной высоте) обозначить через  $2l$ , то длина  $2s$  всего провисающего провода выразится так:  $2s = 2a \cdot \operatorname{sh} \frac{l}{a}$ .

2. Если обозначить через  $r$  (ом/км) сопротивление телеграфного провода на 1 км, а через  $l$  (км/ом) — проводимость среды, отделяющей провод от земли, то падение потенциала на расстоянии  $L$  км от питающего конца выразится формулой:  $E = a \cdot \operatorname{ch} \sqrt{rl} \cdot L + b \cdot \operatorname{sh} \sqrt{rl} \cdot L$ , где  $a, b$  — постоянные.

**51. Решение уравнений с помощью графиков.** Пользуясь графиками функций, изученных в предыдущих пп<sup>0</sup>, можно *графически решать уравнения* разных типов; особенно если не требуется большой точности. Если все члены уравнения перенести в левую часть и получившееся слева выражение обозначить через  $f(x)$ , то уравнение запишется в виде:  $f(x) = 0$ . Требуется найти корни этого уравнения, т. е. значения  $x$ , обращающие  $f(x)$  в 0. Для этого достаточно начертить график функции  $y = f(x)$  и установить точки его пересечения с осью  $Ox$ ; так как ординаты этих точек равны нулю, то их абсциссы и дадут нам искомые корни. Так, напр., представленный на черт. 28 график функции  $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 7$  позволил нам определить корень  $x = -3,6$  уравнения  $x^3 + 2x^2 - 4x + 7 = 0$ . Обыкновенно однако выгоднее бывает разбить члены уравнения на две группы и одни сосредоточить в левой части уравнения, а другие — в правой, т. е. представить уравнение в виде:  $f(x) = \varphi(x)$ . Тогда дело сводится к построению двух, но более простых графиков:  $y = f(x)$  и  $y = \varphi(x)$ , и искомые корни будут абсциссами точек пересечения этих графиков. Действительно, если  $x_0$  есть абсцисса одной из этих точек, то для  $x = x_0$  ординаты точек обеих кривых  $y = f(x)$  и  $y = \varphi(x)$  совпадают, т. е.  $f(x_0) = \varphi(x_0)$ .

Особенно просто обстоит дело, если одна из рассматриваемых функций, скажем,  $\varphi(x)$  будет линейной:  $\varphi(x) = ax + b$ . Тогда график функции  $y = f(x)$  придется просто пересечь прямой  $y = ax + b$  [34], которую построить легко. Часто бывает, что нужно решать однотипные уравнения, различающиеся только коэффициентами линейной функции; тогда тщательно вычерчивают график функции  $y = f(x)$ , который может служить для решения многих задач, а затем ограничиваются лишь проведением прямых линий.

I. Под этот тип, очевидно, подходят уравнения второй и третьей степени:

$$x^2 + px + q = 0, \quad x^3 + px + q = 0,$$

так как они могут быть представлены в виде:

$$x^2 = -px - q, \quad x^3 = -px - q.$$

Таким образом, их решение получается при помощи пересечения прямой  $y = -px - q$  с той или другой из кривых  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ , раз навсегда начерченных на листе миллиметровой бумаги. Для примера, на черт. 85 приведено решение уравнений:  $x^2 + 2x - 7,8 = 0$  ( $x_1 = 1,65$ ) и  $x^3 - \frac{7}{4}x + \frac{3}{4} = 0$  ( $x_1 = -1,5$ ;  $x_2 = 0,5$ ;  $x_3 = 1$ ).



Полное уравнение третьей степени следует предварительно привести к виду:  $x^3 + px + q = 0$  [15]. В виде упражнения, предлагается наново решить этим путем уравнение  $x^3 + 2x^2 - 4x + 7 = 0$ .

**Задачи.** 1. Решить графически уравнения третьей степени, приведенные в п<sup>о</sup> 15.

2. Для того чтобы полая круглая балка, с внешним диаметром  $D$  и внутренним диаметром  $d$ , оказывала такое же сопротивление изгибу, что и сплошная балка диаметра  $d$ , должно выполняться условие:

$$\frac{D^4 - d^4}{D} = d^3.$$

Положив  $\frac{D}{d} = x$ , найти отсюда это отношение.

**Указ.** Уравнение:  $x^4 = x + 1$ , решается пересечением кривой  $y = x^4$  и прямой  $y = x + 1$ ; кривую начертить для  $x$  от 0 до 2, взяв по оси  $Oy$  в десять раз больший масштаб, чем по оси  $Ox$ . **Отв.** 1,22.

II. Графики тригонометрических функций  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  применяются для решения часто встречающихся в технических вопросах уравнений типа:

$$\sin ax = ax, \quad \cos ax = ax,$$

$$\operatorname{tga} x = ax, \quad \operatorname{ctg} ax = \frac{a}{x},$$

и т. п.

Напр., на черт. 86 а выполнено решение уравнения  $\sin x = 0,2x$ ; корень 2,6 этого уравнения является абсциссой

точки пересечения синусоиды с прямой  $y = 0,2x$ .

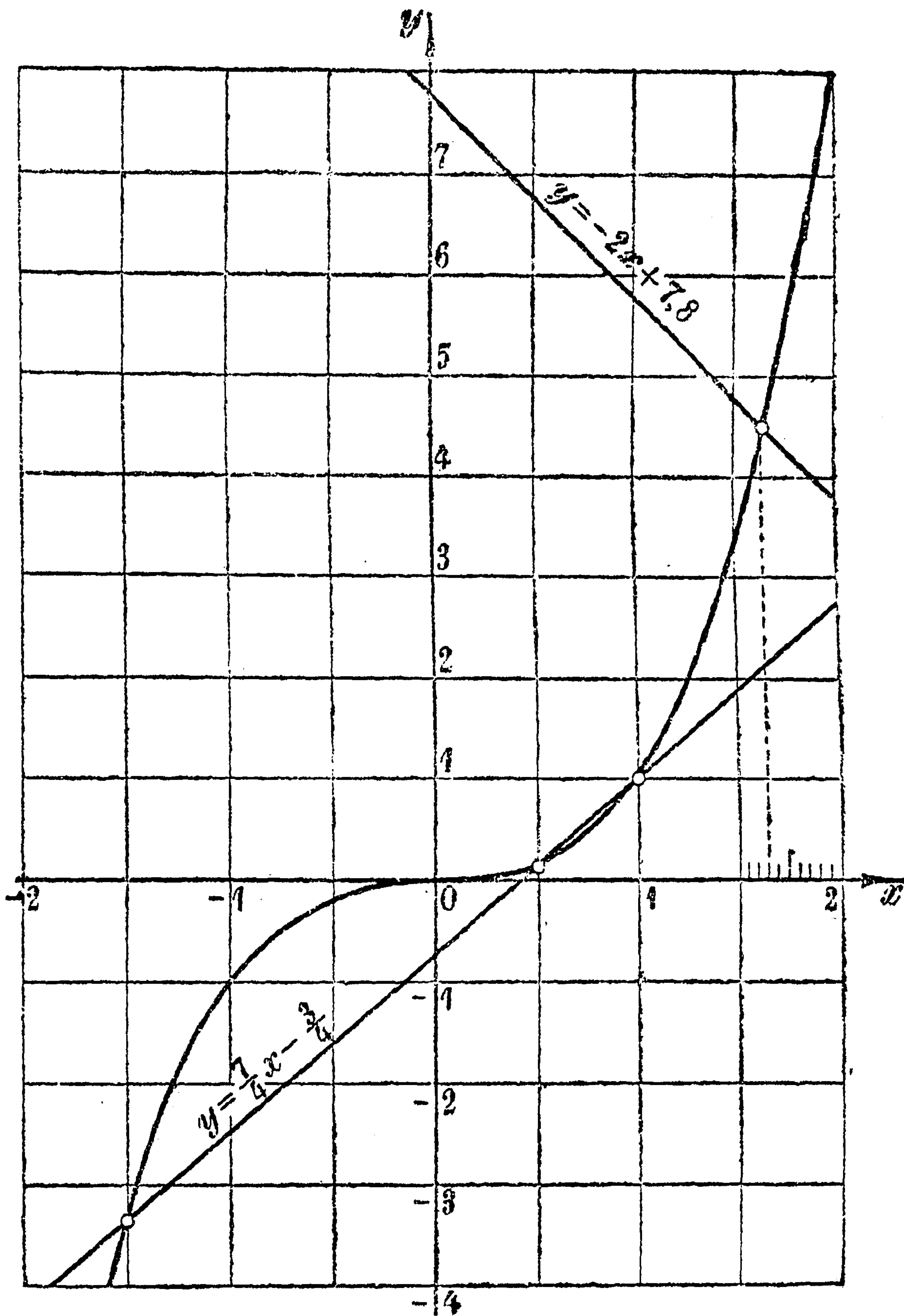
**Задачи.** 3. По круглой трубе диаметра  $d$  м (в свету) течет вода со скоростью  $v$  м/сек., причем расход ее составляет  $Q$  м<sup>3</sup>/сек. Тогда центральный угол  $x$  в сечении трубы, отвечающий „мокрому периметру“, определяется из уравнения

$$x - \sin x = \frac{8Q}{d^2 \cdot v}.$$

Найти этот угол, если  $d = 0,9$  м,  $v = 0,7$  м/сек.,  $Q = 0,13$  м<sup>3</sup>/сек.

**Отв.**  $\sin x = x - 1,83$ ;  $x = 2,46$  (141°).

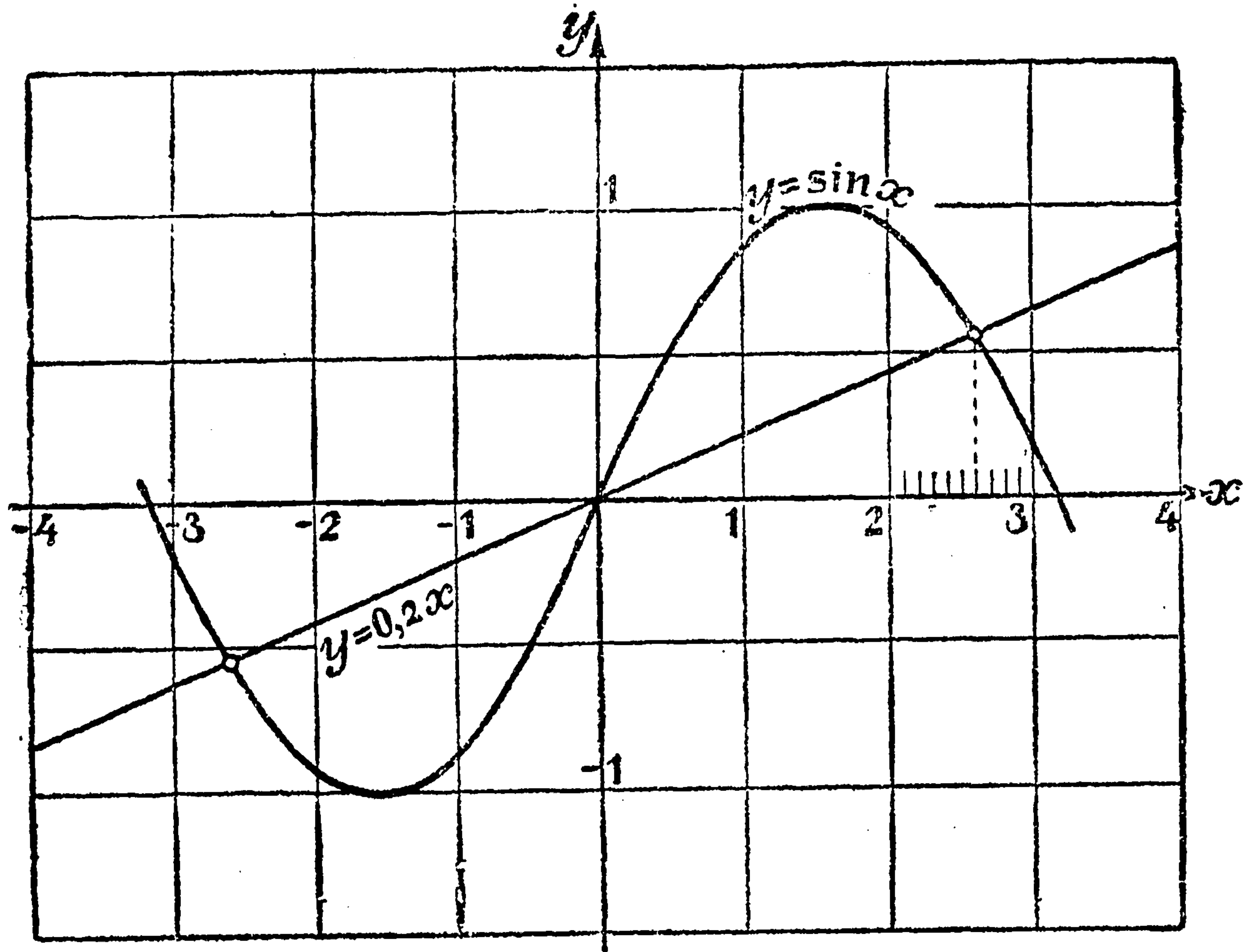
4. Наибольшая скорость воды в трубе круглого сечения достигается, когда упомянутый центральный угол удовлетворяет уравнению  $\operatorname{tg} x = x$ . Определить этот угол.



Черт. 85.



*Реш.* дано на черт 86 в; прямая  $y = x$  пересекает график  $y = \operatorname{tg} x$  в бесчисленном множестве точек, так что уравнение вообще имеет бесчисленное множество корней. Нам нужен корень  $x_1 \doteq 4,5$  (единственный, лежащий между 0 и  $2\pi$ ), что отвечает, примерно,  $258^\circ$ .



Черт. 86а.

[Легко видеть, что если по порядку перенумеровать все положительные корни уравнения  $\operatorname{tg} x = x$ :

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

то вообще

$$x_n = \frac{2n+1}{2} \pi - \varepsilon_n,$$

где  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Кроме этих корней, уравнение имеет еще корень 0 и бесчисленное множество отрицательных корней, которые лишь знаками отличаются от положительных корней. На том же

чертеже дано решение и уравнения:  $\operatorname{tg} x = 0,5x$ ; в этом случае  $x_1 \doteq 4,3$ , об остальных корнях можно повторить то же, что и выше.]

5. Исследовать положительные корни уравнения:  $x \cdot \operatorname{tg} x = 0,3$ .

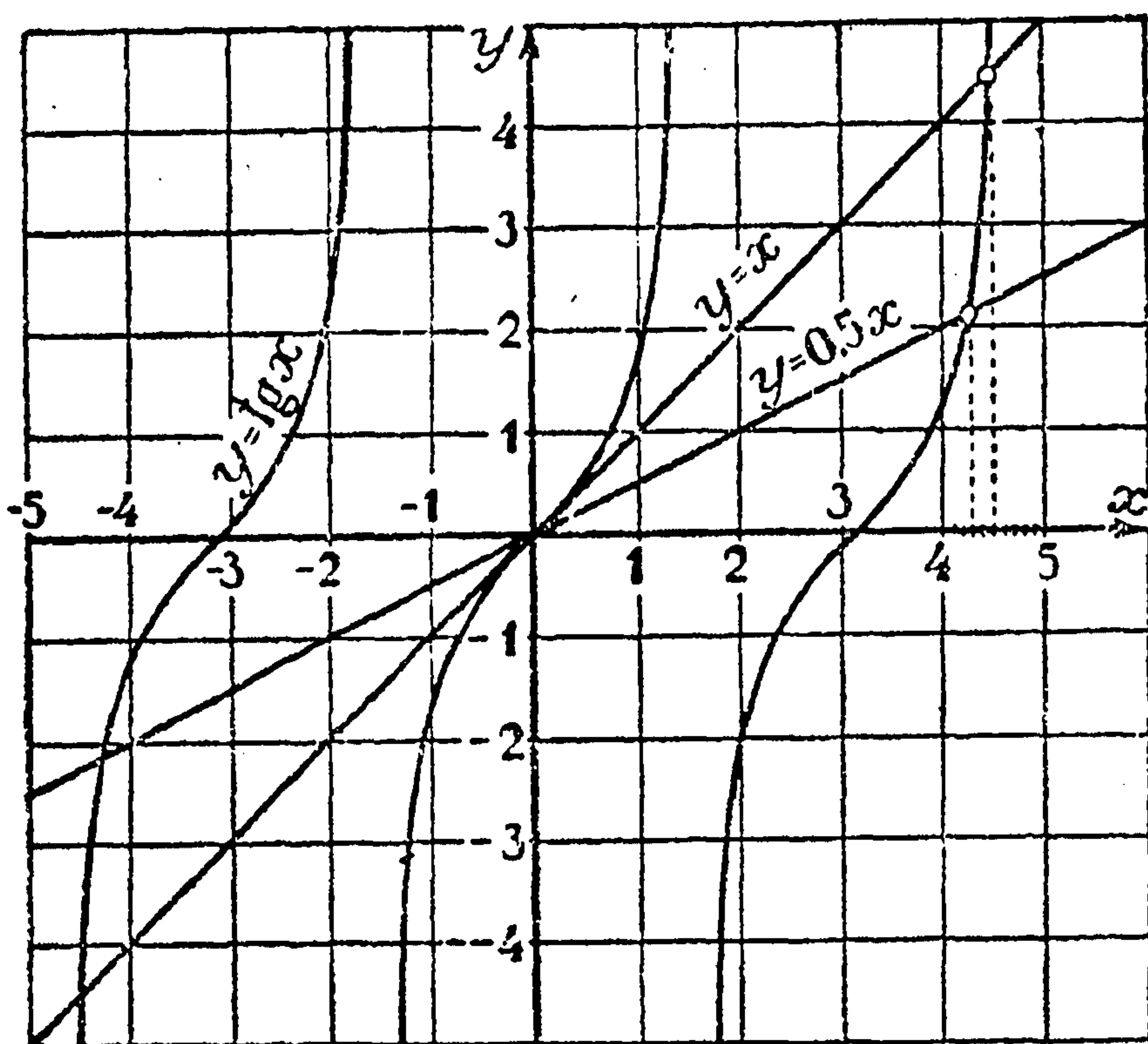
*Указ.* Представить уравнение в виде  $\operatorname{tg} x = \frac{0,3}{x}$  или  $\operatorname{ctg} x = \frac{x}{0,3}$ .

*Отв.*  $x_1 \doteq 0,52$ ; вообще  $x_n \doteq (n-1)\pi$  ( $n > 1$ ).

III. Наконец, нередко встречаются уравнения, в состав которых входят показательные и логарифмические выражения. Для решения их с удобством пользуются известными нам графиками показательной, гиперболической и логарифмической функций. Пусть, напр., дано уравнение

$$\operatorname{sh} x = 2,5x \text{ или } e^x - e^{-x} = 5x.$$

Для решения строим график функции  $y = e^x - e^{-x}$  и пересекаем его прямой  $y = 5x$  (черт. 87). Точка пересечения имеет абсциссу  $x \doteq 2,55$ .



Черт. 86 в.



**Задачи. 6.** Определить корни уравнения:  $e^x \cdot \sin x = 1$ , заключающиеся между 0 и 9; указать приближенные значения для остальных корней.

*Указ.*  $\sin x = e^{-x}$ . *Отв.*  $x_1 \doteq 0,59$ ;  $x_2 \doteq 3,10$ ;  $x_3 \doteq 6,285$ ; вообще,  $x_n \doteq (n-1)\pi$  ( $n > 1$ ).

7. Длина  $2s$  провисающего провода удовлетворяет уравнению:

$$s = a \operatorname{sh} \frac{l}{a},$$

где  $l$  — полупролет, а постоянная  $a$  определяет характер кривой, по которой происходит провисание. Пусть даны:  $s = 6,8$  (м),  $l = 5,2$  (м); найти  $a$ .

*Указ.* Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{s}{l} \cdot \frac{l}{a} = \operatorname{sh} \frac{l}{a}$$

и обозначим  $\frac{l}{a}$  через  $x$ ; мы приходим к уравнению

$$\operatorname{sh} x = \frac{s}{l} x,$$

которое решается пересечением раз навсегда начерченного графика гиперболического синуса и прямой. По найденному  $x$  легко определить  $a$ . В нашем случае  $x \doteq 1,3$ , так что  $a \doteq 4$ .

8. Для определения степени расширения пара в некоторой одноцилиндровой паровой машине было получено уравнение:  $1 + \ln r - 0,389 r = 0$ . Найти  $r$ .

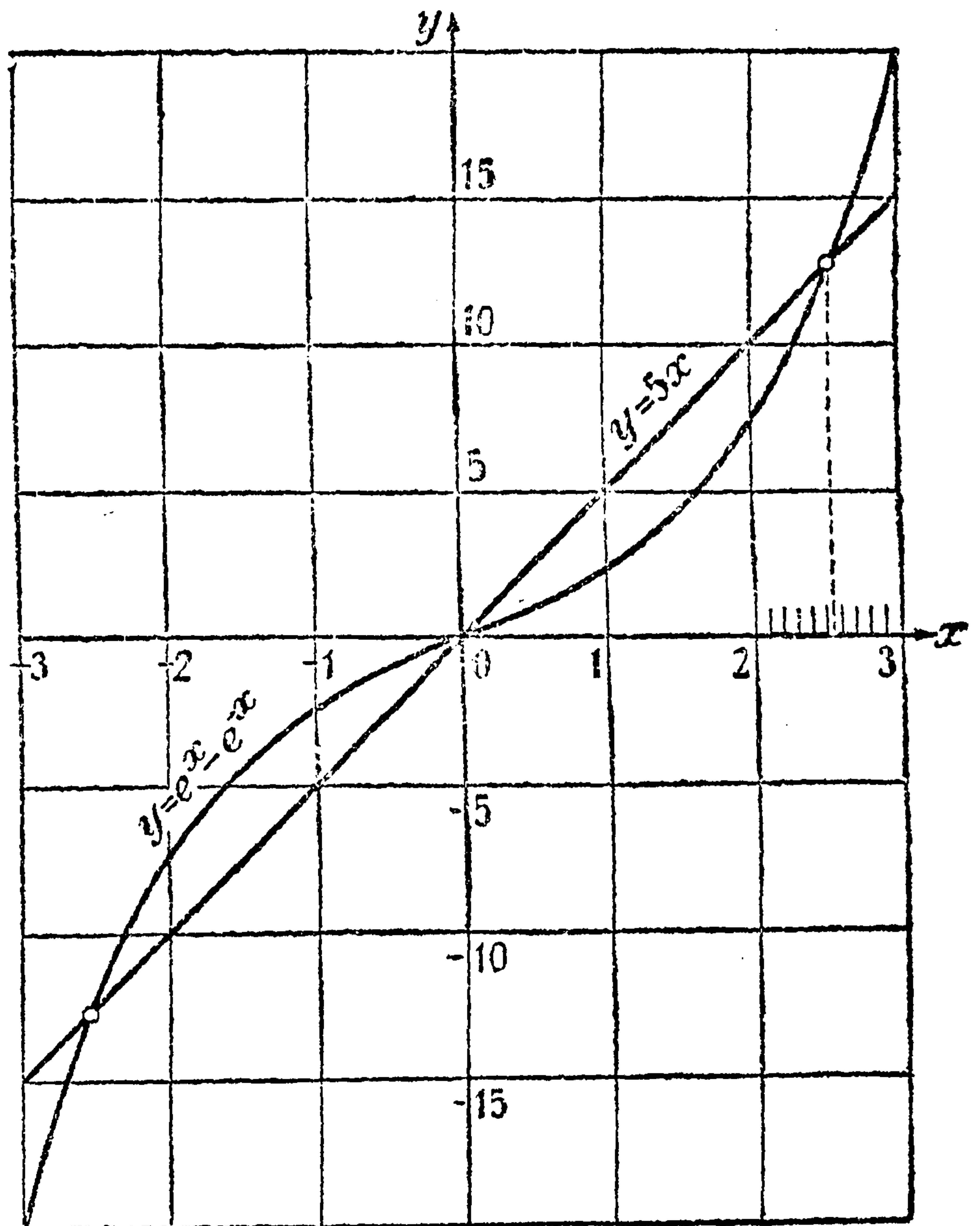
*Указ.* Удобнее перейти к обыкновенным логарифмам, умножая на модуль  $M = 0,4343$ ; уравнение  $\log r = 0,169 r - 0,434$  решается пересечением логарифмической кривой  $y = \log r$  ( $r$  заменяет здесь  $x$ !) и прямой  $y = 0,169 r - 0,434$ . Логарифмическую кривую начертить для  $r$  от 1 до 10, взяв по оси  $Oy$  масштаб в 10 раз больший, чем по горизонтальной оси. *Отв.*  $r \doteq 7,9$ .

9. В тяговых расчетах, при определении времени хода поезда, иной раз скорость поезда  $V$  (км/час) в отдельные моменты устанавливаются по уравнению вида:  $V = a + b \log (cV + d)$ , где  $a, b, c, d$  — постоянные. Пусть, напр.,  $a = 18$ ,  $b = -137$ ,  $c = 0,096$ ,  $d = -5,74$ ; найти  $V$  графическим путем.

*Указ.* Полагаем:  $0,096 V - 5,74 = x$ , так что, в свою очередь,  $V = (x + 5,74)/0,096 \doteq 10,4 x + 59,8$ . Подставляя вместо  $V$  слева это выражение, после упрощений приходим к уравнению:  $\log x = -0,076 x - 0,305$ . Логарифмическую кривую построить от  $x = 0,1$  до  $x = 1$ , при равных масштабах на обеих осях. *Отв.*  $x \doteq 0,46$ ,  $V \doteq 64,6 \doteq 65$  (км/час).

10. Найти корни уравнения:  $x \cdot \ln x = 0,15$ . *Отв.*  $x \doteq 1,14$ .

В заключение заметим, что графический метод решения уравнений очень удобен, но лишь для грубого определения корня. Особенно неблагоприятным, в смысле точности, является случай, когда линии пересекаются под очень острым углом и, практически, сливаются по некоторой дуге. Перечерчивая кривые, вблизи точки их пересечения, в большем масштабе, а также изменяя отношение масштабов на обеих осях, можно увеличить точность определения корня. *Выгоднее однако для улучшения полученного приближения пользоваться уже чисто вычислительными приемами, которые будут указаны ниже [150 — 152].*



Черт. 87.



## ГЛАВА V.

### ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ.

**52. Средняя скорость и скорость в данный момент.** Когда мы говорим, что поезд, движущийся между Ленинградом и Москвой, идет со скоростью 50 км/час, то мы этим вовсе не хотим сказать, что поезд движется равномерно: он останавливается на станциях, на крутых подъемах и закруглениях идет медленнее, чем на ровных участках и спусках, и т. п. Говоря о скорости 50 км/час, мы имеем в виду лишь *среднюю скорость* движения поезда между Ленинградом и Москвой. Эта средняя скорость не дает нам никакого представления о том, с какой скоростью поезд движется на различных участках пути; для каждого из таких участков мы можем в свою очередь вычислить среднюю скорость, которая будет, вообще говоря, отличаться от средней скорости 50 км/час. Но если мы даже определим среднюю скорость движения между каждыми двумя последовательными станциями, то все-таки не сможем сказать, с какой скоростью поезд проходит хотя бы Волховской мост; для этой цели нам недостаточно знать среднюю скорость движения между станциями Чудово и Дубцы, между которыми находится Волховской мост; нам нужно еще более *сузить* промежуток, для которого мы определяем среднюю скорость, доведя его как раз до длины моста (что будет весьма малой величиной по сравнению со всем расстоянием между Ленинградом и Москвой!). Наконец, если бы мы пожелали определить скорость, с какой паровоз въезжает на мост, то нам пришлось бы сузить промежуток еще больше; практически, мы удовольствовались бы расстоянием в несколько метров, но теоретически и на этом, очевидно, нельзя было бы остановиться.

Для того, чтобы отчетливее выяснить существо вопроса, нам удобнее иметь дело с определенным численным примером. С этой целью рассмотрим аналогичную задачу — падения в пустоте тяжелого тела, брошенного (без начальной скорости) с некоторой высоты. Если время  $t$  (в сек.) отсчитывать от начала движения, а пройденный путь  $s$  (в м) — от начального положения тела, то, как известно из физики, имеем следующую зависимость между  $s$  и  $t$ :

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad (1)$$

где  $g$  есть ускорение силы тяжести, равное 9,81 м/сек<sup>2</sup>.

Движение здесь, очевидно, *неравномерно*. Напомним, что *средней скоростью* любого движения за определенный промежуток времени называется отношение пройденного за этот промежуток времени пути к длине самого промежутка. Поэтому, если за промежуток времени от  $t_1$



до  $t_2$  пройденный путь возрос от  $s_1$  до  $s_2$ , то соответствующая средняя скорость будет

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Напр., если взять  $t_1 = 6$  сек., а  $t_2 = 7$  сек., то по формуле (1) найдем, что  $s_1 = 4,905 \cdot 6^2 = 176,58$  м,  $s_2 = 4,905 \cdot 7^2 = 240,35$  м, и так как  $t_2 - t_1 = 1$ , то средняя скорость движения нашего тела между 6-й и 7-й секундами после начала падения будет  $v_{cp} = 240,35 - 176,58 = 63,77$  м/сек. Конечно, эту скорость нельзя считать скоростью в момент  $t = 6$  сек.! Рассматривая все уменьшающиеся промежутки времени  $\Delta t$ , следующие за 6-й секундой, мы таким же образом сможем вычислить средние скорости  $\bar{v}_{cp}$  за эти промежутки и составим табличку:

$\Delta t$	0,5	0,1	0,01	0,005	0,001	0,0005
$v_{cp}$	61,312	59,350	58,909	58,885	58,865	58,862

Хотя ни одна из этих *средних* скоростей не дает скорости в момент  $t = 6$  сек., но они тем лучше воспроизводят эту последнюю скорость, чем меньше промежуток  $\Delta t$ . Если  $\Delta t$ , все уменьшаясь, *стремится к нулю*, то средняя скорость за бесконечно-малый промежуток времени от 6 сек. до  $(6 + \Delta t)$  сек. будет стремиться к некоторому *пределу* (58,86 м/сек.), который и даст нам истинную *скорость в момент  $t = 6$  сек.*

Проведем выкладку в общем виде. Путь  $s$ , пройденный к моменту  $t$ , выражается формулой (1); к моменту  $t + \Delta t$  этот путь будет уже равен  $\frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2$  [по формуле (1), если в нее подставить  $t + \Delta t$ , вместо  $t$ ], так что приращение  $\Delta s$  пути за промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  будет

$$\Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g [2 t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2].$$

Тогда *средняя скорость  $v_{cp}$*  за упомянутый промежуток определится так:

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{2} g (2 t + \Delta t),$$

и при  $\Delta t \rightarrow 0$  будет стремиться к пределу  $v = g t = 9,81 t$ , выражающему *скорость падения в момент  $t$*  (в м/сек.); напр., при  $t = 6$  сек., получим  $v = 9,81 \cdot 6 = 58,86$  м/сек. (ср. приведенную выше табличку).

Вообще, если зависимость пройденного пути  $s$  от времени  $t$  выражается равенством  $s = f(t)$ , то за промежуток времени  $\Delta t$  путь  $s$  получит приращение  $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$  [из пути, пройденного к моменту  $t + \Delta t$ ,



вычитается путь, пройденный к моменту  $t$ ]; *средняя скорость* за этот промежуток будет

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

истинная же *скорость движения в момент  $t$*  выразится *пределом*:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

[Только в случае *равномерного* движения в этом предельном переходе фактически не будет надобности, так как тогда приращение  $\Delta s$  пути пропорционально приращению  $\Delta t$  времени, и их отношение сохраняет *постоянную* величину, равную *скорости* движения; ср. [32].

**53.** *Скорость изменения функции, средняя и в данной точке.* Сказанное относительно скорости движения можно применить вообще к скорости изменения любой функции  $y = f(x)$  по отношению к независимой переменной  $x$ . Если  $x$  получает некоторое приращение  $\Delta x$ , то вместе с тем и  $y$  получит приращение  $\Delta y$ , причем наращенное значение  $y + \Delta y$ , очевидно, будет равно  $f(x + \Delta x)$ , так что:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Тогда *средней скоростью* изменения  $y = f(x)$  в промежутке  $(x, x + \Delta x)$  естественно назвать отношение приращения функции к приращению независимой переменной:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

В случае *линейной* функции [33] это отношение будет *постоянным* (ибо для такой функции приращение  $\Delta y$  пропорционально приращению  $\Delta x$ ), и его мы уже называли вообще *скоростью изменения* функции. В других же случаях с изменением  $x$  и это отношение будет изменяться, и тогда *скоростью изменения функции при данном значении  $x$*  называют *предел*, к которому стремится средняя скорость при стремлении к нулю промежутка  $\Delta x$ :

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Скорость изменения одной переменной величины, по сравнению с другой, играет роль во многих вопросах и очень часто получает свое особое название.

*Примеры.* 1. Когда твердое тело вращается вокруг оси, то угол поворота  $\varphi$  есть, очевидно, функция от времени  $t$ . Если за промежуток времени  $\Delta t$  от  $t$  до  $t + \Delta t$  тело повернулось на угол  $\Delta\varphi$ , то *средней угловой скоростью вращения* за промежуток  $\Delta t$  называется отношение  $\Delta\varphi/\Delta t$ , а *угловой скоростью вращения в данный момент  $t$*  — предел  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\varphi/\Delta t$ .

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

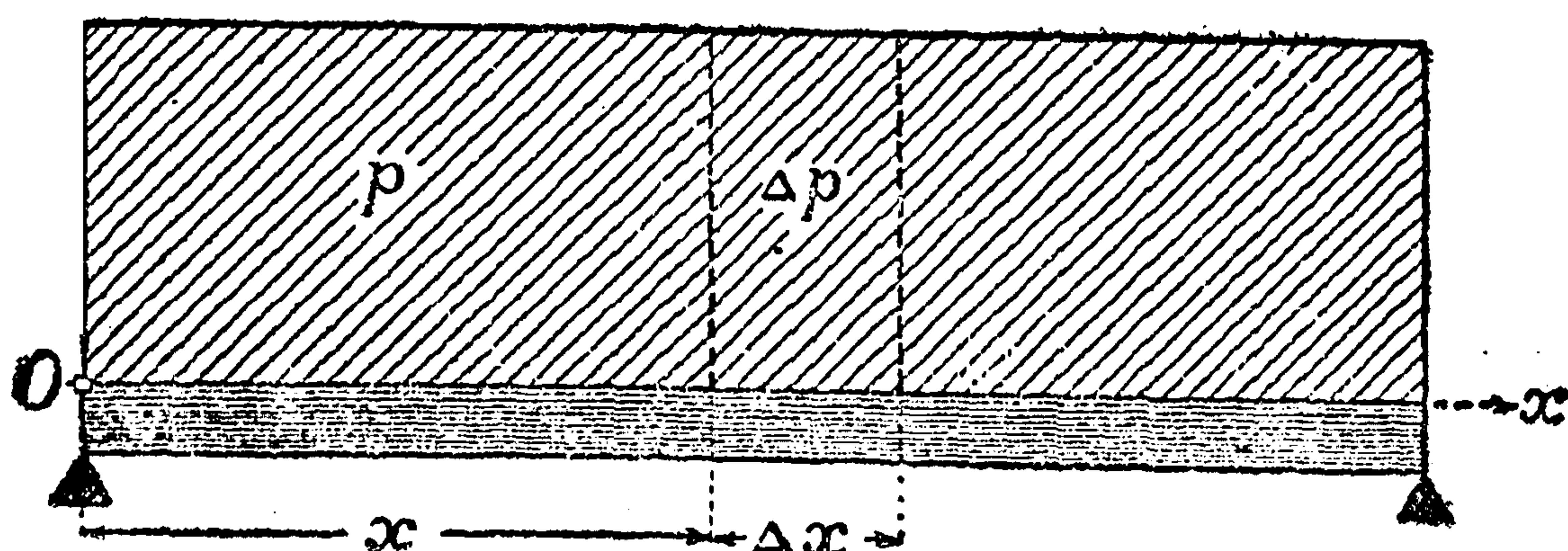
[Если вращение *равномерное*, т. е. изменение угла поворота пропорционально изменению времени, то угловая скорость в любой момент постоянна и может быть названа просто *угловой скоростью вращения*.]



2. Обозначим через  $Q$  количество тепла, которое надо сообщить телу для нагревания его от некоторой постоянной исходной температуры (напр., от  $0^\circ \text{C}$ ) до температуры  $\theta^\circ \text{C}$ ;  $Q$  является функцией от  $\theta$ . Если  $\Delta Q$  означает количество тепла, потребное для нагревания тела от температуры  $\theta^\circ \text{C}$  до температуры  $(\theta + \Delta\theta)^\circ \text{C}$ , то отношение  $\Delta Q/\Delta\theta$  называется *средней теплоемкостью* между  $\theta^\circ$  и  $(\theta + \Delta\theta)^\circ$ , а предел его при  $\Delta\theta \rightarrow 0$ :  $c = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \Delta Q/\Delta\theta$  — *теплоемкостью при температуре  $\theta$* .

3. Рассмотрим стержень, имеющий длину  $l$  м при  $0^\circ \text{C}$ , и станем его нагревать; длина его  $l$  (м) будет расти с повышением температуры  $\theta$ . При изменении температуры от  $\theta^\circ \text{C}$  до  $(\theta + \Delta\theta)^\circ \text{C}$ , длина  $l$  получит приращение  $\Delta l$  (которое лишь

приближенно можно считать пропорциональным  $\Delta\theta$ ). Тогда отношение  $\Delta l/\Delta\theta$  называют *средним коэффициентом (линейного) расширения* тела от  $\theta^\circ$  до  $(\theta + \Delta\theta)^\circ$ . Предел же его  $\alpha = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \Delta l/\Delta\theta$  называется *коэффициентом (линейного) расширения при температуре  $\theta$* .

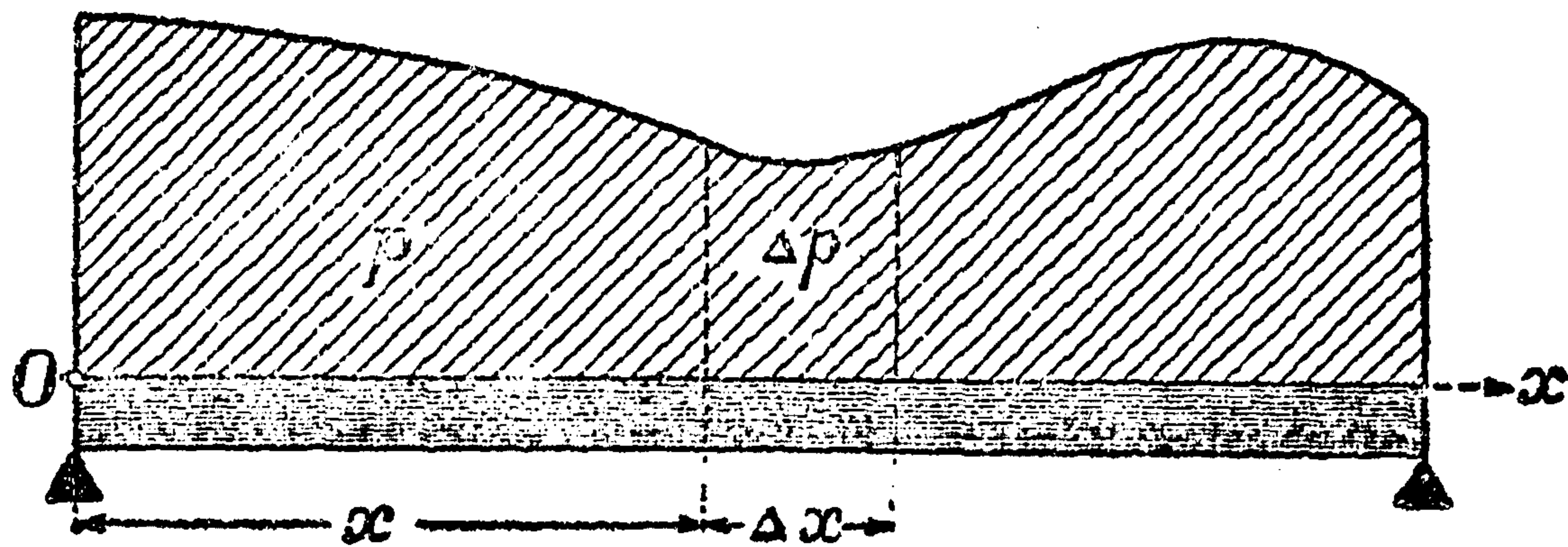


Черт. 88a).

мени от  $t$  до  $t + \Delta t$  температура его  $\theta$  переходит в  $(\theta + \Delta\theta)$ , причем очевидно, что  $\Delta\theta$  отрицательно. *Средняя скорость охлаждения* за промежуток  $\Delta t$  равна отношению  $\Delta\theta/\Delta t$ , а *скорость охлаждения в момент  $t$*  равна пределу  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\theta/\Delta t$ .

Совершенно таким же путем определяют: скорость химических реакций, скорость излучения радиоактивных веществ и т. п.

5. Скорость изменения барометрического давления  $p$  и температуры  $\theta$  с высотой  $h$  называются, соответственно, *градиентом давления* и *градиентом температуры*. Обозначив через  $\Delta h$  приращение высоты  $h$ , а через  $\Delta p$ ,  $\Delta\theta$  соответствующие приращения давления и температуры, получаем для градиентов давления и температуры выражения:  $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \Delta p/\Delta h$ ,  $\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \Delta\theta/\Delta h$ .



Черт. 88b).

6. Рассмотрим явление электрического тока в проводнике; количество  $Q$  электричества, протекшего через какое-нибудь сечение проводника (считая от некоторого начального момента), есть функция от времени  $t$ . Если  $\Delta Q$  означает количество электричества, протекшего в течение промежутка времени от  $t$  до  $(t + \Delta t)$ , то отношение  $\Delta Q/\Delta t$  называется *средней силой тока* за этот промежуток. В случае *постоянного тока* это отношение сохраняет постоянную величину и его называют просто *силой тока*. В случае же *переменного тока* рассматривают предел  $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta Q/\Delta t$ , который и выражает *силу тока в момент  $t$* .

7. В качестве последнего примера, возьмем балку, вдоль которой непрерывно распределена нагрузка. Обыкновенно эту нагрузку изображают в виде некоторой площади („грузовая площадь“) (черт. 88, a и b). Нагрузка  $p$ , приходящаяся на участок балки от ее начала до точки с абсциссой  $x$ , будет функцией от  $x$ . Если  $\Delta p$  означает нагрузку, приходящуюся на кусок балки между сечениями ее в точках  $x$  и  $x + \Delta x$ , то отношение  $\Delta p/\Delta x$  называют *средней интенсивностью нагрузки* для названного куска балки. Если нагрузка распределена *равномерно*, то грузовая площадь имеет вид прямоугольника (черт. 88a), тогда упомянутое отношение сохраняет постоянную величину и может быть названо просто *интен-*



сивностью нагрузки балки. В противном случае (черт. 88b), рассматривают предел  $q(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta p / \Delta x$ , который называют *интенсивностью нагрузки в сечении  $x$* .\*

**54. Производная.** Во всех рассмотренных примерах мы имели дело с пределами одного определенного типа:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Так как подобного рода пределы играют весьма важную роль в анализе и в его приложениях, то они получили особое название — „производных“.

*Производной от функции  $y$  по независимой переменной  $x$  называется скорость изменения  $y$  по сравнению с  $x$ , т. е. предел отношения бесконечно малого приращения ( $\Delta y$ ) функции  $y$  к бесконечно малому приращению ( $\Delta x$ ) переменной  $x$ .*

Таким образом, можно, например, сказать, что скорость движения  $v$  есть „производная от пути  $s$  по времени  $t$ “ [52], что сила тока  $J$  есть „производная от количества протекшего электричества  $Q$  по времени  $t$ “ [53, 6], и т. п.

Для обозначения производной от  $y$  по  $x$  употребляются символы:

$$y'_x \text{ (или просто } y'), \frac{dy}{dx}.$$

Символ  $\frac{dy}{dx}$ , на котором мы вскоре остановимся подробнее, пока надлежит рассматривать именно целиком, как особый *символ*, но не как дробь с числителем  $dy$  и знаменателем  $dx$ .

При этих обозначениях для величин, рассмотренных в примерах 52 и 53, имеем выражения:

$$= \frac{ds}{dt} = s'_t, \varphi = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'_t, c = \frac{dQ}{d\theta}, \alpha = \frac{dl}{d\theta}, q = \frac{dp}{dx}, \text{ и т. п.}$$

Если представляется важным отметить, при каком именно значении  $x$  (в какой точке  $x$ ) вычисляется скорость изменения, т. е. производная функции  $y = f(x)$ , то пользуются обозначениями

$$f'(x), \frac{df(x)}{dx} \text{ или } \frac{d}{dx} f(x).$$

Так, возвращаясь к примеру 52, можно писать:

$$v = f'(t), \text{ в частности, } f'(6) = 58,86.$$

\* Вместо „интенсивность нагрузки“ иногда говорят: „нагрузка, рассчитанная на единицу длины“.



Операция нахождения производной, т. е. вычисления предела отношения  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , называется *дифференцированием данной функции*  $y$ : эта задача составляет предмет изучения *дифференциального исчисления*, основания которого были заложены Ньютоном и Лейбницем (Newton, 1643 — 1727; Leibniz, 1646—1716).

В последующих пп<sup>0</sup> мы научимся вычислять производные для элементарных функций. Во всех случаях мы будем пользоваться одной и той же схемой:

1) выбирается значение  $x$  независимой переменной, которому отвечает определенное значение  $y = f(x)$  функции;

2) независимой переменной придается приращение  $\Delta x$ , так что наращенное ее значение будет  $x + \Delta x$ ; в связи с этим и функция получит приращение  $\Delta y$  и, так как наращенное значение функции  $y + \Delta y$ , очевидно, равно  $f(x + \Delta x)$ , то  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ;

3) составляется отношение этих приращений:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2)$$

и ищется его предел, при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Упомянутое отношение представляет собой неопределенное выражение вида  $\frac{0}{0}$  [22]; таким образом, при каждом вычислении производной мы

фактически раскрываем некоторую неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ ! Существенную помощь при этом нам окажут пределы, изученные в 22 и 26.

55. Дифференцирование степенной функции. Рассмотрим *степенную функцию*  $y = x^n$ , где  $n$  — любое постоянное число. Для того, чтобы вычислить ее производную при произвольном значении  $x$ , согласно приведенной схеме, возьмем соответствующее ему значение функции  $y = x^n$ , затем, придав  $x$  приращение  $\Delta x$ , найдем значение функции, отвечающее наращенному значению  $x + \Delta x$  аргумента; это будет:  $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$ , так что приращение функции  $\Delta y$  равно  $(x + \Delta x)^n - x^n$ ; наконец, составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

[Очевидно, это отношение можно было бы и непосредственно получить из (2), подставляя туда  $x^n$  вместо  $f(x)$ !] Теперь остается лишь найти *предел* полученного выражения, при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Желая воспользоваться равенством (28), 26, преобразуем это выражение следующим образом:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^n \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\Delta x} = x^{n-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$



Если теперь положить  $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ , то, очевидно, вместе с  $\Delta x$  и  $\alpha$  будет стремиться к нулю, а тогда, в виду упомянутого равенства, в пределе получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{n-1} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 + \alpha)^n - 1}{\alpha} = nx^{n-1}.$$

Это и есть искомая производная. Итак, если  $y = x^n$ , то  $y' = n \cdot x^{n-1}$ , или короче:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}. \quad (3)$$

В частности, при  $n = 1$ , получим:

$$(x)' = 1; \quad (4)$$

конечно, и непосредственно ясно, что при  $y = x$  и  $\Delta y = \Delta x$ , так что отношение приращений постоянно равно 1 (или — что скорость изменения  $x$ , по сравнению с самим собою, есть 1!). Полагая, далее в (3),  $n$  равным 2, 3,  $-1$ ,  $\frac{1}{2} - m$  (где  $m > 0$ ),  $\frac{1}{m}$  получим следующие часто встречающиеся частные случаи формулы (3), которые полезно запомнить:

$$\left. \begin{aligned} (x^2)' = 2x; (x^3)' = 3x^2; \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}; \\ (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \\ \left(\frac{1}{x^m}\right)' = (x^{-m})' = -m \cdot x^{-m-1} = -\frac{m}{x^{m+1}}; \\ (\sqrt[m]{x})' = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)' = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1} = \frac{1}{m} x^{-\frac{m-1}{m}} = \frac{1}{m(\sqrt[m]{x})^{m-1}}. \end{aligned} \right\} (5)$$

**56. Дифференцирование логарифмической функции.** Переходя к логарифмической функции  $y = \log_a x$ , мы уже не станем повторять рассуждений, предшествующих составлению отношения (2), но сразу положим в нашей схеме  $f(x) = \log_a x$ . Вспоминая, что [44, (31)]

$$\log_a x = \ln x \cdot \log_a e,$$

будем иметь последовательно:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} \cdot \log_a e.$$

Желая привести это выражение к известному уже предельному соотношению (24), 26, преобразуем его (заменяя разность логарифмов логарифмом частного):



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \cdot \log_a e = \frac{\log_a e}{x} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Положив, как и только что,  $\frac{\Delta x}{x} = a$  и воспользовавшись указанным соотношением, найдем, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a e}{x} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln(1+a)}{a} = \frac{\log_a e}{x}.$$

Таким образом, и здесь мы получили производную

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x};$$

так как  $\frac{1}{\log_a e} = \ln a$  [см. 43, (27);  $\delta = e$ ], то это выражение можно представить и в форме:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}. \quad (6)$$

В частности, для десятичных логарифмов будем иметь [23, (12)]:

$$(\log x)' = \frac{M}{x} = \frac{0,4343}{x}. \quad (7)$$

Совершенно ясно, что формула для производной логарифмической функции получит самый простой вид, если  $\log_a e = 1$ , т. е. если  $a = e$  и мы имеем дело с *натуральными логарифмами*; для этого случая:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (8)$$

Эта замечательная по своей простоте формула и является основанием для того предпочтения, которое отдают в теоретических исследованиях натуральным логарифмам.

Из формулы (6) мы усматриваем, что *скорость изменения логарифмической функции*  $y = \log_a x$  *обратно пропорциональна самому*  $x$ . Таким образом, при безграничном возрастании  $x$  эта скорость убывает, стремясь к нулю. Это вполне согласуется с сделанным нами в 44 замечанием относительно характера возрастания логарифмической функции.

**57. Производные взаимно обратных функций. Дифференцирование показательной функции.** Для вычисления производной от функции  $y = a^x$  мы выведем сначала простую зависимость между производными двух взаимно обратных функций. Пусть дана функция  $y = f(x)$ ; обратной ей функцией, как мы знаем [43], называют функцию  $x = \varphi(y)$ , которая



получается, если решить уравнение  $y = f(x)$  относительно  $x$ . По определению производной мы имеем:

$$\varphi'(y) = x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

причем  $y$  считается здесь независимой переменной, а  $x$  функцией, и  $\Delta x$  есть приращение функции  $x$ , соответствующее приращению  $\Delta y$  независимой переменной. Но мы имеем:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

к тому же приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , очевидно, одновременно становятся бесконечно малыми, поэтому:

$$\varphi'(y) = x'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{f'(x)}$$

мы можем таким образом сказать, что производная от обратной функции равна обратной величине производной от данной функции.

Полученный результат можно было бы легко угадать, если вспомнить, что производная есть скорость изменения функции по отношению к независимой переменной [53]; с этой точки зрения  $y'_x$  есть скорость изменения  $y$  относительно  $x$ , и  $x'_y$  — скорость изменения  $x$  относительно  $y$ , и совершенно очевидно, что если, скажем,  $y'_x = 5$ , т. е.  $y$  изменяется в пять раз *скорее*, чем  $x$ , то обратно,  $x$  изменяется в пять раз *медленнее*, чем  $y$ , т. е.  $x'_y = \frac{1}{5}$ !

Проверим полученную формулу на примере. Мы видели [43], что функцией, обратной для степенной функции  $y = x^n$ , является степенная же функция  $x = y^{\frac{1}{n}}$  (мы не заменяем здесь сразу  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ , а произведем эту замену в окончательном результате). Мы имеем поэтому [см. (3)]

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{n x^{n-1}}$$

Выразив здесь  $x$  через  $y$ , по формуле  $x = y^{\frac{1}{n}}$ , найдем:

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n y^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

В этой формуле независимая переменная есть  $y$ ; заменив ее на  $x$  и



обозначив функцию через  $y$ , мы получаем функцию  $y = x^{\frac{1}{n}}$ , производная которой, таким образом, равна:

$$y' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

в полном согласии с формулой (3) [точнее — с последней из формул (5)].

Переходя теперь к *показательной функции*  $y = a^x$ , заметим, что она является обратной для логарифмической функции  $x = \log_a y$ , а потому, по доказанному правилу, мы можем писать:

$$(a^x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y \cdot \ln a}} = y \cdot \ln a$$

[причем, пользуясь формулой (6), мы лишь заменили в ней  $x$  на  $y$ ]. Подставляя в результате, вместо  $y$ , его выражение  $a^x$ , приходим к окончательной формуле:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a. \quad (9)$$

Особенно простой вид эта формула получает, если за основание степени для показательной функции взять неперово число  $e$ , т. е. положить  $a = e$ ; в этом случае  $\ln a = \ln e = 1$ , так что

$$(e^x)' = e^x. \quad (10)$$

Таким образом, *производная функции  $e^x$  равна самой функции*.

Так как, в силу (9), показательная функция  $a^x$  возрастает (при  $a > 1$ ) вместе с  $x$  со скоростью, пропорциональной уже достигнутому значению функции, то этим обуславливается чрезвычайно быстрый рост показательной функции, о чем упоминалось в 44.

**58. Дифференцирование тригонометрических функций и их обратных.** Полагая в (2)  $f(x) = \sin x$ , находим отношение приращений для функции  $y = \sin x$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x};$$

чтобы вычислить предел при  $\Delta x \rightarrow 0$  этого „неопределенного выражения“, преобразуем его по формуле для разности синусов:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Так как последний множитель, в силу 22, (6), стремится к 1, то в пределе получится  $\cos x$ ; таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (11)$$



Аналогично получается (предоставляем вывод читателю) и формула:

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (12)$$

Далее, пусть  $y = \operatorname{tg} x$ ; тогда:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin(x + \Delta x) \cos x - \sin x \cos(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot \cos x \cdot \cos(x + \Delta x)}. \end{aligned}$$

Если вспомнить формулу для синуса разности, то окажется, что в числителе мы имеем просто  $\sin[(x + \Delta x) - x]$ , т. е.  $\sin \Delta x$ , так что

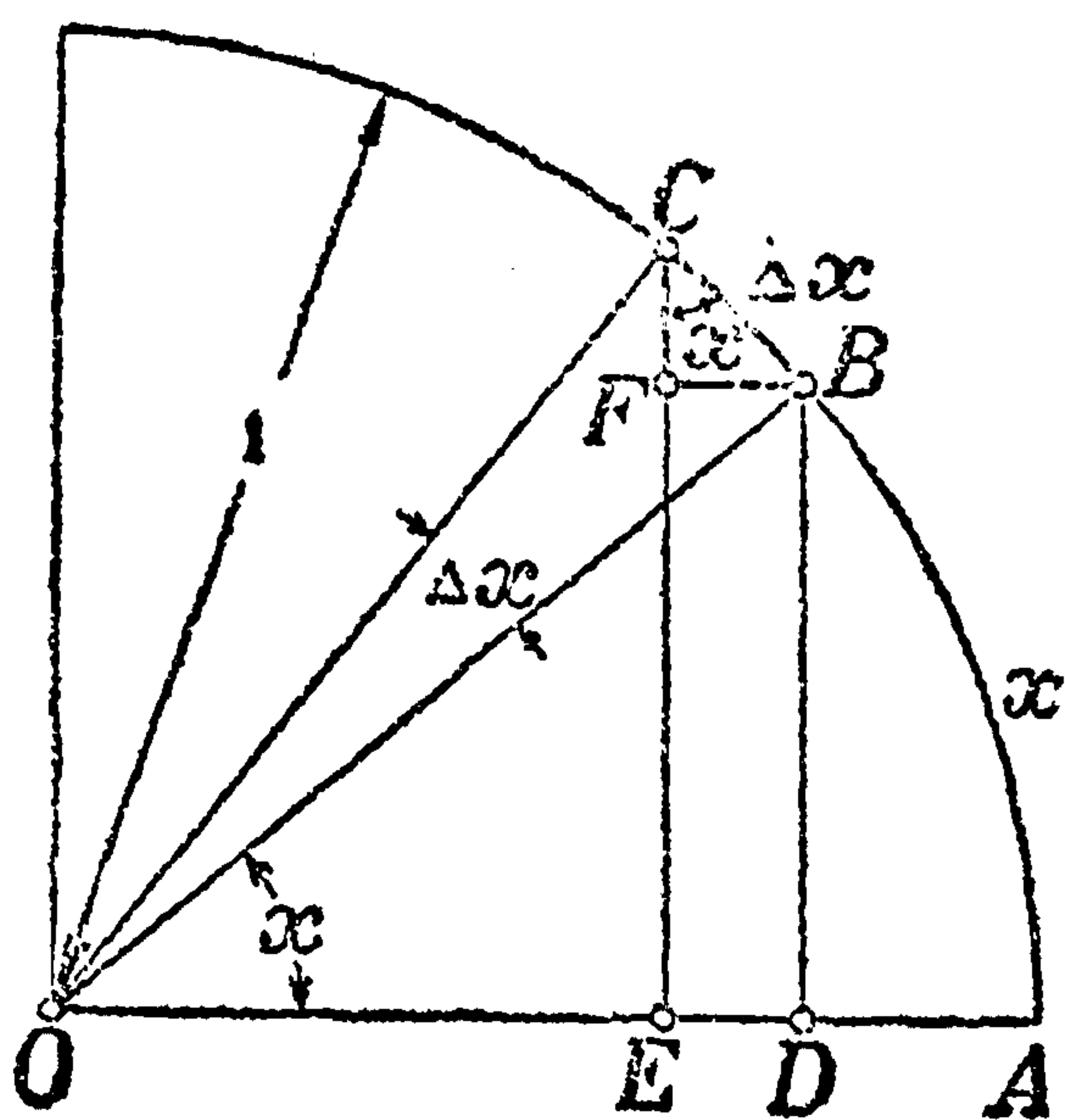
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x + \Delta x)} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x}.$$

Отсюда, снова пользуясь 22, (6), находим, переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \quad (13)$$

Легко подобным же образом получить:

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x. \quad (14)$$



Черт. 89.

Мы приведем еще один поучительный вывод доказанных формул (11) и (12), основанный на чисто геометрических соображениях.

Рассмотрим первый квадрант круга радиуса 1 (черт. 89), отложим угол  $x = \sphericalangle AOB$  и его приращение  $\Delta x = \sphericalangle BOC$  (соответствующие им дуги  $AB$  и  $BC$  выражаются теми же числами!). Остановимся сначала на функции  $y = \sin x$ . Очевидно,  $DB = y$ ,  $EC = y + \Delta y$ , так что  $\Delta y = FC$ . Если, считая  $\Delta x$  бесконечно малым, принять дугу  $BC$  за *прямолинейный* отрезок, то  $\sphericalangle C$  в  $\triangle BCF$  будет равен  $x$ , в виду подобия этого  $\triangle$  и  $\triangle OBD$  (как составленных взаимно перпендикулярными сторонами), а тогда сразу получаем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$$

Это равенство на деле — лишь приближенное; но в пределе оно становится точным и приводит снова к (11).

Если же  $y = \cos x$ , то  $OD = y$ ,  $OE = y + \Delta y$ , так что  $\Delta y = -ED = -FB$  (косинус убывает с возрастанием угла!) и из того же  $\triangle BCF$  непосредственно усматриваем, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin x.$$

В пределе отсюда получается (12).

Подобный вывод можно дать и для формул (13) и (14), что мы предоставляем читателю.



Займемся теперь *обратными круговыми функциями*; мы вычислим их производные, пользуясь доказанными только-что формулами и правилом 57 для дифференцирования обратных функций.

Пусть  $y = \arcsin x$ , так что  $x = \sin y$ ; тогда

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y},$$

если воспользоваться формулой (11), заменив лишь в ней  $x$  на  $y$ .

Желая получить выражение производной через независимую переменную  $x$  ( $= \sin y$ ), мы вспоминаем, что  $\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y} = +\sqrt{1 - x^2}$ , так что окончательно:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{+\sqrt{1 - x^2}}. \quad (15)$$

Заметим, что корень здесь надо брать именно *с плюсом*, ибо в 49 мы условились (во избежание многозначности) рассматривать всегда лишь то значение угла  $y = \arcsin x$ , которое содержится между  $-\frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{2}$ , а в первой и четвертой четверти косинус положителен.

Аналогично получается:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (16)$$

Положим теперь  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $x = \operatorname{tg} y$ . Имеем:

$$(\operatorname{arctg} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y,$$

по формуле (13). Остается лишь выразить  $\cos^2 y$  через  $x$  ( $= \operatorname{tg} y$ ); как известно из тригонометрии,

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y},$$

подставляя  $x$  вместо  $\operatorname{tg} y$ , придем к простому результату:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (17)$$

Аналогично этому получается и

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}. \quad (18)$$

Заканчивая этим вычисление производных для основных элементарных функций, мы считаем важным отметить, что все найденные результаты



имеют своим источником, в сущности, лишь два предельных соотношения:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \text{ и } \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

**59. Основные правила дифференцирования.** Мы установили выше ряд формул (3) — (18), дающих производные для отдельных простейших функций. Но на практике часто приходится сталкиваться с более сложными выражениями, составленными из этих функций. Мы докажем теперь основные правила, которые приводят дифференцирование этих выражений к упомянутым формулам.

Пусть для некоторой функции  $u$  от  $x$  производная  $u'$  известна; постараемся найти тогда производную для функции  $y = cu$ , отличающейся от  $u$  постоянным множителем  $c$ .

Если независимая переменная  $x$  получает приращение  $\Delta x$ , то функция  $u$  получит соответствующее приращение  $\Delta u$ , т. е. от исходного значения  $u$  перейдет к нарастшему значению  $u + \Delta u$ . Измененное значение функции  $y$  будет  $y + \Delta y = c(u + \Delta u)$ , так что приращение

$$\Delta y = c(u + \Delta u) - cu = c \cdot \Delta u,$$

откуда, разделяя на приращение независимой переменной  $\Delta x$ ,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

По определению самого понятия о производной,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad u' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

а потому, переходя в предыдущем равенстве к пределу, получим [20, V]:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot u',$$

что можно переписать в виде:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \text{ или } \frac{d}{dx} (cu) = c \cdot \frac{du}{dx}. \quad (19)$$

Это дает нам первое правило:

I. *Постоянный множитель можно выносить из-под знака производной.*

Напр.,

$$(0,5 \sin x)' = 0,5 \cdot (\sin x)' = 0,5 \cdot \cos x, \quad [\text{см. (11)}]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} g t^2 \right) = \frac{1}{2} g \cdot \frac{dt^2}{dt} = \frac{1}{2} g \cdot 2t = g \cdot t. \quad [52; \text{см. (5)}]$$



Пусть теперь дано несколько функций  $u, v, w, \dots$  от независимой переменной  $x$ , имеющих производные  $u', v', w', \dots$ ; требуется найти производную от их суммы  $y = u + v + w + \dots$ . Как обычно, придаем  $x$  приращение  $\Delta x$ ; наращенному значению  $x + \Delta x$  аргумента будут соответствовать наращенные значения функций:  $u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w, \dots$  и  $y + \Delta y$ , причем  $y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) + (w + \Delta w) + \dots$ . Вычитая отсюда  $y = u + v + w + \dots$ , получим:  $\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \dots$ . Затем [20, I]:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x} + \dots$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x} + \dots \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} + \dots = u' + v' + w' + \dots$$

Этот результат можно записать так:

$$(u + v + w + \dots)' = u' + v' + w' + \dots,$$

или

$$\frac{d}{dx} (u + v + w + \dots) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \dots \quad (20)$$

II. Производная от суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций.

Аналогичное правило существует и для разности (которую, впрочем, всегда можно свести к сумме!)

Примеры:

$$(\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x, \quad [\text{см. (11), (12)}]$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) &= \frac{d}{dx} \left( x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{dx^{\frac{1}{2}}}{dx} - \frac{dx^{-\frac{1}{2}}}{dx} = \\ &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \left( -\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}. \quad [\text{см. (3)}] \end{aligned}$$

Заметим, что для постоянной величины  $y = c$  производная, очевидно, будет 0 (скорость изменения величины, которая вовсе не меняется!):

$$(c)' = 0. \quad (21)$$

С помощью правил I, II и формул (3), (21) мы можем теперь продифференцировать любой целый многочлен. Напр., если  $y = 3x^2 - 0,5x + 1$ ,

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 - 0,5x + 1)' = (3x^2)' - (0,5x)' + (1)' = 3 \cdot (x^2)' - 0,5(x)' + 0 = \\ &= 3 \cdot 2x - 0,5 \cdot 1 = 6x - 0,5. \quad [\text{см. (4), (5), (21)}] \end{aligned}$$



Пусть, вообще,  $y$  будет произвольным многочленом  $n$ -ой степени:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

тогда [(20); (19), (21); (3)]

$$\begin{aligned} y' &= (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + (a_2 x^{n-2})' + \dots + (a_{n-1} x)' + (a_n)' = \\ &= a_0 (x^n)' + a_1 (x^{n-1})' + a_2 (x^{n-2})' + \dots + a_{n-1} (x)' + 0 = \\ &= a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \dots + a_{n-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим теперь произведение двух функций:  $y = uv$ .

Когда независимая переменная  $x$  получает приращение  $\Delta x$ , то функции  $u$  и  $v$  получают приращения  $\Delta u$  и  $\Delta v$ , а потому измененное значение  $y$  будет очевидно  $(u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)$ , и приращение:

$$\Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - uv = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Отсюда:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v,$$

и так как, по определению производной, при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y', \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u', \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v',$$

и, кроме того,  $\Delta v \rightarrow 0$ , то очевидно (ведь  $u$ ,  $v$  не меняются вместе с  $\Delta x$ )

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v', \quad (23)$$

или, в других обозначениях,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Таким образом:

III. Производная от произведения двух функций равна сумме произведений производной от первой функции на вторую и первой функции — на производную второй.\*

Правило это можно последовательно обобщить и на произведение какого угодно числа множителей: производная от произведения нескольких множителей равна сумме произведений, которые получим, умножив производную от каждого множителя на все остальные множители:

$$\begin{aligned} (u v w \dots z)' &= u' \cdot v w \dots z + v' \cdot u w \dots z + w' \cdot u v \dots z + \dots \\ &\dots + z' \cdot u v w \dots \end{aligned} \quad (23a)$$

\* Читатель видит, что производная произведения вовсе не равняется произведению производных, как, быть может, ему казалось „по аналогии“ с суммой и разностью! То же относится и к частному.



Аналогичным путем выводится и производная от частного двух функций:  $y = \frac{u}{v}$ . Мы имеем:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u v - u \Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} \rightarrow \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

т. е.

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (24)$$

IV. Производная от частного двух функций равна дроби, в знаменателе которой стоит квадрат знаменателя данной дроби, а в числителе — разность произведений производной числителя на знаменатель и числителя на производную знаменателя.

Примеры:

$$(x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

[см. (5), (12)];

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(x^2 + 2x - 3) e^x]' &= \frac{d}{dx} (x^2 + 2x - 3) \cdot e^x + (x^2 + 2x - 3) \cdot \frac{de^x}{dx} = \\ &= (2x + 2) e^x + (x^2 + 2x - 3) e^x = (x^2 + 4x - 1) e^x \end{aligned}$$

[см. (22), (10)];

$$\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x')(x^2 + 1) - x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

[см. (4); (20), (5), (21)].

В виде примера, вычислим заново производные для функций  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ , рассматривая их, как дроби:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{sc}^2 x, \end{aligned}$$

[см. (11), (12)],

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc}^2 x. \end{aligned}$$



Прежде чем сформулировать последнее, пятое, правило дифференцирования, мы предлагаем читателю основательно поупражняться в применении первых четырех правил, не ограничиваясь теми примерами, которые приведены в следующем п<sup>0</sup>.

**60. Задачи.** 1. Если тело падает вблизи поверхности земли, то, пренебрегая сопротивлением воздуха, пройденный путь  $s$  (в м) можно выразить формулой:

$$s = 4,905 t^2 + v_0 t + s_0. \quad (25)$$

При этом путь отсчитывается от произвольной точки на вертикальной прямой, а время — от произвольного момента;  $s_0$ , очевидно, есть начальное значение пути, т. е. путь, отвечающий моменту  $t=0$ . Определить *скорость* падения в произвольный момент  $t$  [52, 54] и выяснить значение постоянной  $v_0$ .

*Отв.*  $v = \frac{ds}{dt} = 9,81 t + v_0$  [(22)];  $v_0$  — начальная скорость (при  $t=0$ ).

2. Если тело подбрасывается вверх, то удобнее отсчитывать путь вверх (т. е. ось, на которой путь откладывается, направить вверх); тогда формула (25) заменяется другой:

$$s = -4,905 t^2 + v_0 t + s_0. \quad (26)$$

В какой момент скорость обратится в нуль (и тело достигнет своего наивысшего положения)?

*Реш.*  $v = \frac{ds}{dt} = -9,81 t + v_0$ ,  $t = \frac{v_0}{9,81}$ . [Мы уже рассматривали подобный случай в 38, 2, причем там было  $s_0=0$ ,  $v_0=125$ , так что  $t = \frac{1,25}{9,81} \doteq 12,7$  сек. На черт. 49 пунктиром отмечен график скорости, он действительно пересекает ось  $Ot$  в точке  $t \doteq 12,7$ .]

3. Согласно опытам Реньо (Regnault) количество тепла  $Q$ , необходимое для нагревания 1 г воды до температуры  $\theta^\circ \text{C}$ , выражается формулой:  $Q = \theta + 2 \cdot 10^{-5} \theta^2 + 3 \cdot 10^{-7} \theta^3$ . Помня, что теплоемкость есть скорость изменения  $Q$  по отношению к температуре [53, 2; 54] определить теплоемкость воды.

*Отв.*  $c = \frac{dQ}{d\theta} = 1 + 4 \cdot 10^{-5} \theta + 9 \cdot 10^{-7} \cdot \theta^2$  [(22)].

4. Копп (Корр) и Хальштрем (Hallström) дали следующие экспериментальные формулы, выражающие объем  $v$  какой-нибудь массы воды при  $\theta^\circ \text{C}$ , если объем ее при  $0^\circ$  принят за 1 (в пределах температуры от  $0^\circ$  до  $25^\circ$ ):

$$v = 1 - 0,000361045 \theta + 0,0000077183 \theta^2 - 0,00000003734 \theta^3,$$

$$v = 1 - 0,000057577 \theta + 0,0000075601 \theta^2 - 0,00000003507 \theta^3.$$

Найти закон изменения *коэффициента объемного расширения*  $\beta$  в зависимости от температуры и удостовериться, что этот коэффициент *обращается в нуль* при  $\theta = 4,08^\circ$  по первой формуле и при  $\theta = 3,92^\circ$  — по второй.

*Указ.*  $\beta = \frac{dv}{d\theta}$  [ср. 52, 3].

5. Вычислить производные от следующих выражений:

1)  $3x^2 - 2x + 1$ ; 2)  $2 - 5x + 6x^2$ ; 3)  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$ ; 4)  $8x^6 - \frac{1}{9}x^5$ ;  
5)  $ax^2 + bx + c$ ; 6)  $x^3 + 2ax^2 - 3a^2x + 5a^3$  ( $a, b, c$  — постоянные) [см. (22)].

*Отв.* 1)  $6x - 2$ ; 2)  $-5 + 12x$ ; 3)  $\frac{3}{4} + x + \frac{1}{2}x^2$ ; 4)  $48x^5 - \frac{5}{9}x^4$ ; 5)  $2ax + b$ ;

6) *Реш.*  $(x^3 + 2ax^2 - 3a^2x + 5a^3)' = (x^3)' + 2a(x^2)' - 3a^2(x)' + (5a^3)' = 3x^2 + 4ax - 3a^2$  [(20); (19), (21); (4), (5)].

6. Вычислить производные от функций:

1)  $0,5 \sqrt{x}$ ; 2)  $\frac{1}{3x}$ ; 3)  $(\sqrt{x})^2$ ; 4)  $x^{0,2}$ ; 5)  $\frac{1}{x^{0,04}}$ .



Указ. Привести к виду  $ax^n$ , напр.,  $\frac{1}{3x} = \frac{1}{3}x^{-1}$ ,  $(\sqrt{x})^3 = x^{\frac{3}{2}}$ , ит. п. [(3), (5)].

Отв. 1)  $\frac{0,25}{\sqrt{x}}$ ; 2)  $-\frac{1}{3x^2}$ ; 3)  $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ ; 4)  $\frac{0,2}{x^{0,8}}$ ; 5)  $-\frac{0,04}{x^{1,04}}$ .

7. Вычислить:

1)  $\frac{d}{du}(u^{1,56})$ ; 2)  $\frac{d}{dv}\left(\frac{4,43}{v^2}\right)$ ; 3)  $\frac{d}{dt}(0,347 t^{1,05})$ ; 4)  $\frac{d}{dp}\left(\frac{479}{p}\right)^{\frac{1}{1,047}}$ ;

5)  $\frac{d}{dz}\left(z^2 - \frac{a}{z^2} + c\right)$ ; 6)  $\frac{d}{dy}\left(\frac{2,3}{y^{1,4}} - \frac{0,2}{y^{0,3}} + 4,5\right)$ ; 7)  $\frac{d}{ds}\frac{1,05s^{1,6} - 2s^{2,1} + 3,44}{s^2}$  [см. (3)].

Отв. и реш. 1)  $1,56 u^{0,56}$ ; 2)  $\frac{d}{dv}\left(\frac{4,43}{v^2}\right) = 4,43 \frac{d}{dv}v^{-2} = -8,86 v^{-3} = -\frac{8,86}{v^3}$ ;

3)  $0,361 t^{0,05}$ ; 4)  $-\frac{1}{1,047 p}\left(\frac{479}{p}\right)^{\frac{1}{1,047}}$ ; 5)  $\frac{d}{dz}(z^2 - az^{-2} + c) = \frac{dz^2}{dz} - a \cdot \frac{dz^{-2}}{dz} + \frac{dc}{dz} =$

$= 2z - a(-2z^{-3}) + 0 = 2z + \frac{2a}{z^3}$  [(20); (19); (21); (3)]; 6)  $-\frac{3,22}{y^{2,4}} + \frac{0,06}{y^{1,3}}$ ;

7)  $\frac{d}{ds}\frac{1,05s^{1,6} - 2s^{2,1} + 3,44}{s^2} = \frac{d}{ds}(1,05s^{-0,4} - 2s^{-0,1} + 3,44s^{-2}) =$

$= 1,05 \cdot (-0,4)s^{-1,4} - 2 \cdot (-0,1)s^{-1,1} + 3,44 \cdot (-2)s^{-3} = -\frac{0,42}{s^{1,4}} + \frac{0,2}{s^{1,1}} - \frac{6,88}{s^3}$ .

8. Найти производные от функций:

1)  $(x^2 + 1) \ln x$ ; 2)  $3,2x \cdot \operatorname{arctg} x$ ; 3)  $(2x^2 - x + 2) \sin x$ ; 4)  $2^x \cdot \cos x$ ;

5)  $(x^2 - 2x) \cdot e^x \cdot \sin x$ ; 6)  $x^2 \cos x + 2x \sin x$ .

Отв. и реш. 1)  $(x^2 + 1)' \cdot \ln x + (x^2 + 1)(\ln x)' = 2x \cdot \ln x + \frac{x^2 + 1}{x}$  [(23); (22); (8)];

2)  $3,2 \operatorname{arctg} x + \frac{3,2x}{1+x^2}$  [(19); (23); (4); (17)]; 3)  $(4x - 1) \sin x + (2x^2 - x + 2) \cos x$  [(23); (22); (11)]; 4)  $(2^x)' \cdot \cos x + 2^x \cdot (\cos x)' = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \cos x + 2^x \cdot (-\sin x) = 2^x (\ln 2 \cdot \cos x - \sin x)$  [(23); (9); (12)]; 5)  $(x^2 - 2x)' \cdot e^x \cdot \sin x + (x^2 - 2x) \cdot (e^x)' \cdot \sin x + (x^2 - 2x) \cdot e^x \cdot (\sin x)' = (2x - 2) \cdot e^x \cdot \sin x + (x^2 - 2x) \cdot e^x \cdot \sin x + (x^2 - 2x) \cdot e^x \cdot \cos x = e^x [(x^2 - 2) \sin x + (x^2 - 2x) \cos x]$  [(23a); (22); (10); (11)]; 6)  $2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x + 2(\sin x + x \cos x) = 4x \cdot \cos x + (2 - x^2) \sin x$  [(20); (23); (19); (5); (12); (4); (11)].

9. То же — для функций:

1)  $\frac{x^2 - 2}{x + 1}$ ; 2)  $\frac{x^2 - 2x}{x^2 + x + 1}$ ; 3)  $\frac{3 \ln x}{2x^3 - 1}$ ; 4)  $\frac{\operatorname{arcsin} x}{5x}$ ; 5)  $\frac{\sin x - 2x}{1 + \cos x}$ ; 6)  $\frac{\sin x}{x^2}$ ;

7)  $\frac{x\sqrt{x}}{x + \sin x}$ ; 8)  $\frac{ax + b}{cx + d}$  (где  $a, b, c, d$  — постоянные); 9)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ .



$$\begin{aligned} \text{Отв. и реш. 1)} & \frac{(x^2 - 2)' \cdot (x + 1) - (x^2 - 2) \cdot (x + 1)'}{(x + 1)^2} = \frac{2x \cdot (x + 1) - (x^2 - 2) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \\ & = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x + 1)^2} \text{ [(24); (22)]; 2) } \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 2}{(x + 1)^2}; \\ 3) & 3 \cdot \frac{(\ln x)' \cdot (2x^2 - 1) - \ln x \cdot (2x^2 - 1)'}{(2x^2 - 1)^2} = 3 \cdot \frac{\frac{2x^2 - 1}{x} - 4x \cdot \ln x}{(2x^2 - 1)^2} = \\ & = 3 \cdot \frac{2x^2 - 1 - 4x^2 \cdot \ln x}{(2x^2 - 1)^2} \text{ [(8)]; 4) } \frac{1}{5} \cdot \frac{(\arcsin x)' \cdot x - \arcsin x \cdot (x)'}{x^2} = \\ & = \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{x^2} \right) \text{ [(15)],} \\ 5) & \frac{2x - (1 + \cos x) - (1 + 2x) \sin x}{(1 + \cos x)^2}; 6) \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}; \\ 7) & \frac{(x^{\frac{3}{2}})' (x + \sin x) - x^{\frac{3}{2}} \cdot (x + \sin x)'}{(x + \sin x)^2} = \frac{\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin x - x^{\frac{3}{2}} \cos x}{(x + \sin x)^2} = \\ & = \frac{(x + 3 \sin x - x \cdot \cos x) \sqrt{x}}{2(x + \sin x)^2}; 8) \frac{a(cx + d) - (ax + b) \cdot c}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}; \\ 9) & \frac{1}{(1 + x^2)^2} \text{ [(17)].} \end{aligned}$$

10. То же — для функций:

$$1) \frac{x^3 \cdot \ln x}{1 - x^2}; 2) \frac{1 + \cos x}{4x^2 \cdot \sin x}; 3) \frac{(1 - x^2) \cdot \operatorname{tg} x}{3x^2 + x}; 4) \frac{(1 + x)e^x}{(1 + e^x) \cdot x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Отв. и реш. 1)} & \frac{(x^3 \cdot \ln x)' \cdot (1 - x^2) - x^3 \cdot \ln x \cdot (1 - x^2)'}{(1 - x^2)^2} = \\ & = \frac{\left( 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} \right) (1 - x^2) - x^3 \cdot \ln x \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = x^2 \cdot \frac{(x^2 + 3) \ln x - (x^2 - 1)}{(1 - x^2)^2}; \\ 2) & \frac{1}{4} \cdot \frac{-\sin x \cdot x^2 \sin x - (1 + \cos x)(2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x)}{x^4 \cdot \sin^2 x} = \\ & = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(1 + \cos x)(x + 2 \sin x)}{x^3 \cdot \sin^2 x}; 3) \frac{(1 - x^2)(3x^2 + x) - (x^3 + 6x + 1) \sin x \cos x}{(3x^2 + x)^2 \cdot \cos^2 x}; \\ 4) & \text{производная числителя} = 1 \cdot e^x + (1 + x) \cdot e^x = (x + 2)e^x; \text{ производная знаменателя} = e^x \cdot x^2 + (1 + e^x) \cdot 2x = (x^2 + 2x)e^x + 2x; \text{ производная же дробь} = \\ & = \frac{(x + 2)e^x \cdot (1 + e^x)x^2 - (1 + x)e^x [(x^2 + 2x)e^x + 2x]}{(1 + e^x)^2 \cdot x^4} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

**61. Дифференцирование сложной функции.** Пусть дана некоторая функция  $y$  от переменной  $u$ ; если переменная  $u$ , в свою очередь, зависит



от некоторой новой переменной  $x$ , то *через посредство  $u$* , очевидно, и  $y$  зависит от  $x$ . Например, путь  $s$ , пройденный ползуном  $L$  кривошипного механизма (черт. 67), зависит от угла  $\alpha$  кривошипа с горизонтальной прямой, угол же  $\alpha$  есть функция времени  $t$ ; ясно, что *через посредство  $\alpha$  и  $s$  будет функцией времени  $t$* . Аналитически можно себе представить дело так, что в функцию  $y=f(u)$  *подставляется*, вместо аргумента ее  $u$ , функция  $u=\varphi(x)$  от новой независимой переменной  $x$ ; так, если  $y=\sin u$ , а  $u=x^2$ , то получим:  $y=\sin(x^2)$ .

В подобном случае  $y$  называется *сложной функцией от  $x$* ; можно сказать, что сложная функция есть не что иное, как *функция от функции*:  $y=f(\varphi(x))$ .

Обыкновенно нетрудно расчленить сложную функцию на простейшие составляющие.

Примеры:

$$1) y=e^{\operatorname{tg} x}: y=f(u)=e^u, \quad u=\varphi(x)=\operatorname{tg} x;$$

$$2) y=\sqrt{1+x^2}: y=f(u)=\sqrt{u}, \quad u=\varphi(x)=1+x^2;$$

$$3) y=\ln \cos x: y=f(u)=\ln u, \quad u=\varphi(x)=\cos x;$$

$$4) y=(\operatorname{arctg} x)^{\frac{3}{2}}: y=f(u)=u^{\frac{3}{2}}, \quad u=\varphi(x)=\operatorname{arctg} x;$$

$$5) y=\operatorname{arctg} (x^{\frac{3}{2}}): y=f(u)=\operatorname{arctg} u, \quad u=\varphi(x)=x^{\frac{3}{2}}.$$

$$6) y=\sin 5x: y=f(u)=\sin u, \quad u=\varphi(x)=5x;$$

$$7) y=(x^2+1)^3: y=f(u)=u^3, \quad u=x^2+1.$$

Часто случается, что мы умеем вычислять в отдельности производную от функции  $y=f(u)$  по ее аргументу  $u$ , и производную от функции  $u=\varphi(x)$  по независимой переменной  $x$ , но не умеем непосредственно вычислять производную от сложной функции  $y=f(\varphi(x))$  по независимой переменной  $x$ . Так, мы умеем вычислять производную от  $y=e^u$  по  $u$  и от  $u=\operatorname{tg} x$  по  $x$ , но все же не знаем пока, как вычислить производную от  $y=e^{\operatorname{tg} x}$  по  $x$ . Ответ на этот вопрос дает правило дифференцирования сложной функции, которое основано на весьма простых соображениях.

Придадим переменной  $x$  приращение  $\Delta x$ , тогда функция  $u$  получит приращение  $\Delta u$  (стремящееся к нулю одновременно с  $\Delta x$ ), а функция  $y$  — приращение  $\Delta y$ . Для вычисления производной  $y'_x$  нужно найти предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Но мы можем написать:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$



так что, переходя к пределам,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

или, если вспомнить, что — по определению производной —

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x,$$

имеем окончательно:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x). \quad (27)$$

Производная от сложной функции  $y = f(u)$ , где  $u = \varphi(x)$ , равна произведению производной от функции  $f(u)$  по ее аргументу  $u$ , умноженной на производную от этого аргумента по независимой переменной  $x$ .

Таким образом, вычисление производной от сложной функции приводится к вычислению производных от „составляющих“ ее функций, имеющих более простой вид.

Правило дифференцирования сложной функции можно высказать еще и так: скорость изменения сложной функции ( $y$ ) по отношению к независимой переменной ( $x$ ) равна произведению скорости изменения функции по отношению к ее аргументу ( $u$ ) на скорость изменения этого аргумента по отношению к независимой переменной.

В этой форме правило становится непосредственно очевидным: если изменение  $y$  происходит в 5 раз быстрее  $u$ , а изменение  $u$  — в 3 раза быстрее  $x$ , то, разумеется,  $y$  изменяется в  $5 \cdot 3 = 15$  раз быстрее  $x$ .

Обратимся к примерам, хотя бы к тем, о которых упоминалось выше. Если  $y = \sin(x^2)$ , то  $f(u) = \sin u$ ,  $u = \varphi(x) = x^2$ , поэтому:  $y'_x = f'(u) \cdot \varphi'(x) = \cos u \cdot 2x$  [(12), (5)]; остается лишь подставить, вместо  $u$ , его значение  $x^2$ , чтобы получить:  $y'_x = \cos x^2 \cdot 2x$ . Далее, если  $y = e^{\operatorname{tg} x}$ , так что  $f(u) = e^u$  и  $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ , то  $y'_x = e^u \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$  [(10), (13)]. Аналогично и в прочих примерах:

$$y = \sqrt{1+x^2}, y'_x = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad [(5), (22)]$$

$$y = \ln \cos x, y'_x = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x; \quad [(8), (12)]$$

$$y = (\operatorname{arctg} x)^{\frac{3}{2}}, y'_x = \frac{3}{2} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}; \quad [(3), (17)]$$

$$y = \operatorname{arctg}(x^{\frac{3}{2}}), y'_x = \frac{1}{1+(x^{\frac{3}{2}})^2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}; \quad [(17), (3)]$$



$$y = \sin 5x, \quad y'_x = 5 \cdot \cos 5x \quad [(11); (19), (4)]$$

$$y = (x^2 + 1)^3, \quad y'_x = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2 \quad [(5); (22)]$$

Мы обращаем внимание читателя на два последних примера. Несмотря на их простоту, примеры этого типа иногда являются источником ошибок, если не усмотреть, что и здесь имеем дело со сложными функциями.

Правило (27) можно обобщить на случай нескольких „составляющих“ функций, например, если

$$y = f(u), \quad \text{где } u = \varphi(v) \text{ и } v = \psi(x),$$

то:

$$y'_x = f'(u) \varphi'(v) \psi'(x). \quad (27a)$$

Так, для функции  $y = e^{\sin 2x}$  имеем:

$$y = f(u) = e^u, \quad u = \varphi(v) = \sin v, \quad v = \psi(x) = 2x,$$

так что

$$y'_x = e^u \cdot \cos v \cdot 2 = 2 e^{\sin 2x} \cdot \cos 2x.$$

62. Примеры и задачи. 1. Вычислим производные для гиперболических функций [50]. Так как

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

то

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{sh} x)' &= \frac{1}{2} [(e^x)' - (e^{-x})'] = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x, \\ (\operatorname{ch} x)' &= \frac{1}{2} [(e^x)' + (e^{-x})'] = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Здесь  $e^{-x}$  пришлось рассматривать как сложную функцию:  $e^u$  при  $u = -x$ , так что  $(e^{-x})' = e^u \cdot (-x)' = -e^{-x}$ . Затем, по правилу (24) [см. также 49, (42)]

$$\left. \begin{aligned} (\operatorname{th} x)' &= \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x (\operatorname{ch} x)'}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ (\operatorname{cth} x)' &= \left( \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x)'}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

И в этих соотношениях (28), (29) проявляется сходство с тригонометрическими функциями, ср. (11) — (14)!

2. Рассмотрим синусоидальную величину [45, (34)]

$$y = A \sin(\omega t + \alpha),$$

Она получается из функции  $A \sin u$ , если положить  $u = \omega t + \alpha$ ; поэтому ее производная будет:

$$\frac{dy}{dt} = A \cos u \cdot \frac{du}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \alpha),$$

что можно также представить и в виде:

$$\frac{dy}{dt} = A\omega \cdot \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right);$$



таким образом, при дифференцировании синусоидальной величины  $A \sin(\omega x + \alpha)$  ее амплитуда умножается на частоту  $\omega$ , а фаза увеличивается на  $\frac{\pi}{2}$ . Воспользовавшись геометрическим истолкованием синусоидальной величины [46, черт. 71], можно это правило выразить и так: длина отрезка, выражающего синусоидальную величину, умножается на частоту и затем производится поворот (против часовой стрелки) на прямой угол.

Если точка производит гармоническое колебательное движение [46], так что путь, пройденный ею, определяется формулой  $s = A \sin(\omega t + \alpha)$ , то для скорости  $v$  [52, 54] получим выражение:

$$v = \frac{ds}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \alpha). \quad (30)$$

3. Принимая, что давление  $p$  (в мм ртутного столба) воздуха зависит от высоты  $h$  (м) места над уровнем моря по формуле

$$p = 760 \cdot e^{-0,000125h},$$

найти *градиент* давления и показать, что он пропорционален самому давлению.

*Реш.* Нужно вычислить  $\frac{dp}{dh}$  [53, 5; 54]. Имеем:  $p = 760 \cdot e^u$ , где  $u = -0,000125h$ ; по правилам (19) и (27),  $\frac{dp}{dh} = 760 \cdot \frac{de^u}{du} \cdot \frac{du}{dh} = 760 e^u \cdot (-0,000125)$ , так что  $\frac{dp}{dh} = -0,000125 p$ .

4. Для электрической цепи с самоиндукцией справедливо правило: вольтаж  $V$  равен произведению сопротивления  $R$  на ток  $J$ , сложенному с произведением самоиндукции  $L$  на *скорость изменения* тока  $J$  во времени. Записать правило в виде равенства и проверить, удовлетворяет ли этому равенству ток:

$$J = \frac{V}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

[эта формула выражает закон нарастания тока в цепи при ее замыкании].

*Реш.* „Скорость изменения“ тока есть  $\frac{dJ}{dt}$  [53], поэтому правило запишется так:

$$V = RJ + L \cdot \frac{dJ}{dt}. \quad (31)$$

Дифференцируем теперь указанное выражение для тока

$$J = \frac{V}{R} - \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (32)$$

По правилам (20), (21), (19) имеем:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{V}{R} \cdot \frac{d}{dt} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

С другой стороны,  $e^{-\frac{R}{L}t} = e^u$ , если положить  $u = -\frac{R}{L}t$ , и по правилу (27),

$$\frac{d}{dt} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{de^u}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \cdot \left( -\frac{R}{L} \right) = -\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}.$$



Таким образом,

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{V}{L} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (33)$$

Подставляя выражения (32) и (33) в равенство (31), убеждаемся в его справедливости.

5. Найти скорость  $v$  точки, производящей затухающие колебания по формуле

$$s = Ae^{-kt} \sin \omega t.$$

Реш. Пользуясь правилами (19) и (23), имеем:

$$v = \frac{ds}{dt} = A \cdot \left[ e^{-kt} \cdot \frac{d}{dt} \sin \omega t + \frac{d}{dt} e^{-kt} \cdot \sin \omega t \right];$$

что до производных  $\frac{d}{dt} \sin \omega t$  и  $\frac{d}{dt} e^{-kt}$ , то их вычисляем по правилу (27), как и выше. Окончательно:

$$v = Ae^{-kt} (\omega \cdot \cos \omega t - k \cdot \sin \omega t). \quad (34)$$

6. Пусть имеем кривошипно-шатунный механизм [46, 4; черт. 73]. Определить скорость ползуна, как в прямом, так и в обратном движении.

Реш. Дифференцируя равенство (37) в 46, получим:

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega r \left( \sin \omega t \mp \frac{r}{2l} \sin 2\omega t \right); \quad (35)$$

если вернуться к углу  $\alpha (= \omega t)$  кривошипа с горизонтальной прямой и обозначить через  $V$  постоянную линейную скорость  $\omega r$  пальца  $B (B')$  кривошипа, то выражение для скорости представится в виде:

$$v = V \left( \sin \alpha \mp \frac{r}{2l} \sin 2\alpha \right). \quad (36)$$

7. Вычислить производные от функций: \*

- 1)  $(2x - 3)^4$ ; 2)  $\ln(ax + b)$ ; 3)  $3 \cos(24x - 5)$ ; 4)  $1,6 \sin(-2,3x) + 0,15 \cos(3,4x)$   
 5)  $e^{ax}$ ; 6)  $(5x + 1)^2 \cdot (x - 2)$ ; 7)  $x^3 \cdot e^{2x}$ ; 8)  $x^n e^{ax}$ ; 9)  $\ln x \cdot \cos 2x$ ;  
 10)  $e^{-0,1x} \cos(3x + 0,2)$ ; 11)  $\frac{2x + 7}{(x + 3)^3}$ ; 12)  $\frac{(x + 1)^3}{(3x - 2)^2}$ ; 13)  $\frac{\sin(2x + 3)}{\cos(2x - 3)}$ ; 14)  $\frac{e^{2x}}{x^4}$ ;  
 15)  $\frac{x^{2,1}}{e^{3,5x}}$ .

- Отв. и реш. 1) Функция  $= u^4$ , где  $u = 2x - 3$ ; производная  $= 4u^3 \cdot u' =$   
 $= 4(2x - 3)^3 \cdot 2 = 8(2x - 3)^3$ ; 2)  $\frac{1}{ax + b} \cdot (ax + b)' = \frac{a}{ax + b}$ ;  
 3)  $3 \cdot [-\sin(24x - 5)] \cdot 24 = -72 \sin(24x - 5)$ ; 4)  $-3,68 \cos(2,3x) - 0,51 \sin(3,4x)$ ;  
 5)  $ae^{ax}$ ; 6)  $[(5x + 1)^2]' \cdot (x - 2) + (5x + 1)^2 \cdot (x - 2)' = 2(5x + 1)(5x + 1)' \cdot (x - 2) +$   
 $+ (5x + 1)^2 \cdot 1 = (5x + 1)(15x - 19)$ ; 7)  $3x^2 \cdot e^{2x} + x^3 \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} \cdot (2x^3 + 3x^2)$ ;  
 8)  $e^{ax}(ax^n + nx^{n-1})$ ; 9)  $\frac{1}{x} \cdot \cos 2x - 2 \ln x \cdot \sin 2x$ ;

\* В примерах 7—11 буква  $x$  означает независимую переменную, а прочие буквы — постоянные величины.



$$10) -0,1 \cdot e^{-0,1x} \cos(3x + 0,2) + e^{-0,1x} \cdot [-\sin(3x + 0,2)] \cdot 3 = \\ = -e^{-0,1x} [0,1 \cos(3x + 0,2) + 3 \sin(3x + 0,2)];$$

$$11) \frac{2 \cdot (x+3)^2 - (2x+7) \cdot 3(x+3)^2 \cdot 1}{(x+3)^6} = \frac{(x+3)^2 [2(x+3) - 3(2x+7)]}{(x+3)^6} = \\ = -\frac{4x+15}{(x+3)^4}; 12) \frac{3 \cdot (x+1)^2 \cdot 1 \cdot (3x-2)^2 - (x+1)^2 \cdot 2 \cdot (3x-2) \cdot 3}{(3x-2)^4} = \\ = \frac{(x+1)^2 (3x-2)(3x-12)}{(3x-2)^4} = \frac{3(x+1)^2 (x-4)}{(3x-2)^3}; 13) \frac{2 \cos 6x}{\cos^2(2x-3)};$$

$$14) (e^{2x} \cdot x^{-4})' = 2e^{2x} \cdot x^{-4} + e^{2x} \cdot (-4)x^{-5} = e^{2x} \left( \frac{2}{x^4} - \frac{4}{x^5} \right);$$

$$15) (x^{2,1} e^{-3,5x})' = \frac{-3,5x^{2,1} + 2,1x^{1,1}}{e^{3,5x}}.$$

8. Вычислить производные от функций:

$$1) \sqrt{x^2 + 2x + 1}; 2) \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}; 3) \frac{1}{(x^2 + x - 2)^{\frac{2}{3}}}; 4) \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x-1}; 5) \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Отв. и р.ш. 1)  $\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+1}} = 1$ ; 2)  $[(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}]' = -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x =$   
 $= -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ ; 3)  $-\frac{2(2x+1)}{3(x^2+x-2)^{\frac{5}{3}}}$ ; 4)  $\frac{(\sqrt{x^2+1})' \cdot (x-1) - \sqrt{x^2+1} \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} =$   
 $= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(x-1) - \sqrt{x^2+1} \cdot 1}{(x-1)^2} = -\frac{x+1}{(x-1)^2 \sqrt{x^2+1}}$ ;  
 5)  $\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+a^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{(\sqrt{x^2+a^2})^2} = \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$

9. Вычислить производные от функций:

$$1) e^{x^2}; 2) e^{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}; 3) 2^{\sin x}; 4) e^{\frac{1}{x-1}}; 5) 0,23 \cdot (3,7)^2 \sqrt{x}; 6) e^{e^x}.$$

Отв. и р.ш. 1)  $2x e^{x^2}$ ; 2)  $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}} e^{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}$ ; 3)  $2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$ ;

$$4) -\frac{1}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}; 5) 0,23 \cdot (3,7)^2 \sqrt{x} \cdot \ln 3,7 \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{0,23 \ln 3,7}{\sqrt{x}} \cdot (3,7)^2 \sqrt{x};$$

$$6) e^{e^x} \cdot (e^x)' = e^x \cdot e^{e^x}.$$



10. Вычислить производные от функций:

- 1)  $\ln(0,1x+4)$ ; 2)  $3,2 \log(2x^2+3x-1)$ ; 3)  $\ln(x^n+1)$ ; 4)  $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ ;  
 5)  $(\log x)^2$ ; 6)  $[\ln(x-1)]^5$ ; 7)  $[\log(x^2+x-1)]^{0,3}$ ; 8)  $\ln(\ln x)$ ; 9)  $\log_a(\log_b x)$ ;  
 10)  $\ln \operatorname{tg}(ax+b)$ .

Отв. и реш. 1)  $\frac{1}{x+40}$ ; 2)  $\frac{3,2(4x+3)\log e}{2x^2+3x-1}$ ; 3)  $\frac{nx^{n-1}}{x^n+1}$ ; 4) имеем  $\ln u$ ,

где  $u = x + \sqrt{x^2+1}$ , поэтому производная  $= \frac{1}{u} \cdot u' =$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; \quad 5) \frac{2 \log e \cdot \log x}{x}; \quad 6) \text{ функция} = u^5,$$

где  $u = \ln v$ , а  $v = x - 1$ ; производная  $= 5u^4 \cdot \frac{1}{v} \cdot 1 = \frac{5[\ln(x-1)]^4}{x-1}$ ;

$$7) \frac{0,3 \log e (2x+1)}{[\log(x^2+x-1)]^{0,7} (x^2+x-1)}; \quad 8) \frac{1}{x \ln x}; \quad 9) \frac{\log_a e \log_b e}{x \log_b x}; \quad 10) \text{ функция} = \ln u, \text{ где}$$

$u = \operatorname{tg} v$ , а  $v = ax + b$ ; производная  $= \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot a = \frac{1}{\operatorname{tg}(ax+b)} \cdot \frac{1}{\cos^2(ax+b)} \cdot a =$   
 $= \frac{2a}{\sin 2(ax+b)}$ .

11. Найти производные от функций:

- 1)  $10 \operatorname{tg}^3 x^3$ ; 2)  $x^2 \sin \frac{x}{2}$ ; 3)  $\sin x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x$ ; 4)  $\cos^3(1-x)$ ; 5)  $\frac{\sin 2x}{4x^2}$ ;  
 6)  $\frac{\sin^2 3x}{\cos^3 2x}$ ; 7)  $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x+5}{2}$ ; 8)  $\arcsin \sqrt{1-x^2}$ ; 9)  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$ .

Отв. и реш. 1)  $10 \cdot (3 \operatorname{tg}^2 x^3) \cdot 3x^2 = 90x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 x^3$ ; 2)  $2x \cdot \sin \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} \cos \frac{x}{2}$

(указ.:  $\frac{x}{2}$  следует рассматривать как  $\frac{1}{2}x$ , так что производная отсюда  $= \frac{1}{2}$ !);

$$3) \cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x - 2 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x + 3 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x;$$

$$4) 2 \cos(1-x) \cdot [\cos(1-x)]' = 2 \cos(1-x) \cdot [-\sin(1-x)] \cdot (-1) = \sin 2(1-x);$$

$$5) \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 2x \cdot 2 \cdot x^2 - \sin 2x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot \cos 2x - \sin 2x}{2x^3};$$

$$6) \frac{2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 \cdot \cos^2 2x - \sin^2 3x \cdot 3 \cos^2 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2}{\cos^6 2x} =$$

$$= \frac{6 \sin 3x \cdot \cos^2 2x [\cos 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x \cdot \sin 2x]}{\cos^6 2x} = \frac{6 \sin 3x \cdot \cos x}{\cos^4 2x}$$

$$7) \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{3x+5}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)' = \frac{1}{9x^2 + 30x + 29};$$

$$8) \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{1-x^2})^2}} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 9) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{1+x^2}.$$



12. Вычислить производные в следующих случаях:

$$1) u = \frac{1}{3} \ln(9x^2 - 12x + 8) + \frac{5}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x-2}{2},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{18x+3}{9x^2-12x+8};$$

$$2) v = t \cdot \arcsin t + \sqrt{1-t^2},$$

$$\frac{dv}{dt} = \arcsin t;$$

$$3) y = 0,25 \cdot e^{-0,3t} \cdot \sin(10t - 3,2),$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{-0,3t} [2,5 \cos(10t - 3,2) - 0,075 \sin(10t - 3,2)];$$

$$4) z = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^{ax} \cdot \cos bx;$$

$$5) t = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2},$$

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}} = \frac{1}{\sin u};$$

$$6) y = 2 \arcsin(2 \sin 2x),$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4 \sin^2 2x}} \cdot 2 \cos 2x \cdot 2 = \\ &= \frac{8 \cos 2x}{\sqrt{1-4 \sin^2 2x}}; \end{aligned}$$

$$7) w = [(2s^2 - 2) \sin 2s + (1 + 2s - s^2) \cos 2s] e^{-s},$$

$$\frac{dw}{ds} = (3s^2 - 2s - 3) \cos 2s \cdot e^{-s};$$

$$8) \theta = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}},$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{2};$$

$$9) s = \arccos \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}},$$

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{2}{e^t + e^{-t}};$$

$$10) r = \ln \frac{\sqrt{\theta^2 + 1} - \theta}{\sqrt{\theta^2 + 1} + \theta},$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{2}{\sqrt{\theta^2 + 1}};$$

$$11) y = \ln \operatorname{tg}(ax + b),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{\sin 2(ax + b)};$$

$$12) p = \ln \sin \frac{3q-1}{4q};$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{4q^2} \operatorname{cotg} \frac{3q-1}{4q}.$$

13. Пусть дана функция  $y = f(x)$ ; составим производную от сложной функции  $z = \ln f(x)$ ,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d \ln y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}. \quad (37)$$

Так как производные этого типа встречаются нередко [см., напр. 70], то им присвоено особое название: производную от натурального логарифма функции  $y = f(x)$  называют логарифмической производной этой функции. Как мы видим, логарифмическая производная функции равна частному от деления обыкновенной производной на самую функцию.

При дифференцировании логарифмического выражения, в частности, при вычислении логарифмической производной — часто бывает удобно до дифференцирования преобразовать логарифмическое выражение по правилам алгебры.



Напр., вместо того чтобы для функции  $z = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}$  вычислять производную так:

$$z' = \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}} \cdot \frac{1 \cdot (x^2+x+1) - (x-1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$$

$$= \frac{2+2x-x^2}{2(x^2-1)},$$

проще предварительно представить  $z$  в виде:

$$z = \frac{1}{2} [\ln(x-1) - \ln(x^2+x+1)],$$

откуда:

$$z' = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right] = \frac{2+2x-x^2}{2(x^2-1)}.$$

Воспользовавшись этим замечанием, найти производные от функций:

1)  $\ln \frac{(x^2+1)(x-1)}{x+1}$ ; 2)  $\ln \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x^2-1}$ ; 3)  $\ln \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$ ;

4)  $\ln \left\{ (x^2-1) \sqrt[3]{3x^2+1} \right\}$ .

Отв. 1)  $2 \frac{x^3+x^2-x+1}{x^4-1}$ ; 2)  $\frac{4x}{1-x^4}$ ; 3)  $\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$ ; 4)  $\frac{8x^3}{3x^4-2x^2-1}$ .

Найти логарифмические производные для функций:

5)  $\frac{(x-2)^2(x-4)}{(x-3)^3(x-1)}$ ; 6)  $2x - a + 2\sqrt{x^2 - ax}$  ( $a$  — постоянная);

7)  $\frac{\sin \frac{x+\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}}$  ( $\alpha$  — постоянная).

Отв. 5)  $\frac{6}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$ ; 6)  $\frac{1}{\sqrt{x^2 - ax}}$ ;

7)  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{x+\alpha}{2}}{\sin \frac{x+\alpha}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{x-\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\cos x - \cos \alpha}$ .

14. Если выражение состоит из нескольких множителей или делителей (или, вообще, имеет „логарифмический вид“), то иной раз проще вычислить сначала логарифмическую производную, а от нее перейти к обыкновенной, по формуле [см. (37)]:

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{d \ln y}{dx}.$$

Так, если  $y = \frac{(x-2)^2(x-4)}{(x-3)^3(x-1)}$ , то, вычислив логарифмическую производную



[см. зад. 13, 5)]:  $\frac{6}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$ , легко найдем затем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} \cdot \frac{(x-2)^2(x-4)}{(x-3)^2(x-1)} = \frac{6(x-2)}{(x-3)^2(x-1)^2}.$$

Найти этим путем производные для функций:  $\frac{x-3}{(x+5)^2}$ ;  $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^3}$ .

Отв.  $\frac{-x+11}{(x+5)^3}$ ;  $\frac{(x+1)(x+5)}{(1-x)^4}$ .

Указанным приемом можно получить производные и для таких выражений, которые представляют собою степени с переменным основанием и переменным показателем. Напр., пусть  $y = x^{\sin x}$ ; имеем:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x, \quad \frac{d \ln y}{dx} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x},$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

Аналогично найдем:

$$(x^x)' = x^x (\ln x + 1); \quad \left[ (\sin x)^{\frac{1}{x}} \right]' = (\sin x)^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x \cdot \operatorname{ctg} x - \ln \sin x}{x^2}.$$

Впрочем, подобные выражения в технике редко встречаются.

**63. Производные высших порядков.** Производная  $y' = f'(x)$  от функции  $y = f(x)$  вообще является в свою очередь функцией от  $x$ ; для нее также можно вычислять среднюю скорость изменения в некотором промежутке, равно как и скорость изменения в данной точке, другими словами — производную. Эта производная от производной называется *производной второго порядка*, или просто *второй производной*, и обозначается символами:

$$y''; f''(x); \frac{d^2 y}{dx^2}; \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \text{ или } \frac{d^2}{dx^2} f(x).$$

Таким образом,

$$y'' = (y')' \text{ или } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right).$$

Напр., если  $y = 3x^3 - 5x^2 + 1$ , то  $y' = 9x^2 - 10x$ , а  $y'' = 18x - 10$ .

В свою очередь, вторая производная есть функция от  $x$ , которая имеет также производную, и эта производная называется *производной третьего порядка* или *третьей производной* и обозначается символами:

$$y'''; y^{(3)}; f'''(x); \frac{d^3 y}{dx^3}; \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \text{ или } \frac{d^3}{dx^3} f(x).$$

Идя таким путем, мы можем получить последовательно производную любого,  $n$ -го, порядка:

$$y^{(n)}; f^{(n)}(x); \frac{d^n y}{dx^n}; \frac{d^n f(x)}{dx^n} \text{ или } \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$



*Примеры и задачи.* 1. Если рассматриваем движение точки, то не только пройденный путь  $s$  является функцией от времени  $t$ ,  $s = f(t)$ , но и скорость точки  $v$  также зависит от времени и с течением времени вообще изменяется (исключая случай равномерного движения). Если за промежуток времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  скорость получит приращение  $\Delta v$ , то отношение  $\omega_{cp.} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ , как известно, называется

*средним ускорением* точки за упомянутый промежуток времени. Когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , то это среднее ускорение  $\omega_{cp.}$  стремится к некоторому пределу  $\omega$ , который является *ускорением в данный момент  $t$* . Таким образом, ускорение есть скорость изменения скорости, или производная от скорости по времени; так как скорость сама по себе является производной от пути по времени, то ускорение будет второй производной от пути по времени. Записывается это так:

$$\omega = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ или } \omega = v' = s'' = f''(t). \quad (38)$$

Аналогично устанавливается понятие об *угловом ускорении* в данный момент — это есть производная от угловой скорости  $\omega$  тела [52, 1] по времени  $t$ , т. е. вторая производная по времени от угла поворота  $\varphi$ .

2. Мы уже нашли скорость для случая падающего тяжелого тела [60, 1]:  $v = 9,81 t + v_0$ ; очевидно, в этом случае ускорение будет *постоянным*:

$$\omega = \frac{dv}{dt} = 9,81,$$

вследствие чего само движение называется *равноускоренным*. Постоянное ускорение  $g = 9,81$  (м/сек.<sup>2</sup>) носит название *ускорения силы тяжести*.

По основному закону движения Ньютона, произведение массы  $m$  материальной точки на ускорение  $\omega$  равно силе  $F$ , действующей на точку:

$$F = m\omega = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (39)$$

В рассмотренном сейчас случае сила  $F$  оказывается постоянной и равна  $m \cdot g$  она называется *весом* тела.

3. Для точки, производящей гармоническое колебание, по синусоидальному закону:  $s = A \sin(\omega t + \alpha)$ , скорость движения, как мы видели [62 (30)], выражается формулой:  $v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \alpha)$ . Дифференцируя, получим ускорение:

$$\omega = -A\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \cdot s.$$

Наконец, по закону Ньютона (39):

$$F = -m\omega^2 \cdot s.$$

Таким образом, мы выяснили, что *гармоническое колебательное движение может происходить под действием силы, пропорциональной перемещению  $s$  движущейся точки и, имеющей направление, обратное этому перемещению*.

Примеры таких сил в физике и технике весьма многочисленны; к ним относятся действия пружин и рессор, оказывающие сопротивление давящему на них грузу, пропорциональное смещению из положения равновесия; крутильные колебания тонких нитей и корабельных валов, сопротивление которых скручиванию пропорционально самому скручиванию; малые колебания маятников и пр.

4. Если материальная точка производит *затухающие колебания*:

$$s = Ae^{-kt} \sin \omega t,$$

то ее скорость равна [62, (34)]

$$v = Ae^{-kt} (\omega \cdot \cos \omega t - k \cdot \sin \omega t),$$



следовательно, ускорение будет:

$$w = \frac{dv}{dt} = -A e^{-kt} (\omega^2 \cdot \sin \omega t + 2 \omega k \cdot \cos \omega t - k^2 \cdot \sin \omega t).$$

Вводя в скобках еще член  $k^2 \sin \omega t$  с (+) и с (-), после очевидных преобразований получим:

$$\begin{aligned} w &= -A e^{-kt} [(\omega^2 + k^2) \sin \omega t + 2k (\omega \cdot \cos \omega t - k \cdot \sin \omega t)] = \\ &= -(\omega^2 + k^2) \cdot s - 2k \cdot v. \end{aligned}$$

Сила  $F$ , действующая на материальную точку, будет равна

$$F = -(\omega^2 + k^2) m \cdot s - 2km \cdot v;$$

мы видим, что она складывается 1) из силы  $F_1$ , пропорциональной расстоянию  $s$  точки от ее среднего положения и направленной к этому среднему положению (как и в случае гармонического колебания), и 2) из силы  $F_2$ , пропорциональной скорости и направленной *обратно* скорости (тормозящей движение!).

5. Определить ускорение ползуна кривошипно-шатунного механизма.

*Реш.* Из формулы (35), 62:

$$w = \frac{dv}{dt} = \omega^2 r \left( \cos \omega t \mp \frac{r}{l} \cos 2 \omega t \right) = \frac{V^2}{r} \left( \cos \alpha \mp \frac{r}{l} \cos 2 \alpha \right), \quad (40)$$

где попрежнему  $\alpha = \omega t$ ,  $V = \omega r$ .

6. В теории сопротивления материалов доказывается, что если  $y = f(x)$  есть уравнение оси изогнутой балки, которая в положении равновесия была направлена по оси  $Ox$ , то *изгибающий момент*  $M(x)$  в точке  $x$  (фактор, характеризующий изгибающее усилие) определяется по формуле  $M(x) = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$ , где  $E$  и  $I$  — некоторые постоянные (модуль упругости и момент инерции поперечного сечения балки).

*Перерезывающее в точке  $x$  усилие*  $A(x)$  определяется по формуле:

$$S(x) = \frac{dM(x)}{dx} = EI \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = EI \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

Наконец, *интенсивность нагрузки*  $q(x)$  в точке  $x$ , определится по формуле

$$q(x) = \frac{dA(x)}{dx} = \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = EI \frac{d^4 y}{dx^4}.$$

Все эти формулы читатель проверит без труда, применив правило вынесения постоянного множителя из-под знака производной и вспомнив определение производной 2-го, 3-го и 4-го порядков.

При различных условиях закрепления балки длины  $l$  и распределения нагрузки  $Q$ , уравнение изогнутой оси ее имеет различный вид:

$$1) y = \frac{Q}{6EI} (3lx^2 - x^3); \quad 2) y = \frac{Q}{24EI} (6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4);$$

$$3) y = \frac{Q}{48EI} (3l^2x^2 - 2x^4); \quad 4) y = \frac{Q}{360EI^2} (3x^5 - 10l^2x^3 + 7l^4x).$$

Определить во всех этих случаях изгибающий момент  $M(x)$ , перерезывающее усилие  $S(x)$  и интенсивность нагрузки  $q(x)$  (т. е. нагрузку на единицу длины балки) в сечении  $x$ .

7. Вычислить производные 2-го, 3-го, 4-го, 5-го, 6-го порядка, соответственно, от функций  $x^3$ ;  $x^5$ ;  $x^7$ ;  $x^{0,2}$ ;  $x^{8,3}$ .



8. Показать, что производная порядка  $m$  от многочлена  $n$ -й степени равна постоянной, отличной от 0, если  $m = n$ , и равна 0, если  $m > n$ .

9. Вычислить: 1)  $\frac{d^2 \ln(x+1)}{dx^2}$ ; 2)  $\frac{d^4 \ln \frac{1}{z-1}}{dz^4}$ ; 3)  $\frac{d^8 \ln x}{dx^8}$ ; 4)  $\frac{d^4(e^{0,02t})}{dt^4}$ ;

5)  $\frac{d^5}{dt^5} \left( e^{0,1t+1,8} + t^3 + 2 - \frac{1}{t} \right)$ .

Отв. 1)  $-\frac{1}{(x+1)^2}$ ; 2)  $\frac{6}{(z-1)^4}$ ; 3)  $-\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{x^8}$ ; 4)  $16 \cdot 10^{-8} e^{0,02t}$ ;

5)  $10^{-5} \cdot e^{0,1t+1,8} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{t^6}$ .

10. Дано:  $s = 6e^{-3t} + 11e^{3t}$ ; доказать, что  $\frac{d^2 s}{dt^2} = 9s$ .

11. Дано:  $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$ , где  $C_1, C_2, \alpha$  — постоянные; доказать, что  $\frac{d^2 y}{dx^2} - \alpha^2 y = 0$ .

12. Дано:  $y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$ , где  $A, B, \alpha$  и  $\beta$  — постоянные; определить  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы оказалось:  $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 3y = 0$ .

Отв.  $\alpha = 3, \beta = 1$ , или  $\alpha = 1, \beta = 3$ .

13. Если  $y = Ae^{cx} + Be^{-cx}$ , то доказать, что  $yy''' = y'y''$ .

14. Вычислить выражение:  $(1+x^2)y'' + xy' - n^2y$ , если известно, что

$$y = A(x + \sqrt{x^2 + 1})^n + B(x - \sqrt{x^2 + 1})^n.$$

Отв. 0.

15. Если  $y = A \sin(4t + 9)$ , найти чему равно выражение:  $\frac{d^2 y}{dt^2} + 16y$ .

Отв. 0.

16. Чему должен равняться множитель  $\omega$  в выражении  $y = A \cos \omega t + B \sin \omega t$  для того, чтобы было:  $\frac{d^2 y}{dt^2} + 25,2y = 0$ ?

Отв.  $\omega = \sqrt{25,2} \doteq 5,02$ .

17. Пусть  $y = Ae^{mx} + Be^{-mx} + C \cos mx + D \sin mx$ , где  $A, B, C, D$  и  $m$  — постоянные; доказать что:  $\frac{d^4 y}{dx^4} = m^4 y$ .

18. Пусть  $y = A \cos(\ln x) + B \sin(\ln x)$ , где  $A, B$  — постоянные; доказать, что  $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ .

64. Вычисление производных по таблицам значений функции. Иногда в технике приходится определять скорость изменения (т. е. производную) функции  $y = f(x)$ , заданной не с помощью аналитической формулы, а лишь таблицей ее значений. Конечно, в этом случае точно получить производную нельзя; но вспо-



ним, что, по определению, производная  $y' = f'(x)$  есть предел, к которому стремится отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , иными словами,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (41)$$

поэтому, если  $\Delta x$  достаточно мало, то можно *приблизженно* положить:

$$y' = f'(x) \doteq \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (42)$$

Это равенство очень важно, так как позволяет вычислять одну из величин  $y'$  или  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , если известна другая. В нашем случае, когда функция  $y = f(x)$  задана таблицей, отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  определяется непосредственно и дает приближенное значение для производной  $y' = f'(x)$ , с тем большей точностью, чем меньше табличный промежуток  $\Delta x$ .

По причинам, которые будут выяснены ниже [см. 67 и 203], большая точность получится, если принять отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  за приближенное значение производной не в точке  $x$ , а в точке  $x + \frac{\Delta x}{2}$ , лежащей посередине промежутка от  $x$  до  $x + \Delta x$ , т. е. положить

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \doteq f' \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right). \quad (43)$$

Напр., если по таблице кубов для  $x = 2$ , и 2,1 найдем соответственно  $y = f(x) = x^3 = 8,000$  и 9,261, так что  $\Delta x = 0,1$  и  $\Delta y = 1,261$ , то точнее будет принять  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 12,61$  за значение производной  $y' = f'(x) = 3x^2$  в точке  $x = 2,05$  (где точное значение производной будет 12,6075), чем в точке  $x = 2$  (точное значение = 12).

Определивши таким образом таблицу *приблизженных* значений функции  $y' = f'(x)$ , мы подобным же путем можем получить приближенные значения и для ее производной, т. е. для  $y'' = f''(x)$ , полагая

$$\frac{\Delta \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)}{\Delta x} \doteq f'' \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right);$$

и т. д. Так, получив — в случае функции  $y = f(x) = x^3$  — приближенные значения  $f'(2,05) \doteq 12,61$  и  $f'(2,15) \doteq 13,87$ , мы составляем их разность  $\Delta \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,26$ , делим ее на  $\Delta x = 2,15 - 2,05 = 0,1$  и полагаем  $f''(2,1) = 12,6$ ; легко проверить, что мы получили здесь даже *точное* значение  $f''(x) = 6x$  при  $x = 2,1$ ! Вообще же повторное применение указанного приближенного приема понижает точность, которая может быть восстановлена только путем надлежащего уменьшения промежутка  $\Delta x$ .

В приводимых ниже примерах и задачах мы начинаем с функций, производные которых могут быть вычислены и аналитически, чтобы дать возможность читателю освоиться с методом и проверить свои выкладки.



Примеры и задачи. 1. Рассмотрим функцию  $y = x^3$  и примем  $\Delta x = 0,1$ . Ниже следующая таблица содержит схему необходимых вычислений:

$x$	$y$	$\Delta y$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$	$\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$	$y'$	$y''$
2	8,000						
2,05		1,261	12,61			12,6075	
2,1	9,261			1,25	12,6		12,6
2,15		1,387	13,87			13,8675	
2,2	10,648			1,32	13,2		13,2
2,25		1,519	15,19			15,1875	
2,3	12,167			1,38	13,8		13,8
2,35		1,657	16,57			16,5675	
2,4	13,824			1,44	14,4		14,4
2,45		1,801	18,01			18,0075	
2,5	15,625			1,50	15,0		15,0
2,55		1,951	19,51			19,5075	
2,6	17,576			1,56	15,6		15,6
2,65		2,107	21,07			21,0675	
2,7	19,683			1,62	16,2		16,2
2,75		2,269	22,69			22,6875	
2,8	21,952			1,68	16,8		16,8
2,85		2,437	24,37			24,3675	
2,9	24,389			1,74	17,4		17,4
2,95		2,611	26,11			26,1075	
3	27,000						

Предлагается сравнить полученные приближенные значения  $y'$  и  $y''$  с точными приведенными в двух последних столбцах.

2. Взявши какую-нибудь таблицу пятизначных логарифмов, составить таблицу функции  $(\log x)'$  и показать, что полученная таблица приводит к формуле:

$$(\log x)' \doteq \frac{0,4343}{x} \text{ [ср. (7)].}$$



3. С помощью следующих двух табличек для функции  $\sqrt{x}$ :

$x$	966	967	968	969	$x$	406	410	414	418
$\sqrt{x}$	31,081	31,097	31,113	31,129	$\sqrt{x}$	20,1491	20,2185	20,3170	20,4450

составить таблички для  $(\sqrt{x})'$  по способу, изложенному выше, и определить их точность, сравнив с формулой:  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  [(5)].

4. Проверить вычислительным путем правило дифференцирования функций  $\sin x$  и  $\cos x$ , с помощью таблицы натуральных значений этих функций ( $x$  выражать в дуговой мере).

5. Показать, что для квадратичной функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$  равенство:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f' \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

которым мы выше пользовались как приближенным, оказывается здесь вполне точным  
Реш. Имеем:

$$f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c, \quad \Delta f(x) = 2ax \cdot \Delta x + a(\Delta x)^2 + b \cdot \Delta x$$

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f' \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 2ax + a \cdot \Delta x + b = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

6. Для ползуна конвейерного механизма (применяемого для транспорта сыпучих материалов) был вычислен ряд значений скорости  $v$  через равные промежутки времени  $t$  (в 0,04 сек.). В следующей таблице приведена схема вычислений ускорения ползуна  $w = \frac{dv}{dt} = v'$ :

$t$ (сек.)	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18
$v$ (м/сек.)	0,285		0,400		0,525		0,635		0,720	
$\Delta v$		0,115		0,125		0,110		0,085		0,035
$w = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (м/сек. <sup>2</sup> )		2,88		3,13		2,75		2,13		0,88
$t$ (сек.)	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36	
$v$ (м/сек.)	0,755		0,680		0,450		0,030		-0,490	
$\Delta v$		-0,075		-0,230		-0,420		-0,520		
$w = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (м/сек. <sup>2</sup> )		-1,88		-5,75		-10,50		-13,00		



Продолжить эту таблицу, пользуясь дальнейшими вычисленными значениями скорости  $v$ :  $-0,810$ ;  $-0,825$ ;  $-0,685$ ;  $-0,520$ ;  $-0,400$ ;  $-0,305$ ;  $-0,240$ ;  $-0,190$ ;  $-0,140$ ;  $-0,100$ ;  $-0,050$ ;  $0,014$ ;  $0,090$ ;  $0,180$ ;  $0,285$ . Построить графики скорости и ускорения.

7. При определении теплоемкости воды получена следующая зависимость между температурой  $\theta^\circ\text{C}$  и количеством тепла  $Q$ , потребного для нагревания воды от  $0^\circ\text{C}$  до этой температуры:

$\theta$	3	4	5	6	7	8
$Q$	3,01719	4,02180	5,02590	6,02946	7,03255	8,03512

Помня, что теплоемкость определяется как  $\frac{dQ}{d\theta}$ , найти теплоемкость воды при  $5^\circ$  и  $7^\circ$ . *Отв.* 1,003 83 и 1,002 83 кал.

Отметим, что здесь наперед указано, при каких значениях  $t$  требуется знать теплоемкость. Желая, напр., для  $t=5$  воспользоваться формулой (43), рассмотрим 5 как среднее значение между 4 и 6, и положим искомую теплоемкость равной  $(6,029\ 46 - 4,021\ 80) : (6 - 4) = 1,003\ 83$ . В сущности, этот прием сводится к замене формулы (43) следующей формулой, которая также часто применяется:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \doteq f'(x). \quad (43a)$$

8. Измерение температуры обмотки электромагнита мотора, при прохождении электрического тока, дало следующие результаты:

время $t$ (мин.)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
темпер. $\theta^\circ\text{C}$	20	26	32,5	41	46	49	52,5	54,5	56,5	58	59,5	61	61,7	62

Составить таблицу значений скорости изменения температуры; построить графики зависимостей как  $\theta$ , так и  $\frac{d\theta}{dt}$  от  $t$ .

9. При испытании мощности паровой машины, с помощью электрического тормоза, по показанию счетчика в различные моменты  $t$  отмечалось общее число оборотов  $s$ . По таблице значений  $s$  определялось мгновенное значение „числа оборотов в минуту“  $n$ , которое равно  $\frac{ds}{dt} \cdot 60$ , или угловая скорость  $\omega = \frac{ds}{dt} \cdot 2\pi = n \cdot \frac{\pi}{30} = 0,1047 n$ . По значениям  $\omega$  находились значения углового ускорения  $\sigma = \frac{d\omega}{dt}$ , которые затем умножались на момент инерции вращающейся шайбы (на которую действовал тормоз), равный  $5,60$  м-кг-сек.<sup>2</sup>, для получения соответствующих вращающихся моментов  $M_d$ . Результаты опыта сведены в таблицу:



$t$ (сек.)	0	48	633	1021
$s$ (оборот.)	59500	60000	65900	67500
$t' = t + \frac{\Delta t}{2}$ (сек.)	24	340	827	1262
$n \doteq 60 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (оборот./мин.)	625	513	337	311
$\omega = n \cdot 0,1047$ (1/сек.)	65,4	53,7	40,5	32,6
$t'' = t' + \frac{\Delta t'}{2}$	182	584	1045	
$ \sigma  \doteq \left  \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right $ (1/сек. <sup>2</sup> )	0,0370	0,0271	0,0182	
$M_d = 5,60  \sigma  \doteq$ (м-кг)	0,207	0,152	0,102	
$t$ (сек.)	1504	2280	3018	4220
$s$ (оборот.)	70000	73000	75000	77000
$t' = t + \frac{\Delta t}{2}$ (сек.)	1892	2619	3619	
$n \doteq 60 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (оборот./мин.)	232	163	100	
$\omega = n \cdot 0,1047$ (1/сек.)	24,3	17,1	10,5	
$t'' \doteq t' + \frac{\Delta t'}{2}$	1577	2270	3134	
$ \sigma  = \left  \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right $ (1/сек. <sup>2</sup> )	0,0132	0,0095	0,0067	
$M_d = 5,60  \sigma  \doteq$ (м-кг)	0,074	0,053	0,038	



Так как скорость вращения уменьшается, то ускорение отрицательно; мы брали его без знака, по абсолютной величине, т. е. определяли величину „замедления“.

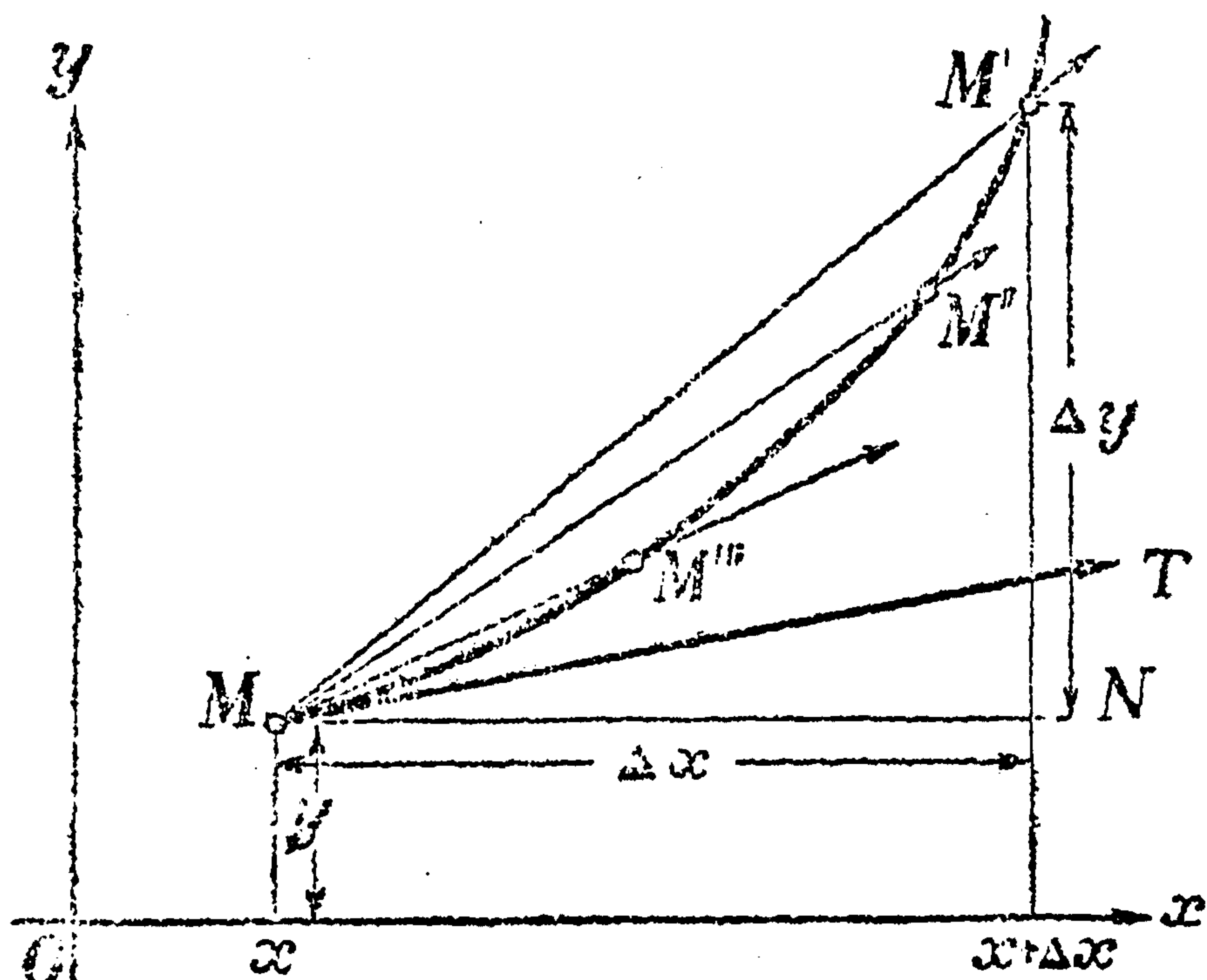
65. Уклон кривой и касательная. Если функция  $y=f(x)$  изображена графически, то ее производная  $y'=f'(x)$  имеет важное геометрическое значение. Для выяснения его обратимся к черт. 90. На нем  $M$  означает точку кривой с координатами  $x$  и  $y=f(x)$ . Если придать  $x$  приращение  $\Delta x$ , то измененной абсциссе  $x+\Delta x$  будет соответствовать новая точка  $M'$  кривой, и измененное значение функции  $f(x+\Delta x)$  как раз и будет ее ординатой. Приращение функции,  $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ , может быть получено на чертеже как разность ординат точек  $M'$  и  $M$ , или, что то же самое, как отрезок  $MM'$ .

Отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , средняя скорость изменения функции  $y$  в промежутке  $(x, x+\Delta x)$ , дает нам *средний уклон кривой* между точками  $M$  и  $M'$ . В силу 34 ясно, что этот средний уклон кривой есть не что иное, как уклон хорды  $MM'$  или ее угловой коэффициент.

Пусть теперь  $\Delta x \rightarrow 0$ ; точка  $M'$  будет стремиться к совпадению с  $M$  (причем  $M''$ ,  $M'''$ , ... на чертеже показывают последовательные ее положения при таком изменении). Очевидно, что одновременно с этим хорда  $MM'$  будет стремиться к некоторому предельному положению  $MT$ , которое называется *касательной* к кривой в точке  $M$ . Вообще:

*Касательной к произвольной кривой в данной ее точке  $M$  называется предельное положение секущей  $MM'$ , когда точка  $M'$  вдоль по кривой стремится к совпадению с точкой  $M$ . Сама точка  $M$  называется точкой касания.\**

При этом перемещении точки  $M'$ , уклон  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  хорды  $MM'$  будет стремиться к уклону касательной. Этот уклон можно назвать и *уклоном самой кривой в данной точке*. Так как, с другой стороны, мы знаем,



Черт. 90.

При этом перемещении точки  $M'$ , уклон  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  хорды  $MM'$  будет стремиться к уклону касательной. Этот уклон можно назвать и *уклоном самой кривой в данной точке*. Так как, с другой стороны, мы знаем,

\* Если в элементарной геометрии читатель сталкивался с определением касательной к *окружности*, как такой прямой, которая имеет с окружностью лишь одну общую точку, то мы обращаем его внимание на то, что для других кривых это определение явно не годится. Напр., для парабол, изображенных на черт. 40, касательной в начале координат, очевидно, будет ось  $Ox$ , хотя ось  $Oy$  тоже имеет с каждой из них лишь одну общую точку; наоборот, для синусоиды на черт. 67 в вершине (наивысшей точке) волны — касательной будет, как непосредственно ясно, горизонтальная прямая, несмотря на то, что она проходит через вершины бесчисленного множества других волн.

Определение в тексте охватывает все случаи, не противореча и элементарному определению касательной к окружности!

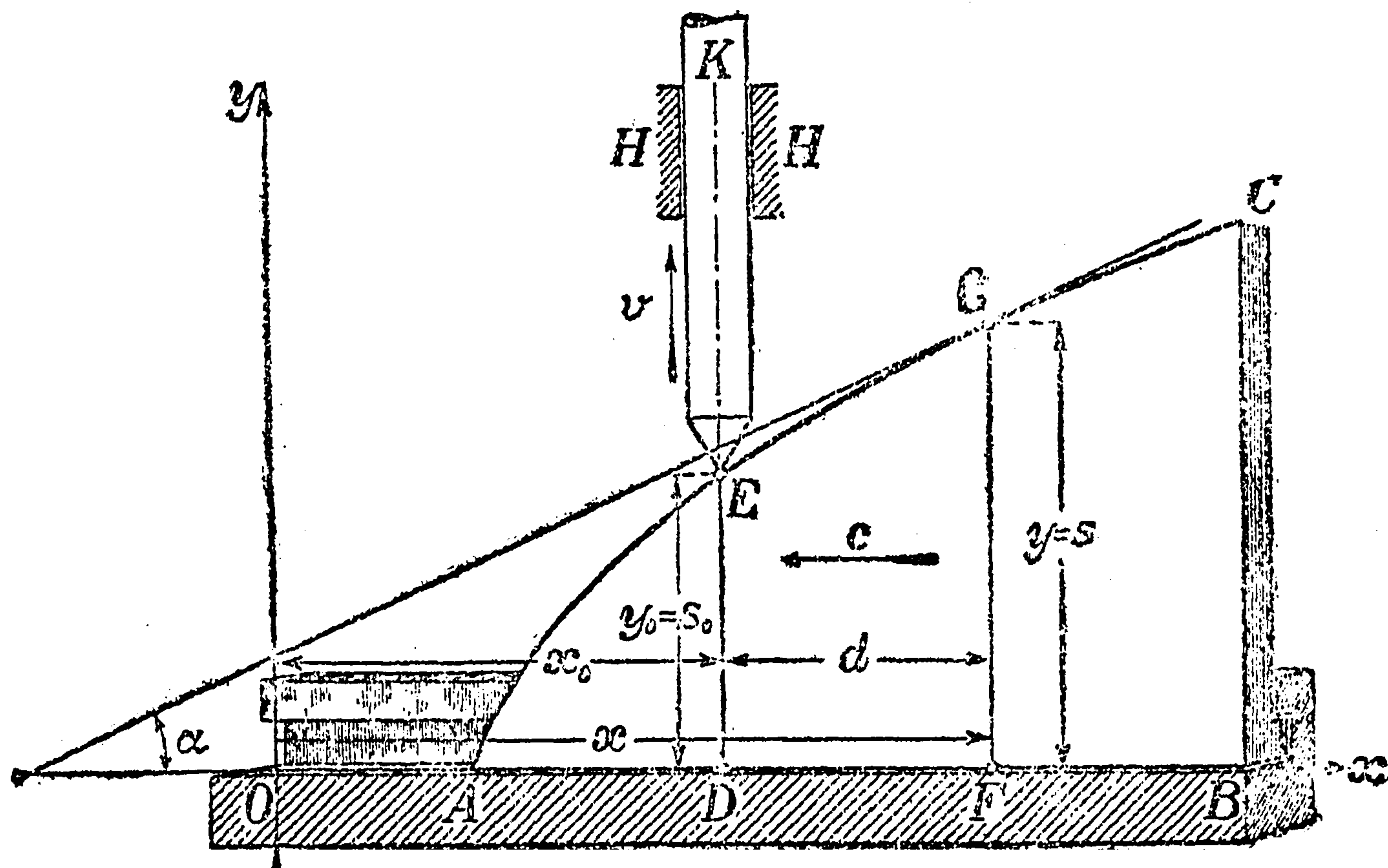


что  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow y'$ , то оказывается, что  $y'$  есть не что иное, как уклон или угловым коэффициент касательной к кривой в точке  $M$ . Итак, мы можем сказать:

Угловым коэффициентом (уклоном) касательной или — что то же — уклоном кривой в точке  $M(x, y)$  совпадает с производной функции  $y=f(x)$  при данном значении  $x$ .

Итак, обозначив через  $\alpha$  угол касательной  $MT$  с осью  $Ox$ , мы имеем

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (44)$$



Черт. 91.

В предыдущем мы молчаливо предполагали, что масштабы для  $x$  и  $y$  одинаковы; если же эти масштабы различны, то, как легко сообразить,

$$y' = \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} \alpha, \quad (45)$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  суть длины отрезков, изображающих единицы величин  $x$  и  $y$ .

**Задачи.** 1. Начертить кривую  $y = 2 + 2x - x^2$  в промежутке от  $x = 1,8$  до  $x = 2,2$ . Измерить ее уклон в точке  $x = 2$  и сравнить с вычисленным уклоном по формуле для  $y'$  при  $x = 2$ .

2. То же для кривой:  $y = x - \frac{1}{x}$  в промежутке от  $x = 0,9$  до  $x = 1,1$ ; найти уклон в точке  $x = 1$ .

3. То же для кривой  $y = \sqrt{x}$ , в промежутке от  $x = 3,5$  до  $x = 4,5$ ; найти уклон в точке  $x = 4$ .

4. *Послупательно движущиеся кулаки.* Любопытное сопоставление обоих глазных эквивалентов производной — механического (скорость) и геометрического (уклон касательной) — мы встречаем в механизме так называемых поступательно

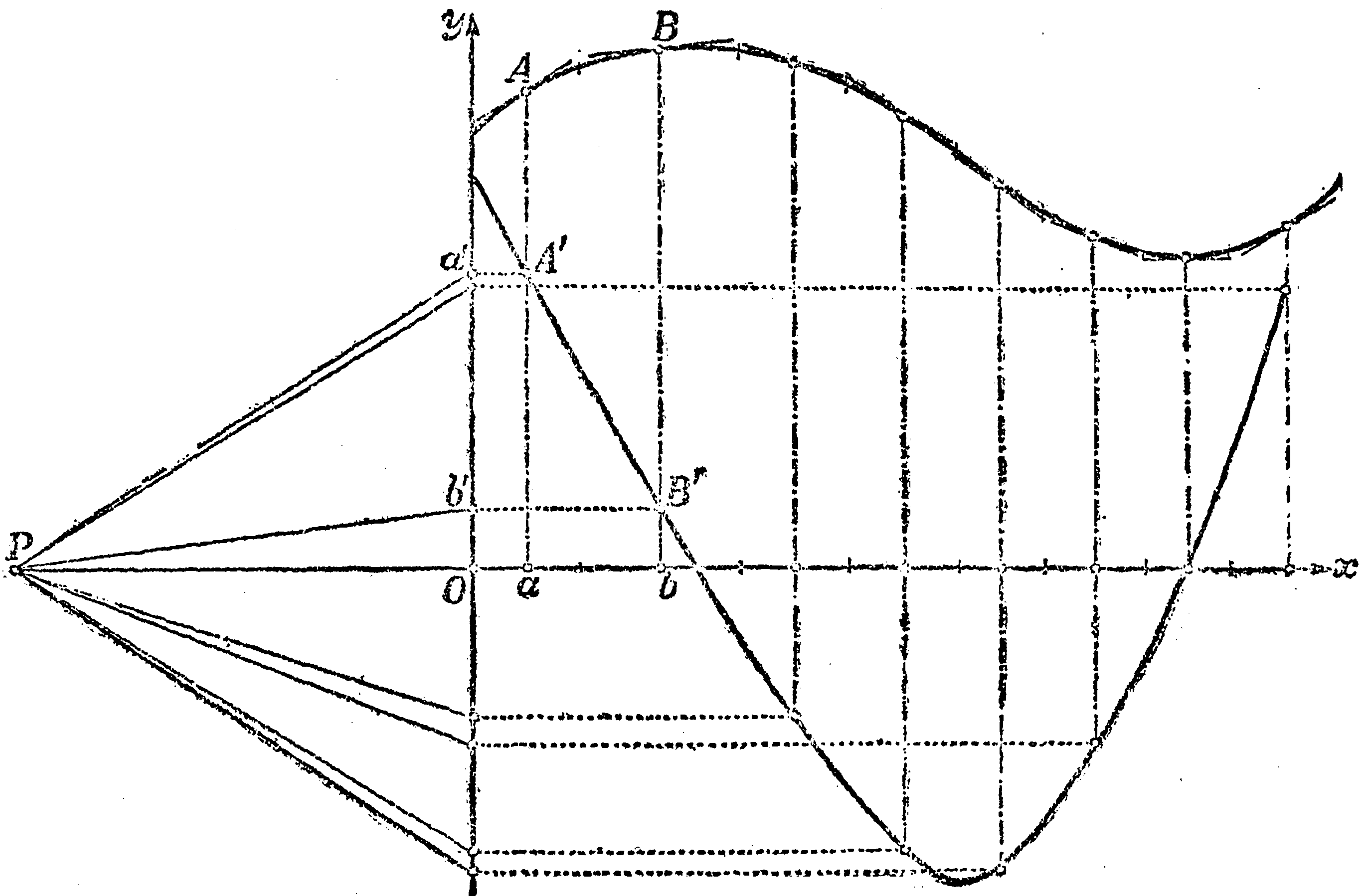


движущихся кулаков.\* Рассмотрим тело (кулак)  $ABC$  (черт. 91), очертание которого по кривой  $AC$  задано уравнением

$$y = f(x), \quad (46)$$

и пусть оно движется прямолинейно поступательно влево, с постоянной скоростью  $c$ ; тогда упирающийся в него стержень (толкач)  $K$ , который может скользить в направляющих  $HH$ , получит движение вверх. По истечении промежутка времени  $t$  кулак переместится влево на расстояние  $d = ct$ , и на месте ординаты  $DE$  появится ордината  $FG$ , отвечающая абсциссе  $x = x_0 + d = x_0 + ct$ . Таким образом для пути  $s$  конца  $E$  толкача будем иметь уравнение

$$s = f(x) = f(x_0 + ct).$$



Черт. 92.

Для определения скорости точки  $E$  продифференцируем эту сложную функцию от  $t$ :

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(x) \cdot \frac{dx}{dt} = c \cdot f'(x).$$

Вводя угловой коэффициент касательной к кривой (46), в виду (44), можем написать:

$$v = c \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (47)$$

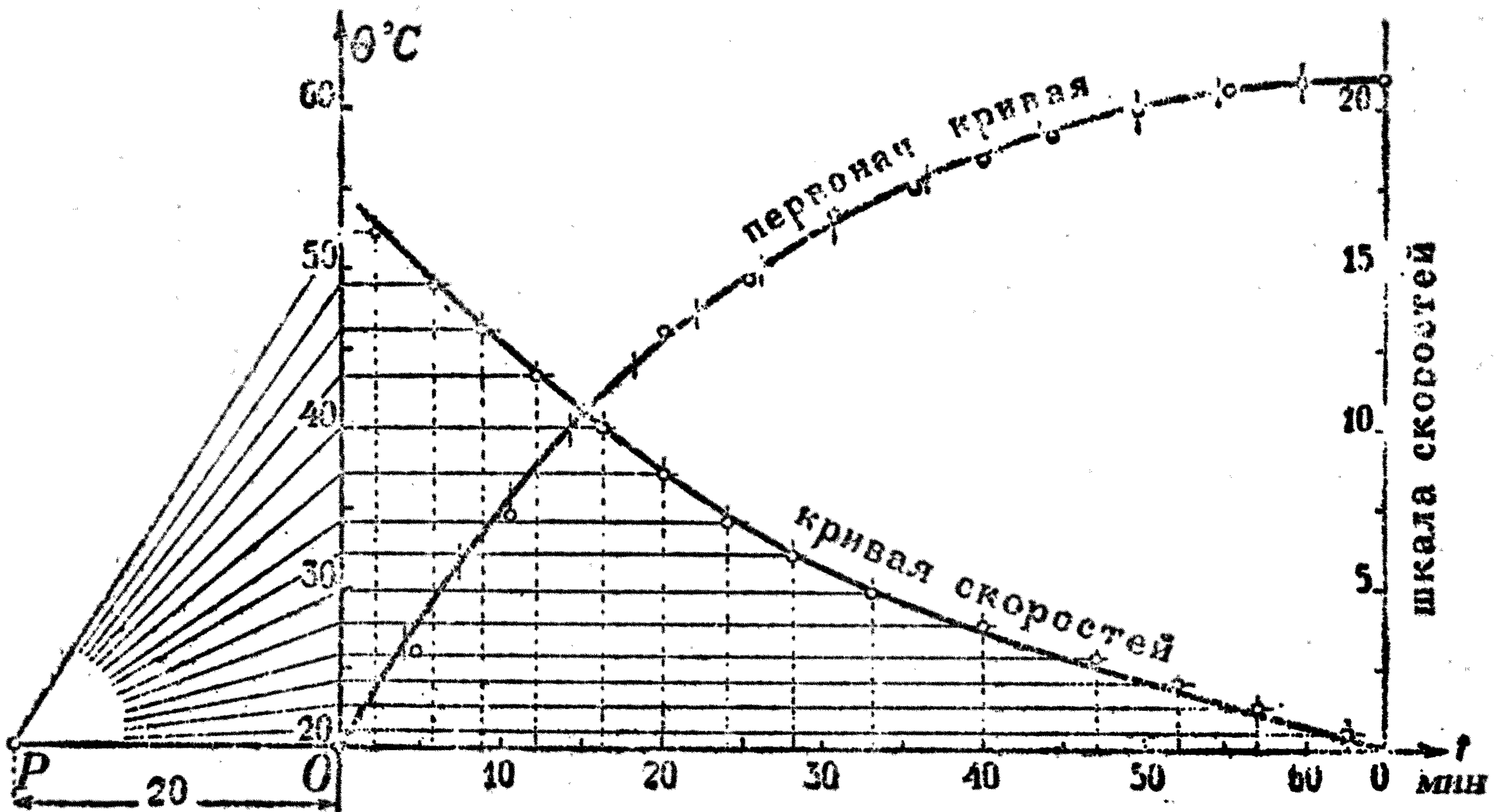
Таким образом, уклон кривой, по которой очерчен кулак, непосредственно определяет скорость толкача. Если положить  $x_0 = 0$  и принять  $c = 1$ , то получатся замечательные по простоте зависимости:  $s = f(t)$  [тот же вид функции, что и в уравнении (46) кривой!] и  $v = \operatorname{tg} \alpha$ .

\* Этот механизм, хотя и не часто, но встречается в современном машиностроении (напр., в металлообрабатывающих станках, в прессах для сгибания листового железа, в распределительных механизмах прамоточных машин). Гораздо чаще применяются вращающиеся кулаки, о которых речь будет ниже [117].



66. **Графическое дифференцирование.** Если функциональная зависимость  $y = f(x)$  задана графически, то для определения производной  $y' = f'(x)$  при некотором значении  $x$  достаточно провести касательную к графику в соответствующей точке и измерить ее угловой коэффициент: производная тогда найдется по формуле (45). Пусть, напр., дан график, выражающий зависимость пути  $s$ , пройденного движущейся точкой, от времени  $t$ :  $s = f(t)$ ; проведение касательных позволит нам определить скорость движения, ибо она и представляет собою производную от пути по времени. Если же по графику функции  $y = f(x)$  требуется построить график функции  $y' = f'(x)$ , то поступают следующим образом.

Разложим (черт. 92) основание нашей фигуры на оси  $Ox$  на столь малые элементы, чтобы соответствующие части кривой по возможности мало отличались от прямолинейных отрезков. [Эти элементы не должны быть обязательно равными; их следует брать меньшими в тех частях, где функция изменяется быстрее!] Проведем ординаты  $aA, bB, \dots$  соответствующие серединам  $a, b, \dots$  всех элементар-



Черт. 93.

ных отрезков. Затем, выбрав на горизонтальной оси полюс  $P$  на расстоянии  $\lambda = PO$  от начала, станем проводить через него прямые, параллельные касательным к нашей кривой в конечных точках упомянутых средних ординат, напр., прямую  $Pa'$  параллельно касательной в точке  $A$ ,  $Pb'$  — параллельно касательной в точке  $B$ , и т. д. Наконец, через точки  $a', b', \dots$  проведем прямые, параллельные оси  $Ox$ , до пересечения с соответственными ординатами (или их продолжениями) в точках  $A', B', \dots$ . Кривая, соединяющая эти точки, и будет искомой.

Действительно, в силу (45), если через  $\mu_1, \mu_2$  обозначить масштабы на оси  $Ox$  и  $Oy$ ,

$$\operatorname{tg} \angle a'PO = \frac{\mu_2}{\mu_1} f'(a), \quad \operatorname{tg} \angle b'PO = \frac{\mu_2}{\mu_1} f'(b) \text{ и т. д.},$$

с другой стороны, очевидно,

$$Oa' = \lambda \cdot \operatorname{tg} \angle a'PO, \quad Ob' = \lambda \cdot \operatorname{tg} \angle b'PO \dots,$$

так что, окончательно:

$$aA' = Oa' = \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1} f'(a), \quad bB' = Ob' = \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1} f'(b), \dots$$

Таким образом, ординаты построенной кривой пропорциональны соответствующим



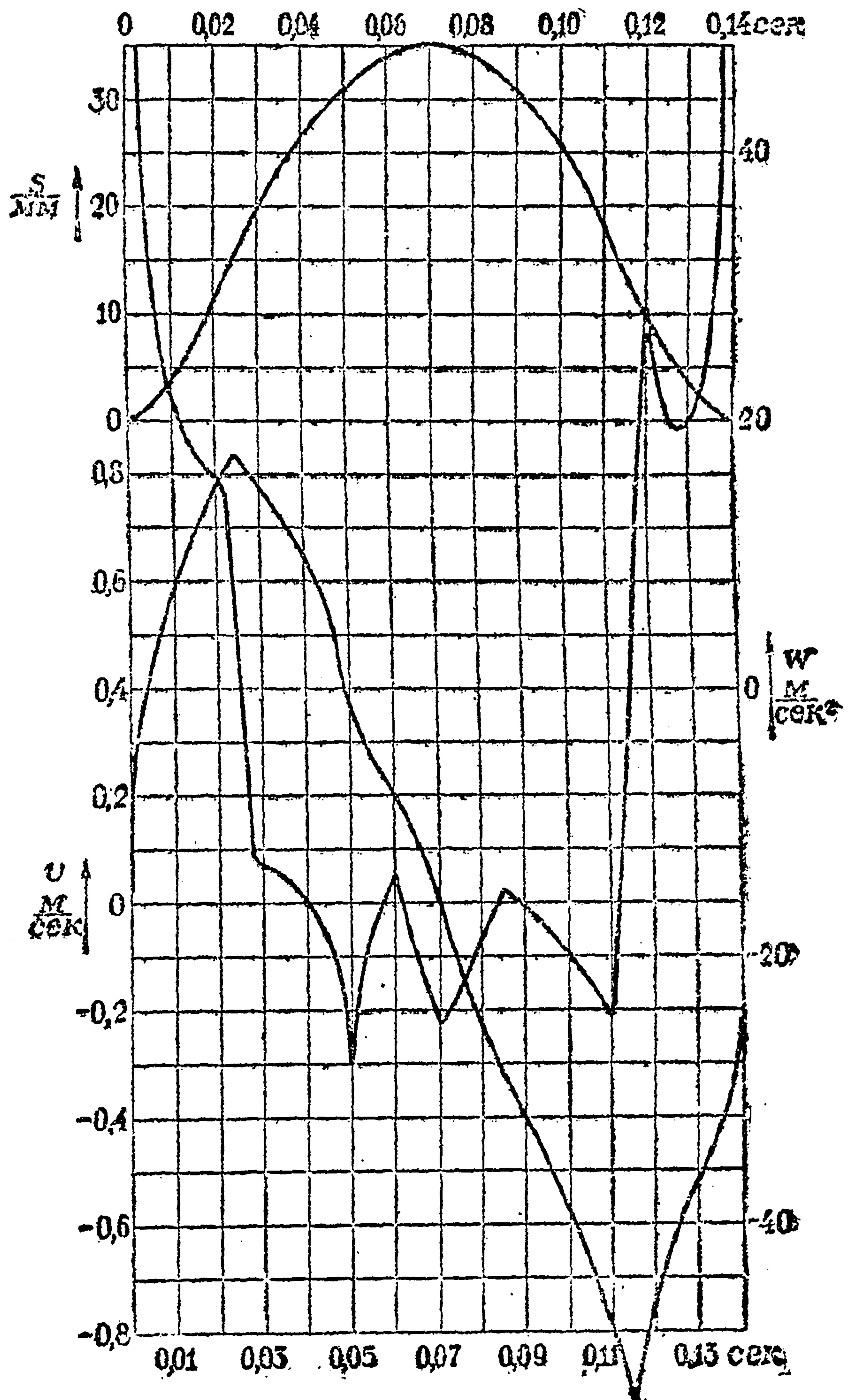
значениям производной  $y' = f'(x)$  и выражают эти значения, если взять для них на вертикальной оси масштаб  $\frac{\lambda \rho_2}{\rho_1}$  (т. е. изображать единицу на вертикальной оси отрезком такой длины). Этот масштаб, очевидно, может быть приведен к любой величине путем выбора надлежащего полюсного расстояния  $\lambda$ . Изложенный прием и носит название *графического дифференцирования*.

*Примеры и задачи.*  
1. Возвращаемся к задаче 8, 64. На черт. 93 по точкам построен график зависимости температуры  $\theta$  от времени, и затем применено графическое дифференцирование. Полюсное расстояние  $\lambda$  взято равным  $20 \mu$ , поэтому масштаб для  $\frac{d\theta}{dt}$  оказывается в 20 раз большим, чем для  $\theta$  (так что на шкале *справа* цифры выражают *десятые доли*!). Сравнить с графиком, построенным по значениям производной, вычисленным в 64.

2. На черт. 94 а) представлена кривая подъема впускного клапана цилиндра паровой машины (низкого давления). Кривые скоростей и ускорений получены в результате *двукратного* применения графического дифференцирования. В первом случае полюс был взят от вертикали на расстоянии, соответствующем  $0,05$  сек., так что  $\lambda = 0,05 \mu$ ; поэтому масштаб для скорости  $v$  в 20 раз меньше, чем для пути  $s$ : одно деление, соответствовавшее  $5 \text{ мм} = 0,005 \text{ м}$ , изображает скорость  $0,005 \times 20 = 0,1 \text{ м/сек}$ . Во втором случае полюсное расстояние еще вдвое меньше, поэтому одно деление на шкале ускорений соответствует  $0,1 \times 40 = 4 \text{ м/сек}^2$ . Самое построение касательных опущено. Любопытно, что по видимому „гладкой“ кривой пути отвечает столь колеблющаяся кривая ускорений!

Многочисленные кривые подобного типа встречаются при исследовании распределительных механизмов двигателей внутреннего сгорания.

3. Диаграммы пути, скорости и ускорения для пневматического молота, делающего 1097 ударов в минуту, даны на черт. 94 б). Предлагаем читателю, учтя указанные для  $v$  и  $w$  масштабы, определить, какими полюсными расстояниями пользовались при составлении диаграмм, и самостоятельно выполнить их построение

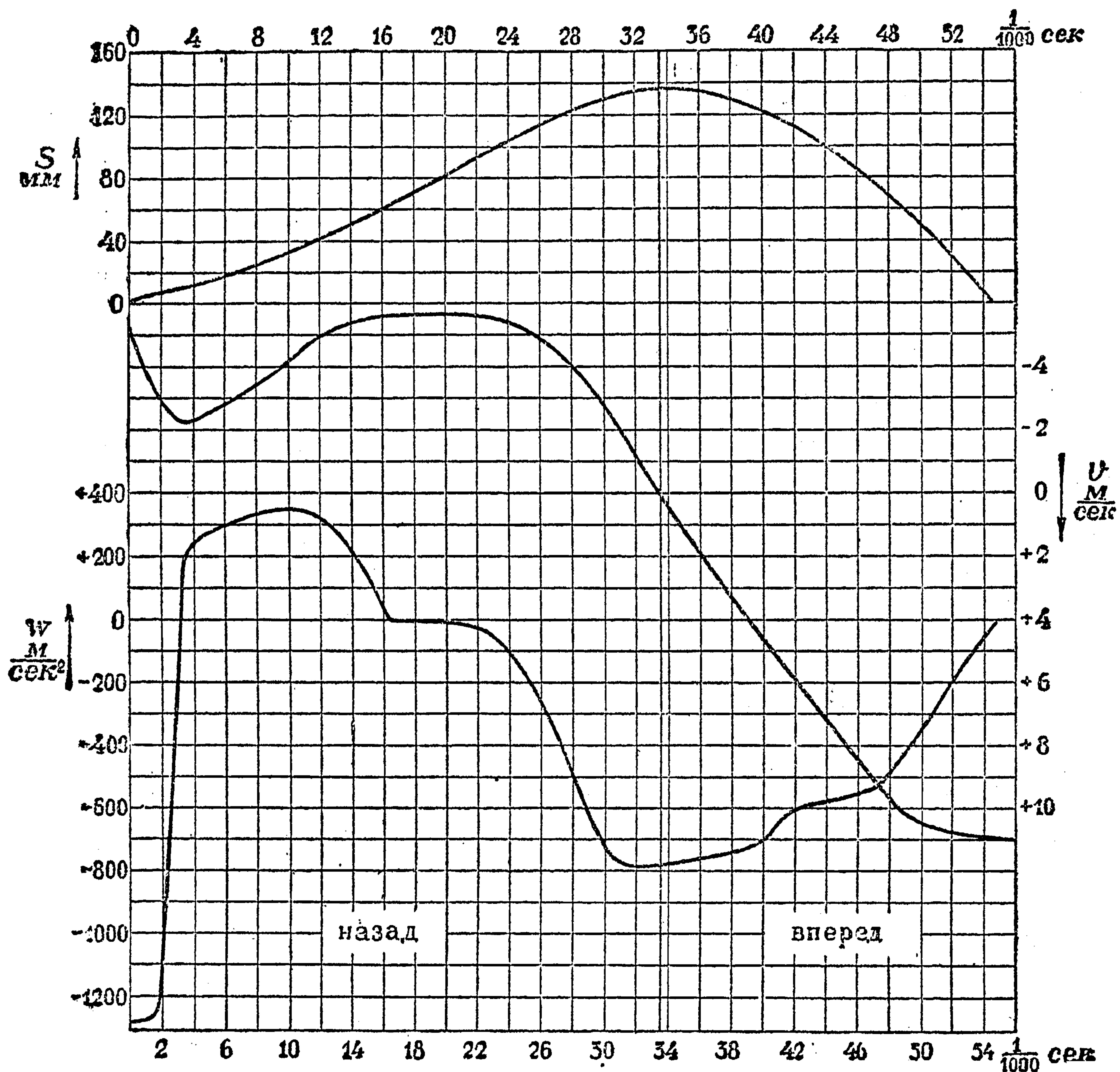


Черт. 94 а).



[Указ. Полюсное расстояние отвечает 20/1000 сек. в первом случае, и 10/1000 сек.— во втором.]

4. Наблюдения за охлаждением первоначально нагретого стального образца



Черт. 94 б).

привели к следующей зависимости между температурой  $\theta^\circ \text{C}$  и временем  $t$  (сек.):

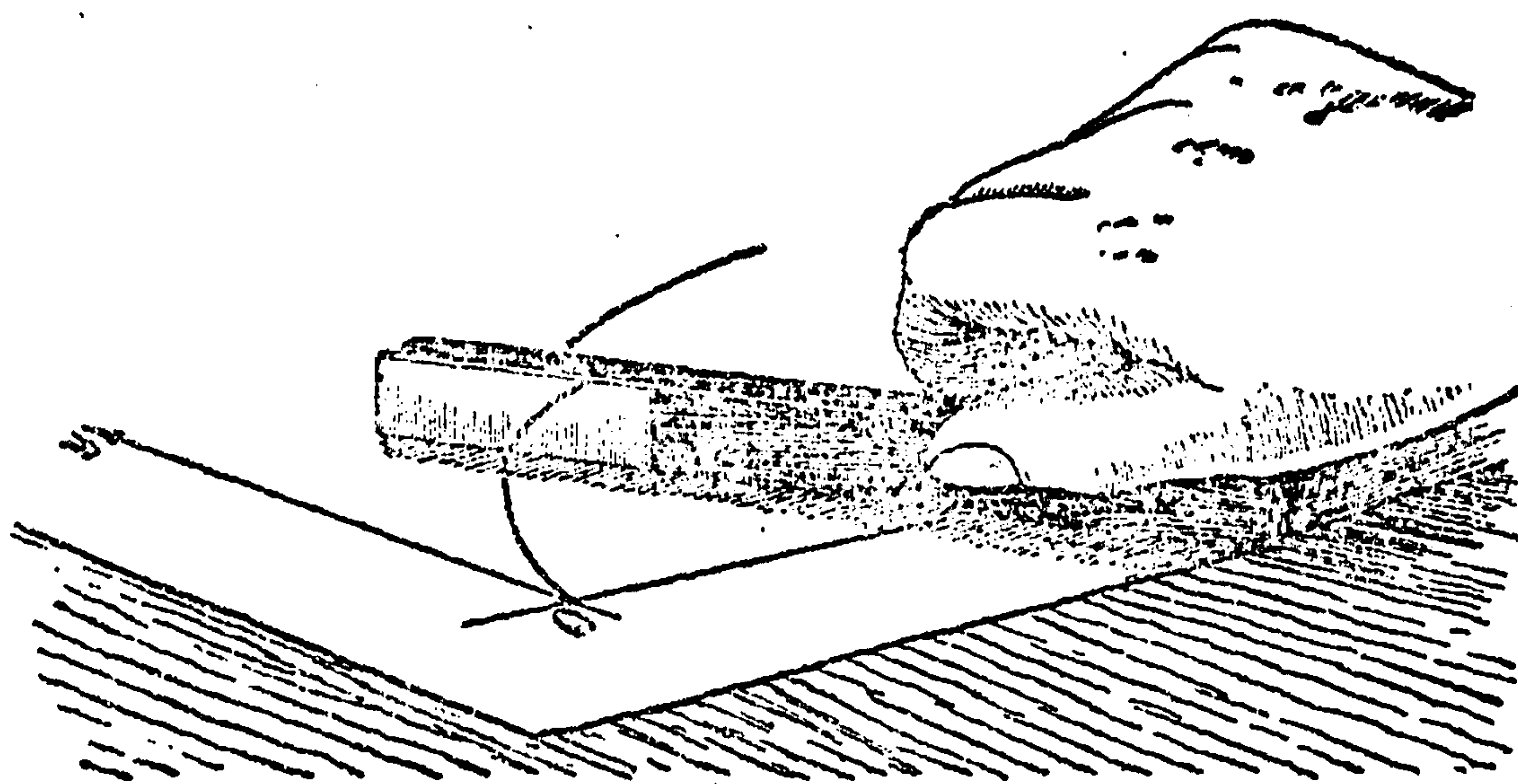
$t$	75	90	105	120	135	150	165	180	195
$\theta$	850	848	844,7	842	839,5	838,5	838,2	838,1	838
$t$	210	225	240	255	270	285	292,5	300	315
$\theta$	837,9	837,5	836	833	829	825	823	822,2	821,7



$t$	330	345	360	367,5	375	390	405
$\theta$	821,5	821,3	821,1	819	815	813	811,6

Кроме „кривой охлаждения“, выражающей зависимость  $\theta$  от  $t$ , оказывается важной еще кривая, выражающая зависимость  $\theta$  от „обратной скорости“  $\frac{dt}{d\theta}$  (не путать с  $\frac{d\theta}{dt}$ !). Построить обе кривые. Указ. При графическом дифференцировании первой кривой следует  $\theta$  рассматривать как независимую переменную (т. е. определять уклон кривой по отношению к оси  $\theta$ ). Кривая, выражающая зависимость  $\frac{dt}{d\theta}$  от  $\theta$ , даст в то же время и искомую зависимость [ср. 43].

Следует отметить, что непосредственное, „наглаз“, проведение касательной к начерченной кривой — есть, конечно, операция не очень точная. Еще на меньшую точность можно рассчитывать, если „дифференциальную“ кривую повторно подвергнуть графическому дифференцированию (зад. 2, 3). В ответственных случаях предпочтительнее пользоваться методами, изложенными в п<sup>о</sup> 64.



Черт. 95.

Существуют, однако, приемы, значительно повышающие точность графического дифференцирования. Вместо касательной, очевидно, достаточно провести перпендикуляр к ней в точке касания (называемый *нормалью*), ибо он с осью  $Oy$  составляет такой же угол  $\alpha$ , что и касательная с осью  $Ox$  (углы с соответственно перпендикулярными сторонами!). Проведение же нормали легко выполняется с помощью линейки, на одном конце которой имеется металлическое зеркало (черт. 95). Именно, линейку поворачивают до тех пор, пока отражение куска кривой в зеркале не составит с этим куском одной кривой *без излома*; тогда край линейки, очевидно, и даст нормаль к кривой. Сконструирован и более сложный прибор („зеркальный дериватор“), основанный на том же принципе, но обеспечивающий еще большую точность.

*Пример. 5.* С помощью этого прибора построена, напр., диаграмма на черт. 96, дающая графическое решение задачи 9, 64. Одно деление по горизонтали соответствует 500 сек., а такое же деление по вертикали — 2500 оборотов; таким образом, здесь  $\mu_1 = \frac{1}{500}$  деления, а  $\mu_2 = \frac{1}{2500}$  деления. Если обозначить через  $\alpha$  угол касательной с горизонтальной осью, то, по формуле (45), будем иметь:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\frac{1}{500}}{\frac{1}{2500}} \operatorname{tg} \alpha = 5 \operatorname{tg} \alpha,$$

так что

$$n = \frac{ds}{dt} \cdot 60 = 300 \operatorname{tg} \alpha, \quad \omega = 0,1047 n = 31,41 \operatorname{tg} \alpha.$$

Поэтому, получив, напр., для  $t = 1900$  угол  $\alpha = 37,0^\circ$ , так что  $\operatorname{tg} \alpha = 0,7535$ , найдем  $n = 0,7535 \cdot 300 = 2,26$ , и т. д. Эти значения отложены по вертикали в масштабе: одно деление = 100 обор./мин. Можно было бы непосредственно откладывать не  $n$ ,

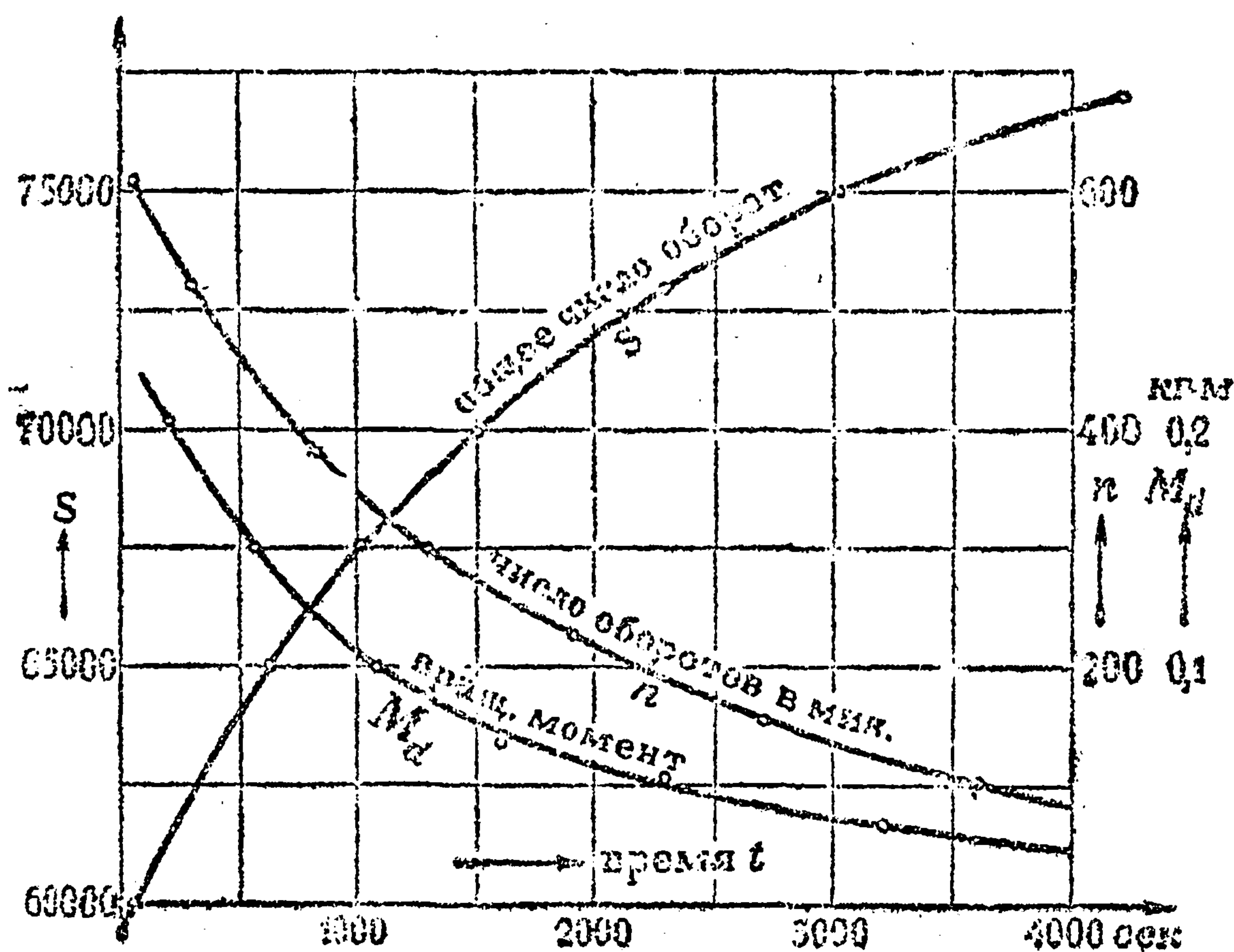


а пропорциональный ему  $\operatorname{tg} \alpha$ , в любых единицах, и лишь затем сообразить, какой масштаб взять для  $n$ , чтобы полученный график выражал именно зависимость  $n$  от  $t$ . Напр., если, откладывая  $\operatorname{tg} \alpha$ , за единицу взять три деления по вертикали, то для  $n$  в результате получится в 300 раз меньший масштаб, т. е. тот же, что и выше. Аналогично, обозначая через  $\alpha'$  угол касательной к новой кривой с горизонтальной осью, имеем, по той же формуле (45):

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{\frac{500}{1}} \operatorname{tg} \alpha' = 0,2 \operatorname{tg} \alpha',$$

откуда

$$\frac{d\omega}{dt} = 1,047 \frac{dn}{dt} = 0,2094 \operatorname{tg} \alpha', \quad M_d = 5,60 \frac{d\omega}{dt} = 1,173 \operatorname{tg} \alpha'.$$



Черт. 96.

Если, скажем, для  $t=2300$  найдено  $\alpha' = 24,48^\circ$  и  $\operatorname{tg} \alpha' = 0,4553$ , то  $M_d = 0,4553 \cdot 1,173 = 0,0534$ . Так построена вторая кривая (в масштабе: 1 деление = 0,05 кг-м).

Представляет интерес еще график зависимости  $M_d$  от  $n$ , который легко получить, определив по имеющимся графикам несколько пар соответствующих значений  $n$  и  $M_d$ , напр., при  $t=2000$ , имеем:  $n=215$ ,  $M_d=0,058$ , и т. д. [Ср. зад. 8, 31].

**67. Приращение и дифференциал.** Мы видели уже раньше [64], что при бесконечно малом  $\Delta x$  оказывается:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon, \quad (41)$$

где  $\varepsilon$  есть также величина бесконечно малая. Умножив это равенство на  $\Delta x$ , получим:

$$\Delta y = y' \Delta x + \varepsilon \Delta x.$$

Эта формула показывает, что приращение  $\Delta y$  функции  $y$  состоит из двух бесконечно малых слагаемых:  $y' \Delta x$  и  $\varepsilon \Delta x$ . Первое слагаемое (если не считать того исключительного случая, когда  $y' = 0$ ) есть бесконечно малая величина *первого порядка* по отношению к  $\Delta x$  [25], ибо отношение ее к  $\Delta x$  есть постоянное число, отличное от нуля. Второе же слагаемое есть бесконечно малая *высшего порядка* по отношению к  $\Delta x$  [25],



ибо отношение ее к  $\Delta x$ , равное, очевидно,  $\frac{\varepsilon \Delta x}{\Delta x} = \varepsilon$ , стремится к нулю.

Таким образом,  $\Delta y$  и  $y' \cdot \Delta x$  будет эквивалентными бесконечно малыми, и  $y' \cdot \Delta x$  является *главной частью* бесконечно малого приращения  $\Delta y$  [25, 26]. Эта главная часть называется *дифференциалом функции* и обозначается символом

$$dy = y' \cdot \Delta x. \quad (48)$$

Приближенно, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, можно положить:

$$\Delta y \doteq dy, \quad (49)$$

т. е. можно заменить приращение функции ее дифференциалом.\* Приближенное равенство (49) есть, в сущности, лишь другая форма равенства (42), которым мы пользовались выше.

Нетрудно уяснить геометрический смысл такой замены приращения функции ее дифференциалом. На черт. 97  $M$  есть точка кривой  $y = f(x)$  с абсциссой  $x$ ,  $M'$  — точка кривой с абсциссой  $x + \Delta x$  и  $P$  — точка касательной  $MT$ , с той же абсциссой  $x + \Delta x$ . Так как  $y'$  есть угловой коэффициент касательной, то ясно, что

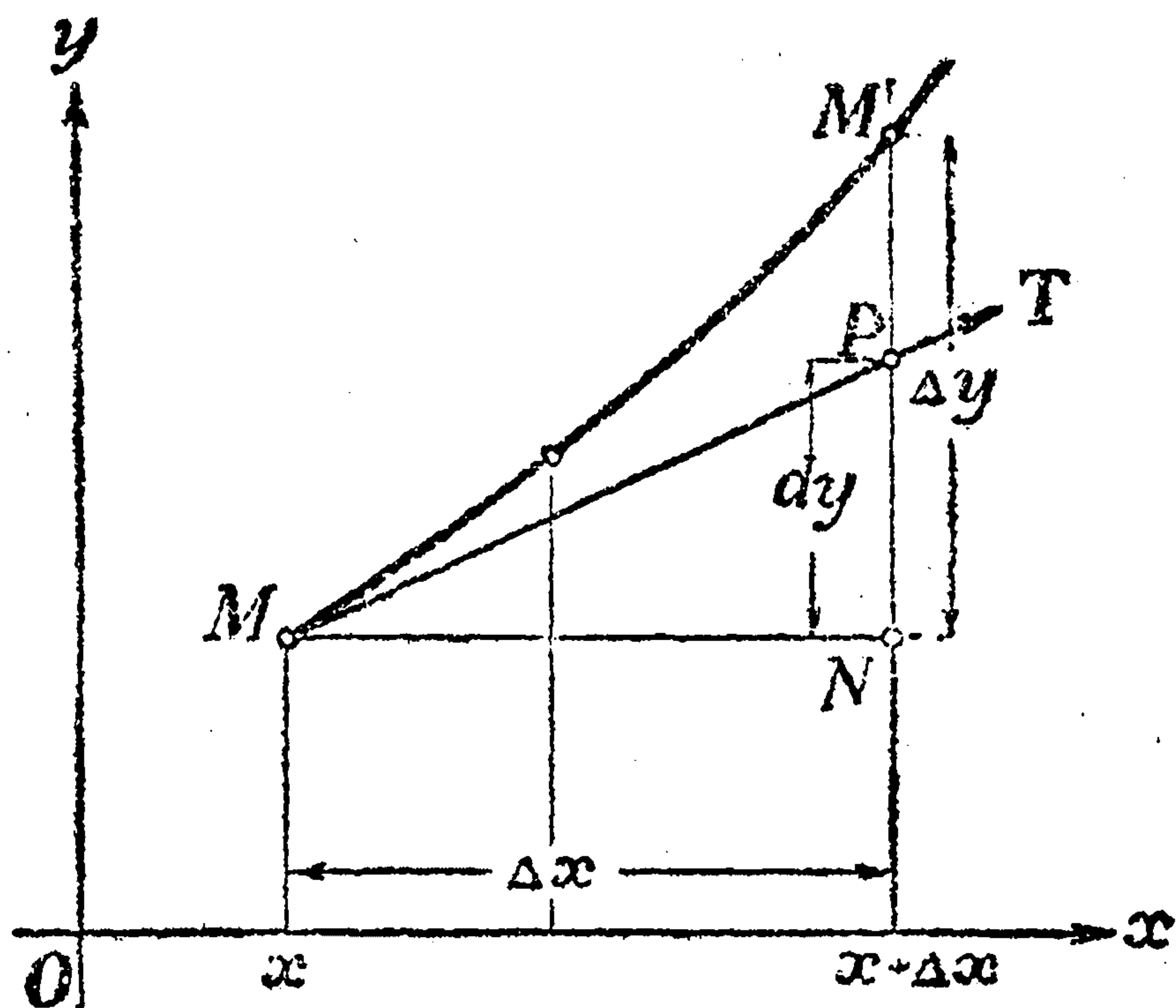
$$\frac{NP}{MN} = y',$$

т. е.

$$NP = y' \cdot MN \doteq y' \cdot \Delta x = dy,$$

а потому приближенное равенство  $\Delta y = y' \Delta x = dy$  гласит, что, исследуя изменение ординаты при малых изменениях абсциссы, можно приближенно заменить кривую ее касательной.

Ордината касательной есть функция от  $x$ , изменяющаяся по линейному закону [34], а потому оказывается, что при малых изменениях независимой переменной (исходя от данного значения  $x$ ), изменение всякой функции  $y = f(x)$  можно считать приближенно пропорциональным изменению независимой переменной, с коэффициентом пропорциональности  $y' = f'(x)$ .



Черт. 97.

Пусть, напр.,  $y = x^3$ ; тогда  $y' = 3x^2$  и  $dy = 3x^2 \cdot \Delta x$ , в то время как  $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ . На этом примере мы еще раз уясняем себе, что  $dy$  действительно может заменить истинное значение приращения  $\Delta y$ , отличаясь от него лишь бесконечно малыми  $3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$  второго и третьего порядков. Придадим  $x$  ряд

\* Заметим, что  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  есть разность двух близких (при малом  $\Delta x$ ) чисел, так что приближенная формула (49) дает один из употребительных приемов вычисления такой разности [6].

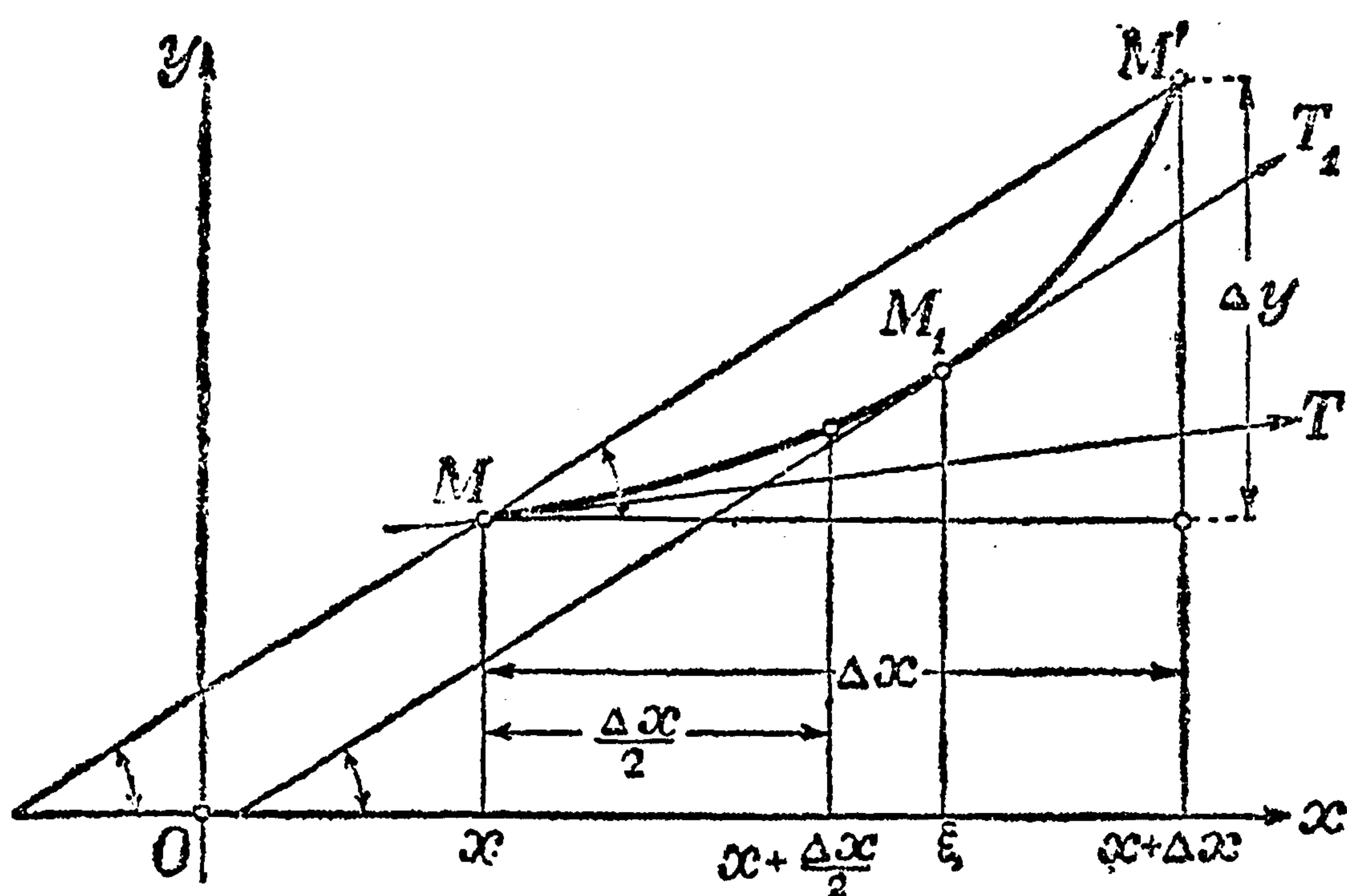


значений 2,0; 2,1; 2,2; ..., возрастающих на 0,1 (так что  $\Delta x$  все время равно 0,1), и составим следующую таблицу [ср. 64]:

$x$	$y$	$\Delta y$	$dy = y' \Delta x$	$x$	$y$	$\Delta y$	$dy = y' \Delta x$
2,0	8,000	1,261	1,200	2,6	17,576	2,107	2,028
2,1	9,261	1,387	1,323	2,7	19,683	2,239	2,187
2,2	10,648	1,519	1,452	2,8	21,952	2,437	2,352
2,3	12,167	1,657	1,587	2,9	24,384	2,611	2,523
2,4	13,824	1,801	1,728	3,0	27,000		
2,5	15,625	1,951	1,875				

Как видно, погрешность от замены  $\Delta y$  на  $dy$  не превышает 6%. Уменьшив же еще  $\Delta x$ , мы получим гораздо большую относительную точность. Так например, исходя из значения  $x = 2,3$  и полагая  $\Delta x = 0,01$ , мы имеем  $\Delta y = (2,31)^2 - (2,3)^2 = 0,1594$ ,  $dy = 3 \cdot (2,3)^2 \cdot 0,01 = 0,1587$ , что дает уже точность выше 0,5%; полагая же  $\Delta x = 0,001$ , получим:  $\Delta y = (2,301)^2 - (2,3)^2 = 0,015877$ ,  $dy = 3 \cdot (2,3)^2 \cdot 0,001 = 0,015870$ , т. е. точность в 0,05%!

68. **Формула конечных приращений (формула Лагранжа).** Сделаем еще одно важное замечание в связи с формулой (49). Равносильная ей формула (42) может быть геометрически истолкована так, что угловой коэффициент хорды  $MM'$  (черт. 98), равный  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , приближенно приравнивается угловому коэффициенту касательной  $MT$  в точке  $M$ , равному производной  $y' = f'(x)$  [65]. Как бы малым ни брать  $\Delta x$  и как бы незначительна ни была погрешность этого равенства, оно вообще все же остается лишь приближенным! В то же время геометрически очевидно, что на (даже конечной!) дуге  $MM'$  всегда найдется такая точка  $M_1$ , в которой касательная  $M_1T_1$  в точности параллельна хорде  $MM'$  (см. черт. 98), так что их угловые коэффициенты равны. Угловой коэффициент касательной  $M_1T_1$  тоже выражается производной  $y'$ , но вычисленной для другого значения аргумента, именно для абсциссы  $\xi$  точки  $M_1$ :



Черт. 98.

так что их угловые коэффициенты равны. Угловой коэффициент касательной  $M_1T_1$  тоже выражается производной  $y'$ , но вычисленной для другого значения аргумента, именно для абсциссы  $\xi$  точки  $M_1$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(\xi).$$

Написав, для ясности,  $f(x + \Delta x) - f(x)$ , вместо  $\Delta y$ , и умножив на  $\Delta x$ , придем к такой формуле:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(\xi) \cdot \Delta x. \quad (50)$$

Ее интересно сопоставить с формулой (49), которую перепишем в виде:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \doteq f'(x) \cdot \Delta x. \quad (51)$$

Формула (50) носит название *формулы Лагранжа* (Lagrange) или *формулы*



конечных приращений; последнее название мотивируется тем, что она *точно* выражает приращение функции, *не предполагая* ни  $\Delta x$ , ни  $\Delta f(x)$  *бесконечно малыми*. Формула же (51) дает лишь *приближенное* значение приращения функции, *пригодное лишь для бесконечно малых*  $\Delta x$  и  $\Delta f(x)$  (яснее говоря, тем более точное, чем меньше  $\Delta x$ ).

Однако формула (50) имеет основной недостаток: хотя нам и ясно было из чертежа, что *существует* точка  $M_1$  с упомянутыми свойствами, но *мы не имеем* никакого общего правила для вычисления ее абсциссы  $\xi$ . Лишь для весьма немногих функций мы можем *действительно* найти  $\xi$ ; напр., как явствует из зад. 5, 64, в случае квадратичной функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , всегда  $\xi = x + \frac{\Delta x}{2}$ . В других же случаях мы  $\xi$  *не знаем*; поэтому формула Лагранжа не годится для вычислений (но иногда бывает полезна при теоретических исследованиях).

Если для произвольной функции  $f(x)$  взять  $\xi = x + \frac{\Delta x}{2}$ , то вообще уже нельзя было бы поручиться за параллельность хорды  $MM'$  и касательной в точке с абсциссой  $x + \frac{\Delta x}{2}$ ; но все же эти прямые ближе к параллельности, чем хорда и касательная в точке  $M$ . Поэтому, хотя и формула

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \doteq f' \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \Delta x$$

равносильная (43), оказывается вообще лишь приближенной, но она точнее, чем (49) или (50), как об этом уже упоминалось в 64. Впрочем, последняя формула все же имеет неопределимое преимущество простоты и, как увидим ниже [70, 71], весьма часто применяется.

**69. Вычисление дифференциалов.** Под дифференциалом  $dx$  независимой переменной  $x$  разумеют просто приращение  $\Delta x$  независимой переменной:

$$dx = \Delta x. \quad (52)$$

Впрочем, можно и не заключать на этот счет особого условия, и просто положить в (48)  $y = x$ , ибо тогда  $y' = x' = 1$  [(4)], и мы, действительно, приходим к (52). Теперь в формуле (48) можно заменить  $\Delta x$  на  $dx$  и представить ее в той форме, в которой ее обычно и пишут:

$$dy = y' \cdot dx. \quad (53)$$

Отсюда, очевидно,

$$y' = y'_x = \frac{dy}{dx}.$$

Этим объясняется смысл введенного выше обозначения для производной: *производная функции оказывается теперь дробью, числитель которой есть дифференциал функции, а знаменатель — дифференциал независимой переменной.*

Рассматривают также *дифференциалы высших порядков*:

$$d^2y = y'' \cdot dx^2, \quad d^3y = y''' \cdot dx^3, \dots \quad (54)$$

(о которых подробнее будет сказано в главе XII), что дает оправдание символам:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$$



Что касается вычисления дифференциалов (которое так же, как и вычисление производных, называется *дифференцированием*), то оно выполняется по тем же формулам и правилам, что и вычисление производных. Каждая из формул (3) — (18), (21) простым умножением на  $dx$  приводит к соответствующей формуле для дифференциала, напр.:

$$dx^n = nx^{n-1} dx; d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}; d \ln x = \frac{dx}{x}; d \sin x = \cos x \cdot dx; dc = 0;$$

и т. п. Таким же путем преобразуются и правила (19) — (24):

$$\left. \begin{aligned} d(c \cdot u) &= c \cdot du; d(u + v + \dots) = du + dv + \dots; \\ d(u \cdot v) &= u \cdot dv + v \cdot du; d \frac{u}{v} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}. \end{aligned} \right\} (55)$$

Выведем для примера последнее. Имеем, по (24),

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2};$$

умножаем обе части этого равенства на  $dx$ :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' \cdot dx = \frac{v \cdot u' dx - u \cdot v' dx}{v^2}$$

и замечаем, что — по самому определению дифференциала [(53)] —

$$\left(\frac{u}{v}\right)' \cdot dx = d\left(\frac{u}{v}\right), u' \cdot dx = du, v' \cdot dx = dv.$$

Подставляя эти выражения, приходим к требуемой формуле.

Любопытное истолкование получает теперь правило (27). Пусть  $y = f(u)$ , где в свою очередь  $u = \varphi(x)$ , так что  $y$  является сложной функцией от  $x$ :  $y = f(\varphi(x))$ . Согласно упомянутому правилу:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x;$$

умножив обе части этого равенства на  $dx$  и приняв во внимание, что — по определению (53) дифференциала функции,  $u'_x \cdot dx = du$ , получим:

$$dy = y'_x \cdot dx = y'_u \cdot du. \quad (56)$$

Первое выражение ( $y'_x \cdot dx$ ) есть дифференциал  $y$ , как функции от  $x$ , а второе ( $y'_u \cdot du$ ) — дифференциал той же величины  $y$ , но рассматриваемой как функция от  $u$ . Таким образом, оказывается, что *величина дифференциала функции не зависит от того, какая именно переменная выбрана за независимую*. Это свойство дифференциала делает его применение очень



удобным: если в каком-нибудь исследовании переменная  $y$  рассматривалась сначала как функция от  $u$ , а затем вместо  $u$  была подставлена функция от  $x$ , так что и  $y$  стала зависящей от  $x$ , то все же можно попрежнему писать  $dy$  в форме  $y'_u \cdot du$ , лишь бы под  $du$  разумелся дифференциал  $u$ , как функции от  $x$ ,  $u'_x dx$ . В частности, полагая  $y'_u = \frac{dy}{du}$  [см. (56)], мы можем  $dy$ ,  $du$  брать по независимой переменной  $u$ , но можем вычислять их, и считая  $x$  независимой переменной. Раз так, то правила пп<sup>о</sup> 57 и 61 для дифференцирования обратных и сложных функций, превращаются в очевидные алгебраические тождества:

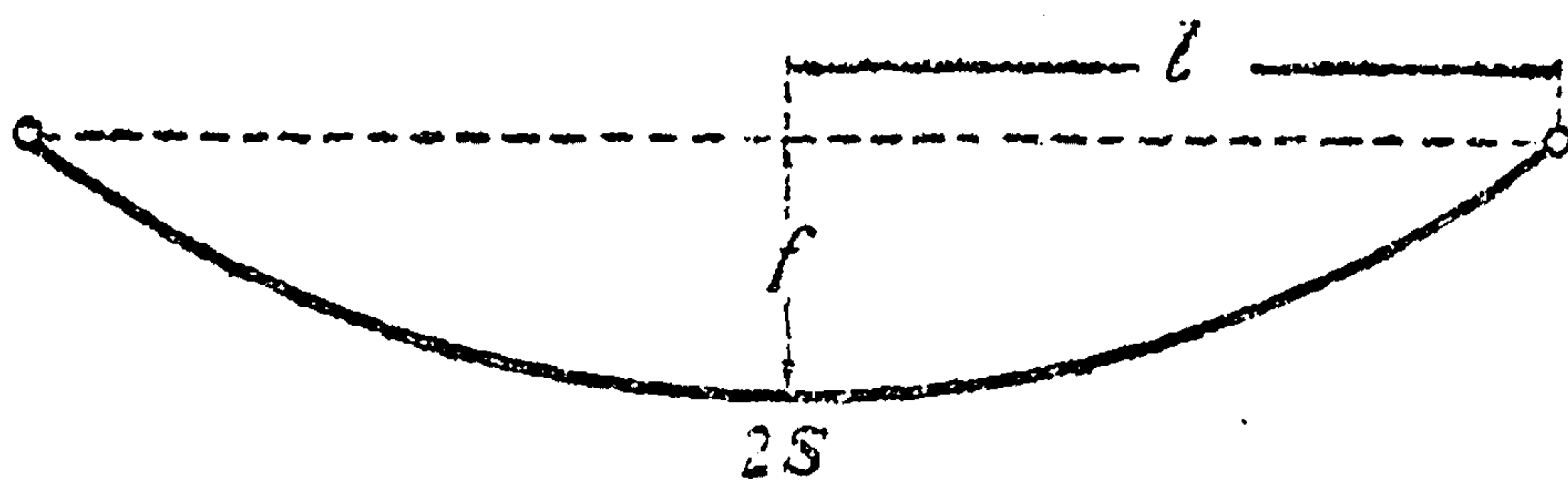
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}!$$

**70. Приближенные формулы, получаемые с помощью дифференциала.** В сущности, формулы (20), (21), (25), (29) п<sup>о</sup> 26 суть частные случаи равенства (49) или (51). Положив, напр., в (51):  $f(x) = \ln x$ ,  $x = 1$ ,  $\Delta x = \alpha$ , получим [так как

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad (8)]:$$

$$f(1 + \alpha) - f(1) \doteq f'(1) \cdot \alpha,$$

$$\text{т. е. } \ln(1 + \alpha) \doteq \alpha!$$



Черт. 99.

Приведем еще другие примеры получения приближенных формул путем замены приращений функций их дифференциалами.

*Примеры.* 1. Если длину тяжелой нити (провода, каната, ремня цепи), подвешенной за оба конца, обозначить через  $2s$ , полупролет через  $l$ , а стрелу провеса через  $f$  (черт. 99), то приближенно [как показано в 212 (61)] можно положить:

$$s = l \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{f^2}{l^2} \right).$$

Установить, какое изменение в длине нити произойдет при изменении  $\Delta f$  ее провеса  $f$ .

Дифференцируя написанную формулу и приближенно заменяя дифференциал  $ds$  приращением  $\Delta s$ , получим:  $\Delta s \doteq \frac{4}{3} \frac{f}{l} \Delta f$ . Полезно и получающееся отсюда

выражение  $\Delta f$  через  $\Delta s$ :  $\Delta f \doteq \frac{3}{4} \frac{l}{f} \Delta s$ . Если, например, учесть удлинение (или укорачивание) провода от изменения температуры или нагрузки (снег, лед), то отсюда можно предусмотреть увеличение (или уменьшение) провеса.

2. Известно, что круговой ток (черт. 10) действует на магнитную массу 1, помещенную на его оси, на расстоянии  $x$  от центра  $O$ , с силой, пропорциональной

$$\frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Найдем приближенное выражение для силы, с какой наш круговой ток будет действовать на маленький магнит длины  $\Delta x$ , расположенный вдоль по оси  $Ox$ , причем допустим, что северный полюс  $N$  магнита находится на расстоянии  $x$ , а южный полюс  $S$  — на расстоянии  $x + \Delta x$  от  $O$ ; допустим сверх того, что в полюсе  $N$  сосредоточена вся положительная магнитная масса  $m$ , в полюсе же  $S$  — вся отрицательная магнитная масса  $(-m)$ . Действие тока на массу  $m$ , в силу сказанного выше, нужно будет считать равным  $\frac{km}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$ , где  $k$  есть коэффициент

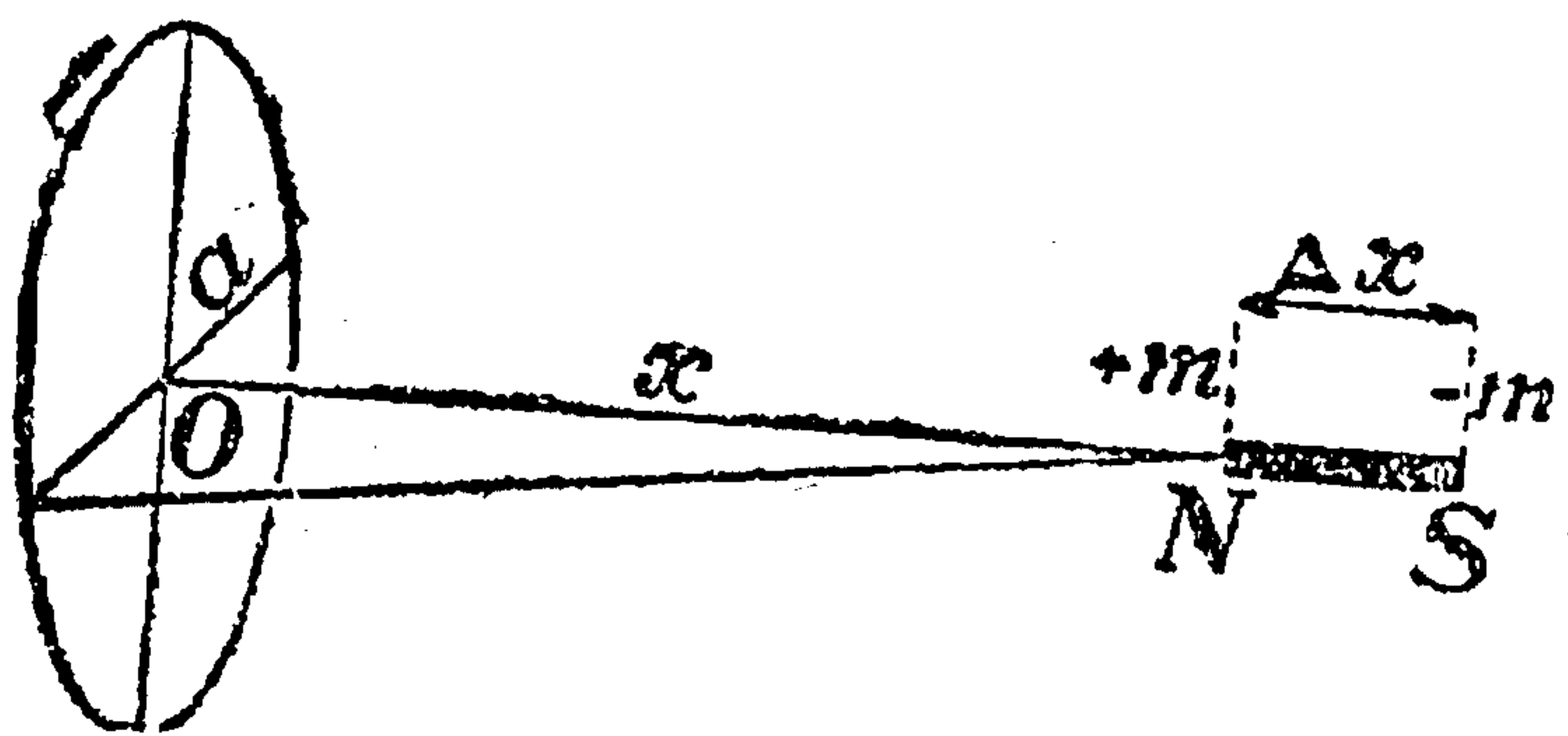
пропорциональности; сила же действия на массу  $(-m)$  будет, очевидно, равна  $\frac{-km}{[a^2 + (x + \Delta x)^2]^{\frac{3}{2}}}$ . Общая сила действия тока на наш магнит будет поэтому равна:

$$F = \frac{km}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{km}{[a^2 + (x + \Delta x)^2]^{\frac{3}{2}}} = -km \cdot \Delta \left[ \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Для вычисления приращения функции  $y = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$ , считая  $\Delta x$  малым, воспользуемся снова приближенной формулой  $\Delta y \doteq dy = y' \Delta x$ , которая в данном случае дает:

$$\Delta \left[ \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \doteq \left[ \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right]' \Delta x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2x}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} \Delta x.$$

Подставив это в выражение для  $F$ , находим:



Черт. 100.

$$F \doteq 3 km \Delta x \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

и таким образом сила действия тока пропорциональна  $\frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$  (и в то же время пропорциональна магнитному моменту:  $m\Delta x$ ).

**71. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям.** Особенно удобно и естественно использовать понятие о дифференциале в приближенных вычислениях при оценке погрешностей. Пусть, напр., величину  $x$  мы измеряем непосредственно, а затем, по формуле  $y = f(x)$ , вычисляем величину  $y$ ; однако обыкновенно значение независимой переменной  $x$  бывает известно не в точности, а лишь приближенно, с некоторой погрешностью. Если мы обозначим это приближенное значение через  $x$ , а точное — через  $x + \Delta x$ , то первому будет соответствовать приближенное значение функции  $f(x)$ , а второму — точное значение  $f(x + \Delta x)$ , и таким образом погрешность  $\Delta x$  при определении независимой переменной повлечет за собой погрешность  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  при вычислении функции.

Предполагая погрешность  $\Delta x$  малой, можем приближенно считать, что абсолютная погрешность [1]

$$|\Delta y| \doteq |dy| = |y' \Delta x|,$$



а тогда *относительная погрешность* [2] приближенно выражается формулой:

$$\left| \frac{\Delta y}{y} \right| \doteq \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{y'}{y} \Delta x \right|;$$

если под  $\Delta x$  и  $\Delta y$  разуметь уже самые абсолютные погрешности, то эти формулы можно переписать так:

$$\Delta y \doteq |y'| \cdot \Delta x, \quad \frac{\Delta y}{y} \doteq \left| \frac{y'}{y} \right| \cdot \Delta x^*, \quad (57)$$

причем они сохраняются в том же виде и для *максимальных*, абсолютной и относительной, погрешностей.

Таким путем мы можем определить абсолютные и относительные погрешности ряда формул и таблиц, встречающихся на практике.

1. Полагая, напр.,  $y = x^n$ , имеем по формуле (57):

$$\frac{\Delta y}{y} \doteq \left| \frac{(x^n)'}{x^n} \right| \cdot \Delta x = \frac{|n| \cdot x^{n-1}}{x^n} \cdot \Delta x = |n| \cdot \frac{\Delta x}{x},$$

и мы получаем оправдание уже известного нам [9] правила: *при возвышении приближенного числа в степень с любым показателем  $n$ , относительная погрешность умножается на абсолютное значение  $n$ .*

2. Рассмотрим теперь погрешности при действиях с *логарифмическими таблицами*. Допустим, что мы ищем логарифм  $y$  по числу  $x$ :  $y = \log x$ . Погрешность при определении этого логарифма зависит от трех причин: 1) от пользования неточными *табличными* логарифмами, 2) от применения линейного интерполирования и *округления* (в случае, если непосредственно данного числа в таблице нет), 3) от погрешности в самом числе  $x$ . Если имеем дело, скажем, с пятизначными таблицами, то *табличные* логарифмы в них даны с точностью до *половины* пятого знака, т. е. до 0,000 005; такова же будет граница для каждой из первых двух указанных погрешностей (так как при этом погрешностью от интерполирования можно пренебречь сравнительно с погрешностью от округления).

Обратимся к исследованию третьей погрешности. Так как  $(\log x)' = 0,4343/x$ , то, по первой из формул (57),

$$\Delta y = 0,4343 \cdot \frac{\Delta x}{x}. \quad (58)$$

Таким образом, *абсолютная* погрешность логарифма просто определяется по *относительной* погрешности числа. Пусть, напр.,  $x = 272,66 \pm 0,02$ ; имеем:  $\Delta x = 0,02$ ,  $\frac{\Delta x}{x} \doteq 0,000 073$ , так что погрешность третьего рода, согласно предыдущей формуле, будет  $0,4343 \cdot 0,000 073 \doteq 0,000 031$ ; присоединяя сюда еще погрешность 0,000 01, полученную (при вычислении по пятизначным таблицам) от первых двух причин, окончательно находим:  $\log x = 2,43563 \pm 0,000 041$ . Для проверки, так как  $x$  содержится между числами 272,64 и 272,68, возьмем *семизначные* логарифмы этих чисел:  $\log 272,64 = 2,435 5896$ ,  $\log 272,68 = 2,435 6533$ , что вполне согласуется с нашим результатом.

\* Выражение  $\frac{y'}{y}$  есть не что иное, как *логарифмическая производная* от  $y$  [62, 13, (37)].



Решим с помощью формулы (58) еще такой вопрос: со сколькими верными знаками должно быть известно число  $x$ , чтобы и м е л о с м ы с л при вычислении его логарифма пользоваться, напр., *четырёхзначными* таблицами. Очевидно это будет так, если погрешность в логарифме (проистекающая от погрешности в числе) будет меньше пяти единиц четвертого разряда после запятой, для чего примерно достаточно, чтобы относительная погрешность  $\frac{\Delta x}{x}$  была меньше  $0,001 = 0,1\%$ .

Как видно из табл. I н<sup>о</sup> 4, такую точность обеспечивают вообще лишь *четыре* верных знака! Аналогично можно показать, что для того, чтобы имело смысл вычислять логарифм числа по *пятизначным* таблицам, нужно, чтобы число имело по крайней мере *пять* верных знаков, и т. д.

3. Переходя к обратной задаче — разысканию числа  $x$  по его логарифму  $y$ , мы воспользуемся той же формулой (58), которую перепишем в виде:

$$\frac{\Delta x}{x} \doteq \frac{\Delta y}{0,4343}. \quad (59)$$

Погрешность при вычислении  $x$  здесь также проистекает из трех источников: 1) от погрешности опорного *табличного* логарифма, не превосходящей половины четвертого знака в случае четырехзначных таблиц, половины пятого знака — в случае пятизначных, и т. д.; 2) от погрешности интерполирования, которой можно пренебречь сравнительно с первой; 3) от погрешности самого  $\log x$ . Влияние первой и третьей погрешности можно сразу учесть по формуле (59). Если, напр., дано:  $\log x = 3,764\ 50 \pm 0,000\ 025$ , то, присоединяя к  $0,000\ 025$  еще погрешность,  $0,000\ 005$  опорного логарифма, положим в (59) сразу  $\Delta y = 0,000\ 03$ , тогда  $\frac{\Delta x}{x} \doteq 0,000\ 07$ , и так как (по пятизначным таблицам)  $x = 5814,29$ , то  $\Delta x = 5814,29 \cdot 0,000\ 07 \doteq 0,41$ . Таким образом,  $x = 5814,29 \pm 0,41$ . Действительно,  $\log x$  лежит между границами  $3,764\ 4750$  и  $3,764\ 5250$ , которым (по *с е м и з н а ч н ы м* таблицам) отвечают числа  $5814,000$  и  $5814,669$ ; это согласуется с найденной максимальной погрешностью  $x$ .

Если число  $x$  определяется по его *пятизначному* логарифму, верному до *двух единиц* последнего разряда,\* так что (объединяя эту погрешность с погрешностью первого рода) в (59) следует положить  $\Delta y = 0,000\ 025$ , то получим для относительной погрешности  $\frac{\Delta x}{x}$  оценку  $0,000\ 06$ ; аналогично, для четырехзначного логарифма получили бы  $0,0006$ , для трехзначного —  $0,006$  и т. д. Пусть, для большей ясности, характеристика  $\log x$  есть четыре, так что число „целых знаков“  $x$  равно пяти; при относительной погрешности в  $0,000\ 06$ , абсолютная погрешность (если число близко к  $100\ 000$ ) может почти достигать *шести* (!) целых единиц; даже в благоприятном случае (когда число близко к  $10\ 000$ ), абсолютная погрешность может превзойти  $\frac{1}{2}$ . Отсюда ясно, что есть основание вычислять пять знаков числа  $x$ , но было бы бессмысленно устанавливать его шестой и следующие знаки. Аналогично, в случае четырехзначных таблиц следует довольствоваться четырьмя значащими цифрами определяемого числа, и т. п.

4. Мы можем теперь составить себе представление и о точности обыкновенной логарифмической линейки, со шкалой в  $25$  см. При отсчете или установке визира можно ошибиться, примерно, на  $0,1$  мм в ту и другую сторону, что при длине шкалы в  $250$  мм отвечает погрешности  $\Delta y = \frac{0,1}{250} = 0,0004$ . Отсюда, по формуле (59),  $\frac{\Delta x}{x} = 0,000\ 92 \doteq 0,001$ . Таким образом, мы установили замечательное свойство логарифмической шкалы [о котором мы уже упоминали, 12]: *относительная точность отсчетов во всех частях шкалы одна и та же*.

\* Этот случай реально представляется, если мы находим по таблицам произведение или частное двух чисел, логарифмов которых непосредственно в таблицах нет, так что при определении этих логарифмов пришлось интерполировать.



Если мы перемножаем или делим два числа на *нижних шкалах*, то погрешность может достигнуть 0,003. На *верхних шкалах*, где масштаб вдвое меньше, эта погрешность будет уже 0,006, т. е. сравнима с погрешностью вычислений по *трехзначным* таблицам логарифмов.

5. Не останавливаясь подробно на действиях с логарифмическими тригонометрическими таблицами, которые в технике применяются сравнительно редко, мы исследуем только вопрос, по каким таблицам выгоднее отыскивать угол: по таблицам синусов или тангенсов. Сравним погрешности при определении угла по его тангенсу и по его синусу с помощью логарифмических таблиц. Положим:

$$y_1 = \log \sin x, \quad y_2 = \log \operatorname{tg} x; \quad (60)$$

пусть при определении  $y_1$  и  $y_2$  мы делаем одинаковую ошибку  $\delta$  (не превышающую хотя бы половины последнего знака мантиссы); эта ошибка приводит к различным ошибкам при определении угла  $x$ , которые мы обозначим через  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Дифференцируем формулы (60):

$$dy_1 = \frac{0,4343}{\sin x} \cos x dx;$$

$$dy_2 = \frac{0,4343}{\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x};$$

в рассматриваемом случае мы должны считать:  $dy_1 = dy_2 = \delta$ , но в соответствии с этим мы должны положить в первом равенстве  $dx = \delta_1$ , а во втором  $dx = \delta_2$ . Мы получим тогда:

$$\delta = \frac{0,4343 \delta_1}{\operatorname{tg} x} = \frac{0,4343 \delta_2}{\cos x \sin x},$$

откуда:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 1, \text{ или } \delta_1 > \delta_2.$$

Таким образом оказывается, что, при одинаковой ошибке в логарифме, таблица тангенсов дает меньшую погрешность в угле, чем таблица синусов и, стало-быть, оказывается более выгодной.

6. При измерении неизвестного сопротивления  $y$  с помощью мостика Витстона (черт. 101), передвигаем подвижной контакт  $D$  по градуированной линейке  $AC$  до тех пор, пока гальванометр  $G$  не покажет отсутствие тока. Сопротивление  $y$  определяется из пропорции

$$\frac{y}{R} = \frac{x}{a-x},$$

где  $a = AC$ ,  $x = AD$ ,  $R$  — известное сопротивление ветви  $BC$ .

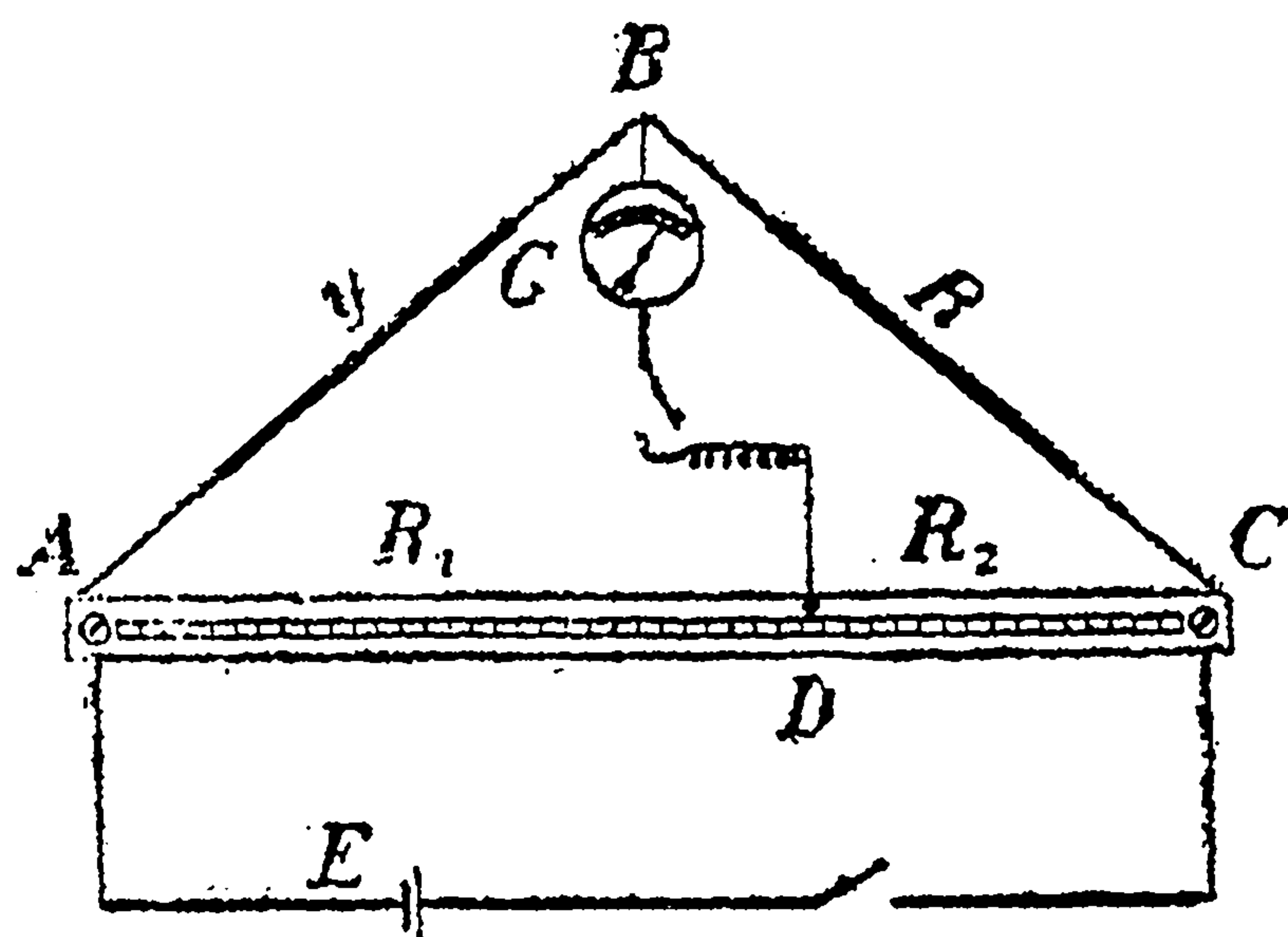
Найдем положение контакта  $D$ , при котором относительная погрешность, являющаяся следствием погрешности при определении длины  $x$ , оказывается *наименьшей*. Из равенства  $y = \frac{Rx}{a-x}$  находим абсолютную погрешность:

$$dy = \left( \frac{Rx}{a-x} \right)' dx = R \frac{(a-x) + x}{(a-x)^2} dx = \frac{aR}{(a-x)^2} dx,$$

а затем (деля почленно на это равенство) и относительную погрешность

$$\frac{dy}{y} = \frac{a dx}{(a-x)x}.$$

\* Для простоты мы здесь считаем (как это и делается обычно), что  $dx$  и  $dy$  уже означают соответственные (максимальные) абсолютные погрешности.



Черт. 101.



Найденная относительная погрешность, если погрешность  $dx$  при измерении длины считать постоянной, будет *наименьшей* очевидно тогда, когда знаменатель  $x(a-x)$  имеет *наибольшее* значение. Этот знаменатель оказывается трехчленом второй степени  $-x^2 + ax$  и [см. 38, (17)] достигает своего наибольшего значения при  $x = \frac{a}{2}$ . Поэтому обыкновенно, для получения возможно более точного результата, сопротивление  $R$  устанавливается (с помощью магазина сопротивлений) с таким расчетом, чтобы ток исчезал при положении контакта  $D$  возможно более близком к середине линейки  $AB$ .

**72. Первообразная функция (интеграл).** В заключение настоящей главы, посвященной *дифференцированию* функций, мы считаем полезным в общих чертах познакомить читателя и с обратной операцией — *интегрированием* (которым впоследствии, в главе X, мы займемся специально).

В очень многих важных вопросах науки и техники приходится — не по заданной наперед функции  $F(x)$  искать ее производную  $f(x) = F'(x)$  [или дифференциал  $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ ], но, наоборот, по *известной* производной  $f(x) = F'(x)$  [или — что то же — по *известному* дифференциалу  $f(x)dx = dF(x)$ ] искать, восстанавливать *неизвестную* функцию  $F(x)$ .

*Искомая функция  $F(x)$ , имеющая данную функцию  $f(x)$  своей производной, называется первообразной для функции  $f(x)$ , или неопределенным интегралом функции  $f(x)$ , и обозначается символом:*

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

*Данная функция  $f(x)$  называется подынтегральной функцией интеграла.*

Напр., известно, что производной от функции  $x^2$  будет функция  $2x$ , следовательно, функция  $x^2$  является первообразной для функции  $2x$ , что и записывают так:

$$x^2 = \int 2x dx.$$

Точно так же смысл равенства

$$\int \cos x dx = \sin x,$$

гласящего, что  $\sin x$  есть первообразная функция для  $\cos x$ , заключается именно в том, что  $\cos x$  будет производной для  $\sin x$  [или — что то же —  $\cos x \cdot dx$  будет его дифференциалом].

Мы обращаем внимание читателя на то, что под знаком интеграла  $\int$  пишут, по обычаю, не данную производную, а дифференциал [не  $2x$  или  $\cos x$ , а  $2x \cdot dx$  и  $\cos x \cdot dx$ ], т. е. как бы разыскивают первообразную функцию не по производной, а по дифференциалу. Такой способ письма имеет свои преимущества; его происхождение и смысл выяснятся впоследствии (гл. XI).

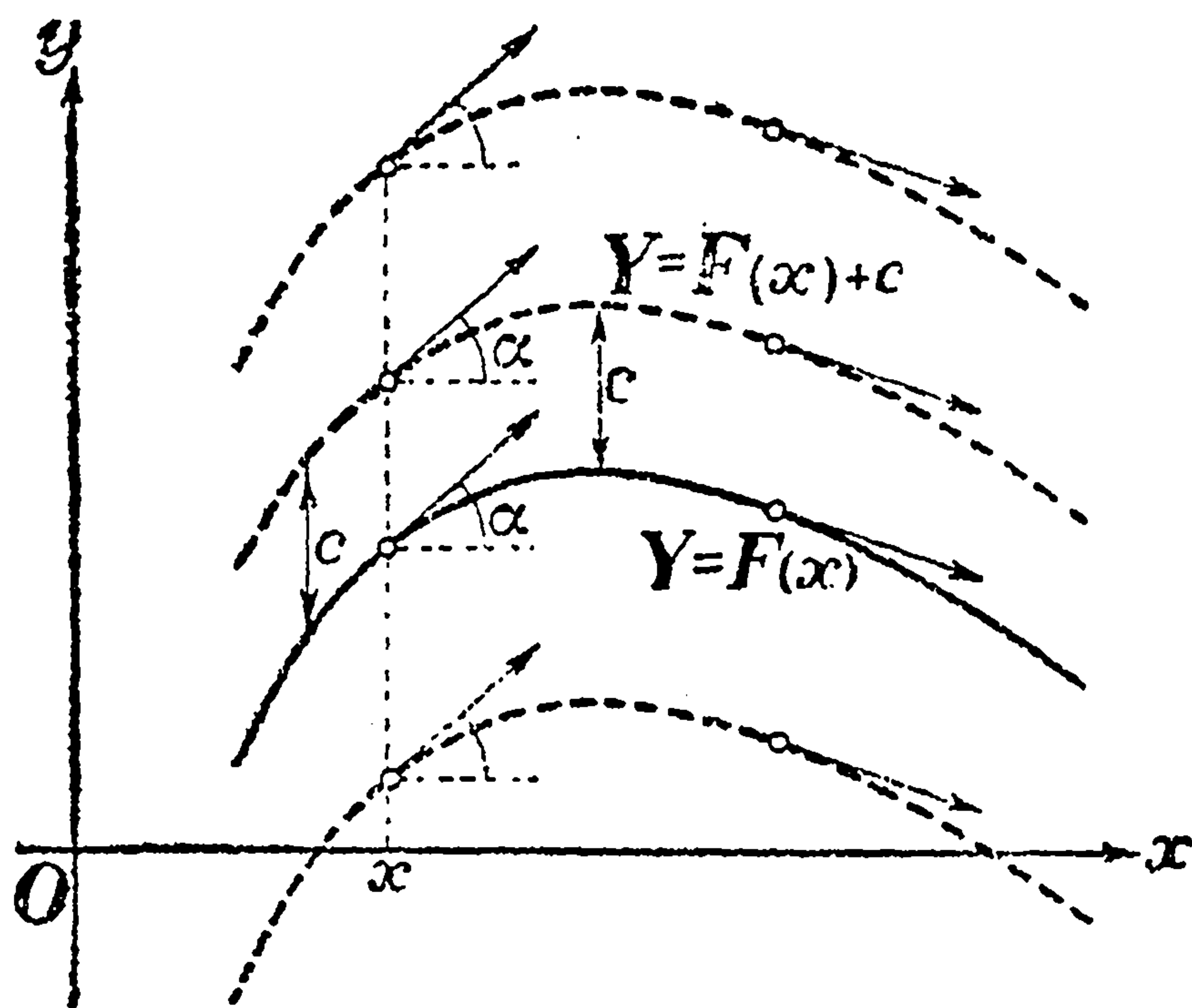
Возвращаясь к рассмотренным примерам, мы предлагаем читателю сообразить: *только ли* для функции  $x^2$  производной будет  $2x$  и *только ли*



для  $\sin x$  производная равна  $\cos x$ ? Вспоминая, что прибавление *постоянного* слагаемого к функции *не отражается* на величине ее производной [ибо производная постоянной величины есть 0, (21)], легко понять, что и для функций  $x^2 + 5$ ,  $x^2 - 0,2$ , вообще для  $x^2 + c$ , где  $c = \text{пост.}$ , производной будет *та же* функция  $2x$ , так что все эти функции для  $2x$  также будут первообразными; точно также, и для  $\cos x$  первообразной будет не только  $\sin x$ , но и любая функция  $\sin x + c$ . Итак:

$$\int 2x \cdot dx = x^2 + c, \quad \int \cos x \cdot dx = \sin x + c.$$

Пусть вообще, задав функцию  $y = f(x)$ , мы нашли ее первообразную  $Y = F(x)$ , так что  $F'(x) = f(x)$ ; тогда, очевидно, и  $[F(x) + c]' = F'(x) + c' = f(x)$ , т. е. и функция  $F(x) + c$  будет первообразной для  $f(x)$ . Этот факт легко истолковать и геометрически. Если представить себе график функции  $Y = F(x)$  (черт. 102), то графики функций  $Y = F(x) + c$  из него получаются простым перемещением параллельно оси  $Oy$ ; совершенно очевидно, что это перемещение не отразится на *уклоне* графика, так что в соответствующих точках (имеющих одну и ту же абсциссу  $x$ ) касательные к нашим кривым будут параллельны, что и отвечает равенству производных [65].



Черт. 102.

Таким образом оказывается, что для данной функции  $f(x)$  существует бесчисленное множество первообразных функций, которые отличаются между собою на постоянные слагаемые; потому-то первообразная функция и называется *неопределенным* интегралом. Найдя *какую-нибудь* первообразную функцию:

$$\int f(x) dx = F(x),$$

мы получим *все* вышеуказанные первообразные функции по формуле

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

где  $c$  есть произвольная постоянная.

Легко видеть, что *других* первообразных, кроме заключенных в этой формуле, функция  $f(x)$  иметь не может. В самом деле, пусть  $F_1(x)$  будет также первообразной для  $f(x)$ , так что и  $F_1'(x) = f(x)$ ; составим тогда функцию  $\varphi(x) = F_1(x) - F(x)$ , для нее будем иметь:

$$\varphi'(x) = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$



Раз скорость изменения функции  $\varphi(x)$  есть 0, то функция, очевидно, будет постоянной:  $\varphi(x) = c$ . Иначе это можно пояснить и так: для „кривой“  $y = \varphi(x)$  касательная будет всегда параллельна оси  $Ox$  (ибо ее угловой коэффициент есть 0!), а это может быть лишь в том случае, если эта „кривая“ сама сводится к прямой, параллельной оси  $Ox$ , ордината точек которой постоянна. Итак,  $F_1(x) = F(x) + c$ , т. е. функция  $F_1(x)$  необходимо содержится в упомянутой формуле.

Заметим, что символ  $\int f(x) dx$ , в зависимости от удобства, понимается двояко: либо под ним разумеют произвольную первообразную функцию и включают в это обозначение и постоянное слагаемое, либо же, понимая под ним одну из первообразных, пишут произвольную постоянную особо.

Постоянную, входящую в общее выражение первообразной функции, называют *постоянной интегрирования*; в отличие от других постоянных, мы будем впредь обозначать ее прописной буквой  $C$ . Ниже мы увидим, как эта постоянная определяется, исходя из дополнительных условий вопроса, приведшего к нахождению интеграла.

Если

$$\int f(x) dx = F(x),$$

то, по определению интеграла,

$$\frac{d}{dx} \left( \int f(x) dx \right) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Перейдя от производной к дифференциалам, получим:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

Пусть мы имеем теперь некоторую функцию  $F(x)$ , и вычислим  $\int \frac{dF}{dx} dx$ . Так как функция  $F(x)$  является как раз той функцией, производная от которой равна подынтегральной функции  $\frac{dF}{dx}$ , то из определения интеграла следует:

$$\int \frac{dF}{dx} dx = F(x) + C.$$

Отбросив произвольную постоянную и перейдя к дифференциалам, мы можем написать предыдущее равенство в виде

$$\int dF(x) = F(x).$$

Таким образом, можно сказать, что знаки  $d$  и  $\int$ , поставленные рядом,



сокращаются, если условиться отбрасывать произвольное постоянное слагаемое.

**73. Составление таблицы интегралов; простейшие правила интегрирования.** Операция нахождения интеграла от данной функции называется *интегрированием* и составляет основную задачу *интегрального исчисления*. Из самого определения понятия об интеграле ясно, что каждая формула дифференциального исчисления, если ее, так сказать, прочитать справа налево, дает некоторую формулу интегрального исчисления. Напр., мы видели [(3)], что  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , отсюда:

$$\int nx^{n-1} dx = x^n + C.$$

В таком виде эта формула, однако, неудобна: естественнее было бы иметь под знаком интеграла просто степенную функцию  $x^n$ . Поэтому мы делим функцию  $x^n$  на  $n$ , а затем заменяем еще  $n$  на  $n+1$ ; очевидно,

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, \text{ так что } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \quad (61)$$

Эта формула (чрезвычайно часто встречающаяся в приложениях!) *верна при всех значениях показателя  $n$ , целых и дробных, положительных и отрицательных, кроме  $n = -1$ , ибо тогда она теряет смысл. Для вычисления же интеграла*

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx = \int \frac{dx}{x}.$$

постараемся вспомнить функцию, производная которой была бы равна  $\frac{1}{x}$ ; такой, очевидно, будет  $\ln x$ ; поэтому:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Аналогично из прочих формул (6) — (18), выражающих производные отдельных функций, получаются дальнейшие интегралы; они приведены в сводке **п° 75**.

Заметим, что для проверки любой формулы интегрального исчисления, имеющей вид:

$$\int f(x) dx = F(x),$$

очевидно, достаточно убедиться в том, что производная правой части действительно *равна* подынтегральной функции  $f(x)$ .

Это замечание позволяет сразу же вывести из правил I и II дифференцирования [59] аналогичные правила интегрирования:

**I. Постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла:**

$$\int c u dx = c \int u dx.$$



II. Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int (u + v + w + \dots) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx + \dots$$

Проверим, напр., второе правило. С этой целью вычислим производную от правой части [пользуясь правилом II п° 59]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \int u dx + \int v dx + \int w dx + \dots \right] &= \frac{d}{dx} \int u dx + \frac{d}{dx} \int v dx + \\ &+ \frac{d}{dx} \int w dx + \dots = u + v + w + \dots, \end{aligned}$$

и так как мы получили именно подынтегральную функцию интеграла в левой части, то правило доказано.

Само собою разумеется, что правило II (при помощи I) распространяется и на *разность*, так что его можно сразу формулировать для *алгебраической суммы*.

С помощью этих правил и формулы (61) мы сможем теперь проинтегрировать любой целый многочлен. Напр., по правилу II:

$$\begin{aligned} \int (4x^5 - 6x^3 + 2x^2 + x + 5) dx &= \int 4x^5 dx + \int (-6)x^3 dx + \int 2x^2 dx + \\ &+ \int x dx + \int 5 dx, \end{aligned}$$

затем, вынося постоянные множители, по правилу I, получим:

$$4 \int x^5 dx - 6 \int x^3 dx + 2 \int x^2 dx + \int x dx + 5 \int dx,$$

наконец, пользуясь формулой (61) [и тем, что  $\int dx = x!$ ], придем к окончательному результату:

$$4 \cdot \frac{x^6}{6} - 6 \cdot \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 5 \cdot x = \frac{2}{3} x^6 - \frac{3}{2} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 5x,$$

к которому лишь надлежит теперь прибавить произвольную постоянную:

$$\int (4x^5 - 6x^3 + 2x^2 + x + 5) dx = \frac{2}{3} x^6 - \frac{3}{2} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 5x + C.$$

(Очевидно, не имело смысла присоединять произвольную постоянную к *каждому* члену, ибо прибавление суммы нескольких *произвольных* чи-



сел равносильно прибавлению одного произвольного числа.) Аналогично получается и общая формула:

$$\begin{aligned} & \int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n) dx = \\ & = \int a_0 x^n dx + \int a_1 x^{n-1} dx + \dots + \int a_{n-1} x dx + \int a_n dx = \\ & = a_0 \int x^n dx + a_1 \int x^{n-1} dx + \dots + a_{n-1} \int x dx + a_n \int dx = \\ & = a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + \dots + a_{n-1} \frac{x^2}{2} + a_n x + C. \end{aligned}$$

Предлагаем читателю проверить полученные результаты дифференцированием.

Оставляя пока в стороне другие правила интегрирования, мы ограничимся здесь указанием лишь еще одного *полезного* приема, представляющего собой наиболее простой и чаще встречающийся частный случай общего правила, которым мы займемся впоследствии [гл. X, 156].

### III. Если известен интеграл

$$\int f(u) du = F(u) + C,$$

то, подставляя вместо  $u$  линейную функцию  $ax + b$ , имеем тогда:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Действительно, прежде всего, по определению интеграла,  $F'(u) = f(u)$ ; затем, дифференцируя правую часть последнего равенства, как *сложную* функцию от  $x$ , получим:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{a} F(ax + b) \right]'_{x} &= \frac{1}{a} \cdot F'(ax + b) \cdot (ax + b)' = \frac{1}{a} \cdot f(ax + b) \cdot a = \\ &= f(ax + b). \end{aligned}$$

Так как мы пришли именно к *подынтегральной* функции в левой части формулы, то формула доказана.

Это правило, таким образом, позволяет в любом табличном интеграле заменить в *подынтегральной* функции  $x$  на  $ax + b$ , с тем, однако, что не только подобная же замена будет произведена в результате интегрирования, но еще *перед ним* будет поставлен множитель  $\frac{1}{a}$ . Как частные случаи этого правила имеем формулы:

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C, \quad (b=0)$$

$$\int f(x + b) dx = F(x + b) + C, \quad (a=1)$$



Напр., исходя из известных интегралов:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad \int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 + C, \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

(мы лишь написали  $x$ , вместо  $u$ !), легко получить:

$$\int \cos 4x \, dx = \frac{1}{4} \sin 4x + C, \quad \int (2x - 3)^3 \, dx = \frac{1}{8} (2x - 3)^4 + C$$

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln(ax + b) + C.$$

Полезно проверить эти формулы дифференцированием, что заодно поможет и лучше разобраться в приведенном рассуждении.

74. Примеры и задачи. 1. Найти интегралы:

$$1) \int x^4 \, dx; \quad 2) \int x^{\frac{3}{2}} \, dx; \quad 3) \int \frac{dx}{x^2}; \quad 4) \int \sqrt{x} \, dx; \quad 5) \int \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad 6) \int x \sqrt[3]{x} \, dx; \quad 7) \int \frac{dx}{x}.$$

Отв. и реш. Полагая в формуле (61) последовательно  $n = 4; \frac{3}{2}; -2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{4}{3}$ , найдем:

$$1) \int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} + C; \quad 2) \int x^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C; \quad 3) \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} \, dx =$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{x} + C \text{ [ср. (5)];} \quad 4) \int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C; \quad 5) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C \text{ [ср. (5)];} \quad 6) \int x \sqrt[3]{x} \, dx = \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C. \text{ В слу-}$$

чае 7) нельзя уже пользоваться формулой (61):  $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$

2. Проинтегрировать многочлены:

$$1) 10x^4 - 2x^3 + 3x - 1; \quad 2) \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}; \quad 3) at^2 + bt + c \text{ (} t \text{ — независимая переменная);} \quad 4) 6ax^2 - a^2x - 2a^3 \text{ (} x \text{ — независимая переменная).}$$

$$\text{Отв. и реш. } 1) \int 10x^4 \, dx - \int 2x^3 \, dx + \int 3x \, dx - \int dx = 10 \int x^4 \, dx - 2 \int x^3 \, dx +$$

$$+ 3 \int x \, dx - \int dx = 2x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - x + C; \quad 2) \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + C; \quad 3) a \int t^2 \, dt +$$

$$+ b \int t \, dt + c \int dt = \frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + ct + C; \quad 4) 6a \int x^2 \, dx - a^2 \int x \, dx - 2a^3 \int dx = 2ax^3 -$$

$$- \frac{1}{2}a^2x^2 - 2a^3x + C.$$



3. Найти интегралы:

$$1) \int (ax + b)^2 dx; \quad 2) \int \sin 3x dx; \quad 3) \int e^{ax} dx \quad (a = \text{пост.}); \quad 4) \int \frac{dx}{3x + 1};$$

$$5) \int A \sin(\omega t + \alpha) dt, \quad \int A \cos(\omega t + \alpha) dt \quad (t - \text{независимая переменная; } A, \alpha \text{ и } \omega - \text{пост.});$$

$$6) \int \frac{dx}{(3x + 1)^2}; \quad 7) \int \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx, \quad \int \operatorname{sh} \frac{x}{a} dx \quad (a = \text{пост.}); \quad 8) \int \frac{dx}{(ax + b)^n}; \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}};$$

$$10) \int \frac{dx}{1 + 2x^2}.$$

Отв. и реш. По правилу III: 1) так как  $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ , то  $\int (ax + b)^2 dx =$   
 $= \frac{1}{3a} (ax + b)^3 + C$ ; предлагается раскрыть скобки в подынтегральной функции и,

проинтегрировав ее, как многочлен, сравнить результаты; 2)  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ ,

поэтому  $\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$ ; 3)  $\int e^x dx = e^x + C$ ,  $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$ ;

$$4) \int \frac{dx}{3x + 1} = \frac{1}{3} \ln(3x + 1) + C; \quad 5) \int A \sin(\omega t + \alpha) dt = -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) + C =$$

$$= \frac{A}{\omega} \sin\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) + C; \quad \int A \cos(\omega t + \alpha) dt = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) + C - \text{таким обра-}$$

зом, если отбросить постоянную, то интеграл от *синусоидальной величины* представится также синусоидальной величиной [46; 62, 2], причем полученный результат можно выразить и геометрически, подобно правилу дифференцирования;

$$6) \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, \quad \int \frac{dx}{(3x + 1)^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x + 1} + C; \quad 7) \text{ так как } (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \text{ то}$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C, \quad \text{поэтому } \int \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \int \operatorname{ch}\left(\frac{1}{a} \cdot x\right) dx = \frac{1}{\frac{1}{a}} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{a} \cdot x\right) + C =$$

$$a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a} + C; \quad \text{аналогично, } \int \operatorname{sh} \frac{x}{a} dx = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a} + C; \quad 8) \int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n} dx =$$

$$= \frac{1}{-n + 1} x^{-n+1} + C = \frac{1}{1 - n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C, \quad \text{поэтому } \int \frac{dx}{(ax + b)^n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - n} \cdot \frac{1}{(ax + b)^{n-1}} + C;$$

$$9) \text{ так как } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C, \text{ то } \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x)^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} 2x + C;$$

$$10) \int \frac{dx}{1 + (\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + C.$$

4. Если через  $v$  и  $s$  обозначить, соответственно, скорость и пройденный путь движущейся материальной точки, то, как мы знаем [52, 54],  $v = \frac{ds}{dt}$ .



( $t$  — время). Пусть скорость  $v$  задана в функции от времени:  $v = f(t)$ , тогда путь  $s$  выразится интегралом

$$s = \int v dt + C.$$

Аналогично, ускорение  $w = \frac{dv}{dt}$ , так что, если ускорение  $w$  задано в функции от времени:  $w = \varphi(t)$ , то для определения скорости  $v$  получим:

$$v = \int w dt + C_1.$$

Предположим, напр., что мы имеем дело с равноускоренным (или равнозамедленным) движением, т. е. что  $w = a = \text{пост.}$  ( $a \geq 0$ ). Тогда

$$v = \int a dt + C_1 = at + C_1.$$

Нетрудно теперь определить и *постоянную интегрирования*  $C_1$  (т. е. установить ее механический смысл); полагая в полученной формуле  $t = 0$  и обозначая *начальную скорость* точки (т. е. скорость ее при  $t = 0$ ) через  $v_0$ , найдем:  $v_0 = C_1$ . Таким образом, если начальная скорость  $v_0$  известна, то этим определяется значение постоянной  $C_1$ , и мы получаем окончательно:

$$v = at + v_0. \quad (62)$$

Для нахождения пути  $s$ , еще раз интегрируем:

$$s = \int (at + v_0) dt + C = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C.$$

Легко сообразить, как и выше, что  $C$  есть начальное значение пути  $s_0$ , так что, подставляя  $s_0$  вместо  $C$ :

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0. \quad (63)$$

В частности, если речь идет о вертикальном движении тяжелой материальной точки вблизи поверхности земли, то  $a$  есть ускорение силы тяжести  $g = 9,81$  (м сек<sup>2</sup>), которое нужно брать с плюсом или с минусом в зависимости от того, отсчитываем ли мы путь  $s$  вниз или вверх; таким образом оправдывается формула:

$$s = \pm \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + s_0, \quad (63 a)$$

которой мы уже пользовались выше (так сказать, в обратном направлении).

5. Для платины теплоемкость  $c$  выражается в зависимости от температуры  $\theta^\circ\text{C}$  эмпирической формулой:

$$c = 0,0317 + 0,000012\theta.$$

Найти выражение для количества тепла  $Q$ , нужного для нагревания 1 г платины от  $0^\circ\text{C}$  до  $\theta^\circ\text{C}$ .

Реш. Так как  $c = \frac{dQ}{d\theta}$ , то

$$Q = \int c d\theta + C = \int (0,0317 + 0,000012\theta) d\theta + C = 0,0317\theta + 0,000006\theta^2 + C.$$



Постоянная  $C$ , очевидно, равна 0, ибо при  $\theta = 0$  выражение для  $Q$  должно обратиться в 0.

6. Пусть охлаждающееся тело температуры  $\theta^\circ \text{C}$  окружено средой температуры  $0^\circ \text{C}$ . Ньютон установил закон, по которому *скорость охлаждения* пропорциональна самой температуре  $\theta$ , т. е. [53, 4]:

$$\frac{d\theta}{dt} = -k \cdot \theta \quad (k = \text{пост.}, k > 0). \quad (64)$$

Определить закон, по которому убывает температура тела.

*Реш.* Имеем:

$$\frac{d\theta}{\theta} = -k dt;$$

интегрируя в каждой части равенства отдельно, найдем:

$$\int \frac{d\theta}{\theta} = -k \int dt + C \quad \text{или} \quad \ln \theta = -kt + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  удобнее взять в форме:  $C = \ln c$ , где  $c$  — новая постоянная; таким образом,

$$\ln \frac{\theta}{c} = -kt, \quad \text{откуда} \quad \theta = c \cdot e^{-kt}.$$

Полагая здесь  $t = 0$ , видим, что  $c$  есть не что иное, как начальная температура  $\theta_0$  окончательно:

$$\theta = \theta_0 \cdot e^{-kt}.$$

Полученная формула определяет температуру тела в любой момент, если только она была известна в начальный момент ( $\theta_0$ ). Коэффициент  $k$  зависит от свойств тела и среды, он определяется опытным путем.

7. *Дифференциальное уравнение* \* (64), из которого мы исходили в предыдущей задаче, есть частный случай уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y \quad (\alpha = \text{пост.}) \quad (65)$$

Совершенно аналогично тому, как это было сделано выше, найдем, что

$$y = ce^{\alpha x} \quad (c = \text{пост.}), \quad (66)$$

так что показательная функция (66) является самым общим решением уравнения (65). Это уравнение, выражающее тот факт, что *скорость изменения функции пропорциональна самой функции* (с коэффициентом пропорциональности  $\alpha$ ), имеет большое значение при исследовании явлений природы, в которых наблюдается подобная зависимость. Она может быть представлена и в такой форме:

$$dy = \alpha y dx; \quad (67)$$

если при бесконечно малом  $dx$  принять  $dy$  за *приращение*  $\Delta y$  функции [66], то условие (67) можно выразить в словах так: *бесконечно малое приращение функ-*

\* *Дифференциальным уравнением* называется всякое соотношение, куда входят не только независимая переменная и искомая функция, но и производные от искомой функции, или ее дифференциалы. С дифференциальными уравнениями мы не раз будем встречаться в последующем изложении.



ции пропорционально имеющемуся значению функции и приращению независимой переменной. Это свойство, равносильное уравнению (65), также приводит к функции (66).

Напр., при разряде конденсатора, разряд протекает тем быстрее, чем выше напряжение  $V$ , так что падение напряжения ( $-dV$ ) за бесконечно малый промежуток времени  $dt$  можно считать пропорциональным, как  $dt$ , так и самому напряжению  $V$ . Обозначив через  $k$  коэффициент пропорциональности, можем, в силу сказанного, сразу написать: что  $V = ce^{-kt}$ ; определяя постоянную  $c$  как и раньше, получаем выражение напряжения конденсатора в любой момент:

$$V = V_0 e^{-kt},$$

где  $V_0$  есть значение напряжения в начале разряда.

В качестве последнего примера на применение равенства (67) установим закон изменения давления воздуха  $p$  с возрастанием высоты  $h$  места над уровнем моря [ср. 24]. Рассматривая столб воздуха, имеющий в сечении  $1 \text{ м}^2$ , видим, что бесконечно малая убыль ( $-dp$ ) давления, отвечающая бесконечно малому приращению  $dh$  высоты, равна весу слоя воздуха высоты  $dh$ ; так как этот вес пропорционален, кроме  $dh$ , и давлению  $p$ , под которым он находится, то сразу находим:

$$p' = c \cdot e^{-kh},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности. Очевидно,  $c = p_0$  есть давление на уровне моря.

Примеры 4 — 7 поясняют читателю, как определяется произвольная постоянная, вводимая при интегрировании, исходя из условий поставленной задачи.

Последние примеры, кроме того, показывают дифференциалы в новой роли: заменяя бесконечно малые приращения функции, они являются весьма полезными при составлении дифференциальных уравнений, которые характеризуют рассматриваемое явление.

**75. Сводка полученных формул дифференцирования и интегрирования.** Сделаем теперь сводку основных правил дифференцирования и интегрирования и формул, относящихся к вычислению производных, дифференциалов и интегралов отдельных простейших функций. Читателю удобнее будет наводить справки в приводимой ниже таблице, нежели в предшествующем тексте.

	Производная	Дифференциал	Интеграл
I	$(cu)' = cu'$	$d(cu) = c du$	$\int cu dx = c \int u dx$
II	$(u + v - w + \dots)' =$ $= u' + v' - w' + \dots$	$d(u + v - w + \dots) =$ $= du + dv - dw \dots$	$\int (u + v - w + \dots) dx =$ $= \int u dx + \int v dx -$ $- \int w dx + \dots$
III	$(uvw \dots)' = u'vw \dots +$ $+ v'uw \dots + w'uv \dots + \dots$	$d(uvw \dots) = (vw \dots) du +$ $+ (uw \dots) dv +$ $+ (uv \dots) dw + \dots$	
IV	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$	



	Производная	Дифференциал	Интеграл
V	Если $y = f(u)$ , $u = \varphi(x)$ , то $y'_x = [f(\varphi(x))]'_x = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) =$ $y'_u \cdot u'_x$		Если $\int f(u) du = F(u) + C$ , то $\int f(ax + b) dx =$ $= \frac{1}{a} F(ax + b) + C$
1.	$(C)' = 0$	$dC = 0$	$\int 0 \cdot dx = C$
2.	$(x)' = 1$		$\int dx = x + C$
3.	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$d(x^n) = nx^{n-1} dx$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ( $n \neq -1$ )
3a.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$	
3b.	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$	
4.	$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$	$d \log_a x = \frac{\log_a e}{x} dx$	
4a.	$\log x)' \doteq \frac{0,4343}{x}$	$d \log x \doteq \frac{0,4343}{x} dx$	
4b.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d \ln x = \frac{dx}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
5.	$(a^x)' = a^x \ln a$	$d(a^x) = a^x \ln a dx$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
5a.	$(e^x)' = e^x$	$d(e^x) = e^x dx$	$\int e^x dx = e^x + C$
6.	$(\sin x)' = \cos x$	$d \sin x = \cos x dx$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
7.	$(\cos x)' = -\sin x$	$d \cos x = -\sin x dx$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
8.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{sc}^2 x$	$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \operatorname{sc}^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$ $= \operatorname{tg} x + C$
9.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} =$ $= -\operatorname{csc}^2 x$	$d \operatorname{ctg} x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	$\int \operatorname{csc}^2 x dx =$  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10.	$(\arcsin x)' =$ $= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$ $= \arcsin x + C$
11.	$(\arccos x)' =$ $= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) =$ $= -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	



	Производная	Дифференциал	Интеграл
12.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$
13.	$(\operatorname{arcctg} x)' =$ $= -\frac{1}{1+x^2}$	$d(\operatorname{arcctg} x) =$ $= -\frac{dx}{1+x^2}$	
14.	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$d \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x dx$	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
15.	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	$d \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x dx$	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
16.	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$d \operatorname{th} x = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
17.	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$d \operatorname{cth} x = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

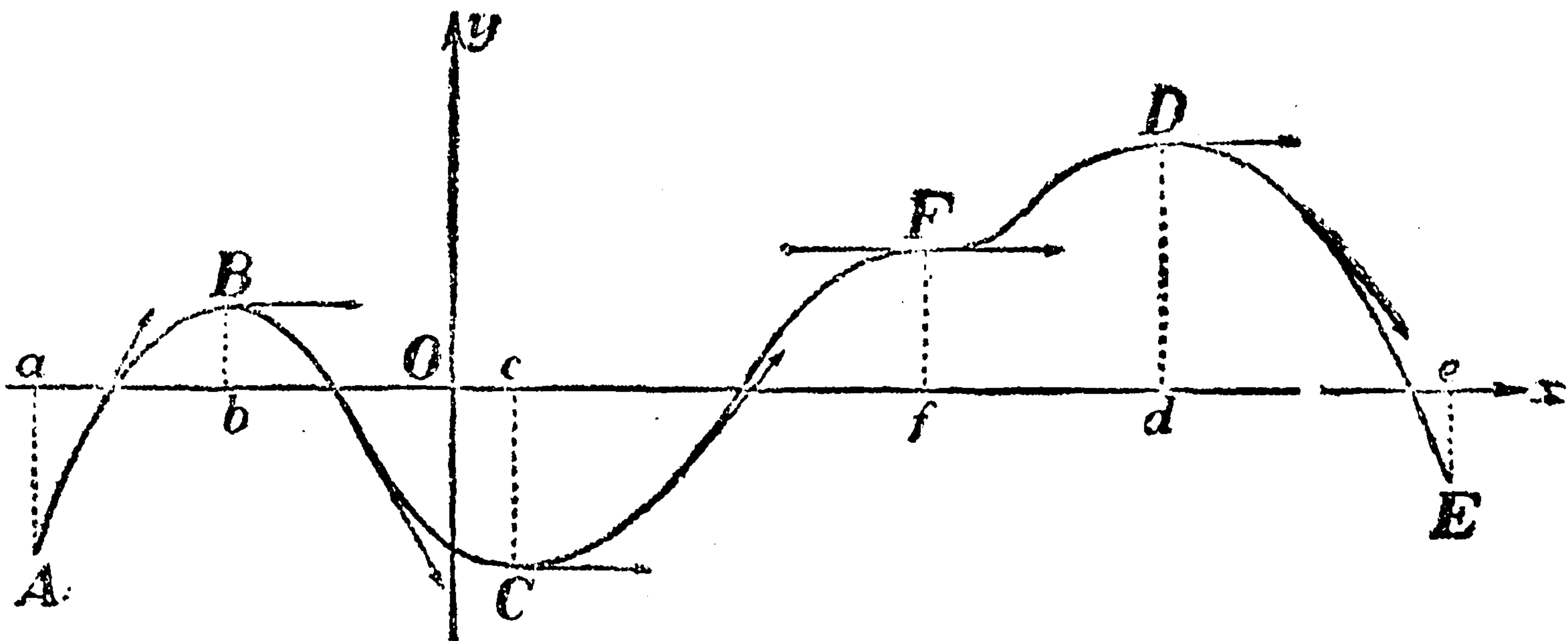


## ГЛАВА VI.

### ХОД ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ.

76. **Признаки возрастания или убывания функции.** Когда график функции перед глазами, то весь ход изменения функции становится непосредственно ясным. Но для функции, заданной аналитически, формулой [28], построение графика может потребовать иной раз значительных выкладок, для вычисления ряда значений функции. В настоящей главе будет показано, как просто может быть изучен ход изменения функции с помощью ее производной.

Если при возрастании независимой переменной  $x$ , в пределах некоторого промежутка, функция  $y = f(x)$  в свою очередь возрастает, так что



Черт. 103.

бóльшему значению  $x$  соответствует и бóльшее значение  $y$ , то функцию называют *возрастающей* (в упомянутом промежутке значений  $x$ ); если же с возрастанием  $x$  функция  $y = f(x)$  убывает, так что бóльшему значению  $x$  соответствует меньшее значение  $y$ , то ее называют *убывающей*. Так, напр., функция, график которой изображен на черт. 103, будет возрастающей в промежутках от  $a$  до  $b$  и от  $c$  до  $d$ , и убывающей — в промежутках от  $b$  до  $c$  и от  $d$  до  $e$ .

Нетрудно понять, что если функция возрастает и ее график идет вверх, то и касательная к кривой будет составлять положительный (острый) угол с осью  $Ox$ , так что и производная  $y' = f'(x)$ , дающая тангенс этого угла [65], будет положительна; лишь в отдельных точках (как, напр., в точке  $F$ ) касательная может оказаться горизонтальной, а для соответствующих значений  $x$  производная — обратиться в нуль. Аналогично, если функция убывает, ее производная вообще будет отрицательна. Это становится особенно ясным, если вспомнить, что производная есть скорость изменения функции по отношению к независимой перемен-



ной [53]: при возрастании функции скорость положительна, при убывании — отрицательна. Теперь можно сделать и обратное заключение, от знака производной — к поведению функции; мы сформулируем его в виде следующего простого и важного правила:

*если производная  $y' = f'(x)$  в каком-нибудь промежутке положительна (разве лишь в отдельных точках обращаясь в нуль), то функция  $y = f(x)$  в этом промежутке возрастает; если же производная отрицательна (опять-таки с возможными исключениями в отдельных точках), то функция убывает.*

Напр., если  $y = \sin x$ , то  $y' = \cos x$  положительна в I и IV четвертях и отрицательна во II и в III четвертях, так что  $y = \sin x$  в первом случае возрастает, а во втором убывает.

**Задачи.** 1. По какому признаку можно судить о том, что  $\operatorname{tg} x$  постоянно возрастает? [Отв.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$ .]

2. Установить характер изменения гиперболических функций [50; 62, (28), (29)].  
*Реш.*  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x > 0$ , следовательно  $\operatorname{sh} x$  постоянно возрастает;  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$  положительна для  $x > 0$  и отрицательна для  $x < 0$ , так что в первом случае  $\operatorname{ch} x$  возрастает, а во втором — убывает [ср. черт. 83]; и т. д.

3. Исследовать дробно-линейную функцию.

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

*Реш.* Так как

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2},$$

то  $y$  возрастает или убывает в зависимости от того, будет ли  $ad - bc > 0$  или  $< 0$ .

**77. Максимумы и минимумы функции.** Для рассматриваемой функции  $y = f(x)$  промежутки возрастания могут перемежаться с промежутками убывания. Особенный интерес представляют как раз те значения независимой переменной  $x$ , которые *отделяют* одни промежутки от других ( $b, c, d$  на черт. 103). Если при некотором значении  $x$  (как, напр., при  $x = b$  или  $d$ ) функция  $f(x)$  переходит от возрастания к убыванию, то говорят, что при этом значении функция *имеет максимум*; если же (как при  $x = c$ ) функция  $f(x)$  переходит от убывания к возрастанию, то говорят, что она *имеет минимум*. Соответствующие точки графика ( $B, C, D$ ) называются его *вершинами*.

Таким образом, *максимальная* ордината кривой ( $bB, dD$ ) является наибольшей по сравнению с соседними ординатами, как слева, так и справа; *минимальная* же ордината ( $cC$ ) будет наименьшей сравнительно с соседними.

Если  $x$ , возрастая, проходит через значение, скажем,  $b$ , при котором функция  $y = f(x)$  имеет максимум, то *левее*  $x = b$  (т. е. для  $x < b$ ) функция возрастает и [76] ее производная  $y' = f'(x)$  положительна, *правее* же  $x = b$  (для  $x > b$ ) функция убывает и производная отрицательна;\*

\* Нужно всегда помнить, что, говоря о значениях *налево* и *направо* от точки максимума или минимума, мы подразумеваем только значения, достаточно близкие, во всяком случае не достигающие тех значений, которые отвечают соседним вершинам.



очевидно, при самом пограничном значении  $x = b$  производная обращается в нуль:  $f'(b) = 0$ . То же относится и к значениям  $x$  (в роде  $x = c$ ), при которых функция имеет минимум. Геометрически этот факт совершенно очевиден: в точках кривой с одной стороны от ее вершины касательная направлена вверх, в точках с другой стороны от вершины — вниз, а в самой вершине касательная горизонтальна и уклон кривой, равный  $y' = f'(x)$ , обращается в нуль. Итак:

Для тех значений независимой переменной  $x$ , при которых функция  $f(x)$  имеет максимум или минимум, ее производная обращается в нуль:

$$f'(x) = 0.$$

Так, напр., в случае функции  $y = \sin x$ , максимумы и минимумы достигаются именно в тех точках, где  $y' = \cos x = 0$ , т. е. при  $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$ . Вспомним, для примера, еще квадратичную функцию  $y = ax^2 + bx + c$  и ее график — параболу. Мы видели [38, (17)], что вершина параболы имеет абсциссу  $x = -\frac{b}{2a}$ ; теперь легко проверить, что как раз это значение и обращает в нуль производную  $y' = 2ax + b$ . В частности, в зад. 2, 38 функция  $s = 125t - 4,905t^2$  достигала максимума именно при том значении  $t$ , при котором производная (скорость!)  $v = 125 - 9,81t$  обращалась в нуль [ср. черт. 49].

Не следует однако думать, что как только при каком-нибудь значении  $x$  имеем:  $f'(x) = 0$ , то непременно здесь будет максимум или минимум функции  $f(x)$ . На черт. 103 мы видим, что касательная может быть горизонтальна и не в вершине (как, напр. в точке  $F$ ), так что кривая переходит с одной стороны ее на другую (*перезгиб*). Мы сталкивались уже с таким явлением, напр., в случае кубической параболы  $y = ax^3$ ; хотя  $y' = 3ax^2$  и обращается в нуль при  $x = 0$ , но ни максимума, ни минимума здесь функция не имеет [ср. черт. 50].

Таким образом, значения  $x$ , доставляющие функции максимум или минимум, нужно искать среди корней уравнения  $f'(x) = 0$ , но не все корни обязательно приводят к максимуму или минимуму функции. Мы на примерах поясним сначала, как установить действительные точки максимума и минимума, а затем сформулируем относящееся сюда правило.

78. Примеры. Пусть дана функция

$$f(x) = (x + 2)^2 (x - 1)^3.$$

Для того, чтобы определить, в каких точках она имеет максимум или минимум, мы прежде всего составляем ее производную [по правилу дифференцирования произведения, 59, III]:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x + 2)(x - 1)^3 + (x + 2)^2 \cdot 3(x - 1)^2 = (x + 2)(x - 1)^2 [2(x - 1) + 3(x + 2)] = \\ &= (x + 2)(x - 1)^2 (5x + 4). \end{aligned}$$

Легко видеть, приравнявая нулю поочередно множители этого выражения, что производная  $f'(x)$  обращается в 0 при  $x = -2, 1$  и  $-\frac{4}{5}$ ; но как было ука-



зано, мы не можем без околичностей утверждать, что при каждом из этих значений функция имеет максимум или минимум. Эти значения, так сказать, *подозрительны* по максимуму и минимуму. Можно пока сказать определенно только то, что при других значениях  $x$  функция наверно не имеет ни максимума, ни минимума; эти же значения *подлежат дальнейшему исследованию*.

Разобьем весь промежуток изменения  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  на следующие части:

$$1) \text{ от } -\infty \text{ до } -2, \quad 2) \text{ от } -2 \text{ до } -\frac{4}{5},$$

$$3) \text{ от } -\frac{4}{5} \text{ до } 1, \quad 4) \text{ от } 1 \text{ до } +\infty.$$

Внутри каждого из этих четырех промежутков наша функция максимумов и минимумов не имеет, то-есть изменяется в одном направлении; либо возрастает, либо убывает. Если в каком-либо из упомянутых промежутков функция  $f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$  постоянно возрастает, то ее производная

$$f'(x) = (x+2)(x-1)^2(5x+4)$$

сохраняет во всех точках один и тот же знак (+); если  $f(x)$  убывает, то во всех точках  $f'(x)$  имеет знак (-). Узнать, какой именно знак производная сохраняет в данном промежутке, очень легко: стоит лишь подставить в производную какое-нибудь значение из этого промежутка (отличное от концов). Так, для промежутка  $(-\infty, -2)$  берем, например, содержащееся в нем значение  $x = -3$  и подставляем в производную  $f'(x) = (x+2)(x-1)^2(5x+4)$ . Заметим, что нам нет надобности точно определить значение  $f'(x)$ ; достаточно лишь сообразить знак этого числа, прикидывая знаки его множителей, что можно сделать (в уме!) по схеме:  $(-)(+)(-)=(+)$ . Очевидно, этот именно знак производная и сохраняет во всех точках промежутка  $(-\infty, -2)$ , так что для обнаружения этого знака с таким же успехом могло бы послужить и любое другое число, содержащееся между  $-\infty$  и  $-2$ . Подобно этому, подставляя в  $f'(x)$  значение  $-1$ , наудачу взятое из второго промежутка, заключаем по схеме:  $(+)(+)(-)=(-)$ , что в нем производная отрицательна. Для третьего промежутка берем, например,  $x = 0$ , а для четвертого  $x = 2$  и находим для производной, в обоих случаях, знак (+), как показывает схема:  $(+)(+)(+)=(+)$ . Результат нашего исследования сопоставляем в таблице:

$x$	$-\infty$	$-2$	$-\frac{4}{5}$	$-1$	$+\infty$
знак $f'(x)$	+	-	+	+	
		макс.	мин.		

Если вспомнить, что положительному знаку  $f'(x)$  отвечает возрастание  $f(x)$ , а отрицательному знаку  $f'(x)$  — убывание  $f(x)$ , то становится ясным, что в первом, третьем и четвертом промежутках наша функция возрастает и лишь во втором — убывает. Таким образом, при  $x = -2$  она имеет максимум, при  $x = -\frac{4}{5} = -0,8$  минимум; при  $x = 1$  нет ни того, ни другого, функция возрастает. Соответствующие значения функции будут  $f(-2) = 0$ ,  $f(-0,8) = -8,4$ ;  $f(1) = 0$ . График рассмотренной функции представлен на черт. 104.

Возьмем еще пример. Пусть

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1},$$



причем  $x$  снова изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Составим производную [по правилу дифференцирования дроби, 59, IV]:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-5)(x^2+1) - (x^2-5x+6)2x}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{5x^2-10x-5}{(x^2+1)^2} = 5 \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Для того чтобы определить корни производной (т. е. значения  $x$ , при которых она обращается в нуль), достаточно приравнять нулю ее числитель. Корнями квадратного уравнения  $x^2-2x-1=0$  будут  $\alpha = 1 + \sqrt{2} \doteq 2,4$  и  $\beta = 1 - \sqrt{2} \doteq -0,4$ . Подобно предыдущему, устанавливаем знак производной для каждого из промежутков  $(-\infty; -0,4)$ ,  $(-0,4; 2,4)$ ,  $(2,4; +\infty)$ , подставляя в нее, скажем,  $x = -1, 0, 3$ . Получим результат:

$x$	$-\infty$	$-0,4$	$2,4$	$+\infty$
знак $f'(x)$		+	-	+
		макс.		мин.

Соответствующие минимальное и максимальное значения функции будут  $f(\alpha) \doteq -0,03$  и  $f(\beta) \doteq 7,0$ .

Наконец, рассмотрим функцию

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Так как она периодическая, с периодом  $2\pi$ , то достаточно определить ее максимумы и минимумы, соответствующие значениям  $x$  от  $0$  до  $2\pi$ . Производная

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \sin^2 x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x \cdot \sin x = \\ &= 3 \sin x \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

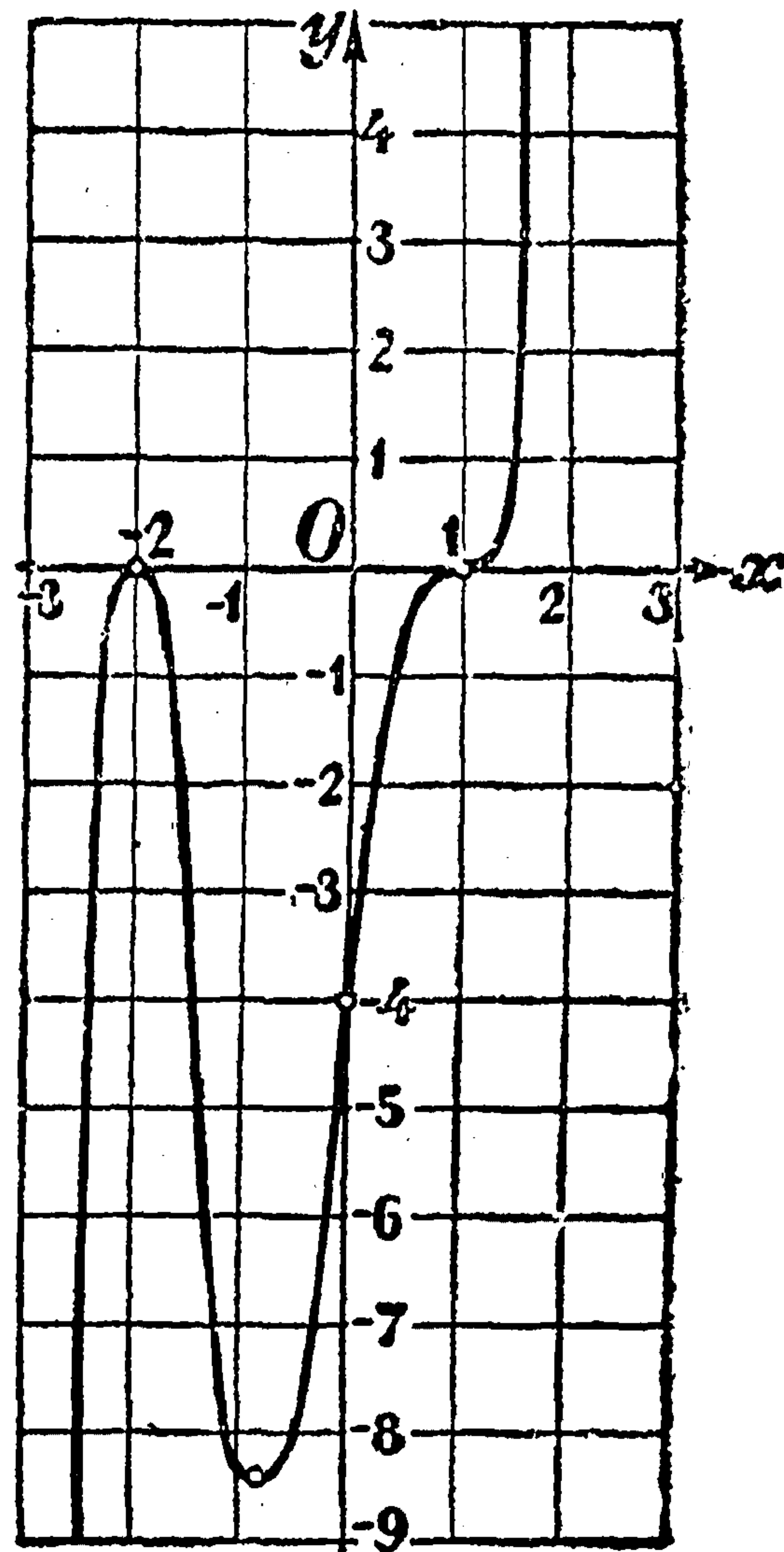
обращается в нуль либо тогда, когда  $\sin x = 0$ , т. е. при  $x = 0, \pi (2\pi)$ , либо тогда, когда  $\cos x = 0$ , т. е. при

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ , либо, наконец, тогда, когда  $\sin x = \cos x$ ,

т. е. при  $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ . Здесь уже не столь удобно, как

раньше, подставлять в производную те или иные частные значения, чтобы определить ее знак. Мы поступим несколько иначе: возьмем, например, одно из подлежащих исследованию значений  $x = \pi$ , при котором обращается в нуль  $\sin x$ . При  $x = \pi$  множители  $\cos x$  и  $\sin x - \cos x$  (равные  $-1$  и  $+1$ ) имеют, соответственно, знаки  $(-)$  и  $(+)$ , так что произведение их при  $x = \pi$  отрицательно; тот же знак  $(-)$  оно сохраняет,

очевидно, и для близких к  $\pi$  значений, как *слева*, так и *справа* от него (т. е. для  $x < \pi$  и для  $x > \pi$ ). Наоборот, множитель  $\sin x$  (обращающийся в нуль при  $x = \pi$ ) для значений  $x$ , непосредственно близких к  $\pi$  и меньших его (во второй четверти!) будет положительным, а для  $x$  больших  $\pi$  (в третьей четверти!) становится отрицательным, т. е. когда  $x$ , возрастая проходит через  $\pi$ ,  $\sin x$  *меняет знак*  $(+)$  на  $(-)$ , а вся производная меняет знак  $(-)$  на  $(+)$ . Таким образом, слева от  $x = \pi$  функция  $f(x)$  убывает (производная отрицательна), а справа возрастает (производная положительна), и при  $x = \pi$  наша функция имеет минимум. Аналогичным



Черт. 104.



образом исследуя значение  $x = \frac{\pi}{4}$ , видим, что при этом значении первые два множителя положительны, так что и вблизи этой точки, слева и справа, их знак (+). Разность же  $\sin x - \cos x$ , которая обращается в нуль при  $x = \frac{\pi}{4}$ , меняет знак (-) на (+); это становится очевидным, если представить ее в виде

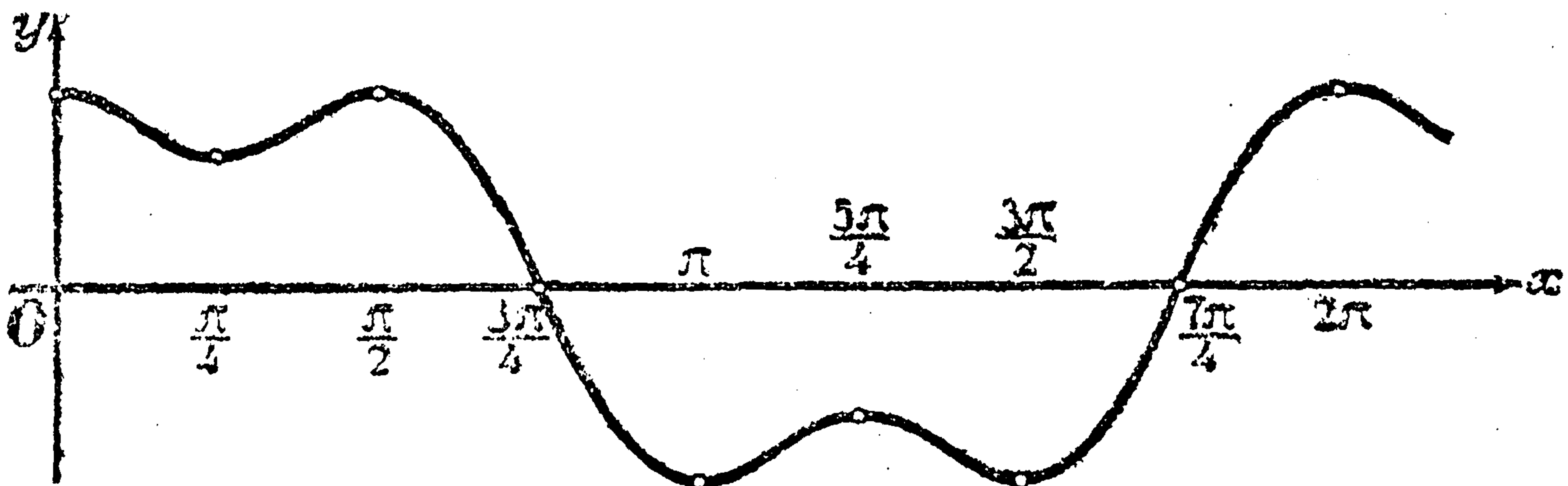
$$\cos x \left( \frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right) = \cos x (\operatorname{tg} x - 1),$$

так как  $\operatorname{tg} x < 1$  при  $x < \frac{\pi}{4}$ ,  $\operatorname{tg} x > 1$  при  $x > \frac{\pi}{4}$ , а  $\cos x > 0$ . Следовательно, и в этом случае, при переходе  $x$  через  $\frac{\pi}{4}$ , производная меняет знак (-) на (+), что соответствует минимуму. Предоставляем читателю убедиться в справедливости следующих утверждений:

$x =$	$0 (2\pi)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$ имеет	макс.	мин.	макс.	мин.	макс.	мин.
$f(x) =$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

(График функции  $y = \sin^3 x + \cos^3 x$  дан на черт. 105.)

Даже в тех случаях, когда непосредственная подстановка частного значения  $x$  в производную не представляет трудностей, иногда предпочитают исследовать корни производной так, как сейчас было разъяснено.



Черт. 105.

Если вернуться к первому примеру, то сразу видно, что при  $x = -2$  произведение двух последних множителей производной

$$f'(x) = (x + 2)(x - 1)^2(5x + 4)$$

имеет знак (-), следовательно, сохраняет этот знак и вблизи  $x = -2$ ; множитель же  $x + 2$ , когда  $x$ , возрастая, проходит через  $-2$ , меняет знак (-) на (+), так что производная меняет знак (+) на (-), и при  $x = -2$  функция имеет максимум. При  $x = 1$  первый и третий множители дают (+); второй же, обращающийся в нуль при  $x = 1$ , знака не меняет при этом (квадрат всегда положителен), следовательно, и производная не меняет знака при переходе  $x$  через 1, т. е. функция и слева, и справа от этой точки изменяется в одном направлении (возрастает), так что при  $x = 1$  нет ни максимума, ни минимума.

Уже один взгляд на квадрат:  $(x - 1)^2$  мог бы привести к этому заключению!



**79. Первое правило для нахождения максимумов и минимумов функции. Задачи.** Рассмотренные нами в предыдущем п<sup>0</sup> примеры приводят к следующему правилу для нахождения максимумов и минимумов данной функции  $f(x)$ :

1) Нужно найти производную  $f'(x)$  и приравнять ее нулю; решить полученное уравнение и каждый его корень  $\alpha$  особо подвергнуть исследованию,

2)  $\alpha$  именно, подставляя в производную  $f'(x)$  значения  $x$ , меньшие и большие этого корня  $\alpha$ , определить знаки, которые производная имеет слева и справа от  $\alpha$  (хотя бы в непосредственной близости от  $\alpha$  и не далее соседних корней). Тогда результат исследования по отношению к корню  $\alpha$  дается следующей табличкой:

Если производная $f'(x)$ имеет знак		то при $x = \alpha$ функция $f(x)$
при $x < \alpha$	при $x > \alpha$	
+	—	имеет максимум
—	+	имеет минимум
+	+	возр. } не имеет ни макс., ни мин. убыв.
—	—	

При этом, в зависимости от удобства, можно либо на самом деле подставлять в производную частные значения  $x$ , либо же лишь сообразить знаки отдельных множителей, не подставляя частных значений. Во всех случаях выгодно иметь выражение производной в виде произведения возможно более простых множителей.

В приводимых ниже задачах читателю предлагается найти не только значения  $x$ , доставляющие функции максимум или минимум, но и самые максимальные и минимальные значения функции. Заметим, что если нанести соответствующие точки на чертеж, т. е. отметить *вершины* графика функции, то по этим вершинам легко может быть составлен и грубый график, который хотя и неточно воспроизводит отдельные ординаты, но дает совершенно точную картину хода изменения функции. Обычно, кроме вершин, отмечают еще точки пересечения с осями. Так именно и построены графики на черт. 104, 105.

**Задачи.** Найти максимумы и минимумы функций:

- $f(x) = x^3 - 12x + 1$ . (Отв. Макс. при  $x = -2$ , мин. при  $x = 2$ .)
- $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x - 15$ . (Отв. Макс. при  $x = 2$ , мин. при  $x = 6$ .)
- $f(x) = x^2(x - 4)^2$ . (Отв. Макс. при  $x = 2$ , мин. при  $x = 0$  и  $4$ .)
- $f(x) = (x + 3)(x - 1)^3$ . (Отв. Мин. при  $x = -2$ ; при  $x = 1$  возрастает.)
- $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 4x + 5}$ . (Отв. Макс. при  $x = -2,4$ , мин. при  $x = 0,6$ .)



6.  $f(x) = \frac{10x}{4+x^2}$ . (Отв. Макс. при  $x=2$ , мин. при  $x=-2$ .)

7.  $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2+1}$ . (Отв. Производная всегда  $> 0$ , функция возрастает.)

8.  $f(x) = \sin x + \cos x$ . (Отв. Макс. при  $x = \frac{\pi}{4}$ , мин. при  $x = \frac{5\pi}{4}$ , период  $2\pi$ .)

9.  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ . (Отв. Макс. при  $x=0$  и  $\pi$ , мин. при  $x = \frac{2\pi}{3}$  и  $\frac{4\pi}{3}$ ; период  $2\pi$ .)

10.  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-2}$ . (Отв. Макс. при  $x=0,4$ , мин. при  $x=2$ ; заметим еще, что

функция обращается в бесконечность при  $x=-2$  или  $1$ , когда знаменатель дроби обращается в нуль.)

**80. Второе правило для нахождения максимумов и минимумов функции.** Мы видели, что при исследовании корня  $\alpha$  производной  $f'(x)$  на максимум и минимум, весь вопрос сводится к тому, изменяет ли знак производная  $f'(x)$ , когда  $x$ , возрастая, проходит через ее корень  $\alpha$ , или нет. Если бы мы знали, что *производная  $f'(x)$  вблизи  $x=\alpha$  возрастает*, то нам было бы ясно, что для значений  $x$ , меньших  $\alpha$ , эта производная должна иметь значения меньшие, чем  $f'(\alpha)=0$ , т. е. отрицательные, а для  $x > \alpha$  ее значения должны быть больше  $f'(\alpha)=0$ , т. е. положительны; в этом случае производная меняла бы знак  $(-)$  на  $(+)$  и при  $x=\alpha$  исходная функция имела бы минимум. Наоборот, если бы мы знали, что  *$f'(x)$  вблизи  $x=\alpha$  убывает*, то она непременно меняла бы знак  $(+)$  на  $(-)$ , и мы имели бы максимум. Однако редко по самому выражению производной можно видеть сразу, в какую сторону она изменяется вблизи данного значения. Но для того, чтобы судить о возрастании или убывании производной  $f'(x)$ , нам естественно обратиться к ее производной, т. е. ко второй производной  $f''(x)$  нашей функции  $f(x)$ : ведь эта вторая производная  $f''(x)$  играет ту же роль в отношении функции  $f'(x)$ , какую эта последняя играет в отношении  $f(x)$ . Итак, подставим значение  $x=\alpha$  во вторую производную  $f''(x)$ . Если число  $f''(\alpha)$  окажется положительным, это будет означать, что  $f'(x)$  вблизи  $x=\alpha$  возрастает, а отсюда, как мы видели, вытекает уже, что при значении  $x=\alpha$  функция  $f(x)$  имеет минимум. Если же значение  $f''(\alpha)$  будет отрицательным, так что  $f'(x)$  убывает вблизи  $x=\alpha$ , то при этом значении функция  $f(x)$  будет иметь максимум. Разумеется, и здесь нет надобности точно вычислять число  $f''(\alpha)$ ; достаточно только выяснить его знак.

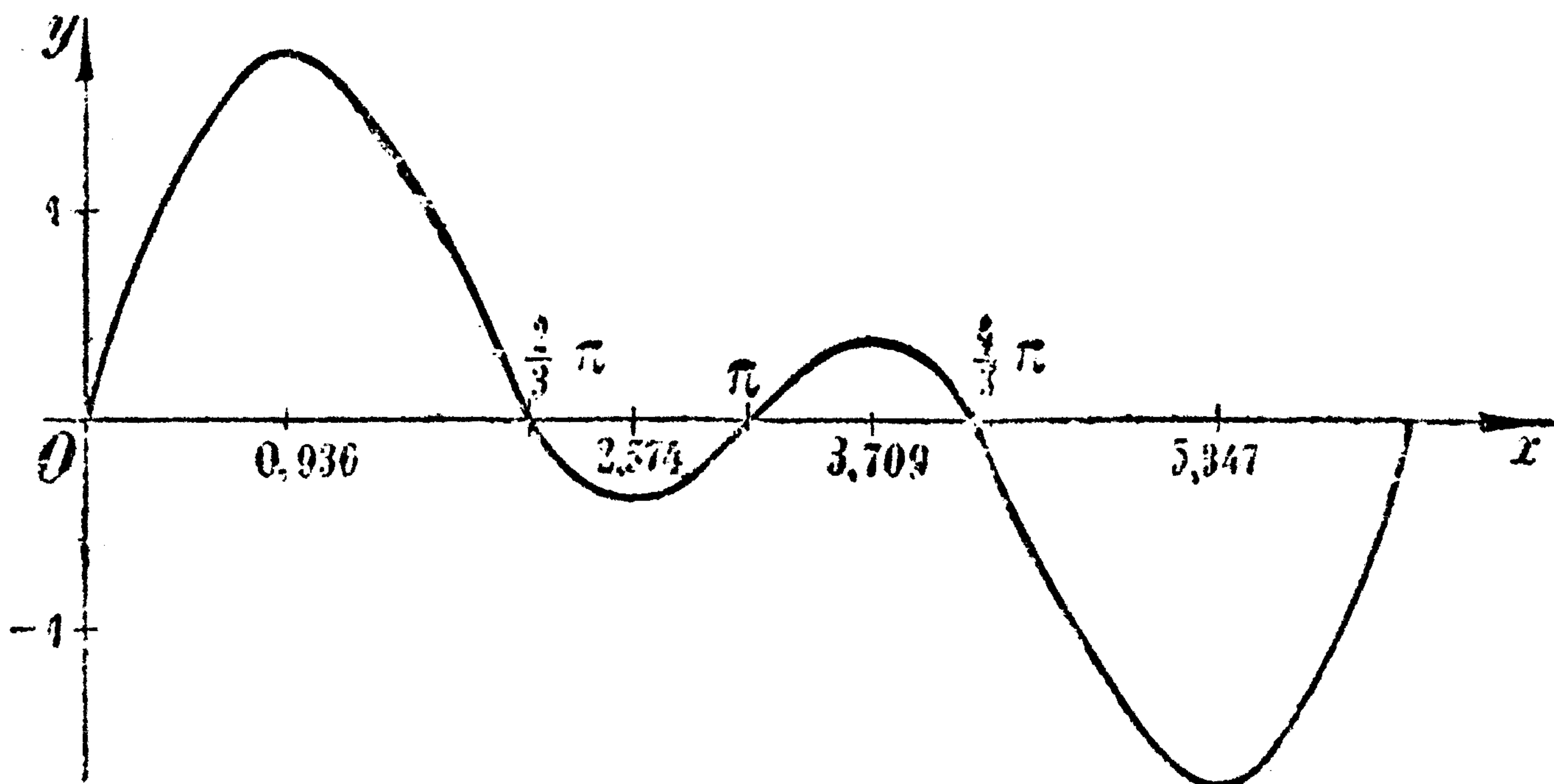
Пусть имеем, например, функцию  $f(x) = (x-1)(x+2)(x+3)$ . Ее производная равна  $f'(x) = (x+2)(x+3) + (x-1)(x+3) + (x-1)(x+2) = 3x^2 + 8x + 1$  и обращается в нуль при  $x = \frac{-4 \pm \sqrt{13}}{3}$ , т. е. при  $x \doteq -0,1$  и  $x \doteq -2,5$ . Взяв вторую производную  $f''(x) = 6x + 8$ , сразу видим, что при  $x = -0,1$  она положительна, следовательно, функция  $f(x)$  имеет минимум, в то время как при  $x = -2,5$   $f''(x)$  отрицательна и функция имеет максимум.

В качестве второго примера возьмем функцию  $f(x) = \sin x + \sin 2x$ . Тогда  $f'(x) = \cos x + 2 \cos 2x = \cos x + 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos^2 x + \cos x - 2$ ; приравняв  $f'(x)$  нулю, приходим к квадратному уравнению  $4 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ , в котором



роль неизвестной играет  $\cos x$ . Отсюда  $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$ , иными словами, для

$\cos x$  получаются два значения 0,593 07 и  $-0,843 07$ ; первому из них соответствуют углы  $53^\circ 37'$  и  $306^\circ 23' = 360^\circ - 53^\circ 37'$ , а второму — углы  $147^\circ 28'$  и  $212^\circ 32' = 360^\circ - 147^\circ 28'$ . Выражая эти углы в радианах, мы получим, соответственно, следующие значения для  $x$ :  $x_1 = 0,936$ ,  $x_4 = 2\pi - x_1 = 5,347$ ,  $x_2 = 2,574$ ,  $x_3 = 2\pi - x_2 = 3,709$  \*. Вычислим  $f''(x) = -(\sin x + 4 \sin 2x)$  и подставим поочередно найденные значения  $x$ . Так как  $\sin x_1 = \sin 53^\circ 37'$  и  $\sin 2x_1 = \sin 107^\circ 14' = \sin 72^\circ 46'$  оба положительны, то  $f''(x_1) < 0$ ; далее,  $\sin x_4 = -\sin x_1$ ,  $\sin 2x_4 = -\sin 2x_1$ , так что  $f''(x_4) > 0$ . Наконец,  $\sin x_2 = \sin 147^\circ 28' = \sin 32^\circ 32' > 0$ ,  $\sin 2x_2 =$



Черт. 106.

$= \sin 294^\circ 56' = -\sin 65^\circ 4' < 0$ , но по абсолютному значению, очевидно,  $\sin 2x_2$  больше  $\sin x_2$ , так что сумма  $\sin x_2 + 4 \sin 2x_2$  и подалвно отрицательна, и  $f''(x_2) > 0$ ; тогда  $f''(x_3) = -f''(x_2) < 0$ .

Таким образом, при  $x = x_1$  или  $x_3$  наша функция имеет максимум, а при  $x = x_2$  или  $x_4$  — минимум. Убедиться в этом без помощи второй производной было бы затруднительно.

Максимальные и минимальные значения функции  $f(x)$  будут таковы:  $f(x_1) = \sin 53^\circ 37' + \sin 72^\circ 46' = 1,760$ ,  $f(x_2) = -0,369$ ,  $f(x_3) = -f(x_2) = 0,369$ ,  $f(x_4) = -f(x_1) = -1,760$ . График функции представлен на черт. 106.

Формулируем результаты наших соображений в виде следующего правила, которым можно заменить пункт 2 правила в 79:

*Нужно найти выражение для второй производной  $f''(x)$  и подставить в него испытуемый корень  $a$  первой производной  $f'(x)$ ; тогда результат исследования по отношению к корню  $a$  выразится таблицей:*

если знак числа $f''(a)$	то при $x = a$ $f(x)$ имеет
+	минимум
-	максимум

Читатель, вероятно, уже обратил внимание на то, что оставлен в стороне случай, когда в точке  $a$  (на ряду с первой производной) и вторая

\* В виду периодичности функции  $f(x)$  мы ограничиваемся корнями  $f'(x)$ , содержащимися между 0 и  $2\pi$ . Корни эти перенумерованы в порядке возрастания их величины.



производная обращается в нуль. В этом случае второе правило уже неприменимо; пришлось бы обратиться к производным высших порядков, что усложнило бы дело.

При решении задач надлежит пользоваться тем из приемов, который для данного случая представляется более удобным: если выражение для второй производной несложно, пользуются вторым правилом, в противном случае — первым. В последующем мы найдем много тому примеров.

Для упражнения предлагаем читателю исследовать с помощью второго правила примеры 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 и 10 [79], а также функцию  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$  [78]; к примерам 4 и 7 [79] его применить нельзя.

**81. Затухающие колебания.** Рассмотрим некоторые важные в технике примеры применения изложенной теории. Мы уже изучали [62, зад. 5] колебательное движение, происходящее по закону:

$$s = Ae^{-kt} \sin \omega t.$$

Выясним точнее, какой вид имеет график этой зависимости (если постоянные  $A$ ,  $k$ ,  $\omega$  и переменную  $t$  считать положительными). Этот график интересно сопоставить с синусоидой  $s = A \sin \omega t$ , уже знакомой нам [45]. Так как введенный нами множитель  $e^{-kt}$  всегда  $> 0$ , то, очевидно, оба графика пересекают ось  $Ot$  в одних и тех же точках  $t = n \frac{\pi}{\omega}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), для которых  $\sin \omega t$  обращается в 0. Заметим, что функция  $s = A \sin \omega t$  имеет, попеременно, максимумы и минимумы в точках  $t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega}$ , где обращается в нуль ее производная  $s' = A \omega \cos \omega t$ . Для того чтобы определить, где будет иметь максимумы и минимумы функция  $s = Ae^{-kt} \sin \omega t$ , составим ее производную [см. 62, (34)]:

$$s' = Ae^{-kt} (\omega \cos \omega t - k \sin \omega t).$$

Если разделить  $\omega$  и  $k$  в скобках на  $\sqrt{\omega^2 + k^2}$ , поместив этот множитель перед скобками, то можно положить [ср. 47]

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} = \sin \varphi$$

и представить производную в виде

$$y' = A \sqrt{\omega^2 + k^2} e^{-kt} (\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi);$$

полагая  $A \sqrt{\omega^2 + k^2} = B$  и заменяя выражение в скобках по формуле для косинуса суммы, получим:

$$s' = Be^{-kt} \cos (\omega t + \varphi).$$

Эта производная обращается в 0, когда

$$\omega t + \varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad \text{т. е. для } t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega}.$$

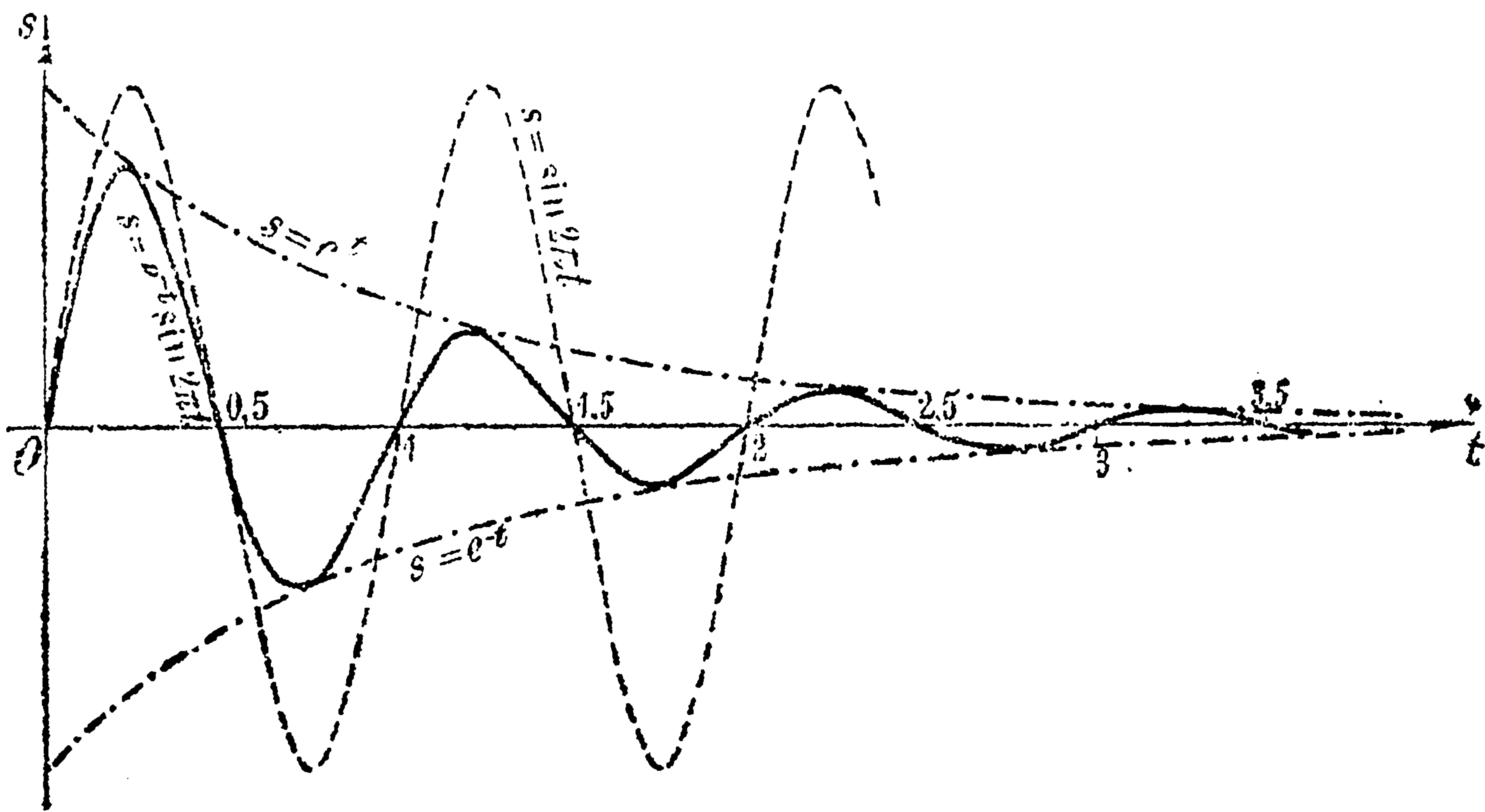
Так как косинус, проходя через 0, меняет знак, а множитель  $e^{-kt} > 0$ , то легко сообразить, что для этих значений функция  $s = Ae^{-kt} \sin \omega t$  действительно имеет максимумы при  $n$  четных и минимумы при  $n$  нечетных (проверить с помощью второй производной!). Если сравнить эти значения с полученными выше для синусоиды, то обнаружится, что наличие множителя  $e^{-kt}$  повлекло с м е щ е н и е в л е в о вершин графика на величину  $\frac{\varphi}{\omega}$ .



Множитель  $\sin \omega t$ , в выражении рассматриваемой функции, колеблется между  $-1$  и  $+1$ , так что график функции  $s = Ae^{-kt} \sin \omega t$  должен весь содержаться между кривыми  $s = Ae^{-kt}$  и  $s = -Ae^{-kt}$  (см. черт. 107), касаясь их тогда, когда синус обращается, соответственно, в  $1$  или в  $-1$ ; но на чертеже видно, что вершины графика лежат несколько левее этих точек касания, как и должно быть на основании сказанного выше.

Горизонтальное расстояние между последовательными вершинами кривой имеет постоянное значение  $\frac{\pi}{\omega}$ , так что движение носит периодический характер. Но, с возрастанием  $t$  до  $\infty$ ,  $e^{-kt} \rightarrow 0$  (ибо  $k > 0$ ), так что амплитуда колебаний безгранично убывает. Если подставить в выражение функции значение  $t = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega}$ , то для величины  $A_n$  соответствующего максимума или минимума получится следующее выражение:

$$\begin{aligned} Ae^{-k \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} \right]} \sin \omega \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega} \right] = \\ = Ae^{-k \left( \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega} \right)} \cdot e^{-n \frac{k\pi}{\omega}} \cdot \sin \left( n\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi \right). \end{aligned}$$



Черт. 107.

Но  $\sin(n\pi + \alpha) = \pm \sin \alpha$  и  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi$ ; поэтому, если обозначать постоянное число  $Ae^{-k \left( \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\varphi}{\omega} \right)} \cos \varphi$  через  $A'$ , то полученное для  $A_n$  выражение, отбрасывая знак, можно представить в виде:  $|A_n| = A' e^{-n \frac{k\pi}{\omega}}$ , так что отношение двух последовательных отклонений от среднего положения сохраняет постоянную величину:

$$\left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right| = e^{\frac{k\pi}{\omega}},$$

т. е. размахи убывают в геометрической прогрессии, знаменатель которой  $e^{-\frac{k\pi}{\omega}}$  тем меньше, чем больше  $k$ . Naturalный логарифм этого отношения  $\left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right|$ , т. е.



число  $\frac{k\pi}{\omega}$ , Гаусс (Gauss) назвал *логарифмическим декрементом*; он характеризует быстроту *затухания* колебаний.

Затухающее колебательное движение играет важную роль во многих вопросах физики и техники (колебание маятника в сопротивляющейся среде, колебания магнитной стрелки, при наличии успокоителя, разряд конденсаторов и т. п.). [См. ниже, 277,1.]

**82. Резонанс.** Каждое упругое тело, начиная от стрелки гальванометра и пружины индикатора и кончая такими массивными предметами, как мост или пароход, будучи выведено из положения равновесия, может прийти в дрожание, т. е. в колебательное движение. Амплитуда этих колебаний может меняться, но *период их* (или частота) *для каждого тела имеет свою определенную величину*, зависящую только от его упругих свойств; этот период  $\tau$  называется периодом свободных колебаний (без сопротивления). Вообразим теперь, что на тело действует некоторая сила, которая и сама является *периодической*, т. е. то увеличиваясь, то уменьшаясь и меняя направление [скажем, по синусоидальному закону, 46], через известный период  $T$  снова возвращается к прежнему своему значению и вынуждает тело производить колебания с тем же периодом  $T$ . Тогда *амплитуда* колебаний тела будет существенно зависеть от отношения  $q = \frac{\tau}{T}$  периода его свободных колебаний к периоду этих так называемых *вынужденных* колебаний. Именно, как доказывается в механике [см. 277,3], эта амплитуда будет пропорциональна следующему выражению:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-q^2)^2 + \alpha^2 q^2}}$$

где  $\alpha$  есть некоторое положительное число (обыкновенно, очень небольшое) независящее от  $q$ , но связанное с упругими свойствами тела и сопротивлением среды, и для каждого случая имеющее особое значение. В виду важной роли, которую в технике играют вынужденные колебания, мы изучим ход этой функции  $\lambda$  от  $q$  (считая  $q > 0$ ), при различных значениях  $\alpha$ . Прежде всего, ее производная

$$\frac{d\lambda}{dq} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2(1-q^2)(-2q) + 2\alpha^2 q}{(\sqrt{(1-q^2)^2 + \alpha^2 q^2})^3} = -2q \cdot \frac{q^2 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)}{(\sqrt{(1-q^2)^2 + \alpha^2 q^2})^3}$$

обращается в нуль при  $q = 0$ , или  $q = \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}}$ . Из этих корней интерес для

нас представляет лишь значение  $q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}}$  (которое, при малом  $\alpha$ , близко к 1!).

Когда  $q$ , возрастая, проходит через это значение, числитель последней дроби меняет знак (-) на (+), а вся производная (+) на (-). Таким образом, наша функ-

ция при  $q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}}$  имеет максимум; левее этой точки функция постоянно возрастает (начиная от 1, при  $q = 0$ ), а правее — постоянно убывает (стремясь к 0, при  $q \rightarrow \infty$ ). Самый максимум равен

$$\frac{1}{\alpha \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}} = \frac{1}{\alpha}$$

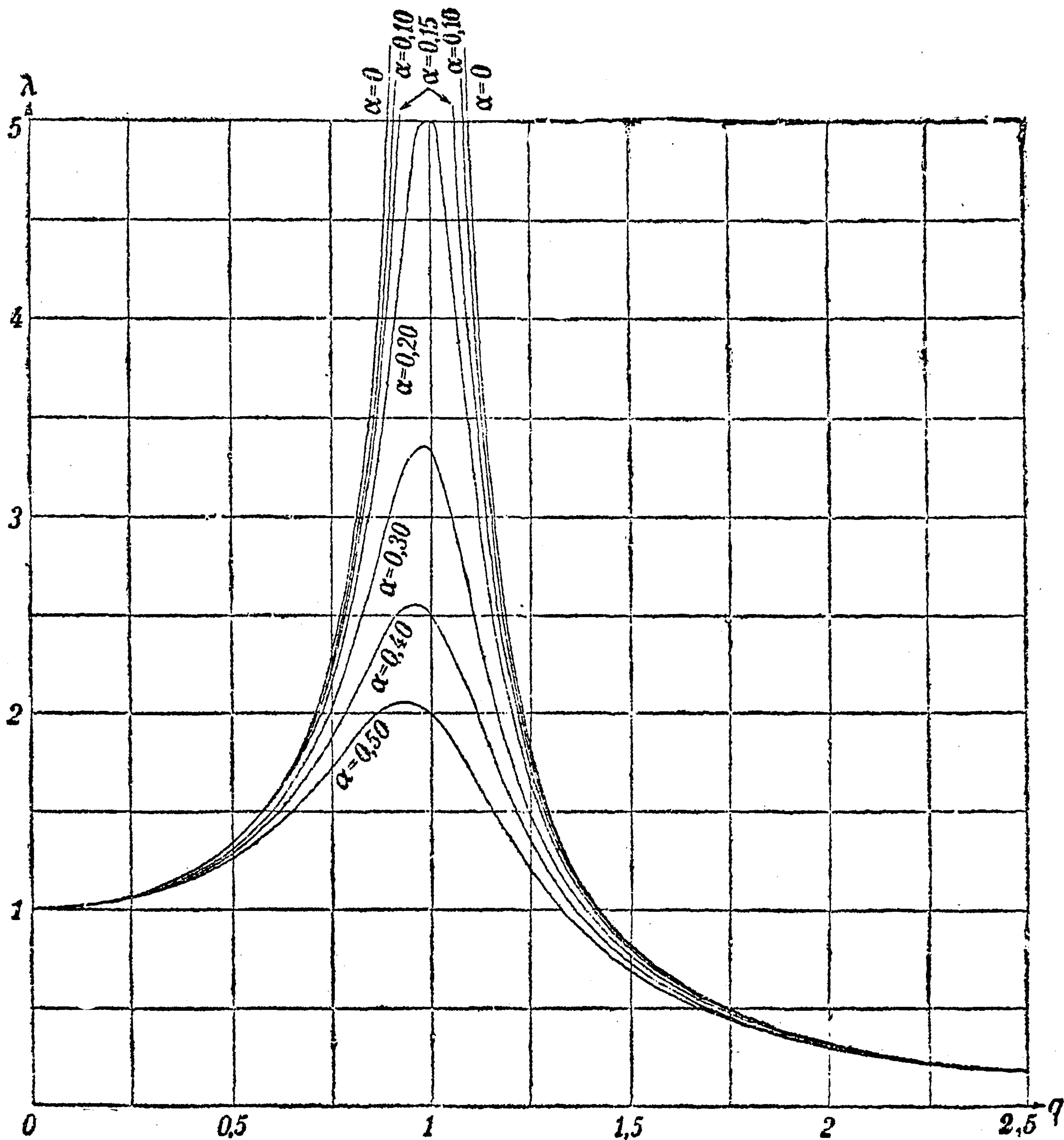
и, при малом  $\alpha$ , достигает значительной высоты. Интересно установить скорость изменения производной  $\frac{d\lambda}{dq}$ : так как  $\frac{d^2\lambda}{dq^2}$  при найденном  $q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}}$  полу-



чет большое (по абсолютной величине) отрицательное значение

$$\frac{4 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)}{\alpha^3 \left[ \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}} \right]^3} = -\frac{4}{\alpha^3},$$

то первая производная, проходя через нуль, очень быстро убывает, так что, даже по близости от указанного значения  $q$ , слева  $\frac{d\lambda}{dq}$  имеет большие положи-



Черт. 108.

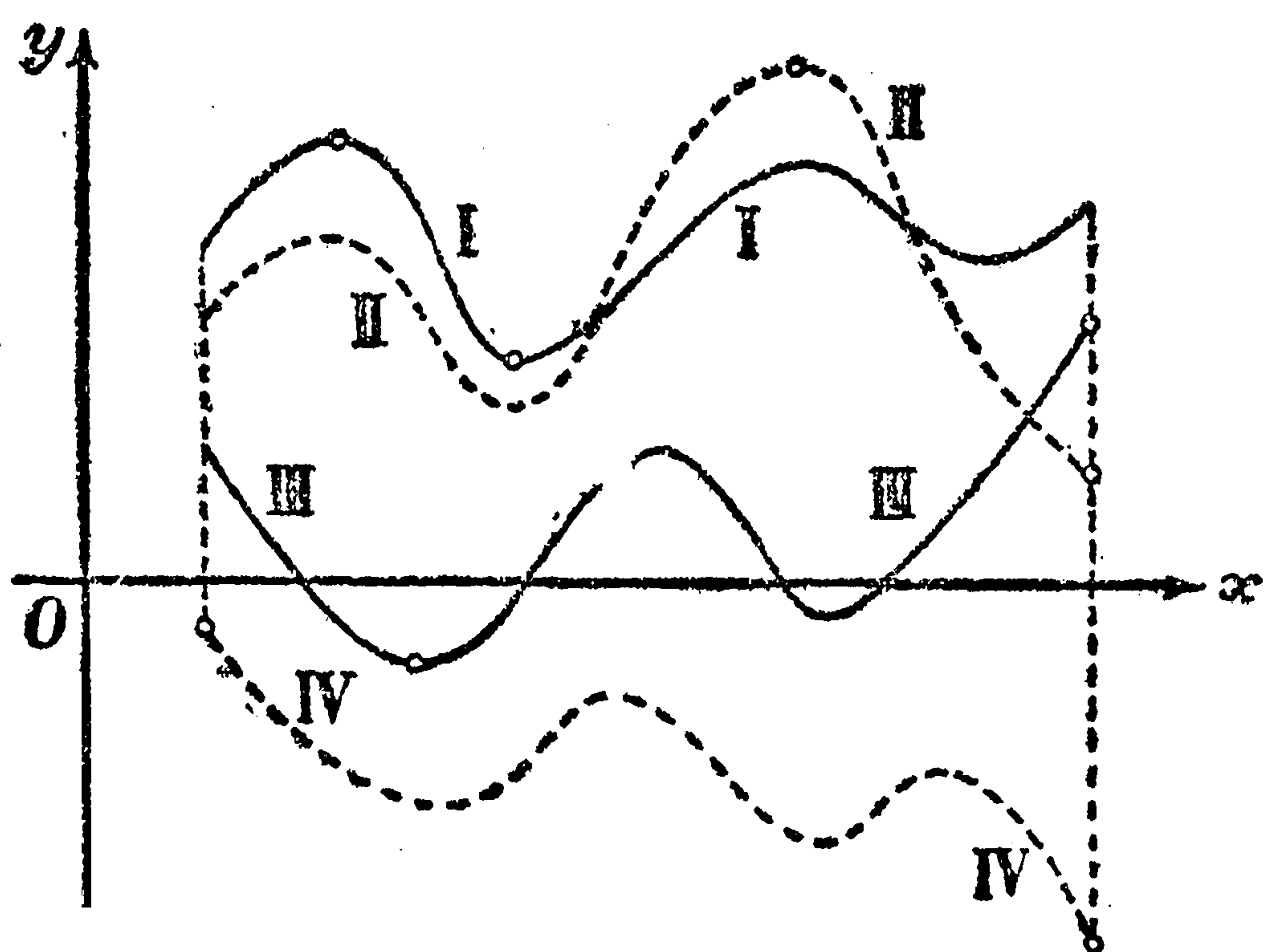
тельные значения, а справа — большие (по абсолютной величине) отрицательные значения. А это свидетельствует о том, что функция  $\lambda$  быстро возрастает до максимума, а потом столь же быстро убывает. На черт. 108 построены графики функции  $\lambda$ , при значениях  $\alpha = 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1$ ; если  $\alpha = 0$  (т. е. если совершенно отсутствует сопротивление колебаниям), то функция  $\lambda = \frac{1}{|1 - q^2|}$  при  $q = 1$  обращается в  $\infty$ .



Полученные нами заключения о ходе функции  $\lambda$ , иллюстрируемые графиками, приводят к интересным результатам. Если период  $T$  возмущающей силы значительно превосходит период  $\tau$  свободных колебаний тела (так что  $q$  мало), то амплитуда вынужденных колебаний вообще невелика. При увеличении частоты колебаний силы, т. е. при приближении  $T$  к  $\tau$  (что влечет за собой приближение  $q$  к 1), эта амплитуда быстро и значительно возрастает с тем, чтобы столь же быстро упасть, когда — при дальнейшем увеличении частоты колебаний силы —  $T$  станет меньше  $\tau$  ( $q > 1$ ), приближаясь к 0 при  $T \rightarrow 0$  ( $q \rightarrow \infty$ ). Явление резкого повышения амплитуды колебаний при близости периода  $T$  и  $\tau$  и носит название *резонанса*. С ним очень приходится считаться при конструировании машин и иных сооружений. Заметим, что резонанс имеет место и в случае электрических колебаний.

Впоследствии, во всеоружии дифференциальных уравнений, мы вернемся к вопросу о вынужденных колебаниях и о резонансе [277, 2, 3].

**83. Наибольшее и наименьшее значения функции.** Предположим, что нам дана функция  $f(x)$  в некотором конечном промежутке  $(a, b)$ .



Черт. 109.

До сих пор мы интересовались лишь максимумами и минимумами ее, теперь же поставим вопрос о разыскании *наибольшего* и *наименьшего* из значений, которые функция  $f(x)$  принимает, когда  $x$  изменяется между  $a$  и  $b$ . Как видим из черт. 109, наибольшим является либо одно из максимальных значений (для кривой I и II), либо значение, принимаемое функцией на одном из концов промежутка (кривые III и IV). Аналогично этому и

наименьшее значение может достигаться функцией либо в одной из точек, где она имеет минимум (кривые I и III), либо на одном из концов промежутка (кривые II и IV). Таким образом, вообще не следует смешивать наибольшее значение функции в данном промежутке с ее максимумом, а наименьшее — с минимумом.

Проще всего обстоит дело, если функция внутри промежутка  $(a, b)$  имеет *единственный* максимум, без минимумов, или *единственный* минимум, без максимумов. Этот случай является и важнейшим, так как он преимущественно встречается на практике. Как показывает черт. 110 а), здесь максимум совпадает с наибольшим значением функции, наименьшее же значение функция получает на одном из концов промежутка. Аналогично, в случае минимума, он совпадает с наименьшим значением функции, в то время как наибольшее достигается на одном из концов (черт. 110 б).

Пусть, например, требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$  [см. 78] в промежутке  $(-1, 1)$ . В этом промежутке функция имеет один максимум = 7,0 (при  $x = -0,4$ ), минимумов же не имеет вовсе. Найденный максимум, очевидно, и будет наибольшим значением функции. Наименьшее же значение функция полу-

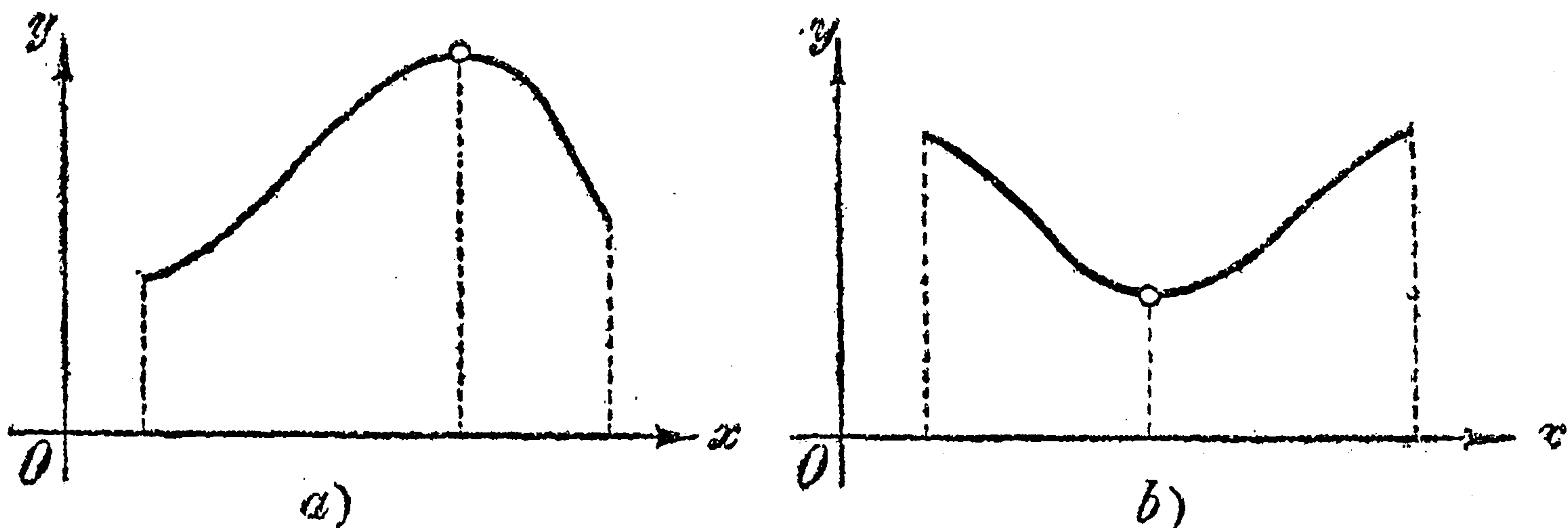


чает на одном из концов; вычисляя значения  $f(+1)=1$  и  $f(-1)=6$ , сразу видим, что искомое наименьшее значение достигается на правом конце промежутка и равно 1.

Если бы, найдя корень  $x=-0,4$  производной

$$f'(x) = 5 \frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

(и, разумеется, отбрасывая тот корень, который не содержится между  $-1$  и  $1$ !), мы затруднились установить, действительно ли функция  $f(x)$  при этом значении  $x$  имеет максимум или минимум, можно было бы и не производить исследования по правилам 79 или 80, а лишь сравнить между собой значения  $f(-0,4)=7$ ,  $f(+1)=1$ ,  $f(-1)=6$ . Ведь наибольшее или наименьшее значения могут достигаться функцией либо на концах промежутка  $x=\pm 1$ , либо внутри промежутка — в той точке  $x=-0,4$ , где производная  $f'(x)$  обратилась в 0. Сопоставление чисел



Черт. 110.

7, 1 и 6 сразу показывает, что наибольшим будет значение  $f(-0,4)=7$ , а наименьшим  $f(+1)=1$ . Заметим однако, что часто оказывается более простым произвести исследование на максимум и минимум, чем вычислять и сравнивать частные значения функции (особенно, если в состав ее выражения входят буквенные постоянные).

Покажем, на примерах же, как поступать в более сложных случаях.

Если ищется наибольшее и наименьшее значение функции  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$  [см. 78, черт. 105] в промежутке  $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ , то два максимума, равных 1 (при  $x=0$  и  $\frac{\pi}{2}$ ), больше значений  $f(-\frac{\pi}{4})=0$  и  $f(\frac{3\pi}{4})=0$ , принимаемых функцией на концах промежутка, следовательно, 1 и будет наибольшим значением нашей функции в указанном промежутке. Минимум, равный (приблизительно) 0,7, оказывается большим, чем значения, принимаемые функцией по концам и равные, как мы видели, нулю. Поэтому наименьшим значением будет 0. В промежутке  $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$  положение вещей было бы обратным: наименьшее значение ( $=-1$ ) совпадает с одним из минимумов (при  $x=\pi$  или  $\frac{3\pi}{2}$ ), а наибольшее ( $=0$ ) достигается на концах. Наконец, если бы нас интересовал промежуток  $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2})$ , то в качестве наибольшего значения пришлось бы взять больший из двух максимумов 1



и (приблизительно)  $-0,7$ , достигаемых при  $x = \frac{\pi}{2}$  и  $\frac{5\pi}{4}$ , ибо на концах принимаются значения  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,7$  и  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ , меньшие, чем 1. Наименьшее значение  $-1$  достигается на правом конце и, в то же время, при  $x = \pi$ , совпадая с минимумом.

И здесь, конечно, можно было бы избежать исследования корней производной  $f'(x) = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x)$  на максимум и минимум. Если только вычислены значения функции, соответствующие этим корням:

$$f(0) = f(2\pi) = 1; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; f(\pi) = -1;$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0,7; f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1,$$

то для каждого из указанных промежутков

$$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

вопрос о наибольшем и наименьшем значении функции решается простым сопоставлением *конечных* значений функции (т. е. значений, принимаемых ею на концах промежутка) с написанными выше значениями. Напр., для промежутка  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$  сопоставляем значения  $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ,  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$  с значениями  $f(0) = 1$ ,  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,7$ ,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ , а для промежутка  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$  сравниваем числа  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,7$ ,  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$  и  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ,  $f(\pi) = -1$ ,  $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -0,7$ . При этом мы, конечно, ограничиваемся лишь теми из вычисленных выше значений, которые соответствуют корням производной, содержащимся *внутри* рассматриваемого промежутка.

**84. Примеры и задачи.** 1. Для упражнения предлагаем читателю найти наибольшее и наименьшее значения функций, указанных в примерах 79 в следующих промежутках (соответственно): 1.  $(-4, 5)$  (Отв. Наим.  $-15$ , наиб.  $66$ ); 2.  $(1, 10)$  (Отв. Наим.  $-15$ , наиб.  $145$ ); 3.  $(-1, 3)$  (Отв. Наим.  $0$ , наиб.  $25$ ); 4.  $(-3, 2)$  (Отв. Наим.  $-27$ , наиб.  $5$ ); 5.  $(-3, 1)$  (Отв. Наим.  $0,5$ , наиб.  $12,5$  — прибл.); 6.  $(0, 3)$  (Отв. Наим.  $0$ , наиб.  $2,5$ ); 7.  $(0, 2)$  (Отв. Наим.  $-1$ , наиб.  $0,2$ ); 8.  $(0, \pi)$  (Отв. Наим.  $-1$ , наиб.  $\sqrt{2} \doteq 1,4$ ); 9.  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$  (Отв. Наим.  $-0,75$ , наиб.  $0,25$ ).

2. Пусть требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2 + x - 2}$$

[79, 10] в промежутке  $(0, 3)$ . Если бы читатель, сравнив максимум  $f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{16}{9}$  минимум  $f(2) = 0$  и конечные значения  $f(0) = -2$ ,  $f(3) = \frac{1}{10}$ , заключил, что наи-

меньшее значение будет  $-2$ , а наибольшее  $\frac{1}{10}$ , то он получил бы *неверный* результат! На деле функция не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значения, так как вблизи  $x = 1$  (обращающего знаменатель в нуль) она может достигнуть сколь угодно больших по абсолютной величине, как положительных, так и отрицательных значений. Рассматриваемая функция при  $x = 1$  обращается в бесконечность, и ее график *разрывается*; между тем наши рассуждения все время, хотя и молчаливо, предполагали *непрерывную* функцию, т. е. функцию с непрерывным графиком.



3. В задаче 19, 31, были приведены уравнения изогнутой оси равномерно нагруженной балки (при различных условиях ее закрепления), которые теперь перепишем в виде:

$$1) y = \frac{Q}{24EI \cdot l} (x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2); \quad 2) y = \frac{Q}{24EI \cdot l} (x^4 - 2lx^3 + l^3x);$$

$$3) y = \frac{Q}{48EI \cdot l} (2x^4 - 3lx^3 + l^3x); \quad 4) y = \frac{Q}{24EI \cdot l} (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2).$$

Требуется определить наибольший прогиб  $f$  во всех случаях (помня что  $x$  изменяется в промежутке от 0 до  $l$ ).

В случае 1) имеем:

$$y' = \frac{Q}{24EI \cdot l} (4x^3 - 12lx^2 + 12l^2x) = \frac{Q}{6EI \cdot l} \cdot x \cdot (x^2 - 3lx + 3l^2)$$

Так как множитель в скобках (вещественных) корней не имеет, то единственным корнем производной  $y'$  будет  $x=0$ , но этот корень совпадает с концом рассматриваемого промежутка и для нас интереса не представляет. Функция не имеет ни максимума, ни минимума; она все время возрастает, достигая наибольшего значения при  $x=l$ :

$$f = \frac{1}{8} \frac{Ql^3}{EI} = 0,125 \frac{Ql^3}{EI}.$$

В случае 2),

$$y' = \frac{Q}{24EI \cdot l} (4x^3 - 6lx^2 + l^3) = \frac{Q}{24EI \cdot l} (2x-l)(2x^2 - 2lx - l^2).$$

Приравнявая нулю каждый из множителей в скобках порознь, получим корни производной:

$$x_1 = \frac{l}{2}, \quad x_2 = l \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = l \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{2};$$

из них нам нужен лишь первый, так как другие два корня лежат вне рассматриваемого промежутка:  $x_2 < 0$ ,  $x_3 > l$ . При  $x = \frac{l}{2}$  произведение первого и третьего множителей отрицательно, второй же множитель при прохождении  $x$  через  $\frac{l}{2}$  меняет знак  $(-)$  на  $(+)$ , так что вся производная меняет знак  $(+)$  на  $(-)$  и функция при  $x = \frac{l}{2}$  имеет максимум, совпадающий с ее наибольшим значением:

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{Ql^3}{EI} = 0,013 \frac{Ql^3}{EI}.$$

Проще было бы убедиться в том, что функция  $y$  достигает при  $x = \frac{l}{2}$  наибольшего значения, сравнивая это значение с значениями, принимаемыми ею на концах (равными нулю)!

В случае 3),

$$y' = \frac{Q}{48EI \cdot l} (8x^3 - 9lx^2 + l^3) = \frac{Q}{48EI \cdot l} (x-l)(8x^2 - lx - l^2),$$

и из корней

$$x_1 = l, \quad x_2 = l \cdot \frac{1 + \sqrt{33}}{16} = 0,4215l, \quad x_3 = l \cdot \frac{1 - \sqrt{33}}{16} < 0$$



годится лишь второй, доставляющий функции наибольшее значение

$$f = 0,0054 \frac{Ql^3}{EI}.$$

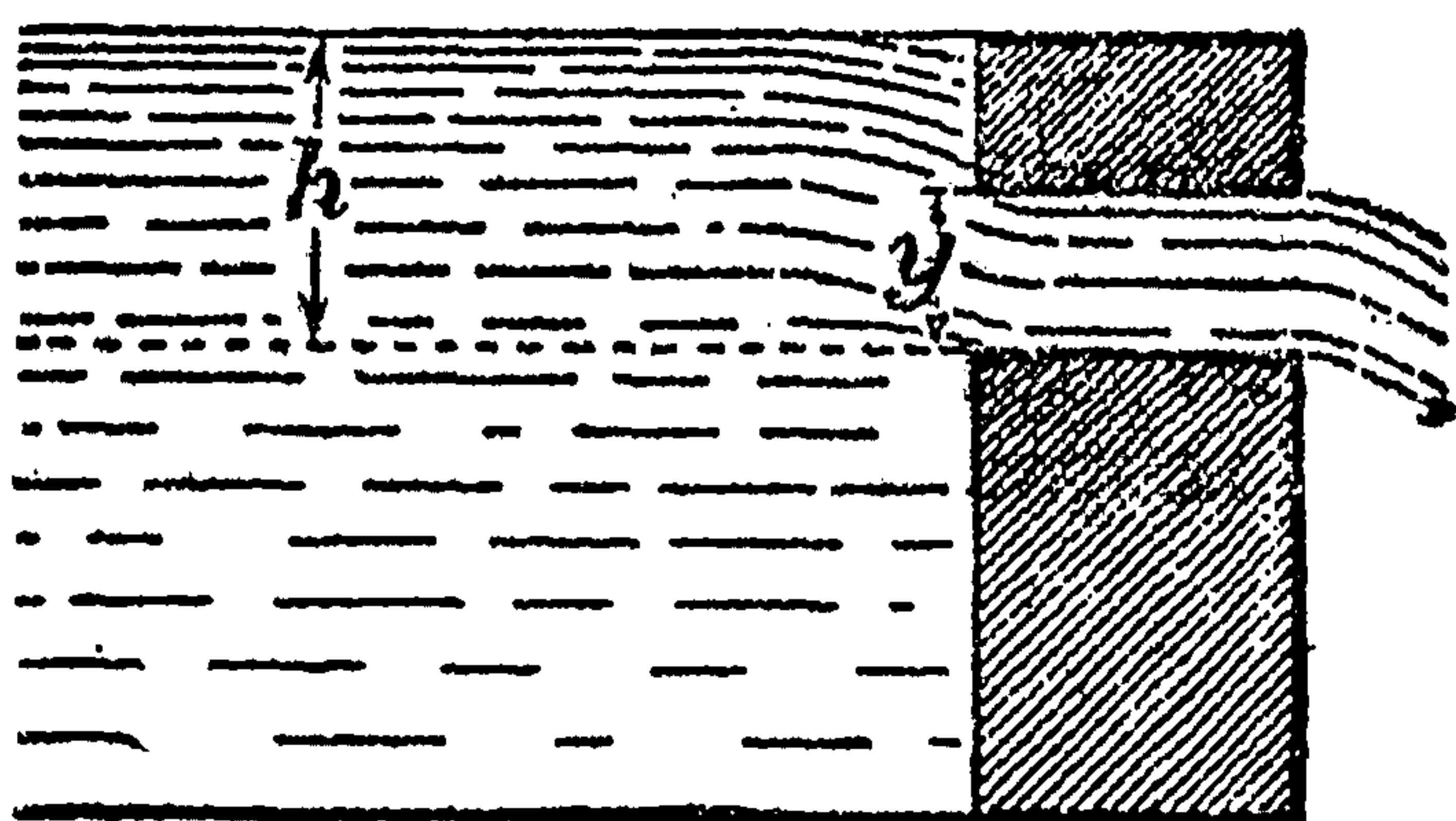
Наконец, в случае 4)

$$y' = -\frac{Q}{12EI} x(2x-l)(x-l)$$

и при  $x = \frac{l}{2}$  получается наибольший прогиб

$$f = \frac{1}{384} \frac{Ql^3}{EI} \doteq 0,0026 \frac{Ql^3}{EI}.$$

Сравнить все эти результаты с графиками, построенными в зад. 19, 31. И по графикам можно было бы приближенно установить наибольший прогиб, но аналитический метод привел к цели проще и дает более точный результат.\*



Черт. 111.

Заметим, что постоянные множители в выражениях 1) — 4), разумеется, влияют на величину самого наибольшего значения, но не оказывают никакого влияния на то значение независимой переменной  $x$ , при котором достигается это наибольшее значение функции. Поэтому при установлении места наибольшего прогиба можно было бы и отбросить упомянутые множители; их нужно иметь в виду лишь при вычислении самой стрелы прогиба.

4. При истечении воды через отверстие в толстой стене (черт. 111) секундный расход воды определяется по формуле

$$Q = cy\sqrt{h-y},$$

где  $y$  есть диаметр отверстия,  $h$  — глубина его нижней точки,  $c$  — некоторая постоянная. При каком  $y$  для  $Q$  получается наибольшее значение?

Очевидно, что  $Q$  получает наибольшее значение *одновременно* с  $Q^2$ , т. е. при том же значении  $y$ . Отбрасывая еще постоянный множитель, окончательно сведем дело к исследованию выражения:

$$f(y) = y^2(h-y).$$

Имеем:  $f'(y) = 2hy - 3y^2 = y(2h - 3y)$ , корни:  $y = 0$ ,  $y = \frac{2h}{3}$ . Так как, при данном  $h$ ,  $y$  может изменяться от 0 до  $h$ , то нужен нам лишь второй корень, который и доставляет функции наибольшее значение, в чем сразу убеждаемся, сравнивая  $f\left(\frac{2h}{3}\right) > 0$  с  $f(0) = f(h) = 0$ .

5. Мы видели уже [70, прим. 2], что сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит, ось которого совпадает с осью круга, выражается формулой

$$F = \frac{cx}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

где  $a$  — радиус круга,  $x$  — расстояние от центра круга до магнита, а  $c$  — постоянная. При каком  $x$  величина  $F$  будет наибольшей?

\* Однако возможны случаи, когда производная рассматриваемой функции настолько сложна, что проще наибольшее (или наименьшее) значение функции установить по ее графику, даже если его приходится специально строить для этой цели.



Имеем (отбрасывая постоянную).

$$f(x) = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad f'(x) = \frac{a^2 - 4x^2}{(a^2 + x^2)^{\frac{7}{2}}},$$

корень производной  $x = \frac{a}{2}$  (мы ограничиваемся положительными значениями  $x$ ),

При прохождении  $x$  через этот корень производная меняет знак (+) на (-), так что здесь и достигается максимум, а следовательно (так как он единственный!) — и наибольшее значение.

6. Рассмотрим истечение газа (или пара) из резервуара, где он находится под давлением  $p_1$ , через сопло (трубу) в среду с давлением  $p_2$  ( $p_2 < p_1$ ). При установившемся непрерывном движении пара правильной струей, каждому сечению отвечает определенное давление  $p$ , которое постепенно падает от  $p_1$  до  $p_2$ . Если предположить, что процесс происходит адиабатически, т. е. без теплового обмена с окружающей средой, то сечение  $s$  сопла, в котором давление газа есть  $p$ , представляется формулой:

$$s = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}}}}. \quad (k \text{ и } c = \text{пост.})$$

Выяснить, где приходится наименьшее сечение сопла (точнее — какому давлению  $p$  оно соответствует).

Прежде всего заметим, что дробь с постоянным числителем достигает наименьшего значения тогда, когда знаменатель получает наибольшее значение; кроме того, корень будет наибольшим одновременно с подкоренным выражением. Таким образом, вопрос приводится к установлению наибольшего значения для выражения

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}},$$

где  $p$  изменяется от  $p_2$  до  $p_1$ . Удобнее положить  $\frac{p}{p_1} = x$  и рассмотреть функцию

$$f(x) = x^{\frac{2}{k}} - x^{\frac{k+1}{k}},$$

изменяя  $x$  между 0 и 1. Полагая  $f'(x) = 0$ , будем иметь:

$$\frac{2}{k} x^{\frac{2}{k} - 1} - \frac{k+1}{k} x^{\frac{1}{k}} = 0, \quad \text{откуда: } x = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

это значение, очевидно, доставляет  $f(x)$  наибольшее значение, ибо  $f(0) = f(1) = 0$

Найденное отношение  $x = \frac{p}{p_1}$  называется *критическим отношением давлений*,

обозначим его через  $x_{кр.}$  и положим  $p_{кр.} = x_{кр.} \cdot p_1$ .\*

Возвращаясь к рассмотренной выше функции от  $p$ , мы различим два случая. Если  $p_2 \geq p_{кр.}$ , то, при уменьшении  $p$  от  $p_1$  до  $p_2$ , сечение  $s$  будет убывать и дойдет до наименьшего значения лишь в конце сопла. Если же  $p_2 < p_{кр.}$ , то  $s$

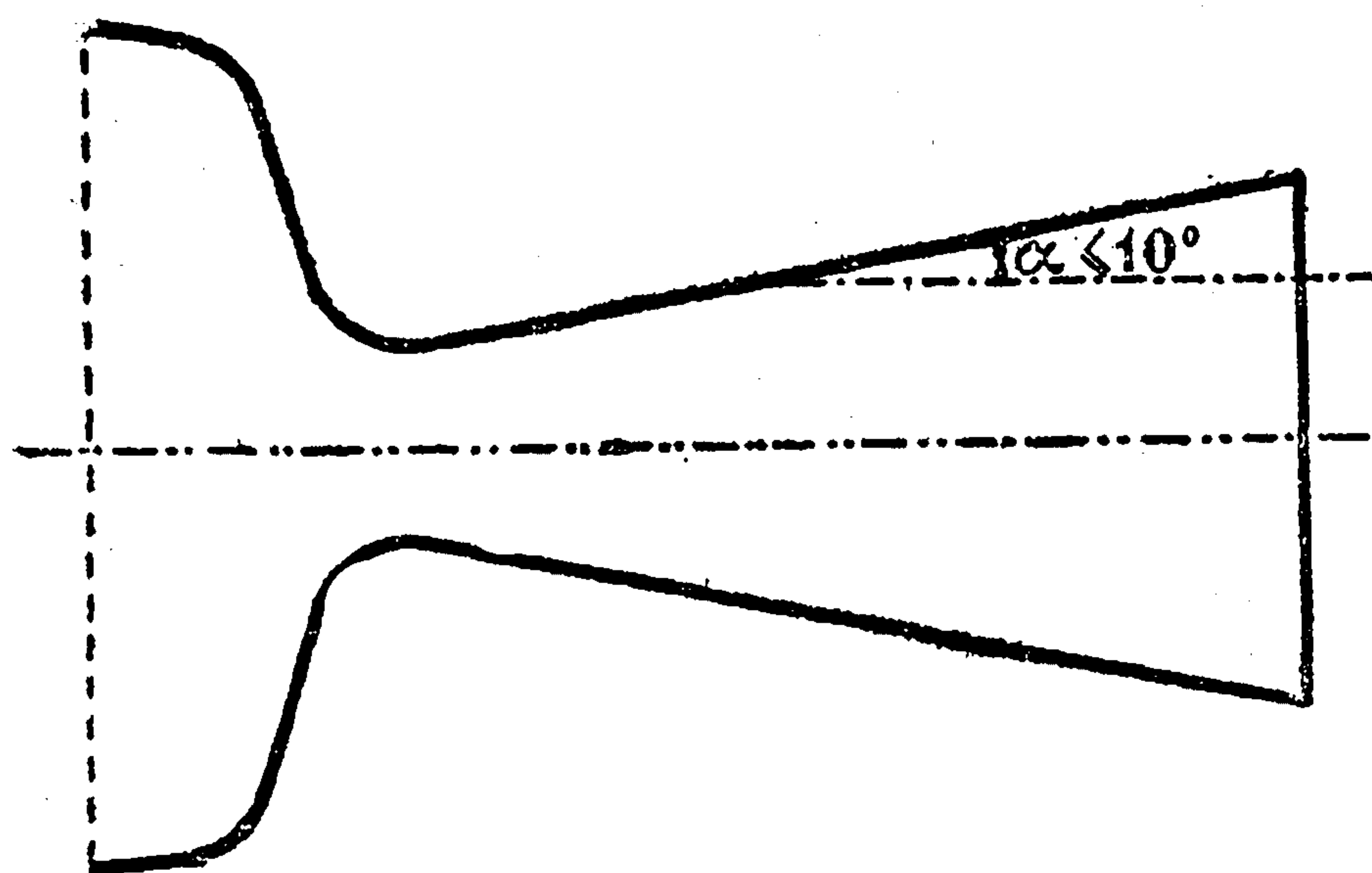
\* Напр., для двухатомных газов  $k = 1,4$  и  $x_{кр.} = 0,528$ , для перегретого водяного пара, при  $k = 1,3$ ,  $x_{кр.} = 0,548$  и т. д.



сначала будет убывать и дойдет до наименьшего значения, когда  $p$  будет равно  $p_{кр.}$ , а затем начнет возрастать (примерная форма сопла для этого случая дана на черт. 112).

Заметим, что при  $p = p_{кр.}$  т. е. в начале сопла, теоретически получается бесконечно большое сечение; практически оно сводится к сечению резервуара. Затем, в формулу для  $s$  не входит расстояние рассматриваемого сечения от начала сопла. Практически сходящуюся часть сопла (для уменьшения влияния трения) делают возможно короче, а расходящуюся часть настолько длинной, чтобы угол расхождения не превышал  $10^\circ$ .

Для удобства сделаем сводку упрощений, которыми мы пользовались при определении наибольшего (наименьшего) значения функции. Как мы знаем, сначала ищется то значение независимой переменной  $x$ , которое доставляет исследуемой функции  $f(x)$  наибольшее (наименьшее) значение; при этом именно и можно заменять — в целях упрощения — функцию  $f(x)$  другой функцией, если ясно, что последняя получает наибольшее (наименьшее) значение одновременно с первой (т. е. для того же значения  $x$ ). Так, мы уже упоминали о праве *отбросить положительный постоянный множитель* (в случае же отрицательного



Черт. 112.

множителя пришлось бы лишь, вместо наибольшего, искать наименьшее значение, и наоборот). Точно также можно *отбросить постоянное слагаемое*. Далее, мы уже прибегали — в случае положительной функции — к *рассмотрению ее квадрата*, чтобы освободиться от радикалов. Наконец, упомянем еще об одном приеме, которым мы воспользовались в последнем примере: вместо положительной функции  $f(x)$  можно подвергнуть исследованию

обратную величину  $\frac{1}{f(x)}$ , лишь заменив разыскание наибольшего (наименьшего) значения для  $f(x)$  разысканием наименьшего (наибольшего)

значения для  $\frac{1}{f(x)}$ . Эти замечания следует иметь в виду и ниже.

**85. Дальнейшие задачи.** Уже из приведенных примеров читатель видит, что в различных вопросах науки и техники приходится сталкиваться с необходимостью найти наибольшее (или наименьшее) значение функции в данном промежутке, или определить, при каком значении независимой переменной оно достигается. В последующем читатель найдет ряд подобных же задач, в которых, однако, уже ему самому будет предложено, опираясь на сведения из элементарной математики, физики и механики (или на другие сведения, которые ему тут же будут сообщены), составить ту функцию, к нахождению наибольшего (или наименьшего) значения которой приволится задача.

1. Показать, что мощность тока, получаемого от гальванического элемента во внешней цепи, будет наибольшей, когда сопротивление  $R$  внешней цепи равно внутреннему сопротивлению  $r$  самого элемента.

*Решение.* Обозначим через  $E$  электродвижущую силу элемента (в вольтах), через  $I$  — силу тока (в амперах). Работа тока во внешней цепи измеряется выделяемым там в единицу времени теплом, для которого закон Джоуля и Ленца дает выражение  $RI^2$  (джоулей), но, по закону Ома,  $I = \frac{E}{R+r}$ ; подставляя, получим, что мощность тока равна  $\frac{RE^2}{(R+r)^2}$  (ватт); эту функцию заменяем последовательно [см. 84] через  $\frac{R}{(R+r)^2}$ ,  $\frac{(R+r)^2}{R} = \frac{r^2}{R} + 2r + R$ , наконец, через функцию  $\frac{r^2}{R} + R$ , для которой *наименьшее* значение получится при  $R = r$ . \*

\* Интересно сопоставить этот общий результат, столь просто полученный аналитически, с графическим решением аналогичной частной задачи [31, зад. 21].



*Замечание.* Так как во многих случаях приходится сталкиваться с величинами, состоящими из двух частей, из которых одна пропорциональна независимой переменной  $x$ , а другая — обратно пропорциональна ей, т. е. с функциями вида

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}$$

(при  $a, b, x > 0$ ), то полезно запомнить, что такая функция достигает наименьшего значения при  $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$  или, иными словами, когда обе ее составные части равны между собой:  $ax = \frac{b}{x}$ . Действительно,  $f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$  обращается в нуль при  $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ , а  $f''(x) = \frac{2b}{x^3} > 0$ , так что в указанной точке имеет место (единственный) минимум и, следовательно, достигается наименьшее значение.

2. Известно, что стоимость плавания судна в течение часа выражается в рублях эмпирической формулой вида  $a + bv^3$ , где  $a$  и  $b$  — постоянные, которые должны быть установлены отдельно для каждого судна, а  $v$  — скорость судна в узлах (узел = 1,85 км/час); в этой формуле постоянная часть расхода  $a$  относится к амортизации и к содержанию команды, а второй член  $bv^3$  — к стоимости топлива. При какой скорости судно покроем любое требуемое расстояние с наименьшими затратами?

На покрытие 1 км потребуется  $\frac{1}{1,85v}$  часа, соответствующие затраты выражаются формулой

$$\frac{1}{1,85v} (a + bv^3) = \frac{1}{1,85} \left( bv^3 + \frac{a}{v} \right).$$

Приравнивая нулю производную выражения в скобках

$$2bv - \frac{a}{v^2} = 0,$$

найдем:

$$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2b}}.$$

Так как вторая производная

$$2b + 2\frac{a}{v^3}$$

положительна, то при найденном значении  $v$  затраты действительно достигают наименьшей величины.

*Численный пример:*  $a = 40$ ,  $b = 0,01$ ,  $v = \sqrt[3]{2000} = 12,6$  (узлов).\*

3. К прямолинейной водопроводной магистрали  $AC$  (черт. 113) необходимо сделать ответвление  $PO$ , для питания водой пункта  $O$ , отстоящего на расстоянии  $OB = a$  от магистрали. Зная, что стоимости единицы длины водопровода по магистрали в части  $AP$  и  $PC$  и по ветке  $PO$  соответственно равны  $k$ ,  $k_1$  и  $k_2$  рублей, определить невыгоднейшее положение узловой точки  $P$ .

При обозначениях чертежа, расходы на сооружение магистрали с ответвлением выразятся так:

$$f(x) = kx + k_1(l - x) + k_2 \sqrt{(d - x)^2 + a^2}$$

Имеем:

$$f'(x) = (k - k_1) - k_2 \cdot \frac{d - x}{\sqrt{a^2 + (d - x)^2}};$$

\* Ср. 31, зад. 30.



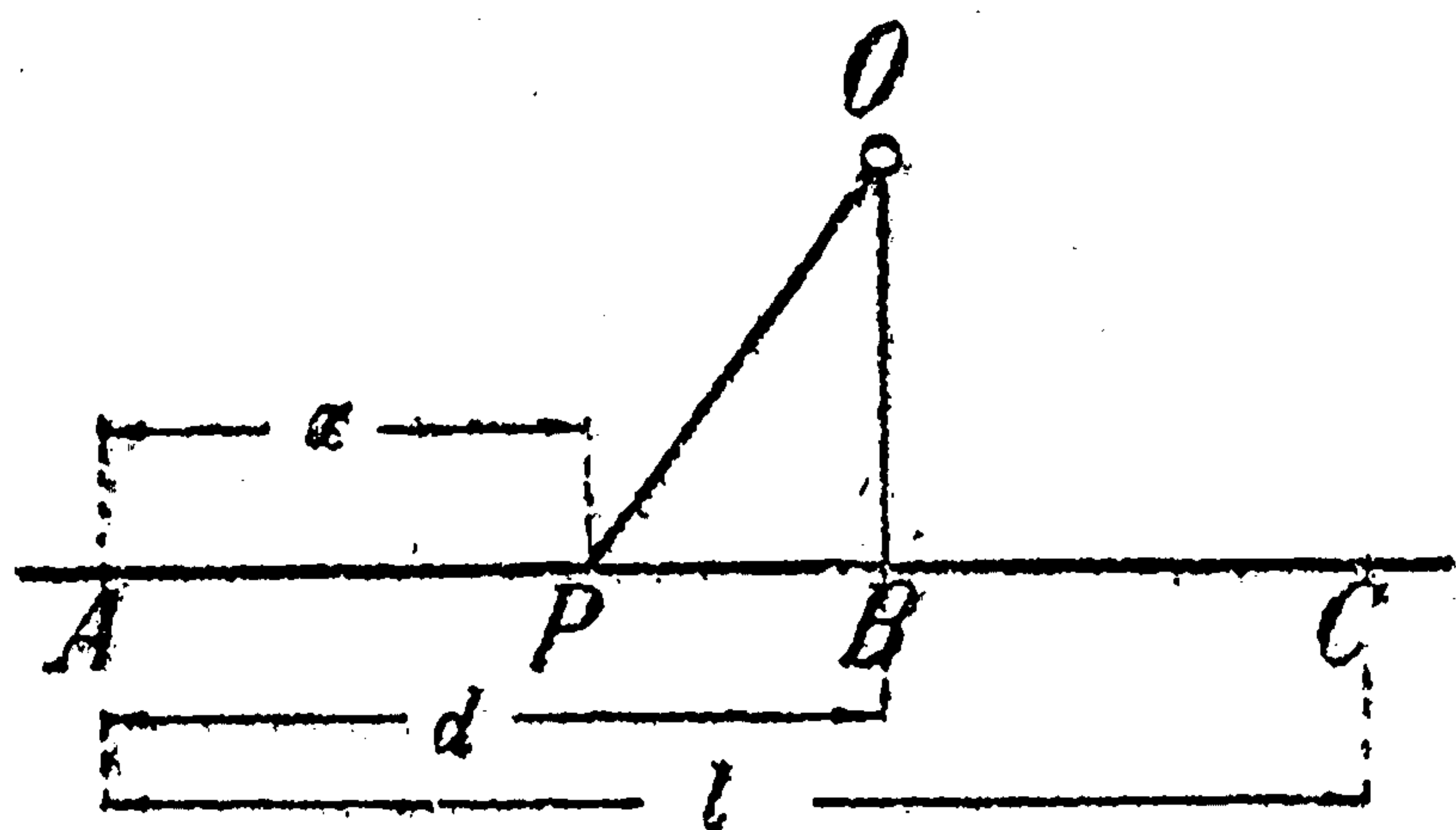
значение  $x$ , обращающее  $f'(x)$  в нуль, найдется из квадратного уравнения. Если оно  $> 0$ , то доставляет  $f(x)$  наименьшее значение, ибо  $f''(x) > 0$ ; в противном случае, наименьшее значение достигается при  $x = 0$ , т. е. выгоднее непосредственно соединить  $A$  с  $O$ .

Другое истолкование той же задачи:

3а). Точку  $O$  нужно соединить веткой  $OP$  с железнодорожной линией  $AC$ . Известна стоимость перевозки груза (с т  $\times$  км) по главной линии ( $= h$ ) и по ветке ( $= h'$ ) и годовые расходы по содержанию ветки с км ее длины ( $= T$ ), и предполагается, что годовое грузовое движение по линии  $OA$  и обратно составляет  $\alpha$  тонн, а по линии  $CO$  и обратно —  $\beta$  тонн. Требуется определить невыгоднейшее положение узла  $P$ .

Указание. Задача приводится к той же функции, что и задача 3, если положить  $k = \alpha h$ ,  $k_1 = \beta h$ ,  $k_2 = T + (\alpha + \beta) h'$ .

Численный пример:  $\alpha = 150\,000$  т,  $\beta = 30\,000$  т,  $h = h' = 0,003$  руб.,  $T = 1500$  руб. Для определения направления  $OP$  вычислим угол  $\varphi$  его с  $OB$ :



Черт. 113.

$$\sin \varphi = \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + a^2}} = \frac{k - k_1}{k_2}$$

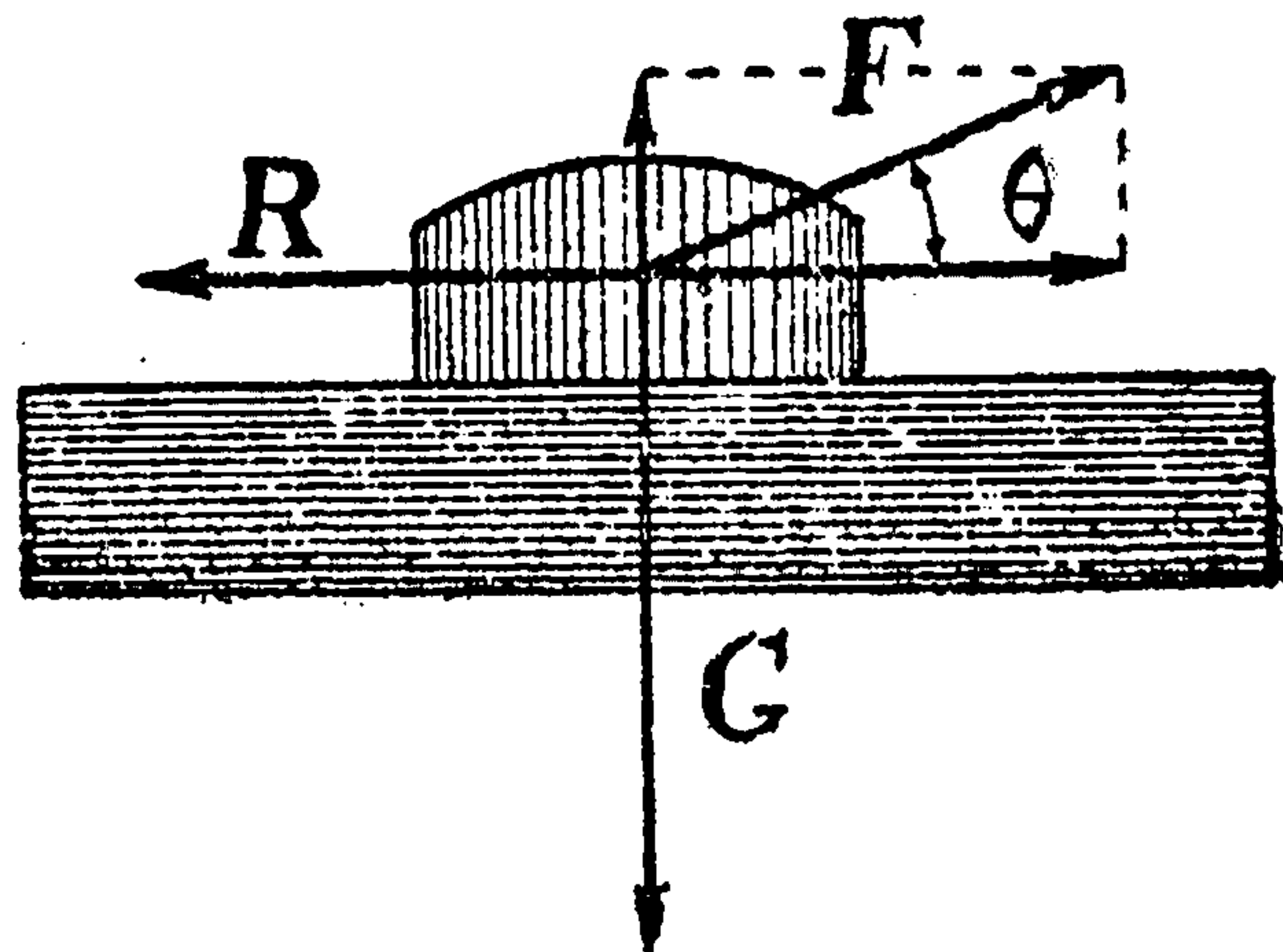
$$= \frac{(\alpha - \beta) h}{T + (\alpha + \beta) h'} = \frac{120\,000 \cdot 0,003}{1500 + 180\,000 \cdot 0,003} = 0,1765,$$

так что  $\varphi = 10^\circ 10'$ .

4. Груз веса  $G$ , лежащий на горизонтальной плоскости, должен быть сдвинут приложенной к нему силой  $F$  (черт. 114). Под каким углом  $\theta$  к горизонту, при наличии трения, надлежит приложить эту силу, чтобы величина ее была наименьшей? Коэффициент трения  $\mu$  дан.

Трение считается пропорциональным силе, прижимающей тело к плоскости (закон Кулона), и направлено против движения. Множитель пропорциональности  $\mu$  и есть „коэффициент трения“.\*

Определим силу  $F$ , которая соответствует данному углу  $\theta$ . Разлагая эту силу по вертикальному и горизонтальному направлениям, получим для величин составляющих  $F \sin \theta$  и  $F \cos \theta$ . Сила, прижимающая тело к плоскости, будет  $G - F \sin \theta$ , так что, по закону Кулона, трение  $R = \mu (G - F \sin \theta)$ ; горизонтальная составляющая  $F \cos \theta$  тянущей силы  $F$  как раз и должна уравновешивать это трение:



Черт. 114.

$$F \cos \theta = \mu (G - F \sin \theta),$$

откуда

$$F = \frac{\mu G}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \left( 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

\* Следует различать коэффициенты трения для покоя и для движения, из которых второй меньше первого. В тексте имеется в виду первый. Если поставить задачу, напр., так: под каким углом  $\theta$  к горизонту должны быть запряжены оглобли катка, чтобы тяга  $F$  лошади при работе катка по пашне была наименьшей, то, очевидно, пришлось бы считаться со вторым коэффициентом трения.



Вместо того чтобы исследовать это выражение, можно взять функцию  $f(\theta) = \cos \theta + \mu \sin \theta$ . Очевидно,  $f'(\theta) = \mu \cos \theta - \sin \theta = 0$ , если  $\operatorname{tg} \theta = \mu$  или  $\theta = \operatorname{arctg} \mu$ ; так как  $f''(\theta) = -\mu \sin \theta - \cos \theta < 0$ , то при этом значении  $\theta$  функция  $f(\theta)$  имеет наибольшую величину, следовательно сила  $F$  — наименьшую. Угол  $\varphi = \operatorname{arctg} \mu$  называется *углом трения*. Итак, выгоднее прилагать силу  $F$  под углом трения. Напр., если нужно сдвинуть камень по деревянному настилу, то можно принять  $\mu = 0,4$ , или  $\varphi = 22^\circ$ .

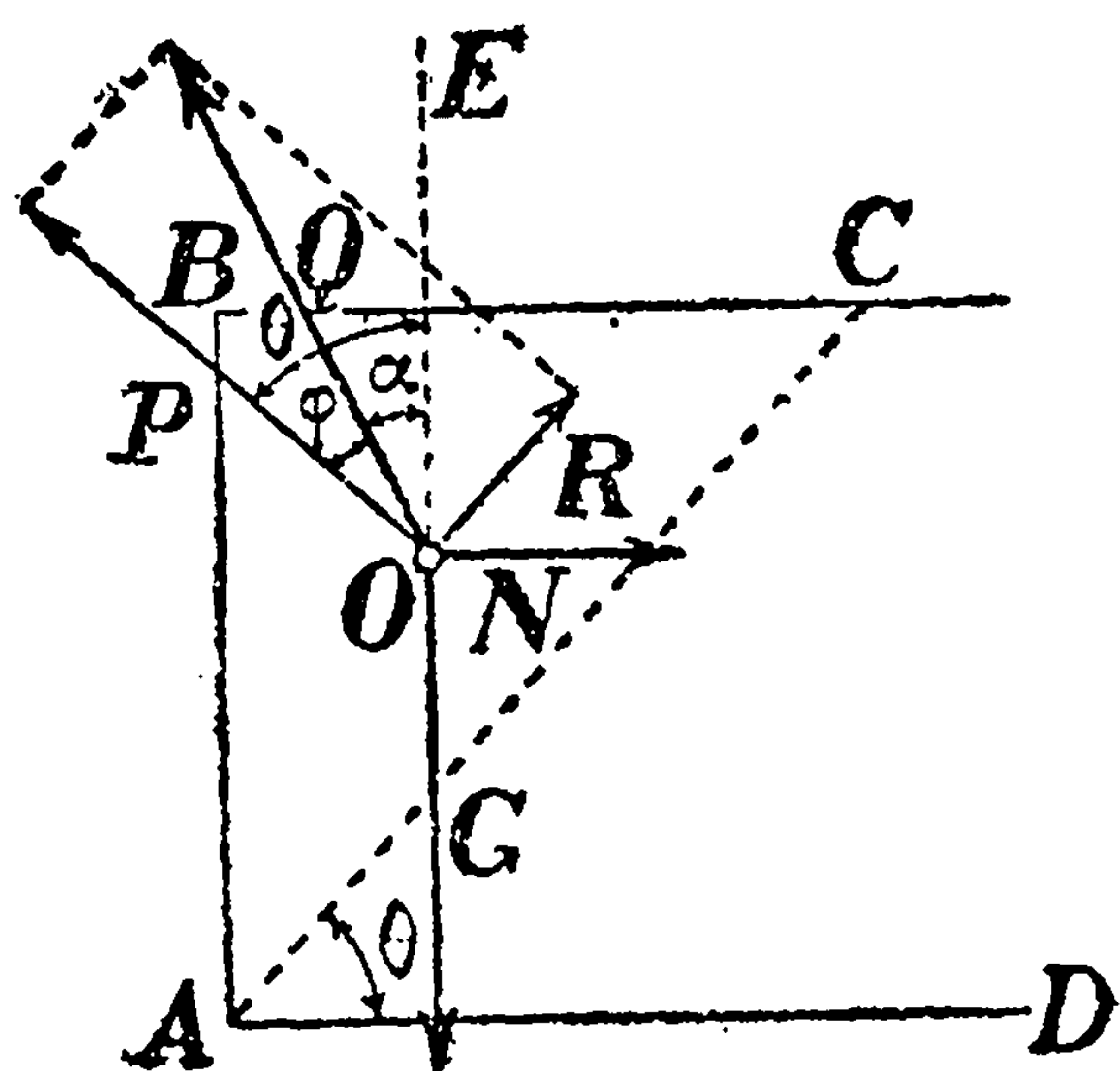
Если в выражении для  $F$  положить  $\theta = \varphi$  и вспомнить, что  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ , то легко получим, что наименьшее значение для  $F$  равно  $G \sin \varphi$ , т. е. в нашем примере, приблизительно,  $0,37 G$ .

Если, вместо тянущей силы, прилагать толкающую силу, то направление трения изменится, и выражение для  $F$  заменится следующим:

$$F = \frac{\mu G}{\cos \theta - \mu \sin \theta}$$

Оно получает наименьшую величину  $\mu G$  при  $\theta = 0$ .

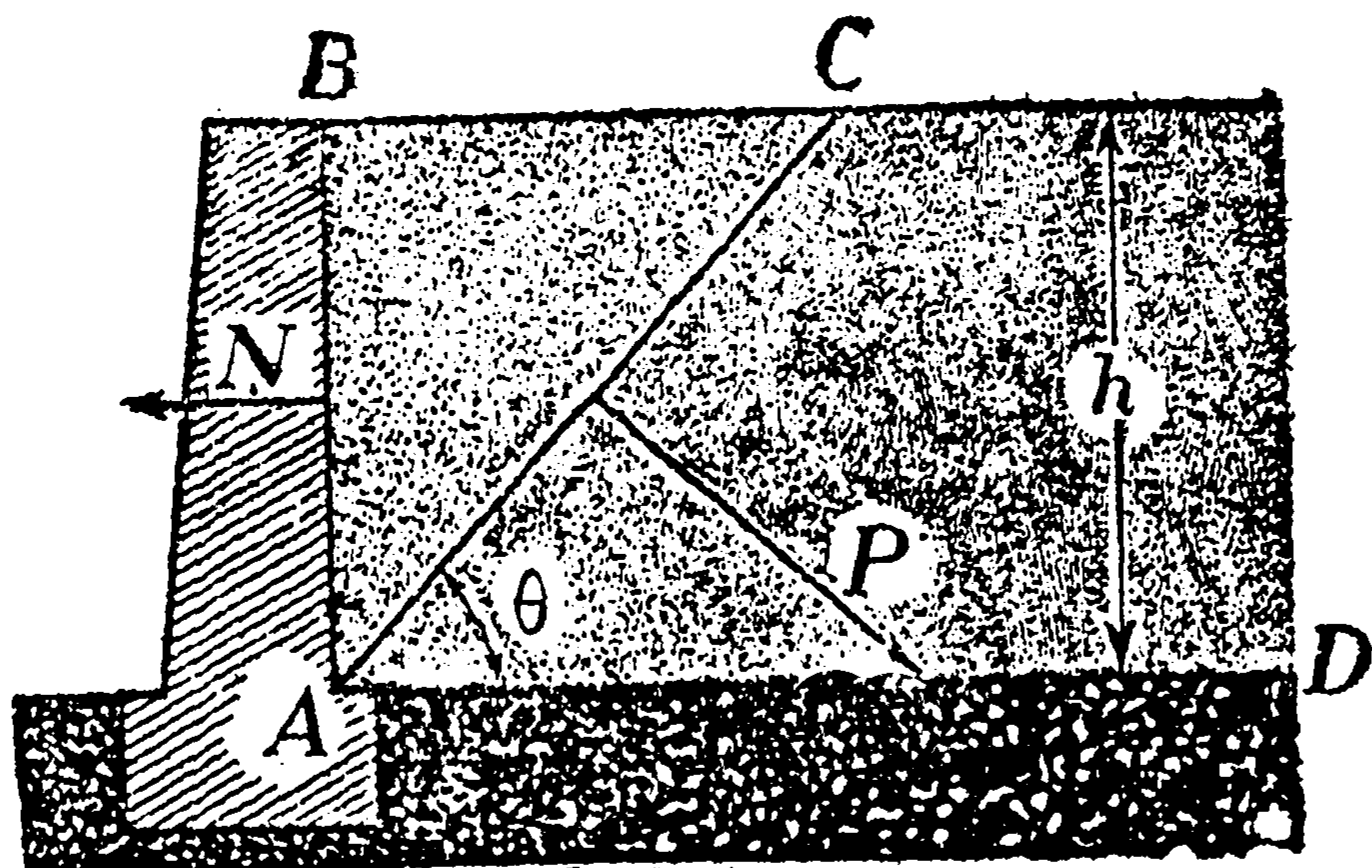
5. Рассмотрим, наконец, важный в строительной механике вопрос о давлении грунта на подпорную стенку. Вертикальная подпорная стенка длиной в 1 м и высотой  $h$  м засыпана сзади грунтом доверху, причем сверху земляная масса ограничена горизонтальной плоскостью (разрез представлен на черт. 115). Что произойдет, если стенка сдвинется влево на бесконечно малое расстояние? Мы допустим (в этом состоит гипотеза Кулона), что тогда начнется скольжение по некоторой отдельной плоскости, называемой *плоскостью скольжения* (на черт. AC представляет ее след), под углом  $\theta = \angle CAD$  к горизонту, так что от всей массы земли отделится некоторая призма (призма обрушения, ее сечение —  $\triangle ABC$ ).



Черт. 116.

Эта призма оказывает определенное давление  $N$  на стенку, перпендикулярное к ней, и давление  $P$  на остающуюся неподвижную земляную массу, перпендикулярное к плоскости скольжения. Очевидно, и обратно, со стороны стенки и земляной массы названная призма испытывает такие же давления, но в противоположном направлении. Кроме того, на призму действует ее вес  $G$  и, наконец, сила трения  $R = \mu P$  между призмой и остальной массой земли ( $\mu$  — коэффициент трения земли по земле, сравнить предыдущую задачу; трением грунта по стенке, для простоты, пренебрегаем). Силы  $P$  и  $R$  дают равнодействующую  $Q$  (черт. 116), наклоненную к  $P$  под углом  $\varphi$ , равным „углу трения“ (так как  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{P} = \mu$ ). Если стенка остается неподвижной, то три силы  $G$ ,  $N$  и  $Q$ , действующие на призму обрушения, должны уравновеситься, а для этого, прежде всего, необходимо, чтобы из них можно было составить треугольник. Пусть стороны треугольника, изображенного на черт. 117 по величине и по направлению, представляют эти силы. Так как на черт. 116 угол между силой  $P$  и вертикалью  $OE$  есть  $\theta$ , то  $Q$  составляет с этой вертикалью угол  $\alpha = \theta - \varphi$ , откуда  $N = G \operatorname{tg}(\theta - \varphi)$ . Высота призмы обрушения равна длине стенки, т. е. 1 м; поэтому ее объем выражается (в кубических единицах) тем же числом, что и площадь основания (в квадратных единицах), а последняя равна

$$\frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} h \cdot h \operatorname{ctg} \theta = \frac{h^2}{2} \operatorname{ctg} \theta;$$



Черт. 115.



если  $k$  есть вес 1 м<sup>3</sup> грунта, то  $G = \frac{h^2 k}{2} \operatorname{ctg} \theta$ , так что

$$N = \frac{h^2 k}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\operatorname{tg} \theta}. \quad (1)$$

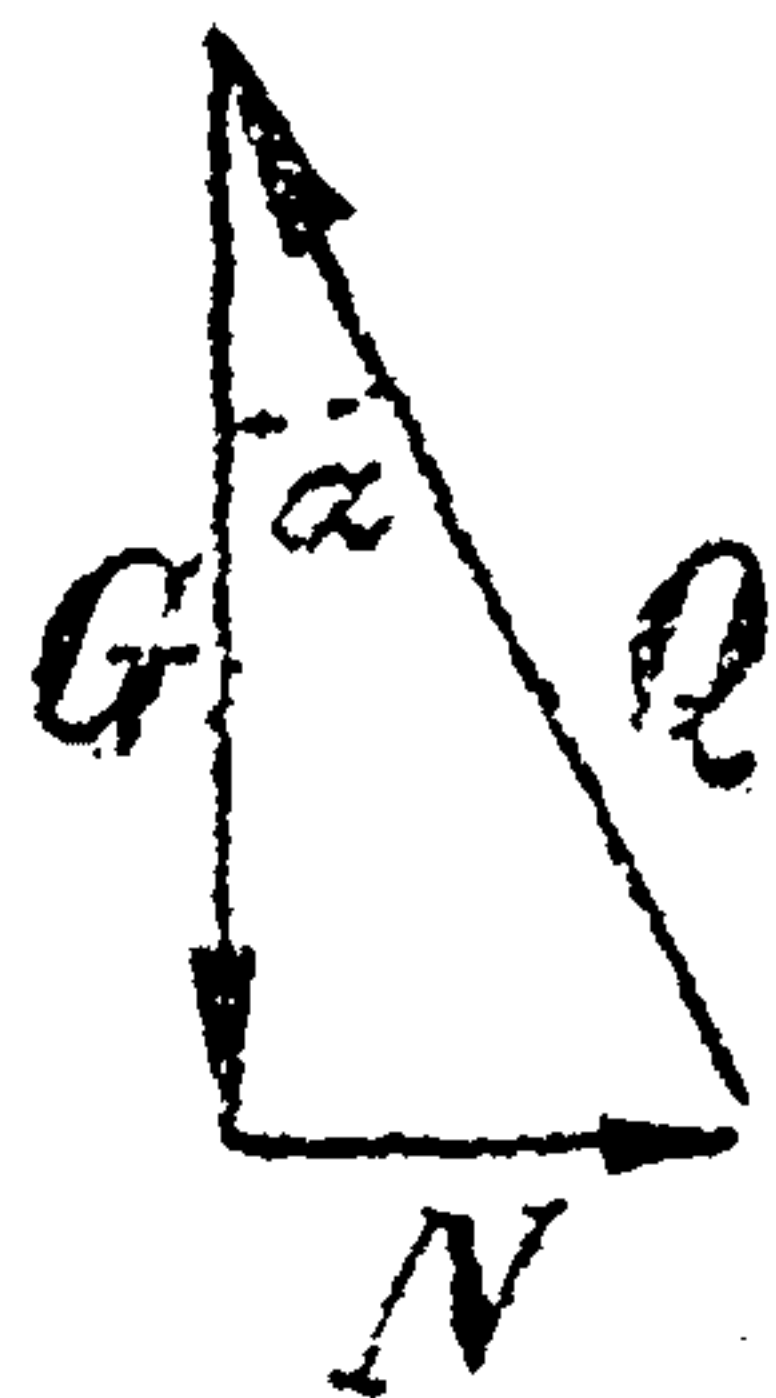
Таково давление, испытываемое стенкой со стороны грунта (земляная масса, которая при сдвиге стенки остается неподвижной, очевидно, не давит на стенку!).

Однако здесь остается неопределенным угол  $\theta$ , ибо мы не знаем, по какой именно плоскости началось бы скольжение, если бы стенка сдвинулась. Естественно, что при расчетах исходят из такой призмы, которая оказала бы *наибольшее* давление. Для разыскания угла  $\theta$ , соответствующего этой призме *наибольшего* давления, применим к функции (1) обычные приемы нахождения наибольшего значения. Приравнявая ее производную нулю, получим:

$$\frac{\frac{\operatorname{tg} \theta}{\cos^2(\theta - \varphi)} - \frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\cos^2 \theta}}{\operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \theta} \cdot \frac{\sin 2\theta - \sin 2(\theta - \varphi)}{\cos^2 \theta \cos^2(\theta - \varphi)} = 0,$$

откуда  $\sin 2\theta = \sin 2(\theta - \varphi)$ . Так как оба угла  $2\theta$ ,  $2(\theta - \varphi)$  лежат в пределах первых двух четвертей, то, в виду равенства их синусов, эти углы либо равны, либо в сумме дают  $\pi$ . Первое предположение привело бы к нелепому выводу, что  $\varphi = 0$ ; остается второе:  $2\theta + 2(\theta - \varphi) = \pi$ , откуда

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}.$$



Черт. 117.

При этом значении  $\theta$ , угол  $2\theta$  лежит во II четверти, а  $2(\theta - \varphi)$  — в I, так что, с возрастанием  $\theta$ ,  $\sin 2\theta$  убывает, а  $\sin 2(\theta - \varphi)$  возрастает; таким образом, разность  $\sin 2\theta - \sin 2(\theta - \varphi)$ , проходя через нуль, убывает, следовательно, переходит от (+) к (-). Поэтому найденное значение  $\theta$ , действительно, доставляет выражению (1) наибольшую величину, равную

$$N_m = \frac{h^2 k}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{h^2 k}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

или, окончательно,

$$N_m = \frac{h^2 k}{2} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Пусть, например,  $h = 3$  м,  $k = 1,5$  тонны,  $\mu = 0,727$  (так что  $\varphi = 36^\circ$ ): тогда

$$N_m = \frac{9 \cdot 1,5}{2} \operatorname{tg}^2 27^\circ = 6,75 \cdot 0,5095^2 = 1,75 \text{ тонны.}$$

(В некоторых случаях, например, для гладких стенок набережных и шлюзных камер, действительно, можно пренебречь трением грунта о стенку; в других — приведенный расчет дает величину давления, немного большую действительной.)

**86. Выбор независимой переменной.** Обыкновенно легко дать себе отчет в том, для какой величины в задаче требуется найти наибольшее (или наименьшее) значение. Эта величина и будет исследуемой функцией. Затем нужно сообразить, от изменения какой величины зависит изменение этой функции, т. е. какую величину взять за независимую переменную. Иногда в этом отношении представляется некоторая свобода выбора, и, разумеется, из всех возможных независимых переменных следует предпочесть ту, че-



рез которую упомянутая функция выражается всего проще. Разъясним это обстоятельство на следующем примере. Пусть электрическая лампочка может передвигаться (например, на блоке) по вертикальной прямой  $OB$  (черт. 118); на каком расстоянии от горизонтальной плоскости  $OA$  ее следует поместить, чтобы в точке  $A$  этой плоскости получить наибольшую освещенность.

Вспоминаем, что освещенность  $J$  зависит от расстояния  $AB=r$  и от угла  $\varphi$ , который составляют лучи с горизонтальной плоскостью, и именно выражается так:

$$J = c \frac{\sin \varphi}{r^2},$$

где  $c$  есть в данном случае постоянная величина (сила света источника  $B$ ).

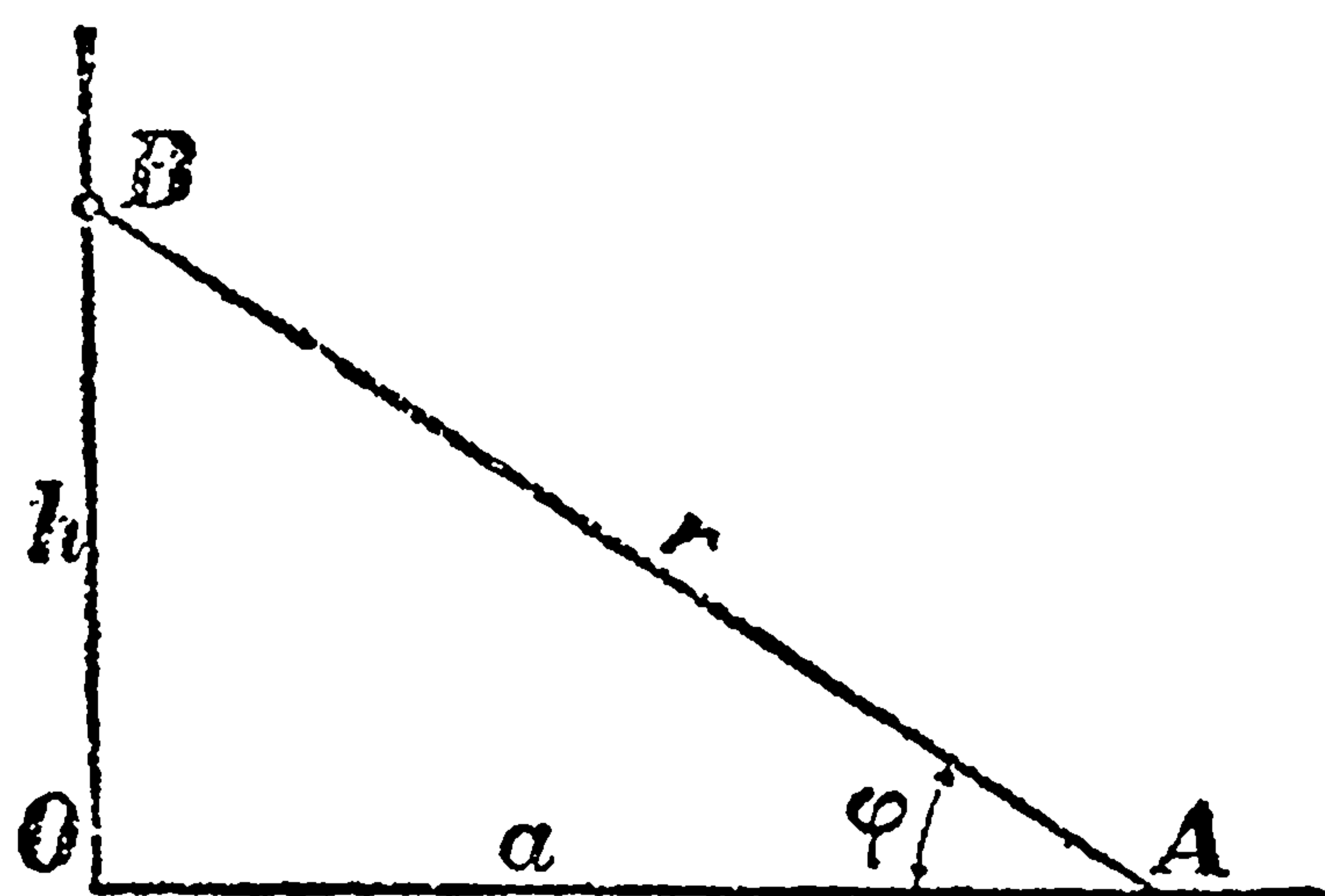
В качестве же независимой переменной, с изменением которой менялось бы положение лампочки, а с ним и освещенность  $J$ , можно выбрать любую из величин  $h=OB$ ,  $r=AB$  и  $\varphi = \angle OAB$ . *Есть смысл* всего выбрать  $h$  (о ней и спрашивается к задаче); начнем с нее и постараемся выразить  $J$  через  $h$ . Из прямоугольного  $\triangle AOB$  имеем

$$r = \sqrt{a^2 + h^2} \quad (\text{где } a = OA) \quad \text{и}$$

$$\sin \varphi = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

так что

$$J = c \frac{h}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}};$$



Черт. 118.

вот подлежащая исследованию функция от  $h$  в промежутке от 0 до  $\infty$ . Отбрасывая постоянный множитель  $c$ , получим для производной по  $h$  выражение

$$\frac{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}} - h \cdot \frac{3}{2} (a^2 + h^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2h}{(a^2 + h^2)^3} = \frac{(a^2 + h^2) - 3h^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{a^2 - 2h^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{5}{2}}};$$

приравнявая его нулю, будем иметь:  $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ . Производная меняет знак (+) на (-): *единственный* максимум, совпадающий с наибольшим значением. Итак, наиболее выгодная высота лампочки есть

$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \doteq 0,7 a,$$

т. е. составляет (приблизительно) 0,7 горизонтального расстояния.

Если выбрать за независимую переменную  $r$ , тогда нужно через нее выразить  $\sin \varphi$ , а затем и  $J$ ; последовательно получим

$$\sin \varphi = \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r}, \quad J = c \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^3}$$

причем  $r$  изменяется от  $a$  до  $\infty$ . Функция  $\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^3}$  несколько проще предшествующей.



Можно еще упростить дело, если искать наибольшее значение для ее квадрата

$$f(r) = \frac{r^2 - a^2}{r^6} = r^{-4} - a^2 \cdot r^{-6}.$$

Производная

$$f'(r) = -\frac{4}{r^5} + \frac{6a^2}{r^7}$$

обращается в нуль при  $r = a \sqrt{\frac{3}{2}}$ ; при этом значении

$$f''(r) = \frac{20}{r^6} - \frac{42a^2}{r^8}$$

обращается в  $-\frac{64}{27a^8}$ , т. е.  $< 0$ , так что это значение доставляет функции ма-

ксимум, и т. д. Соответствующее  $r = a \sqrt{\frac{3}{2}}$  значение  $h$  получится по формуле  $h = \sqrt{r^2 - a^2}$ ; оно, конечно, совпадает с ранее найденным.

Наконец, остановимся на независимой переменной  $\varphi$ ; она изменяется в промежутке  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Так как

$$r = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad \text{то} \quad J = c \frac{\sin \varphi}{r^2} = \frac{c}{a^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi.$$

В этом случае задача приводится к исследованию простой функции  $F(\varphi) = \sin \varphi \cos^2 \varphi$ . Ее производная

$$F'(\varphi) = \cos^3 \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi = 2 \cos^3 \varphi \left( \frac{1}{2} - \operatorname{tg}^2 \varphi \right)$$

внутри промежутка  $(0, \frac{\pi}{2})$  обращается в нуль однажды, при том значении  $\varphi =$

$\varphi_0$ , для которого  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $\varphi_0$  соответствует приблизительно  $35^\circ 15' 52''$ ); оно

доставляет функции наибольшее значение, ибо на концах промежутка функция  $F(\varphi)$  обращается в нуль. Для того, чтобы получить наивыгоднейшую величину

для  $h$ , нет надобности вычислять  $\varphi_0$ :  $h = a \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ .

Отсюда мы видим, как видоизменяет подлежащую исследованию функцию тот или иной выбор независимой переменной.

В следующем п<sup>о</sup> будет приведен ряд задач, в которых независимая переменная не указана наперед, и ее приходится выбирать.

**87. Задачи.** 1. Если имеем балку прямоугольного сечения, с основанием  $a$  и высотой  $h$  (которую для определенности можно предположить опертой по концам и равномерно нагруженной), то предельная нагрузка, которую она выдерживает, пропорциональна  $ah^2$ , а стрела прогиба — обратно пропорциональна  $ah^3$ . Требуется из круглого бревна (диаметра  $d$ ) вырезать балку  $a$ ) наибольшей прочности, или  $b$ ) с наименьшей стрелой прогиба (наибольшей жесткости).

По теореме Пифагора,  $a^2 + h^2 = d^2$ ; с помощью этого соотношения можно представить выражение  $ah^2$  или  $ah^3$  в функции только от  $a$ , или только от  $h$ .

В зад.  $a$ ) выгоднее выбрать за независимую переменную  $a$  и рассмотреть выражение  $ah^2 = a(d^2 - a^2)$ .

$$\text{Итв. } a = \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad \text{так что } h = d \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \text{или } a : h : d = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$



Наше Урочное положение предписывает отношение  $h:a$ , равное  $7:5$ , очень близкое к  $\sqrt{2}$ . Черт. 119 а) показывает простой геометрический способ построения такого сечения: диаметр делится на три равные части и в точках  $D$  и  $C$  деления к нему восставляются перпендикуляры  $DE$  и  $CF$ ; точки пересечения их с окружностью соединяются с концами диаметра. Тогда катет  $BE = a$  будет средним пропорциональным между гипотенузой  $AB = d$  и отрезком  $BD = \frac{d}{3}$ , т. е.

$$d:a = a:\frac{d}{3},$$

откуда  $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$ , и т. д.

В случае б) можно выбрать  $h$  за независимую переменную,  $ah^3 = h^3 \sqrt{d^2 - h^2}$ ; исследуя, для простоты, квадрат этого выражения  $h^6 (d^2 - h^2)$ , найдем

$$h = d \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = \frac{d}{2},$$

или  $a:h:d = 1:\sqrt{3}:2$ . Построение для этого случая ясно из черт. 119 б).

2. По трубе с круглым сечением (радиуса  $r$ ) течет вода; известно, что скорость течения растет вместе с так называемым гидравлическим радиусом  $R$  профиля ( $R$  есть частное от деления площади сечения  $F$  в  $m^2$  на смоченный или подводный периметр  $u$  в м). При какой степени заполнения трубы водой скорость течения будет наибольшей?

Характеризуя эту степень заполнения центральным углом  $\alpha$  (см. черт. 120), который и выбираем за независимую переменную, будем иметь:

$$u = r\alpha, \quad F = \frac{1}{2} r^2 \alpha - \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha, \quad R = \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right).$$

При этом  $\alpha$  изменяется в промежутке от 0 до  $2\pi$ .

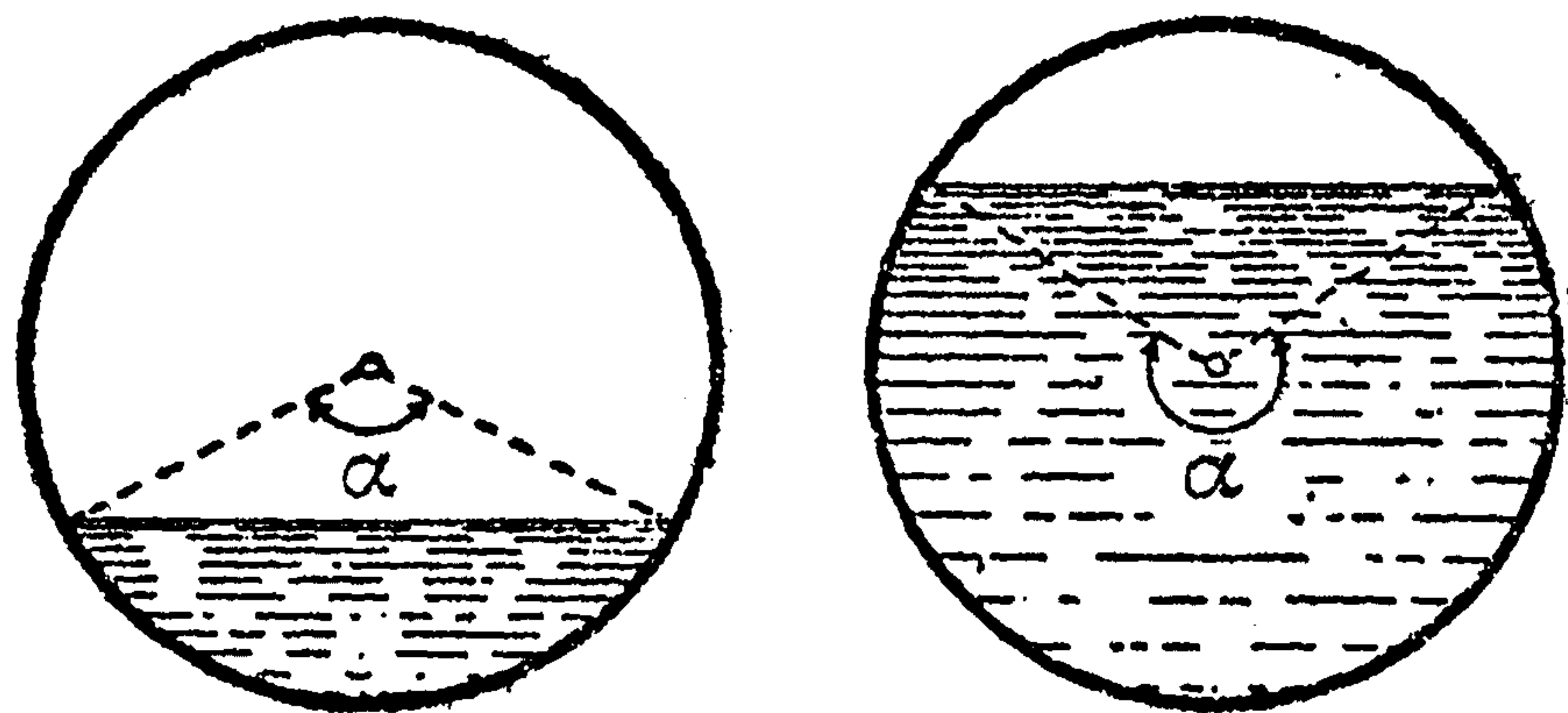
Наибольшей величины  $R$  (а с ним — и скорость течения) достигнет тогда, когда  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$  будет иметь наименьшее значение. Производная этой функции

$$\frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha^2} = \frac{\cos \alpha}{\alpha^2} (\alpha - \operatorname{tg} \alpha)$$

обращается в нуль, когда  $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$ . Выше мы уже решали это трансцен-

дентное уравнение графически [51,4] и видели, что между 0 и  $2\pi$  оно имеет единственный корень  $\alpha_1 \doteq 4,5$  (т. е. почти  $258^\circ$ ). Так как косинус при этом отрицателен, а выражение в скобках меняет знак (+) на (-), то вся производная переходит от (-) к (+), и мы имеем здесь наименьшее значение.

3. Канал, подводный воду к турбине, имеет в сечении равнобокую трапецию (черт. 121); площадь сечения дана ( $=P$ ). Определить гидравлически наилучшую форму сечения. [Такой будет форма, при которой смоченный периметр  $u$  оказывается наименьшим, ибо тогда расходы по содержанию канала будут наименьшими, а также и трение будет наименьшим, так что скорость будет наибольшей.]



Черт. 120.

обращается в нуль, когда  $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$ . Выше мы уже решали это трансцен-



Означая угол откоса через  $\alpha$ , глубину сечения через  $h$ , а ширину основания через  $d$ , находим для мокрого периметра  $u$  и площади  $P$  выражения:

$$u = d + \frac{2h}{\sin \alpha}, \quad P = (d + h \operatorname{ctg} \alpha) h.$$

Определяем  $d$  из второй формулы и подставляем в первую:

$$u = \frac{P}{h} + \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha} h.$$

Таким образом  $u$  оказывается функцией от двух переменных  $\alpha$  и  $h$ . Впоследствии мы укажем общий прием для нахождения наименьшего (наибольшего) значения подобной функции. Сейчас же мы постараемся свести дело к уже изученной задаче.

а) Пусть угол  $\alpha$  дан; тогда  $u$  оказывается состоящим из двух частей, из которых одна пропорциональна  $h$ , а другая обратно пропорциональна  $h$ . Согласно замечанию к зад. 1, 85, можно сразу сказать, что наименьшее значение  $u$  получит

при  $h = \sqrt{\frac{P \sin \alpha}{2 - \cos \alpha}}$ , само это значение  $u_m$  будет

$$2 \sqrt{P} \sqrt{\frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha}};$$

оно является функцией от одного лишь угла откоса  $\alpha$ .

б) Будем для нее теперь искать наименьшее значение. Очевидно, можно ограничиться функцией

$f(\alpha) = \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ ; тогда производная

$$f'(\alpha) = \frac{1 - 2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

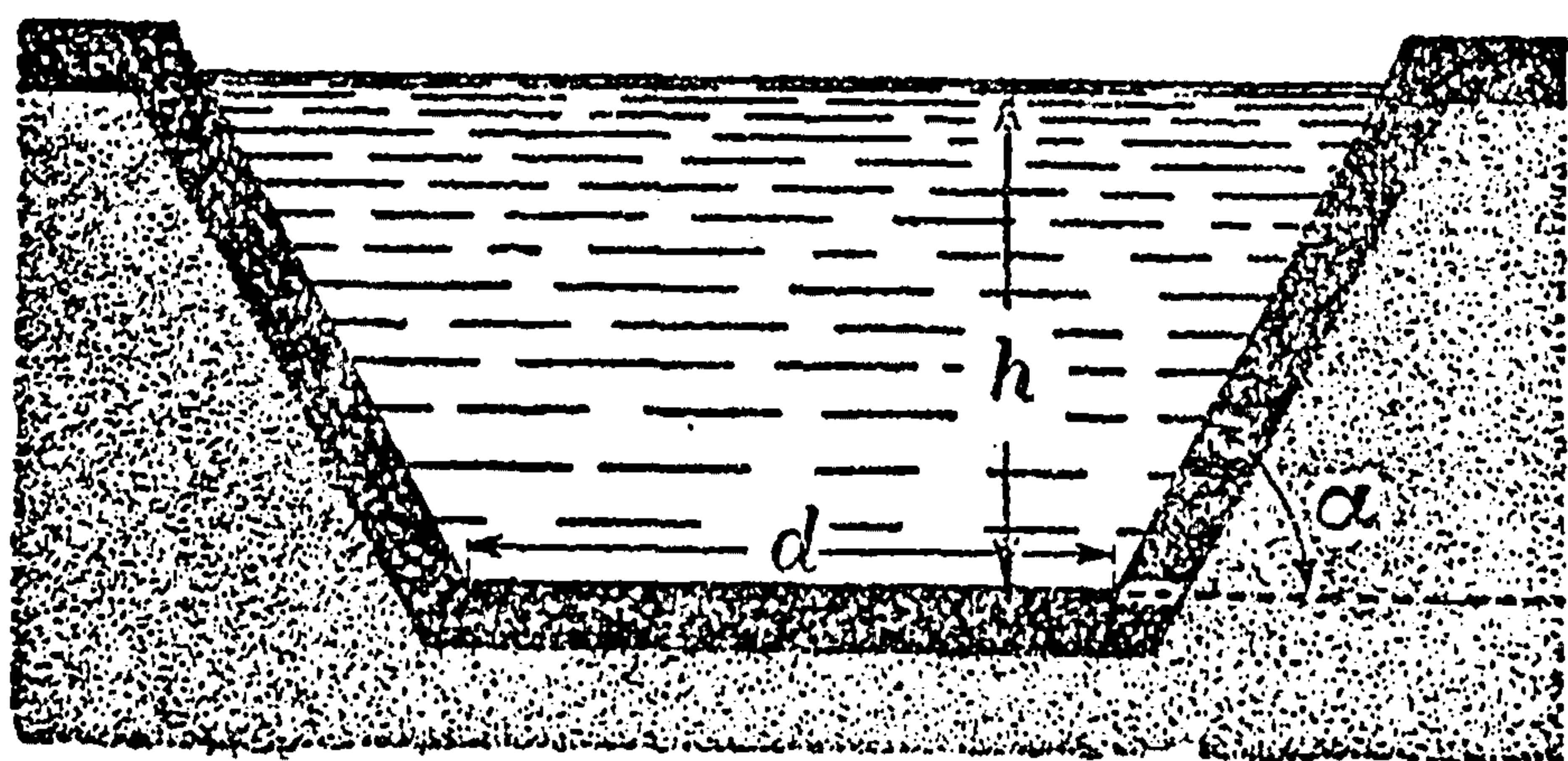
обращается в 0 при  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  и притом меняет знак (-) на (+). Таким образом, при этом  $\alpha$  для  $u_m$  получится наименьшее значение

$$u_m = 2 \sqrt{P \sqrt{3}}.$$

Оно, очевидно, будет наименьшим из всех значений  $u$  при различных  $h$  и  $\alpha$ . Соответствующие значения

$$h = \sqrt{\frac{P}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{P \sqrt{3}} \quad \text{и} \quad d = \frac{2}{3} \sqrt{P \sqrt{3}}$$

позволяют заключить, что в этом случае сечение имеет вид половины правильного шестиугольника (достаточно вычислить боковую сторону, она равна  $d$ ). Практически угол откоса обуславливается материалом откоса, а тогда приобретает особый интерес часть а) нашего рассуждения. Численные примеры даются следующей табличкой наиболее выгодных сечений.



Черт. 121.



Угол откоса $\alpha$	$\cotg \alpha$	Глубина $h$	Ширина основания $d$	Ширина на уровне воды	Мокрый периметр $u$
$90^\circ$	0	$0,707 \sqrt{P}$	$1,414 \sqrt{P}$	$1,414 \sqrt{P}$	$2,828 \sqrt{P}$
$60^\circ$	0,577	$0,760 \sqrt{P}$	$0,877 \sqrt{P}$	$1,755 \sqrt{P}$	$2,632 \sqrt{P}$
$45^\circ$	1,000	$0,740 \sqrt{P}$	$0,613 \sqrt{P}$	$2,092 \sqrt{P}$	$2,704 \sqrt{P}$
$40^\circ$	1,192	$0,722 \sqrt{P}$	$0,525 \sqrt{P}$	$2,246 \sqrt{P}$	$2,771 \sqrt{P}$
$30^\circ$	1,732	$0,664 \sqrt{P}$	$0,356 \sqrt{P}$	$2,656 \sqrt{P}$	$3,012 \sqrt{P}$

Например, если, при средней скорости 2 м/сек, количество воды, протекающей через сечение в 1 секунду (расход воды), должно быть равно 18 куб. м, то этим определяется площадь сечения  $P = \frac{18}{2} = 9$  кв. м. Если канал вырыть в каменной земле, то можно угол откоса взять в  $45^\circ$ . По таблице — наивыгоднейшие размеры определяются значением  $h = 2,220$  м,  $d = 1,839$  м.

Заметим, что строительные и эксплуатационные соображения могут заставить уклониться от этих форм сечений, так что наше решение еще не исчерпывает вопроса в целом.

4. В качестве последнего примера, рассмотрим задачу о *наивыгоднейшем числе пролетов моста* через реку шириною  $L$  м. При этом известно, что стоимость одного быка составляет  $a$  руб., а стоимость каждого из двух устоев —  $b$  руб. Наконец, можно принять, что стоимость погонного метра пролетного строения выражается линейной функцией  $c + dl$  от длины пролета  $l$ . Коэффициент  $c$ , очевидно, соответствует проезжей части моста, не зависящей от пролета (поперечные балки, мостовая настилка полотна, шпалы, рельсы и т. п.). Членом же  $dl$  выражается стоимость погонной единицы мостовых ферм, которая зависит от пролета (чем больше пролет, тем более сложные и массивные формы приходится строить, так что стоимость погонной единицы их оказывается приближенно пропорциональной длине пролета).

Если через  $n$  обозначить число пролетов, то общая стоимость моста выразится так:  $N = (n - 1)a + 2b + L(c + dl)$ . Выбирая за независимую переменную  $n$ , будем иметь, очевидно,  $l = \frac{L}{n}$ , так что

$$N = an + \frac{L^2 d}{n} - a + 2b + Lc. \quad (2)$$

При разыскании наименьшей величины для  $N$  постоянными слагаемыми можно пренебречь. В силу замечания к зад. 1 85 наивыгоднейшим будет то значение  $n$ , при котором

$$an = \frac{L^2 d}{n} \quad \text{или} \quad a = \left(\frac{L}{n}\right)^2 d = l \cdot dl,$$

т. е. стоимость одного быка оказывается равной стоимости одного пролетного строения (в той ее части, которая относится собственно к фермам).

Изложенный пример любопытен в том отношении, что мы искали для выражения (2) наименьшее значение так, как если бы независимая переменная  $n$  изменялась непрерывно, в то время как на деле она изменяется скачками, принимая



лишь целые положительные значения. Поэтому, если получающееся наивыгоднейшее значение  $n$ :

$$n = L \sqrt{\frac{d}{a}}$$

оказывается не целым, то нужно для  $n$  взять одно из двух ближайших целых значений.

Разумеется, при постройке моста приходится принимать во внимание и многие другие соображения, так что приведенное решение упомянутого сложного вопроса следует рассматривать лишь как первую наметку. Но и в таком виде оно все же сохраняет интерес.

---



## ГЛАВА VII.

### КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ.

88. Метод координат. Расстояние между двумя точками. Читателю известно уже [29], что положение точки на плоскости определяется двумя ее прямоугольными прямолинейными координатами  $x$  и  $y$  (по отношению к какой-нибудь положенной в основу системе взаимно перпендикулярных координатных осей). Точно также нам уже приходилось характеризовать прямую или кривую линию уравнением, связывающим координаты ее точек. Однако до сих пор геометрические объекты не были самоцелью и привлекались лишь для иллюстрации аналитических понятий и фактов. Напр., прямая в 34 и парабола в 38 нас интересовали не сами по себе, но лишь как графическое изображение функций первой и второй степени. В настоящей же главе мы станем рассматривать те же вопросы, но с другой точки зрения, именно мы будем изучать геометрические объекты, привлекая анализ, как вспомогательное средство; такое изучение и составляет предмет *аналитической геометрии*.

Начнем с установления некоторых простейших формул.

*Расстояние между двумя точками.* Пусть требуется найти расстояние  $CM$  между двумя данными точками  $C$  и  $M$ . Геометрически мы должны были бы соединить эти точки прямой и измерить расстояние масштабом. Аналитически же мы поступим иначе. Именно, мы обозначим координаты точки  $M$  через  $x, y$ , а координаты точки  $C$  через  $\alpha, \beta$  и постараемся выразить расстояние  $CM$  через эти координаты. Проводя (черт. 122) прямые  $CD$  и  $MD$  параллельно осям координат, получим прямоугольный  $\triangle CDM$ , из которого, по теореме Пифагора, сразу выводим:  $CM = \sqrt{CD^2 + MD^2}$ . Из чертежа ясно, как выразить  $CD$  и  $MD$  через координаты  $x, y$  точки  $M$  и координаты  $\alpha, \beta$  точки  $C$ :  $CD = x - \alpha$ ,  $MD = y - \beta$ . Таким образом, мы приходим к простой и важной формуле, выражающей расстояние между двумя точками  $M(x, y)$  и  $C(\alpha, \beta)$ :

$$CM = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}. \quad (1)$$

Например, если точка  $C$  имеет координаты  $\alpha = 1, \beta = 2$ , а точка  $M$  координаты  $x = y = 5$  (этот именно случай представлен на черт. 122), то по этой формуле найдем

$$CM = \sqrt{(5 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Хотя мы, ради простоты, взяли на чертеже случай, когда обе точки  $C$  и  $M$  лежат в I координатном угле, но формула остается верной во



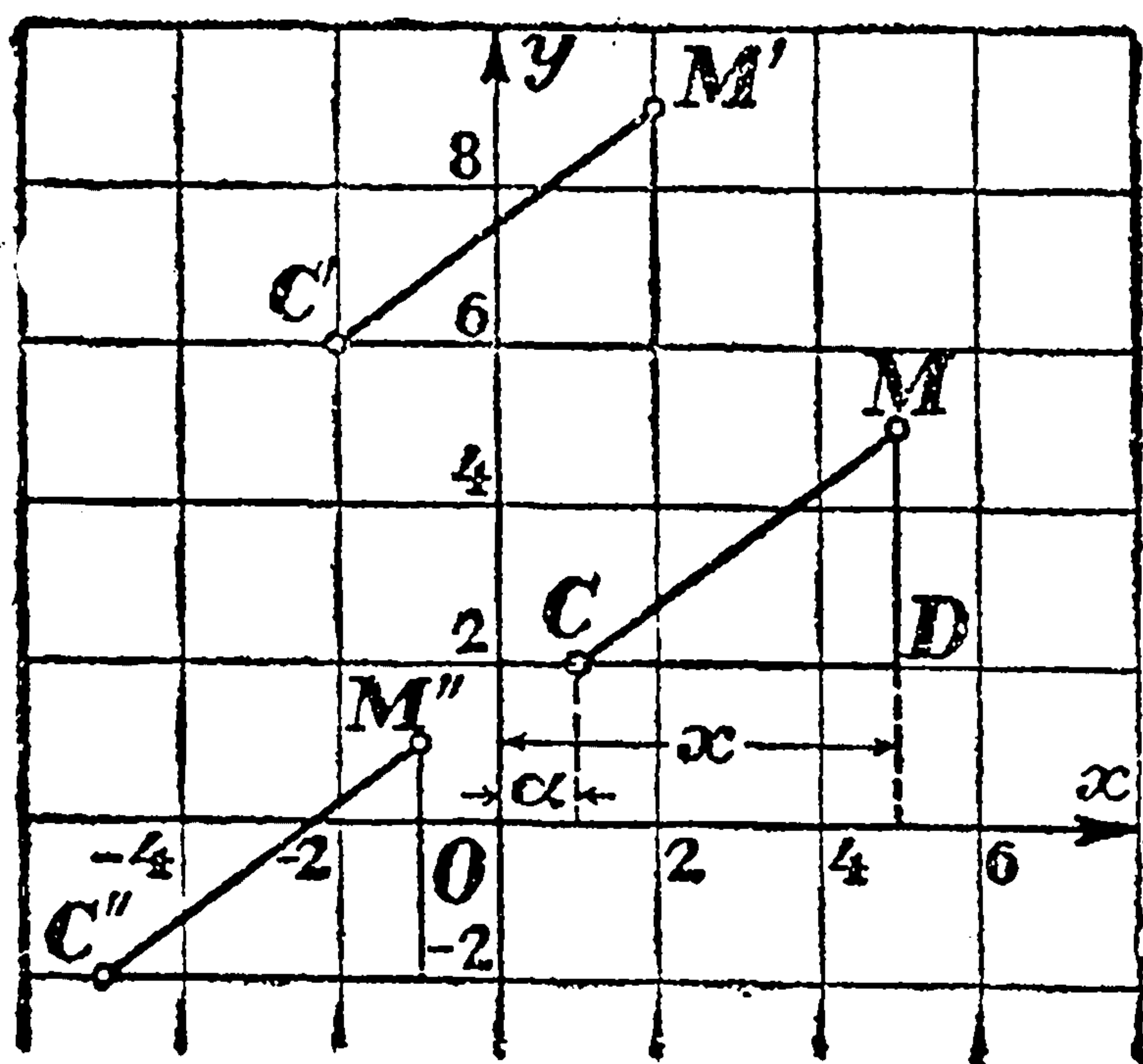
всех случаях, если только мы будем правильно подставлять вместо  $x$ ,  $y$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  координаты точек  $C$  и  $M$ , считаясь с знаками их. Например, если перенесем точки  $C$ ,  $M$  в положение  $C'(-2, 6)$  и  $M'(2, 9)$ , так что теперь  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 6$ ,  $x = 2$ ,  $y = 9$ , то

$$C'M' = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (9 - 6)^2} = 5;$$

аналогично, для точек  $C''(-5, -2)$  и  $M''(-1, 1)$  получим

$$\begin{aligned} C''M'' &= \sqrt{[(-1) - (-5)]^2 + [1 - (-2)]^2} = \\ &= \sqrt{(-1 + 5)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5. \end{aligned}$$

Пусть читатель, для упражнения, вычислит расстояния между следующими парами точек (если корень нацело не извлекается, вычислить с точностью до 0,1):



$$C(-2, 1), M(1, -3);$$

$$C(5, -4), M(-7, 1);$$

$$C(3, 0), M(-3, 8);$$

$$C(1, 1), M(2, 3);$$

$$C(-4, 1), M(2, 2);$$

$$C(0, -2), M(-2, 1).$$

Отв. 5; 13; 10; 2,2; 6,1; 3,6.

Отметим простой частный случай формулы для расстояния: если  $C$  совпадает с началом координат  $O$ , так что  $\alpha = \beta = 0$ , то формула принимает вид:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1a)$$

Черт. 21.

89. Деление отрезка в данном отношении. Разделить отрезок между двумя данными точками  $A$  и  $B$  в данном отношении  $m:n$  (где  $m$  и  $n$  — два данных числа, например, 2 и 3), это значит найти на отрезке  $AB$  такую точку  $M$ , чтобы части  $AM$  и  $MB$  относились между собой, как  $m$  относится к  $n$  (например, как 2 относится к 3; этот случай изображен на черт. 123). Отметим, что *вовсе не безразлично* — сказать ли, что отрезок  $AB$  делится в отношении  $m:n$ , или что отрезок  $BA$  делится в этом отношении. В первом случае  $AM:MB = m:n$ , а во втором  $BM:MA = m:n$ . Положение точки  $M$  для этих случаев различное. На прилагаемом чертеже, например, точка  $M$  делит отрезок  $AB$  в отношении 2:3, точка же  $M_1$  делит в таком же отношении отрезок  $BA$ .

Вместо известного из геометрии построения точки  $M$  мы поставим себе задачу: *вычислить* ее координаты по данным координатам точек  $A$  и  $B$ . Итак, пусть точки  $A$  и  $B$  имеют, соответственно, координаты  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ ; искомые координаты точки  $M$  обозначим через  $(x, y)$ . Проведем теперь (см. черт. 123) через точку  $A$  прямую, параллельную оси  $Ox$ , и спроектируем на нее и на ось  $Ox$  точки  $A$ ,  $M$ ,  $B$ . Так как



отрезки  $AM$  и  $MB$ , отложенные на одной стороне угла  $BAV'$ , относятся как  $m:n$ , и прямые  $MM'$  и  $BB'$  параллельны, то и на другой стороне угла получатся отрезки  $AM'$  и  $M'B'$ , имеющие то же отношение. Но ведь отрезки на оси  $Ox$ ,  $A''M''$  и  $M''B''$ , равны этим последним отрезкам; следовательно, также и  $A''M'' : M''B'' = m : n$ . Из чертежа ясно, что  $A''M'' = x - x_1$ ,  $M''B'' = x_2 - x$ , и предыдущая пропорция переписывается:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}.$$

Решая это уравнение относительно  $x$  ( $x_1, x_2, m, n$  — данные числа), найдем для него следующее выражение:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}. \quad (2)$$

(Обратить внимание на порядок букв  $n$  и  $m$ ,  $x_1$  и  $x_2$ !) Аналогично получим:

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}. \quad (2a)$$

Пусть, например,  $x_1 = 1, y_1 = 2, x_2 = 11, y_2 = 7; m = 2, n = 3$

(этот случай изображен на чертеже). Тогда координаты точки  $M$  по найденным формулам вычисляются так:

$$x = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 11}{3 + 2} = 5, \quad y = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 7}{3 + 2} = 4.$$

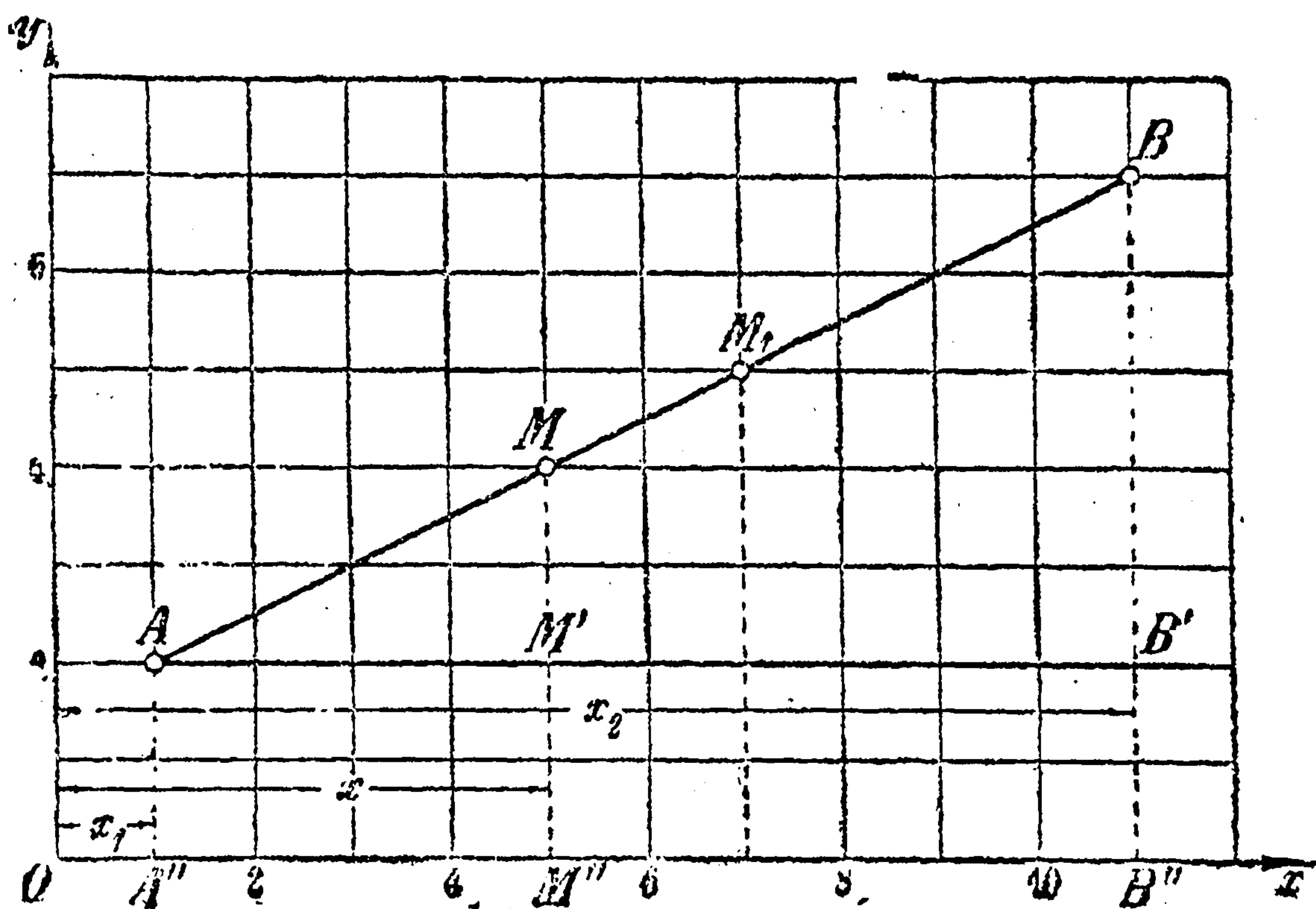
Другой пример:  $A(-4, -1), B(-2, 2), m = 1, n = 2$ . Тогда

$$x = \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2)}{2 + 1} = -3 \frac{1}{3}, \quad y = \frac{2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2}{2 + 1} = 0.$$

**Задачи.** 1.  $A(1, -10), B(6, 0); 3:2$ . (Отв.  $4, -4$ ); 2.  $A(-2, 2), B(-4, -1); 1:2$ . (Отв.  $-2 \frac{2}{3}, 1$ ); 3.  $A(3, -1), B(-3, 5); 1:1$ . (Отв.  $0, 2$ ).

В связи с последней задачей отметим особо частный случай деления отрезка пополам, который отвечает  $m = n = 1$ . Формулы (2), (2a) приобретают в этом случае особенно простой вид:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad (3)$$



Черт. 123.



Рассмотрим пример на применение тех и других формул. Пусть дан произвольный  $\triangle ABC$  (черт. 124); координаты вершин его обозначим соответственно через  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ . Разделим пополам сторону  $BC$  в точке  $A'(x', y')$ ; ее координаты, в силу (3), таковы:

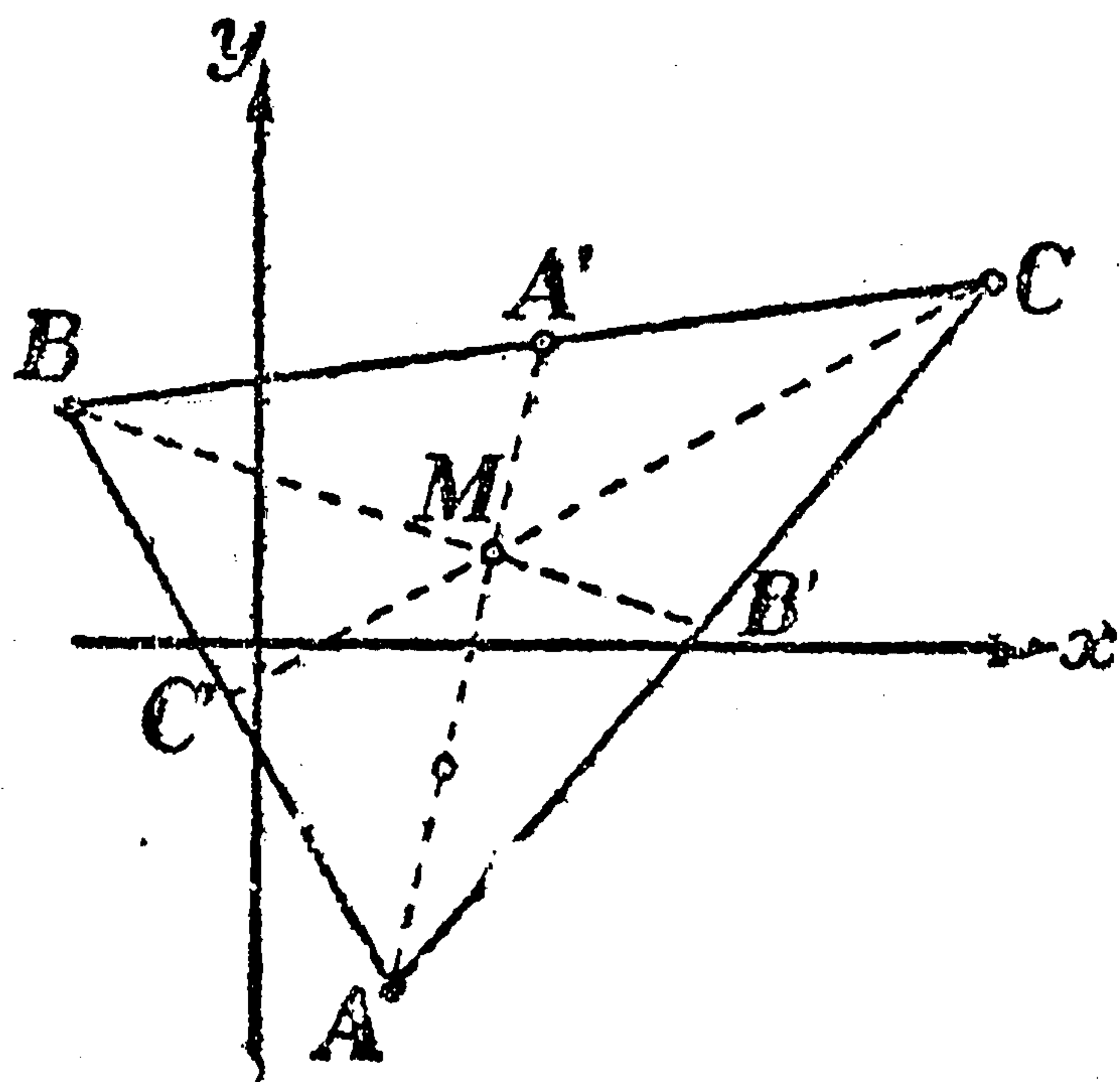
$$x' = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y' = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Теперь разделим медиану  $AA'$  в отношении 2:1 в точке  $M(x, y)$ ; тогда по (2) и (2a)

$$x = \frac{1 \cdot x_1 + 2 \cdot x'}{1 + 2} = \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Оказывается, что выражения координат  $(x, y)$  точки  $M$  содержат координаты точек  $A, B, C$  совершенно одинаковым образом, так что, если бы мы поступили с медианами  $BB'$  или  $CC'$  так, как поступили с  $AA'$ , то пришли бы к той же точке  $M$ . Таким образом, простой подсчет доказывает нам, что все три медианы пересекаются в одной точке  $M$ , которая каждую из них делит в отношении 2:1. Точка  $M$ , как известно, является центром тяжести треугольника.



Черт. 124.

90. Центр тяжести системы материальных точек. В качестве важного приложения формул (2), (2a) мы выведем выражения для координат  $(x, y)$  центра тяжести произвольной системы материальных точек.

Начнем с двух точек  $A_1(x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$  и предположим, что в них сосредоточены массы  $m_1$  и  $m_2$ . Как известно, центр тяжести системы двух точек лежит на соединяющем их отрезке  $A_1A_2$  и делит этот отрезок обратно пропорционально массам точек,

т. е. в отношении  $m_2 : m_1$ . Тогда координаты  $x, y$  центра тяжести выразятся так:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Перейдем теперь к случаю системы, состоящей из трех материальных точек,  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$ , с массами  $m_1, m_2, m_3$ . При определении центра тяжести такой системы мы можем заменить точки  $A_1$  и  $A_2$  одной точкой  $A'(x', y')$ , которая помещается в центре тяжести системы  $A_1A_2$  и в которой сосредоточена общая масса  $m_1 + m_2$  обеих этих точек; ее координаты даются предшествующими формулами:

$$x' = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y' = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Теперь нам остается определить координаты  $(x, y)$  центра тяжести системы двух точек:  $A'(x', y')$  с массой  $m_1 + m_2$  и  $A_3(x_3, y_3)$  с массой  $m_3$ . Как мы знаем уже, эти координаты найдутся следующим образом:

$$x = \frac{(m_1 + m_2) x' + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{(m_1 + m_2) \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$



и, аналогично,

$$y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

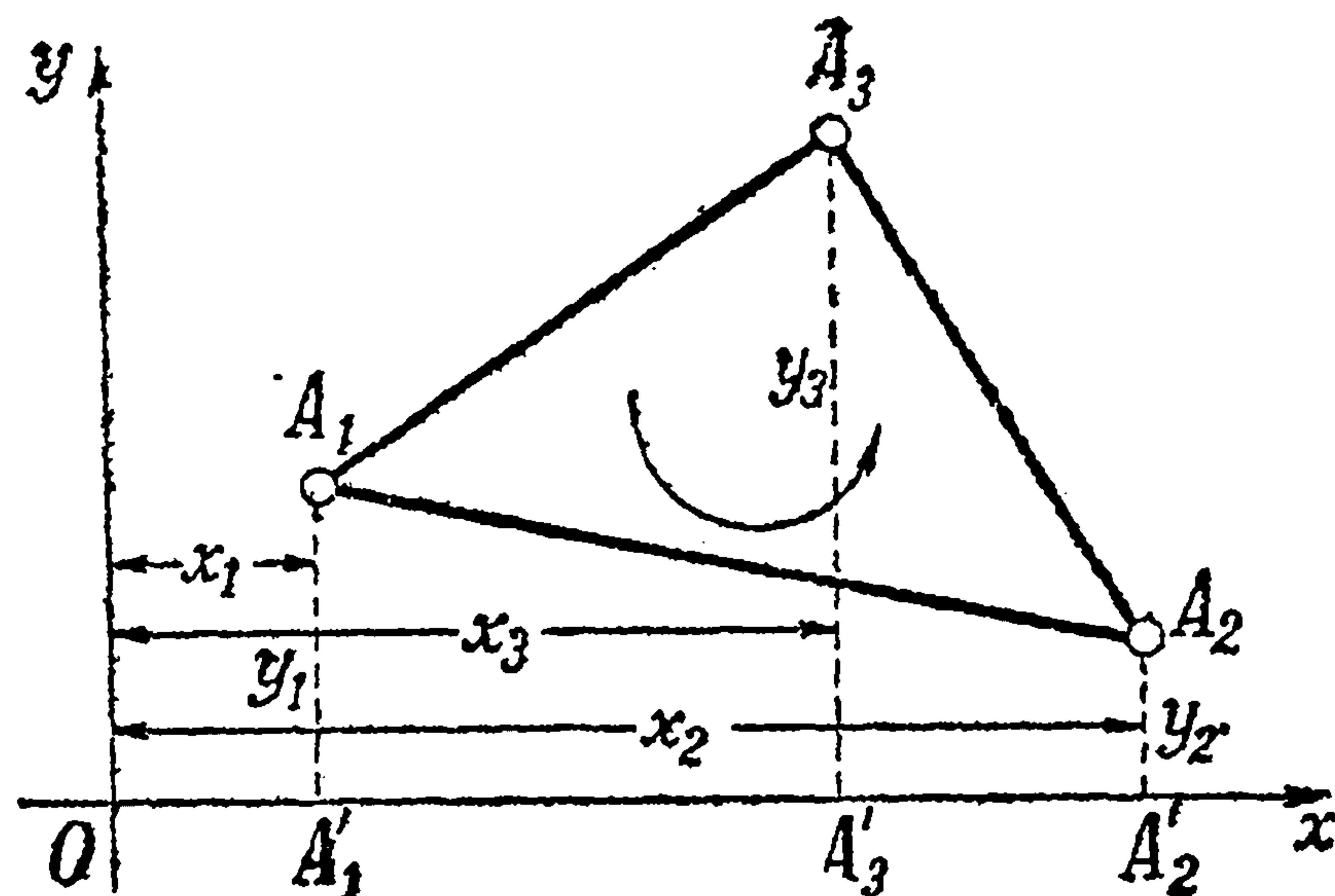
Отсюда легко перейти к случаю четырех точек и т. д. В общем случае, когда имеем систему  $n$  точек  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$ , в которых сосредоточены массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , координаты  $x, y$  центра тяжести системы имеют, очевидно, такие выражения:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad (4)$$

если обозначить через  $M$  общую массу всех точек, так что

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

В механике называют *статическим моментом материальной точки относительно какой-либо оси* — произведение массы  $m$  этой точки на ее расстояние от оси. Для системы материальных точек моментом называют сумму моментов отдельных точек. В таком случае  $\sum m_i x_i$  есть момент рассматриваемой системы точек относительно оси  $Oy$ ; из (4) видим, что этот момент равен  $Mx$ , т. е. моменту центра тяжести (относительно той же оси), в предположении, что в нем сосредоточена вся масса  $M$  системы. Этим свойством центр тяжести обладает по отношению к любой оси. Очевидно, что, исходя из этого свойства, можно было бы сразу найти координаты  $x, y$  центра тяжести. Стоит только написать, что момент  $Mx$  массы  $M$ , сосредоточенной в центре тяжести, относительно оси  $Oy$ , равен сумме  $\sum m_i x_i$  моментов всех материальных точек, чтобы отсюда непосредственно получилась первая из формул (4), и т. д.



Черт. 125.

В главе XI будет рассмотрен более важный случай, когда массы не сосредоточены в отдельных точках (что может осуществиться в действительности разве лишь с приближением), а распределены непрерывным образом.

**91. Площадь треугольника и многоугольника.** Предположим, что требуется найти площадь  $\triangle A_1 A_2 A_3$  (черт. 125) по данным его вершинам:  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$ , иными словами, нужно найти формулу, выражающую эту площадь треугольника через данные координаты  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ . Опустив перпендикуляры  $A_1 A_1', A_2 A_2', A_3 A_3'$  на ось  $Ox$ , мы видим, что искомая площадь получится, если сложить площади трапеций  $A_1 A_3 A_3' A_1'$  и  $A_3 A_2 A_2' A_3'$  и из суммы вычесть площадь трапеции  $A_1 A_2 A_2' A_1'$ . Для трапеции  $A_1 A_3 A_3' A_1'$  основаниями служат отрезки  $A_1 A_1'$  и  $A_3 A_3'$ , равные  $y_1$  и  $y_3$ , а высотой — отрезок  $A_1' A_3'$  равный, как видно из чертежа,  $x_3 - x_1$ . Так как площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, то

$$\text{пл. } A_1 A_3 A_3' A_1' = \frac{1}{2} (y_1 + y_3) (x_3 - x_1).$$

\* Так как суммы слагаемых одного типа часто встречаются и в математике и в прикладных науках, то для обозначения их и введен особый знак, в виде большой греческой буквы  $\Sigma$  („сигма“), который читается: „сумма“. После этого знака суммы ставят типическое слагаемое, по образцу которого составляются все слагаемые. В тексте  $m_i y_i$  есть произвольное,  $i$ -ое слагаемое; придавая указателю  $i$  поочередно значения 1, 2, 3, ...,  $n$ , и получим все слагаемые нашей суммы.



Аналогично получим:

$$\text{пл. } A_3 A_2 A_2' A_3' = \frac{1}{2} (y_3 + y_2) (x_2 - x_3),$$

$$\text{пл. } A_1 A_2 A_2' A_1' = \frac{1}{2} (y_2 + y_1) (x_2 - x_1).$$

Если из суммы первых двух площадей вычесть третью и умножить результат еще на 2, чтобы избежать дробей, то найдем:

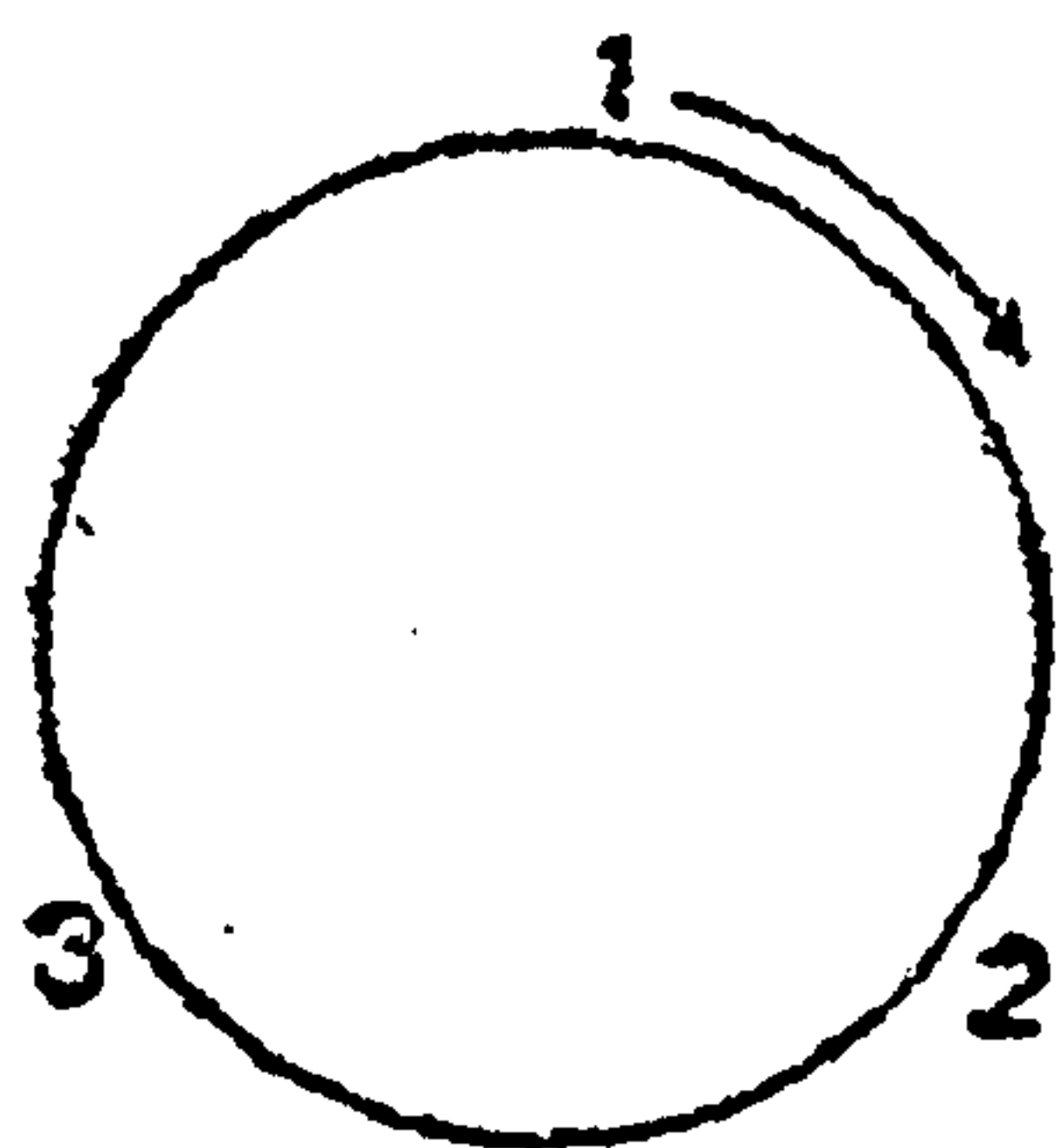
$$2 \Delta = (y_1 + y_3) (x_3 - x_1) + (y_3 + y_2) (x_2 - x_3) + (y_2 + y_1) (x_1 - x_2).$$

Собирая отдельно члены, содержащие  $y_1, y_2, y_3$ , можно представить этот результат в виде

$$2 \Delta = y_1 (x_3 - x_2) + y_2 (x_1 - x_3) + y_3 (x_2 - x_1). \quad (5)$$

Эта формула справедлива при любом расположении точек  $A_1, A_2, A_3$  (если помнить о знаках самих координат!). Однако, нужно заметить, что при вычислении по этой формуле может получиться и отрицательный результат. Конечно, знак легко обрести, но полезно дать себе отчет, когда площадь по формуле (5)

получается с (+) и когда с (-). Это зависит от того, в каком порядке мы нумеруем вершины — *против часовой стрелки* или *по стрелке*. Если, как в рассмотренном выше случае (см. черт. 125), переход от  $A_1$  к  $A_2$ , от  $A_2$  к  $A_3$  и от  $A_3$  снова к  $A_1$  происходит в направлении, обратном вращению часовой стрелки, то площадь получается с (+); при обратном порядке нумерации получился бы знак (-). Возьмем пример:  $A_1(2, 4), A_2(-2, -1), A_3(3, -2)$ . Если читатель изобразит эти точки на чертеже, то сразу увидит, что порядок, в котором они взяты, соответствует вращению против часовой стрелки. Произведем вычисление по формуле (5), полагая  $x_1 = 2, y_1 = 4, x_2 = -2, y_2 = -1, x_3 = 3, y_3 = -2$ ; мы получим:



Черт. 126.

$$\begin{aligned} 2 \Delta &= 4 [3 - (-2)] + (-1) (2 - 3) + (-2) [(-2) - 2] = \\ &= 4 \cdot 5 + (-1) (-1) + (-2) (-4) = 29, \end{aligned}$$

так что  $\Delta = 14,5$ . Результат, в согласии с сказанным, получился с (+). Если взять те же точки, но в другом порядке:  $A_1(3, -2), A_2(-2, -1), A_3(2, 4)$ , то направление  $A_1 A_2 A_3 A_1$  будет отвечать вращению часовой стрелки. Теперь  $x_1 = 3, y_1 = -2, x_2 = -2, y_2 = -1, x_3 = 2, y_3 = 4$ , и вычисление дает:

$$\begin{aligned} 2 \Delta &= (-2) [2 - (-2)] + (-1) (3 - 2) + 4 [(-2) - 3] = \\ &= (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot (-5) = -29, \end{aligned}$$

тот же результат, но со знаком (-)!

Формулу (5) можно расположить и по  $x_1, x_2, x_3$ :

$$2 \Delta = x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2), \quad (6)$$

так что и эта формула, разумеется, будет давать площадь с (+), когда вращение  $A_1 A_2 A_3 A_1$  происходит против часовой стрелки, и с (-) в противном случае (проверить на прежнем примере!).

Мы обращаем внимание читателя на *последовательность* значков при  $x$  и  $y$ . Если расположить эти значки по кругу (черт. 126), то после 1 идет 2, после 2 идет 3, после 3 вновь следует 1, и т. д. Эта *круговая* последовательность все время сохраняется как в формуле (5), так и в формуле (6):

$$1, 2, 3 \mid 2, 3, 1 \mid 3, 1, 2.$$

В формуле (6), напр., каждое  $x$  помножается на разность между *следующим*  $y$



и предшествующим  $y$ . Аналогично обстоит дело и с формулой (5). Это замечание облегчает запоминание названных формул.

Обратимся теперь к определению площади многоугольника  $A_1A_2A_3A_4\dots A_{n-1}A_n$  об  $n$  сторонах (черт. 127) по данным его вершинам:  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$ ,  $\dots$ ,  $A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ ,  $A_n(x_n, y_n)$ . Предположим, что вершины эти расположены против часовой стрелки. Возьмем теперь внутри многоугольника произвольную точку  $A_0(x_0, y_0)$  и соединим ее со всеми вершинами; многоугольник разбивается на  $n$  треугольников:  $A_0A_1A_2$ ,  $A_0A_2A_3$ ,  $A_0A_3A_4$ ,  $\dots$ ,  $A_0A_{n-1}A_n$ ,  $A_0A_nA_1$  (для которых вершины также взяты против часовой стрелки). Очевидно, площадь  $P$  многоугольника равна сумме площадей всех этих треугольников, которые мы обозначим, соответственно, через  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_{n-1}$ ,  $\Delta_n$ . По формуле (5):

$$2\Delta_1 = y_0(x_2 - x_1) + y_1(x_0 - x_2) + y_2(x_1 - x_0);$$

нам удобнее, однако, выделить члены, содержащие  $x_0$  и  $y_0$ :

$$2\Delta_1 = x_0(y_1 - y_2) + y_0(x_2 - x_1) + y_2x_1 - y_1x_2.$$

Аналогично для остальных треугольников получим:

$$2\Delta_2 = x_0(y_2 - y_3) + y_0(x_3 - x_2) + y_3x_2 - y_2x_3.$$

$$2\Delta_3 = x_0(y_3 - y_4) + y_0(x_4 - x_3) + y_4x_3 - y_3x_4,$$

.....

$$2\Delta_{n-1} = x_0(y_{n-1} - y_n) + y_0(x_n - x_{n-1}) + y_nx_{n-1} - y_{n-1}x_n,$$

$$2\Delta_n = x_0(y_n - y_1) + y_0(x_1 - x_n) + y_1x_n - y_nx_1.$$

Складывая эти равенства, замечаем, что коэффициенты при  $x_0$  и  $y_0$  обращаются в нуль; в самом деле, напр.,  $x_0$  нужно умножить на

$$y_1 - y_2 + y_2 - y_3 + y_3 - y_4 + \dots + y_{n-1} - y_n + y_n - y_1,$$

но все члены здесь после приведения взаимно уничтожаются. Таким образом, из окончательного результата  $x_0$  и  $y_0$  выпадают (как и должно быть, ибо площадь многоугольника не зависит от выбора точки  $A_0$ ) и мы получим

$$2P = y_2x_1 - y_1x_2 + y_3x_2 - y_2x_3 + y_4x_3 - y_3x_4 + \dots + y_nx_{n-1} - y_{n-1}x_n + y_1x_n - y_nx_1.$$

Располагая эти члены по  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , окончательно найдем:

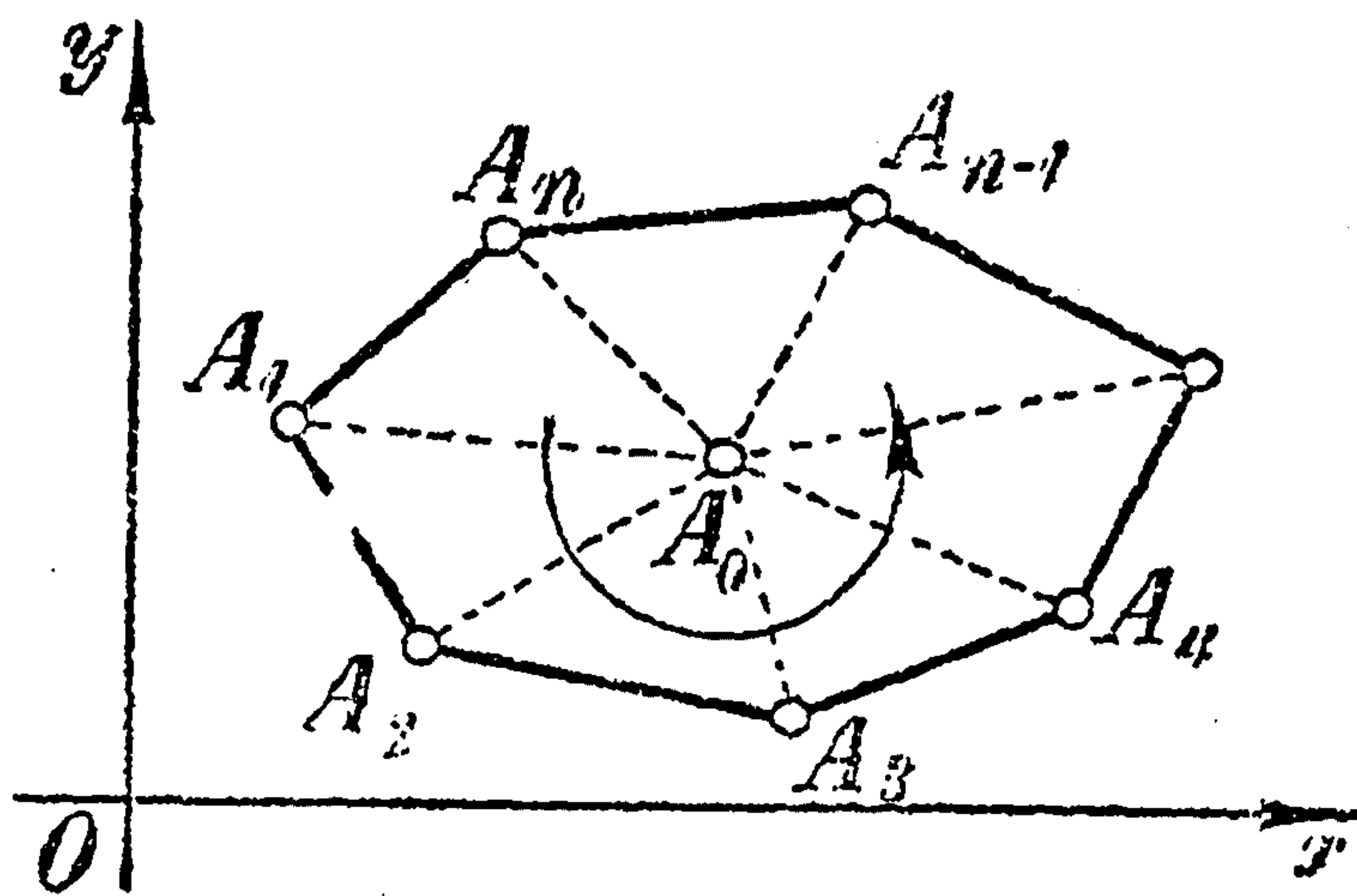
$$2P = y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) \dots + y_n(x_{n-1} - x_1). \quad (7)$$

Аналогично можно получить и формулу:

$$2P = x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \dots + x_n(y_1 - y_{n-1}). \quad (8)$$

Замечания о знаках, с которыми получается площадь, и о последовательности вершин, сделанные по поводу формул (5) и (6), остаются в силе и здесь.

Выведенными формулами часто пользуются для вычисления площадей многоугольных участков земли при топографических съемках, причем вычисления облегчаются применением арифмометров или счетных таблиц. Следует однако обратить внимание на то обстоятельство, что оси координат в геодезии направлены иначе, чем мы привыкли: именно ось  $Ox$  — вверх, а ось  $Oy$  — направо; это



Черт. 127.



связано с тем, что *азимуты растут по часовой стрелке*. Поэтому, хотя формулы (7) и (8) остаются теми же, но они дают площадь с (+), если вершины многоугольника перенумерованы по часовой стрелке (как обычно и делается).

**Задачи.** 1. Найти площадь  $\triangle ABC$  с данными вершинами: а)  $A(2, 1)$ ,  $B(3, -2)$ ,  $C(-4, -1)$ ; б)  $A(4, -5)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(-3, -6)$ ; в)  $A(1, 2)$ ,  $B(11, 7)$ ,  $C(5, 4)$ . [Отв. а) 10; б) 29; в) 0; последний ответ показывает, что точки лежат на одной прямой. Таким образом, обращение в нуль выражения (5) или (6) есть признак того, что точки лежат на прямой!]

2. Найти площадь четырехугольника:  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(3, 3)$ ,  $D(4, 1)$ . (Отв. 4.)

3. Найти площадь пятиугольника:  $A(2, -3)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(2, 2)$ ,  $D(-4, 1)$ ,  $E(-3, -2)$ . (Отв. 27.)

**92. Прямая линия и ее уравнение.** Перейдем теперь к рассмотрению *линий* на плоскости, как прямых, так и кривых. Мы знаем уже из главы IV, что если между переменными  $x$  и  $y$  установлена зависимость вида:  $y = f(x)$  (явная) или  $F(x, y) = 0$  (неявная), то графически эта зависимость представляется линией. При этом мы  $x$  и  $y$  рассматривали как координаты точек на плоскости. Сейчас перед нами стоит другая задача: для данной линии нужно найти уравнение, связывающее координаты  $x$ ,  $y$  ее точек, т. е. найти такое уравнение, чтобы ему удовлетворяли координаты всех точек данной линии и только этих точек. Такое уравнение называют *уравнением данной линии* и говорят про него, что оно *выражает эту линию*. \* С уравнением прямой мы, собственно, уже имели дело. Так, мы знаем из 34, что не только каждой линейной функции

$$y = ax + m \quad (9)$$

(как нам удобнее теперь ее писать) отвечает, в качестве ее графика, некоторая прямая, но и наоборот — каждая (наклонная к осям) прямая служит графиком определенной линейной функции (9). При этом  $a$  есть *угловой коэффициент* или *уклон* \*\* прямой, а  $m$  — ее *начальная ордината*.

Уравнение (9) удовлетворяется координатами всех точек прямой и не удовлетворяется координатами других, не лежащих на прямой, точек. Если точка  $(x, y)$  передвигается вдоль по прямой, то координаты ее, называемые „текущими координатами“, вообще меняются, но все время остаются связанными уравнением (9); его и называют *уравнением прямой* и говорят про него, что оно *выражает прямую*.

Если взять прямую, параллельную оси  $Ox$ , то ординаты всех ее точек равны между собой, так что всегда

$$y = m; \quad (m = \text{пост.}) \quad (10)$$

это соотношение и будет уравнением прямой в рассматриваемом случае. Уравнение (10) можно считать, если угодно, частным случаем уравнения (9), при  $a = 0$ . Угловой коэффициент прямой (10) есть 0.

\* Любопытно вспомнить, что математик XVII века Ферма (Fermat) называл уравнение линии просто ее *характерным свойством*; этим очень метко подчеркнуто, что уравнение выражает свойство, присущее только точкам данной линии и никакой другой.

\*\* В настоящей главе мы предполагаем, что масштабы на осях  $Ox$  и  $Oy$  взяты одинаковыми.



Наконец, если провести прямую параллельно оси  $Oy$ , то, аналогично (10), получим ее уравнение в виде:

$$x = l. \quad (l = \text{пост.}) \quad (11)$$

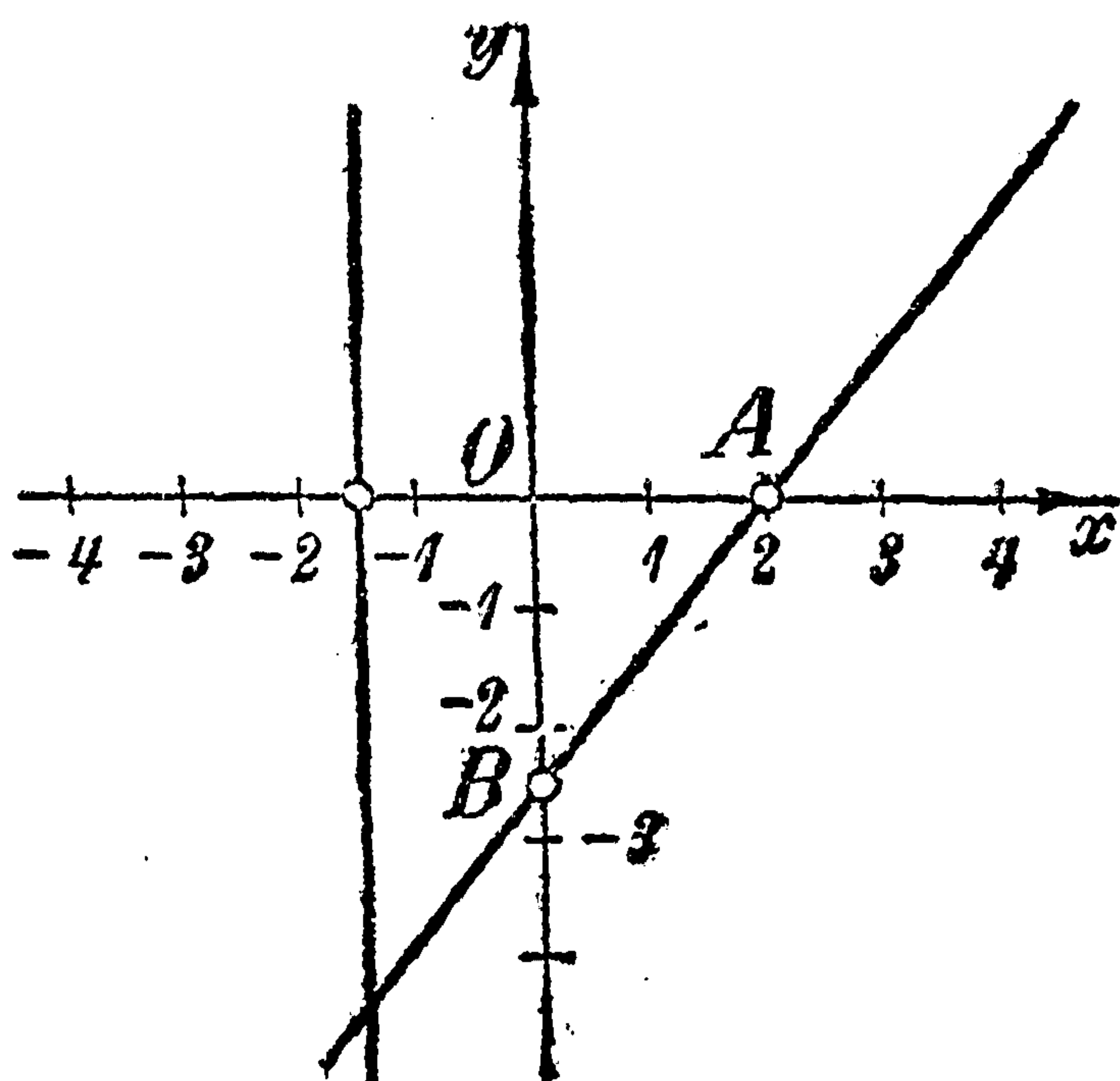
Так как эта прямая составляет с осью  $Ox$  прямой угол, тангенс которого равен  $\infty$ , то условно говорят, что угловой коэффициент прямой (11) есть  $\infty$ . Этот способ речи находит себе оправдание также в том, что если прямую (9), наклонную к оси  $Oy$ , поворачивать и приближать к параллельности с этой осью, то ее угловой коэффициент  $a$  будет стремиться к  $\infty$ . Уравнение (11) уже нельзя рассматривать как частный случай уравнения (9), ибо если в последнем просто положить  $a = \infty$ , то получится бессмыслица.

Нетрудно видеть, что и обратно — *каждое* уравнение вида (10) или (11) выражает некоторую прямую, параллельную соответственно одной из координатных осей.

Уравнения (9), (10), (11) все имеют ту характерную особенность, что они содержат текущие координаты  $x$ ,  $y$  в первой степени; таким образом, можно сказать, что *каждая прямая выражается уравнением первой степени*. Перенесем в них члены в левую часть; мы получим уравнения

$$y - ax - m = 0, \quad (9a)$$

$$y - m = 0, \quad (10a) \quad x - l = 0, \quad (11a)$$



Черт. 128.

которые, очевидно, содержатся, как частные случаи, в *общем уравнении первой степени*, связывающем две величины  $x$  и  $y$ :

$$Ax + By + C = 0. \quad (12)$$

Действительно, (9a) отсюда получается при  $A = -a$ ,  $B = 1$ ,  $C = -m$ ; для получения же (10a) или (11a) надо положить здесь, соответственно,  $A = 0$ ,  $B = 1$ ,  $C = -m$  или  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = -l$ .

Уравнение вида (12) называется *неявным*, поскольку ни одна из текущих координат не выражена явно в функции от другой; наоборот, уравнения (9), (10), (11) называются *явными* уравнениями, ибо дают явное выражение для одной из координат.

Исследуем теперь обратную задачу — найти линию, выражаемую *любым* уравнением вида (12). Рассмотрим предварительно несколько частных случаев.

1. Уравнение  $5x - 4y - 10 = 0$ . Постараемся представить эту зависимость в явной форме и для этого решим уравнение относительно  $y$ , что даст:  $y = 1,25x - 2,5$ . Это показывает, что данное уравнение выражает *прямую* с уклоном 1,25, отсекающую на оси  $Oy$  отрезок  $-2,5$  (черт. 128).

2. Уравнение  $2x + 3 = 0$ . Это уравнение не содержит совсем  $y$ , но зато может быть решено относительно  $x$ , что дает  $x = -\frac{3}{2}$ , т. е. пря-



мую, параллельную оси  $Oy$ , на расстоянии  $\frac{3}{2}$  влево от нее (черт. 128).

При исследовании уравнения общего вида (12) могут встретиться лишь два аналогичные случая: 1) когда уравнение можно решить относительно  $y$ , т. е. коэффициент  $B$  при  $y$  отличен от нуля и 2) когда уравнение не содержит букву  $y$ , но содержит  $x$ , т. е.  $B=0$ , но  $A \neq 0$ , и уравнение можно решить относительно  $x$ . Остается, правда, еще один случай, когда уравнение не содержит ни  $x$ , ни  $y$ , т. е.  $A$  и  $B$  равны 0; но тогда оно дает  $C=0$  и превращается в ничего не говорящее тождество  $0=0$ , так что этот случай нужно исключить из рассмотрения.

Итак, допустим сперва, что имеет место случай 1)  $B \neq 0$ ; как и в предыдущем частном примере, для определения зависимости между  $x$  и  $y$  решаем уравнение (12) относительно  $y$  и получаем таким путем:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Это уравнение выражает прямую, непараллельную оси  $Oy$ , с уклоном  $\left(-\frac{A}{B}\right)$  и с начальной ординатой  $\left(-\frac{C}{B}\right)$ .

В случае же 2)  $B=0$ , но  $A \neq 0$ , уравнение (12) имеет вид:  $Ax + C=0$  и, будучи решено относительно  $x$ , дает:  $x = -\frac{C}{A}$ , т. е. прямую параллельную оси  $Oy$  и пересекающую ось  $Ox$  в точке с абсциссой  $\left(-\frac{C}{A}\right)$ .

Мы убедились, таким образом, что *каждое уравнение первой степени между переменными  $x$  и  $y$  выражает прямую линию.*

Эта прямая, как мы сейчас видели, будет *параллельна оси  $Oy$* , если  $B=0$ ; точно также легко заметить, что она будет *параллельна оси  $Ox$* , если  $A=0$ , ибо тогда ее угловой коэффициент  $\left(-\frac{A}{B}\right)$  равен 0. Так, например, уравнение  $2y + 1 = 0$ , будучи переписано в виде  $y = -\frac{1}{2}$ , дает нам прямую, параллельную оси  $Ox$  и пересекающую ось  $Oy$  в точке с ординатой  $\left(-\frac{1}{2}\right)$ .

Наконец, если „свободный член“  $C=0$ , то уравнение (12) отвечает *прямой, проходящей через начало координат*; действительно, легко убедиться, что координаты  $(0, 0)$  начала удовлетворяют уравнению прямой, которое в этом случае имеет вид:  $Ax + By = 0$ .

**Примеры и задачи.** 1. Привести уравнения: 1)  $3x + 2y - 5 = 0$ ; 2)  $2y + 3 = 0$ ; 3)  $-2x + 4y + 1 = 0$ ; 4)  $3x - 1 = 0$  к явному виду и построить соответствующие прямые [ср. 33, зад. 3].

2. Найти угловые коэффициенты прямых: 1)  $5x - 3y + 7 = 0$ ; 2)  $2x - 5 = 0$ ; 3)  $3y + 10 = 0$ . *Отв.* 1)  $\frac{5}{3}$ ; 2)  $\infty$ ; 3) 0.

3. Определить углы, составленные с осью  $Ox$  прямыми: 1)  $x + y - 5 = 0$ ; 2)  $3x - 3y + 4 = 0$ ; 3)  $3x - \sqrt{3}x - 2 = 0$ ; 4)  $5x + 2 = 0$ . *Указание.* Найти сначала угловые коэффициенты прямых, которые служат тангенсами искомых углов, а затем по тангенсам восстановить и углы. *Отв.* 1)  $-45^\circ$ ; 2)  $45^\circ$ ; 3)  $60^\circ$ ; 4)  $90^\circ$ .

4. Найти точку  $C$  пересечения прямых  $3x + 5y = 27$  и  $3x - 8y = -1$ , построив эти прямые. *Отв.*  $C(4; 3)$ . Построение прямых выполнено на черт. 129а. Координаты точки  $C$ , очевидно, должны удовлетворять обоим данным урав-



нениям, так что их можно было бы найти, решив эти уравнения совместно (проверьте это!).

Наоборот, если имеем два уравнения первой степени с двумя переменными величинами  $x$  и  $y$ , то можно *графически решить* их, построив соответствующие им прямые и найдя точку пересечения последних.

5. Графически решить системы: 1)  $2x - 3y = 5$ ,  $-x + 4y = -5$ ; 2)  $3x - y = -3$ ,  $5x + 3y = 2$ ; 3)  $3x + 2y = 1$ ,  $6x + 4y = 3$ ; 4)  $x + 2y - 0,5 = 0$ ,  $4y - 1 = -2x$ . Отв.

1)  $x = 1$ ,  $y = -1$ ; 2)  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{3}{2}$ ;

3) система несовместна; 4) система неопределенна.

Система 3) приводит к нелепому результату  $2 = 3$ . Если начертить прямые, выражаемые уравнениями 3), то они оказываются параллельными и точки пересечения не имеют (черт. 129b); это, впрочем, можно было и предвидеть по тому, что у них равные угловые коэффициенты  $(-\frac{3}{2})$ .

Что до уравнений 4), то одно из них есть следствие другого, ибо, если переписать, напр., второе в виде  $2(x + 2y - 0,5) = 0$ , то по сокращении на 2 оно и приведет к первому. Таким образом, в сущности, система сводится к одному уравнению. Геометрически обоим уравнениям отвечает одна и та же прямая, и координаты любой ее точки дают решения системы.

6. Найти отрезки, отсекаемые на осях  $Ox$  и  $Oy$  прямой  $5x - 4y - 10 = 0$ .

*Решение.* Отрезок, отсекаемый прямой на оси  $Ox$  (черт. 128), есть *абсцисса* точки пересечения прямой с осью  $Ox$ , в то время как *ордината* ее есть 0 (как для всех точек оси  $Ox$ ). Поэтому следует положить в уравнении прямой  $y = 0$  и определить соответствующее значение  $x$ , которое и даст нам искомый отрезок. Выполнив это, получим:  $5x - 10 = 0$ ,  $x = 2$ . Аналогично, для нахождения отрезка на оси  $Oy$ , полагаем в нашем уравнении  $x = 0$  и определяем  $y$ :  $-4y - 10 = 0$ ,  $y = -2,5$ .

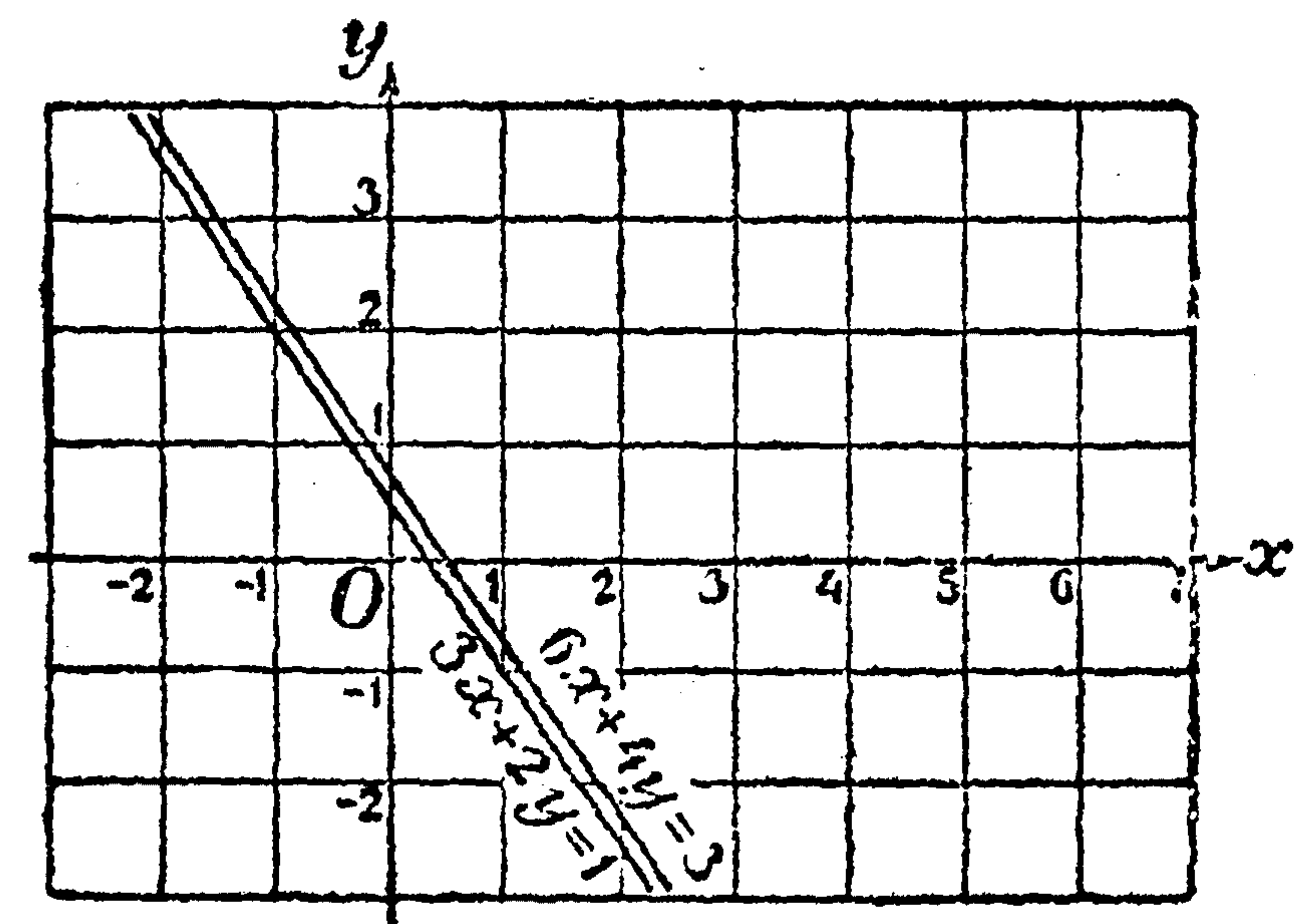
7. То же — для прямой в общем виде:  $Ax + By + C = 0$ . Какие предположения нужно сделать относительно коэффициентов, чтобы задача имела смысл?

*Решение.* Как и в предыдущей задаче, полагая сначала в уравнении  $y = 0$ , найдем

$$Ax + C = 0, \quad x = -\frac{C}{A},$$

и точно также, полагая  $x = 0$ :

$$By + C = 0, \quad y = -\frac{C}{B}.$$



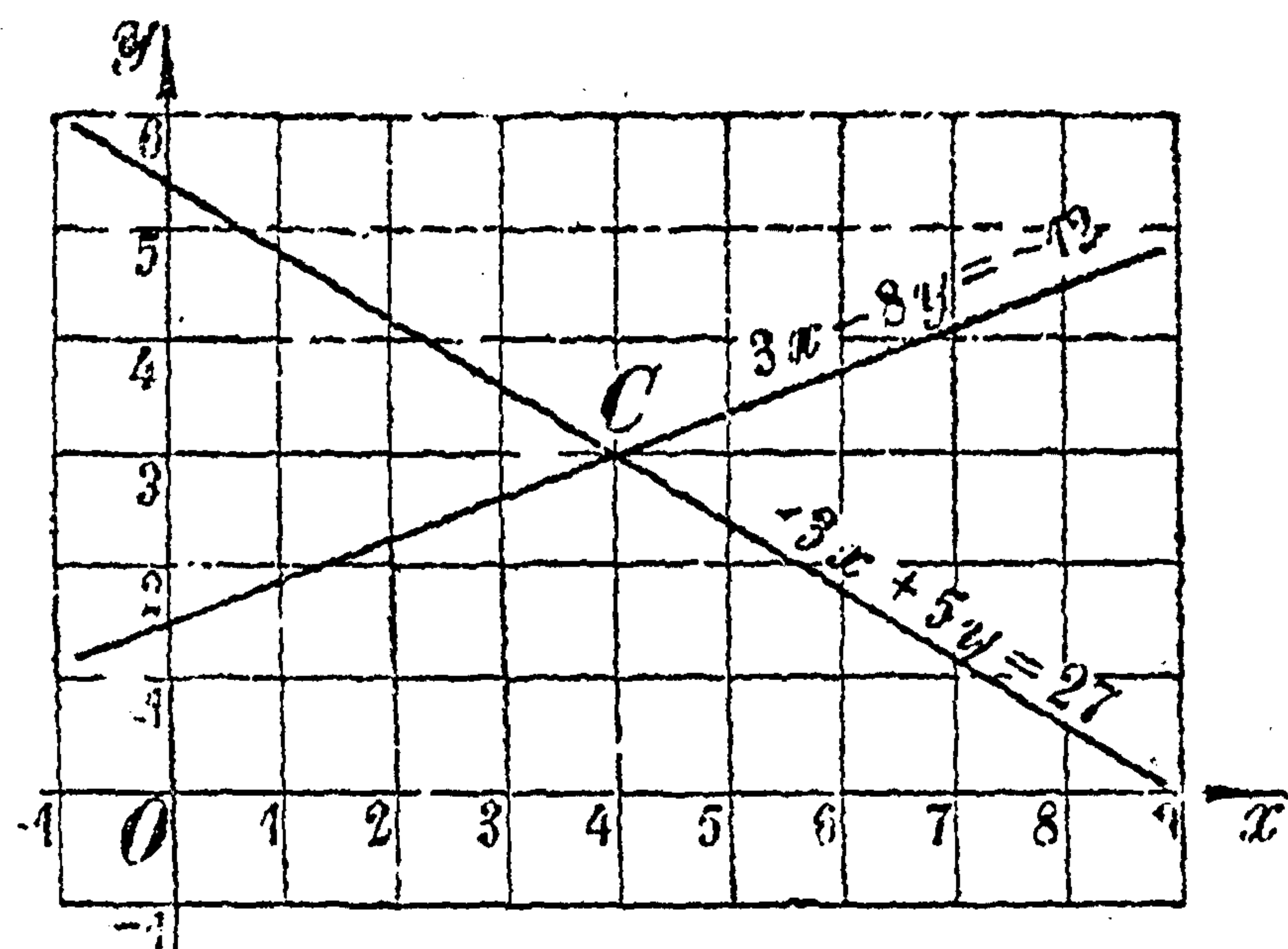
Черт. 129b).

Таким образом, если условиться обозначать через  $l$  и  $m$  отрезки, отсекаемые прямой, соответственно, на осях  $Ox$  и  $Oy$ , имеем:

$$l = -\frac{C}{A}, \quad m = -\frac{C}{B}. \quad (13)$$

Для того чтобы эти выражения имели смысл, нужно конечно чтобы,  $A$  и  $B$  не были нулями. Геометрически это отвечает предположению, что прямая не параллельна ни одной из осей (в противном случае один из отрезков был бы бесконечен!).

Общее уравнение прямой (12) можно привести к такому виду, чтобы вме-



Черт. 129a).



сто ничего не говорящих и не имеющих геометрического смысла коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  фигурировали именно отрезки (13).

С этой целью перенесем в уравнении (12) свободный член  $C$  направо и разделим обе части уравнения на  $-C$ :

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1;$$

так как умножение на числа  $-\frac{A}{C}$  и  $-\frac{B}{C}$  можно заменить делением на обратные им числа  $-\frac{C}{A}$  и  $-\frac{C}{B}$ , то полученное уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

или, наконец, на основании формул (13):

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} = 1. \quad (14)$$

В этом виде уравнение прямой носит название *уравнения в отрезках*. Для того, чтобы уравнение (12) могло быть приведено к такому виду, нужно, чтобы не только коэффициенты  $A$  и  $B$ , но и свободный член  $C$  — были отличны от нуля (иначе один из отрезков  $l$ ,  $m$  был бы бесконечен или оба они были бы нулями)

8. Привести уравнение  $5x - 4y - 10 = 0$  к виду уравнения в отрезках.

*Решение.* По указанной схеме, имеем:

$$5x - 4y = 10, \quad \frac{1}{2}x - \frac{2}{5}y = 1$$

и, наконец,

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-2,5} = 1.$$

В знаменателях здесь фигурируют как раз вычисленные в зад. 6 отрезки.

9. Найти отрезки, отсекаемые на координатных осях нижеследующими прямыми; и выразить их уравнениями в отрезках: 1)  $x + 2y - 3 = 0$ ; 2)  $0,5x + 1,2y = -2,2$ ; 3)  $3x + 0,4y = 0$ ; 4)  $3y + 4,5 = 0$ ; 5)  $1 + 4,2x = 2$ .

*Отв.* 1) 3 и  $\frac{3}{2}$ ; 2)  $-\frac{22}{5}$  и  $-\frac{11}{6}$ ; 3) 0 и 0; 4)  $\infty$  и  $-1,5$ ; 5)  $\frac{5}{21}$  и  $\infty$ . Прямые 3), 4) и 5) нельзя представить в отрезках.

**93. Прямая через точку, через две точки.** Рассмотрим такую задачу: требуется через данную точку  $M_1$  провести прямую в данном направлении. На языке аналитической геометрии понимать эту задачу следует так: даны *координаты*  $(x_1, y_1)$  точки  $M_1$  и *угловой коэффициент*  $a$  искомой прямой, определяющий ее направление, требуется же составить *уравнение* этой прямой. Если  $a = \infty$ , то прямая параллельна оси  $Oy$ , и ее уравнение, очевидно, будет:  $x = x_1$ . Исключая этот случай из рассмотрения, мы можем представить уравнение искомой прямой в явном виде (9). В нем  $a$  известно; что же касается  $m$ , то оно определится из того условия, что прямая (9) проходит через точку  $M_1 (x_1, y_1)$ , так что координаты последней должны уравнению удовлетворять:

$$y_1 = ax_1 + m. \quad (15)$$



Отсюда  $m = y_1 - ax_1$ ; подставляя в (9) это выражение, вместо  $b$ , после простых преобразований, приведем искомое уравнение к окончательному виду:

$$y - y_1 = a(x - x_1). \quad (16)$$

[То же можно было бы получить, вычитая из уравнения (9) тождество (15).]

Самый вид уравнения (16) непосредственно обнаруживает, что выражаемая им прямая, действительно, проходит через точку  $M_1$ , ибо при  $x = x_1$  и  $y = y_1$  уравнение удовлетворяется — обе его части обращаются в нуль!

Пусть, напр., через точку  $M_1(-3, 2)$  требуется провести прямую под углом  $-30^\circ$  к оси  $Ox$  (или, что то же, с угловым коэффициентом  $a = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ). Имеем, согласно (16),

$$y - 2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - (-3)),$$

или, после преобразований,

$$x + \sqrt{3}y + (3 - 2\sqrt{3}) = 0.$$

Легко, если угодно, проверить, что эта прямая удовлетворяет заданию.

Если, при неизменной точке  $M_1$ , произвольно изменять  $a$ , то прямая (16) будет вращаться вокруг точки  $M_1$ , проходя через все возможные для нее положения (исключая лишь направление, параллельное оси  $Oy$ , которое соответствует  $a = \infty$ ); в этом смысле говорят, что — при неопределенном  $a$  — уравнение (16) выражает пучок прямых, проходящих через точку  $M_1$ .

В целях придания уравнению пучка (16) бóльшей симметричности, представим произвольное число  $a$  в виде отношения  $-\frac{A}{B}$ , где  $A$  и  $B$  также произвольные числа. Тогда, по упрощении, уравнение (16) принимает вид:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \quad (16a)$$

Это уравнение имеет то преимущество пред уравнением (16), что оно (при  $B = 0$  и  $A \neq 0$ ) выражает и параллельную оси  $Oy$  прямую  $x = x_1$ , также проходящую через заданную точку, в то время как уравнение (16) ни при каком конечном  $a$  выразить этой прямой не может.

Пусть теперь даны две различных точки  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  и требуется через них провести прямую (т. е. составить соответствующее ей уравнение!) (см. черт. 130).

Задача эта решается особенно просто, если данные две точки имеют одинаковые абсциссы:  $x_1 = x_2$ , или одинаковые ординаты:  $y_1 = y_2$ .

В первом случае, очевидно, прямая  $M_1M_2$  параллельна оси  $Oy$ , и потому абсциссы всех ее точек будут равны между собой и равны постоянной величине  $x_1$ ; уравнение прямой будет поэтому  $x = x_1$  (черт. 130, а).



Во втором случае прямая  $M_1M_2$  параллельна оси  $Ox$ , и ординаты всех ее точек имеют постоянное значение  $y = y_1$ .

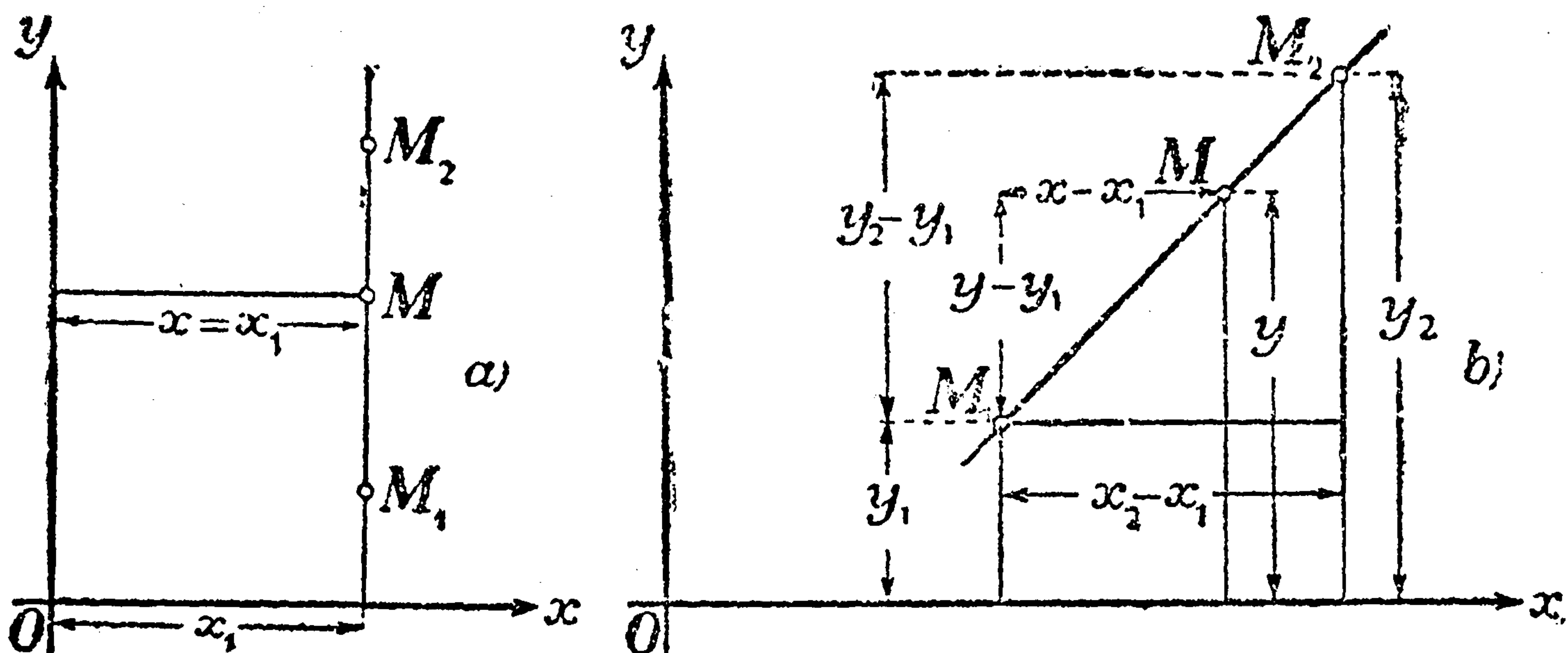
Итак, теперь мы можем считать, что  $x_1 \neq x_2$  и  $y_1 \neq y_2$ . Так как искомая прямая проходит через точку  $M_1$ , то ее уравнение может быть взято в форме (16). Для определения же неизвестного углового коэффициента  $a$  примем во внимание, что прямая должна проходить и через точку  $M_2$ , так что координаты последней удовлетворяют уравнению:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1), \quad (17)$$

откуда

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (18)$$

Подставляя это значение  $a$  в уравнение (16), мы получим уравнение прямой, проходящей через две данные точки, в виде:



Черт. 130.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (19)$$

или

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1), \quad (19a)$$

причем следует помнить, что  $x$  и  $y$  здесь — переменные, текущие координаты, а  $x_1, y_1, x_2, y_2$  — данные числа. Можно представить это уравнение и в форме пропорции:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (19b)$$

[В таком виде это уравнение получается и непосредственно — делением уравнения (16) на тождество (17)<sup>1</sup>.

\* В сущности, мы уже пользовались этим уравнением, говоря о линейном интерполировании, см. 28, (3).



Наконец, если переписать наше уравнение так:

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0, \quad (19c)$$

то мы получим возможность охватить им и тот случай (исключенный выше из рассмотрения), когда  $x_2 = x_1$  или  $y_2 = y_1$ .

Напр., прямая, проходящая через точки  $M_1(-2, 3)$  и  $M_2(-4, -1)$  имеет уравнение:

$$\frac{x - (-2)}{-4 - (-2)} = \frac{y - 3}{-1 - 3} \quad \text{или} \quad 2x - y + 7 = 0.$$

(Проверить!)

*Примеры и задачи.* .. через точку  $(-2, 1)$  провести прямые с уклонами 1) 4; 2) 0,5; 3)  $-0,3$ ; 4)  $-2,1$ . Через ту же точку провести прямые под углами: 5)  $60^\circ$ ; 6)  $45^\circ$ ; 7)  $-45^\circ$ ; 8)  $-66,5^\circ$ ; 9)  $159^\circ$  к оси  $Ox$ .

*Отв.* 1)  $y = 4x + 9$ ; 2)  $y = 0,5x + 2$ ; 3)  $y = -0,3x + 0,4$ ; 4)  $y = -2,1x - 3,2$ ; 5)  $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 1 \doteq 1,73x + 4,46$ ; 6)  $y = x + 3$ ; 7)  $y = -x - 1$ ; 8)  $y = -\operatorname{tg} 66,5^\circ \cdot x + 1 - 2 \operatorname{tg} 66,5^\circ \doteq -2,30x - 3,60$ ; 9)  $y = -\operatorname{tg} 21^\circ \cdot x + 1 - 2 \operatorname{tg} 21^\circ \doteq -0,38x + 0,23$ .

2. Написать уравнения прямых, проходящих через точки: 1)  $(121, 59)$  и  $(128, 62)$ ; 2)  $(-2, 13)$  и  $(-3, 12)$ ; 3)  $(2, 1)$  и  $(-3, 4)$ ; 4)  $(11, -1,2)$  и  $(17, 0,6)$ ; 5)  $(2, 0,5)$  и  $(-3, 0,5)$ ; 6)  $(3,1, 0,4)$  и  $(3,1, 120)$ . Начертить эти прямые.

*Отв.* 1)  $y = \frac{3}{7}x + 7\frac{1}{7}$ ; 2)  $y = x + 15$ ; 3)  $y = -0,6x + 2,2$ ; 4)  $y = 0,3x - 4,5$ ; 5)  $y = 0,5$ ; 6)  $x = 3,1$ .

3. Найти координаты вершин и уравнения сторон равностороннего треугольника со стороной  $l$ , приняв за начало координат центр треугольника, и направив ось  $Ox$  параллельно основанию.

*Отв.*  $\left(-\frac{l}{2}, -\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)$ ;  $\left(\frac{l}{2}, -\frac{l\sqrt{3}}{6}\right)$ ;  $\left(0, \frac{l\sqrt{3}}{3}\right)$ ;  $y = -\sqrt{3}x + \frac{l\sqrt{3}}{3}$ ;  
 $y = \sqrt{3}x + \frac{l\sqrt{3}}{3}$ ;  $y = -\frac{l\sqrt{3}}{6}$ .

4. Написать уравнение прямой, которая отсекала бы на оси  $Ox$  отрезок  $l = 2$ , а на оси  $Oy$  отрезок  $m = -2,5$ , воспользовавшись при этом уравнением (19b).

*Решение.* Требование задачи равносильно условию, чтобы прямая проходила через точки  $A(2, 0)$  и  $B(0, -2,5)$  (черт. 128). В таком случае искомое уравнение действительно может быть написано в форме (19b):

$$\frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{y - 0}{-2,5 - 0}, \quad \text{откуда: } 5x - 4y - 10 = 0.$$

Разумеется, проще было бы непосредственно подставить  $l = 2$  и  $m = -2,5$  в уравнение в отрезках (14).

5. Подобным же образом вывести общее уравнение в отрезках (14), исходя из требования, чтобы прямая проходила через точки  $(l, 0)$  и  $(0, m)$ .

**94. Линейная функциональная зависимость.** Различные формы, в которых мы писали уравнение прямой, естественно находят себе применение и при установлении линейной зависимости между двумя переменными  $x$  и  $y$  [34]

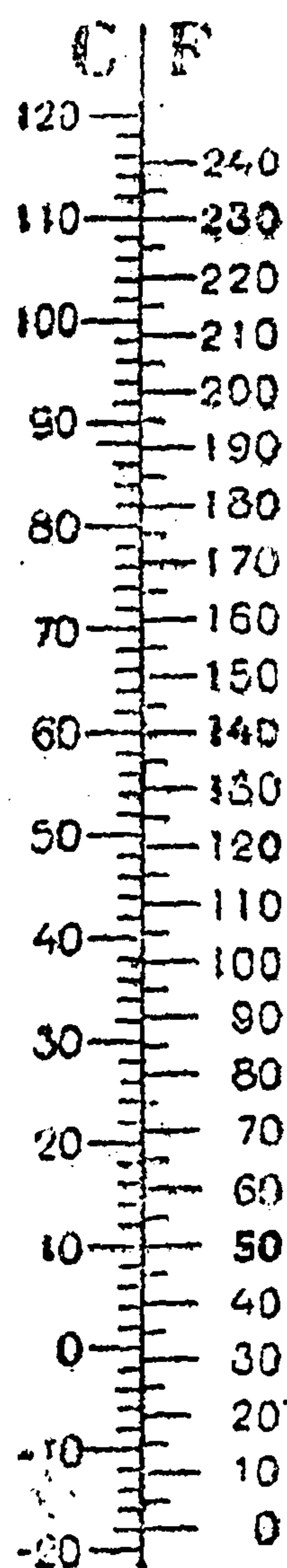
1°. Желая истолковать в этом направлении уравнение в отрезках (14), представим себе, что для измерения переменной  $x$  имеем равномерную шкалу, и пусть ей соответствует равномерная же шкала для  $y$ ; другими словами, изменение  $y$  про-



порционально изменению  $x$ , так что  $x$  и  $y$  заведомо связаны линейной зависимостью [33], которая графически изобразится прямой. Каков же „аналитический“ смысл отрезков  $l$  и  $m$ ? Очевидно,  $l$  есть значение переменной  $x$ , которое отвечает нулевому значению переменной  $y$ , в то время как  $m$  есть значение переменной  $y$ , отвечающее нулевому значению переменной  $x$ . Таким образом, зная отсчеты  $l$  и  $m$  каждой шкалы, соответствующие отсчету 0 на другой шкале, мы можем сразу выразить зависимость между  $x$  и  $y$  формулой:

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} = 1.$$

*Примеры.* 1. На черт. 131 сопоставлены шкалы Цельсия (С) и Фаренгейта (F). Мы видим, что нулю шкалы F соответствует (приблизленно!)  $-17,8$  на шкале С, а нулю шкалы С соответствует 32 на шкале F. Поэтому зависимость между отсчетами  $f$  и  $c$  шкал F и С может быть определена по формуле:



$$\frac{c}{-17,8} + \frac{f}{32} = 1, \quad \text{откуда } f = 32 + \frac{32}{17,8} c \doteq 32 + 1,80c,$$

что совпадает с точной формулой в 32.

2. Таким же путем читатель проверит формулу примера 7 в 35, зная, что нулю шкалы  $t$  соответствует отсчет 100 на шкале  $V$ , а нулю шкалы  $V$  — отсчет  $-273$  на шкале  $t$ .

2°. Обратимся теперь к применениям формулы (19) или (19a). Подобно тому как прямая линия определяется своими двумя точками, так и линейная функция может быть вполне определена, если заданы ее два частных значения, соответствующие двум частным значениям независимой переменной (что геометрически и сводится к заданию двух точек графика функции). Другими словами, если какому-либо явлению соответствует линейная зависимость, то в принципе она может быть определена двумя измерениями (если, конечно, пренебречь их погрешностями). Действительно, по двум парам  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  соответственных значений  $x$  и  $y$  непосредственно может быть написана линейная зависимость (19a).

*Примеры.* 3. Написать уравнение движения поезда, т. е. зависимость между пройденным путем  $s$  (в км) и временем  $t$  (в часах), если известно, что пройденный путь был равен  $-32$  км в 2 ч. 15 мин. и 144 км в 3 ч. 59 мин. того же дня. Движение поезда принимается за равномерное.

Итак,  $t_1 = 2 \frac{1}{4}$ ,  $s_1 = -32$ ,  $t_2 = 3 \frac{59}{60}$ ,  $s_2 = 144$ ; имеем по формуле (19a):

$$s = -32 + \frac{144 - (-32)}{\frac{239}{60} - \frac{135}{60}} \left( t - 2 \frac{1}{4} \right) \doteq 101,5 t - 260,5.$$

4. При сверке длины стержня с образцовым метром (причем результаты измерений приводились затем к нормальной для образцового метра температуре) оказалось, что при температуре  $\theta = 20^\circ$  и  $60^\circ$  С длина его  $l = 1000,22$  и  $1001,05$  мм (соответственно). Принимая, что удлинение стержня с повышением температуры происходит равномерно, найти зависимость между  $l$  и  $\theta$ .

Имеем:

$$l = 1000,22 + \frac{0,83}{40} (\theta - 20) = 999,81 + 0,0208 \theta,$$

так что, в частности, температуре  $\theta = 0$  отвечает длина  $l = 999,81$  мм.



3°. Нужно сказать однако, что на практике почти всегда дело обстоит сложнее, чем в рассмотренных схематических примерах. С одной стороны, в наблюдениях и измерениях неизбежно вкрадываются погрешности; с другой — и самый закон линейной зависимости выполняется лишь с приближением. Поэтому, желая установить между величинами  $x$  и  $y$  зависимость вида

$$y = ax + b, \quad (9a)$$

не довольствуются двумя парами соответственных значений, но из непосредственных наблюдений устанавливают целый ряд таких пар:

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_n$

Нам нужно теперь определить постоянные  $a$  и  $b$  так, чтобы эта формула по возможности точнее отвечала нашей таблице. Простое *графическое* решение этой задачи состоит в следующем. Наносим все *точки*  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  на чертеж (конечно, выбрав подходящий масштаб); нужно провести *прямую линию* так, чтобы она по возможности ближе подошла к этим точкам, прошла через возможно большее их число, и притом так еще, чтобы оставшиеся точки, не попавшие на прямую, равномерно распределились над ней и под ней. Эту операцию проще всего производить с помощью тонкого натянутого шнура или же с помощью прозрачного листа бумаги (или целлулоида), на котором нанесена тонкая прямая линия; вследствие этого самый способ носит название *способа натянутой нити*. Начертив прямую, устанавливают ее уравнение, т. е. определяют коэффициенты  $a$  и  $b$  формулы (9a); при этих значениях коэффициентов, найденная нами *эмпирическая формула* более или менее точно характеризует зависимость между рассматриваемыми переменными. Действительно, поскольку нанесенные на чертеж точки приближенно лежат на построенной прямой, постольку их координаты (т. е., по крайней мере, наблюдаемые значения  $x$  и  $y$ ) приближенно удовлетворяют ее уравнению!

Уравнение прямой проще всего написать, если подметить какие-нибудь ее две точки (не обязательно из числа наблюдаемых), с возможно более простыми координатами, напр., узловые точки миллиметровой сетки, если прямая через такие проходит; при этом, разумеется, берут уравнение прямой в форме (19a).

Установив зависимость (9a), ее можно использовать и для *интерполирования*, т. е. для приближенного определения значений  $y$ , отвечающих таким значениям  $x$ , которых не было в исходной табличке.

*Примеры и задачи.* 5. Пусть, напр., испытанием паровой машины установлена следующая зависимость между индикаторной мощностью  $I$  (в лощ. сил) и расходом пара  $W$  (в кг/час):

$I$	2	4	5	7	10	12
$W$	32	47	55	69	89	106

Отметив эти точки на чертеже (черт. 132), видим, что они довольно точно укладываются на прямой, так что величины  $W$  и  $I$  приближенно связаны линейной зависимостью. Прямую можно провести, напр., через крайние точки (2, 32) и (12, 106), так что [см. (19a)]:

$$W = 32 + \frac{106 - 32}{12 - 2} (I - 2) \quad \text{или} \quad W = 7,4 I + 17,2.$$

По этой формуле можно было бы установить, скажем, что индикаторной мощности  $I = 8$  отвечает расход пара  $W = 76,4$ .

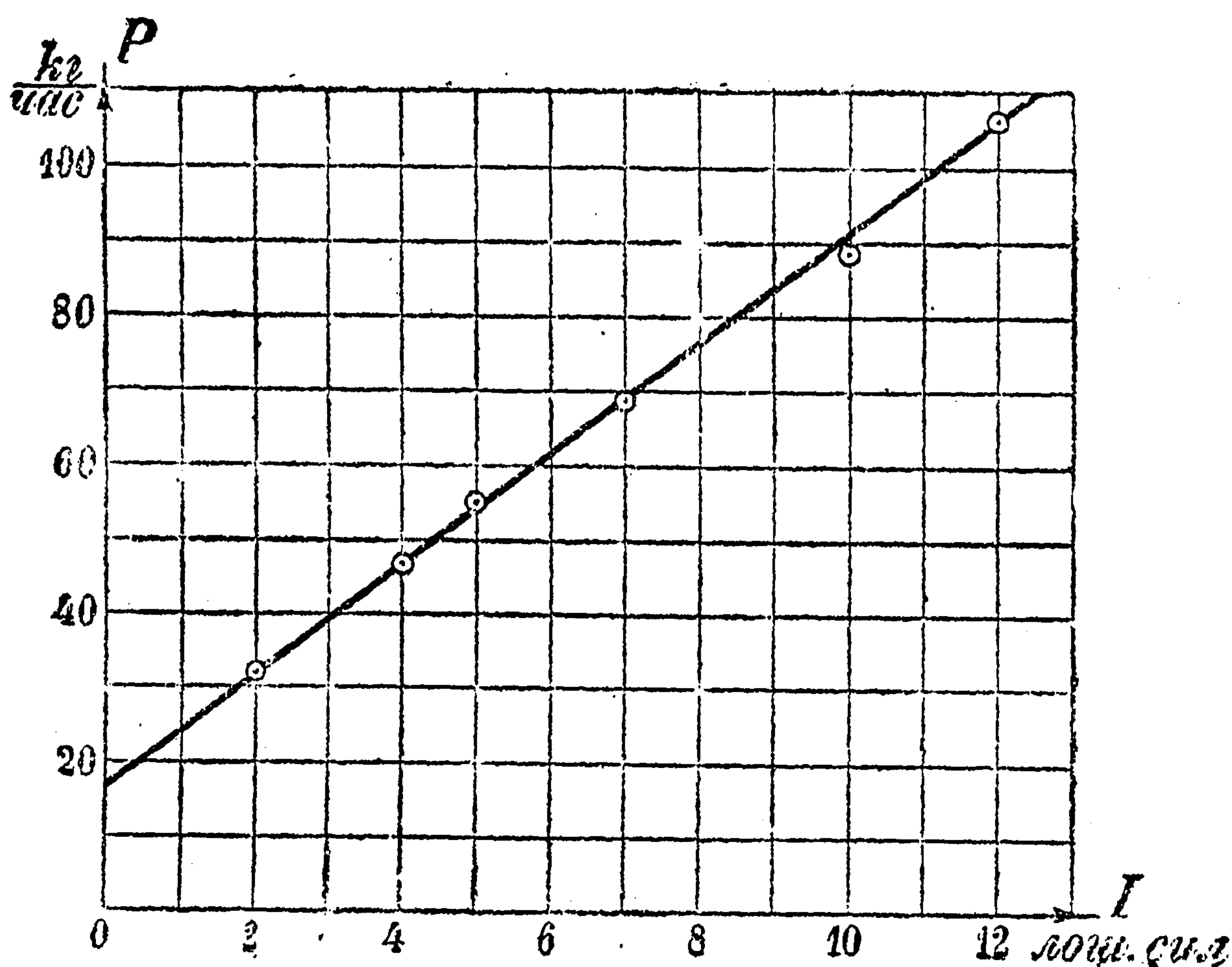


6. Для газомотора была найдена следующая зависимость между индикаторной мощностью  $I$  и действительной мощностью (на вале)  $E$ , в лош. силах:

$I$	1,54	3,09	4,58	5,67	6,50
$E$	0	1,62	3,33	4,71	5,81

Установить линейную формулу, связывающую  $I$  с  $E$ .

Указ. Прямую удобно провести, напр., через точки  $(0,5; 2)$  и  $(4,5; 5,5)$ . Отв.  $I = 1,56 + 0,88 E$ .



Черт. 132.

7. При испытании электровоза получена такая таблица зависимости между током  $I$  (ампер) и тягой его  $P$  (кг):

$I$	65	86	106	116	137	150
$P$	160	360	560	660	850	980

Выразить  $P$  линейно через  $I$ .

Указ. Прямую можно провести через крайние точки. Отв.  $P = 9,65 I - 467$ .

Замечание. Подробнее вопросы этого рода будут рассмотрены в конце 2-й части книги — в Дополнениях. Там же будет указан и чисто вычислительный прием для определения коэффициентов эмпирической формулы.

95. Дальнейшие задачи на прямую. В настоящем п<sup>0</sup> мы рассмотрим еще некоторые задачи на прямую, решение которых приведет к полезным формулам.



1°. Угол между двумя пересекающимися прямыми. Если две прямые заданы их уравнениями (которые мы можем привести к явному виду):

$$(I) y = a_1x + m_1 \quad \text{и} \quad (II) y = a_2x + m_2,$$

то угол  $\omega$  между ними легко находится вычислением наподобие того, как вычислением же мы находили и расстояние между двумя точками. В самом деле, мы знаем, что  $a_1 = \operatorname{tg} \theta_1$ ,  $a_2 = \operatorname{tg} \theta_2$ , где  $\theta_1, \theta_2$  означают углы, образуемые прямыми с осью  $Ox$ . Из черт. 133 видно, что угол  $\theta_1$  (как внешний угол треугольника) равен  $\theta_2 + \omega$ , следовательно,  $\omega = \theta_1 - \theta_2$  и по известной тригонометрической формуле:

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2}{1 + \operatorname{tg} \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_2} = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}. \quad (20)$$

Так как числа  $a_1$  и  $a_2$  нам известны, то по этой формуле найдем  $\operatorname{tg} \omega$ , а затем — по таблицам — и самый угол  $\omega$ . Пусть, например, будут даны прямые  $2x - 3y = 4$  и  $3x + 5y = 1$ , или в явном виде:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \quad \text{и} \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5},$$

так что  $a_1 = \frac{2}{3}$ ,  $a_2 = -\frac{3}{5}$ , и

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{3}{5}\right)}{1 + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{5}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{19}{9} = 2,111,$$

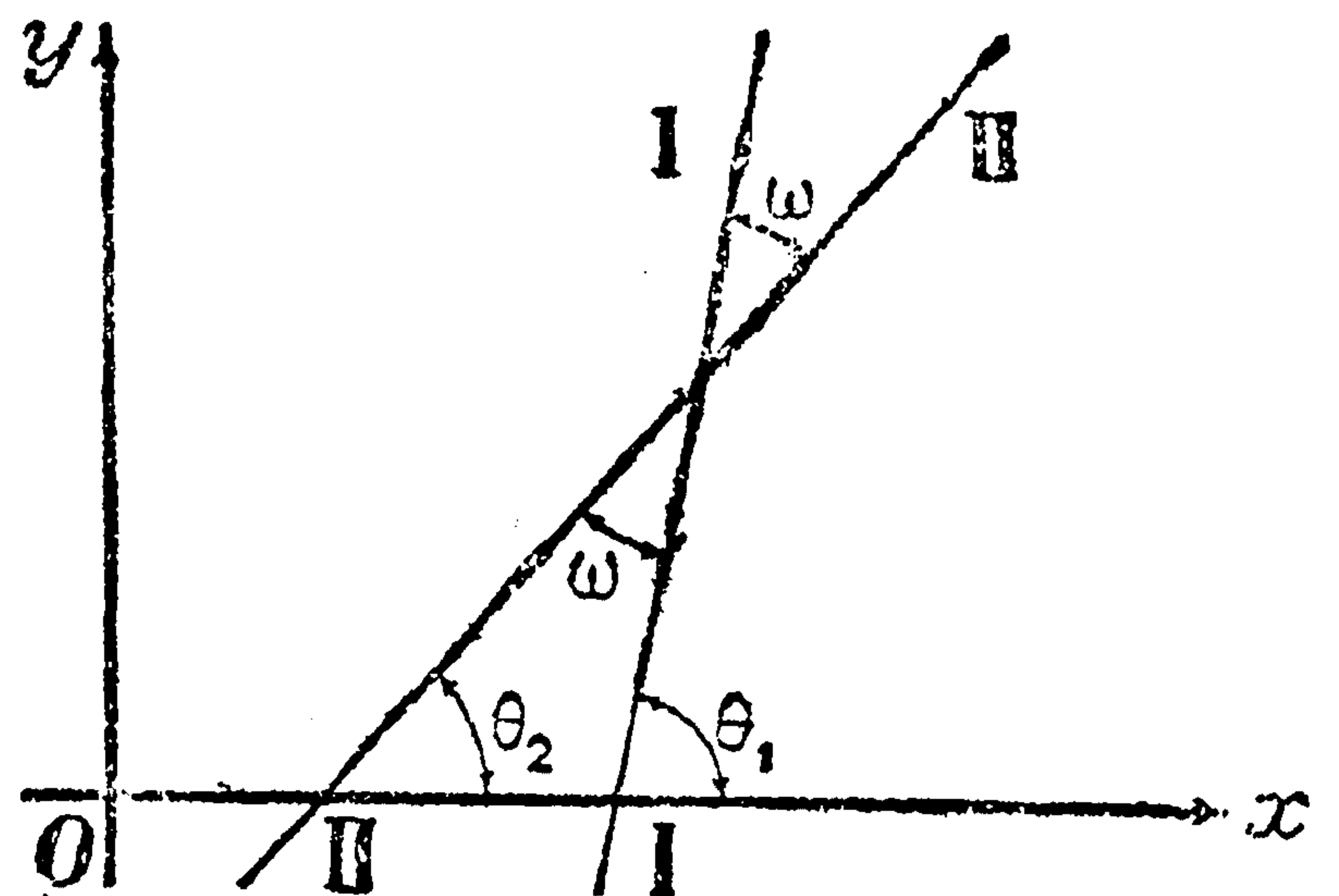
откуда  $\omega = 64^\circ 39'$ .

Другой пример:

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}, \quad y = -5x, \quad a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = -5;$$

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\frac{3}{2} - (-5)}{1 + \frac{3}{2} \cdot (-5)} = \frac{\frac{3}{2} + 5}{1 - \frac{3}{2} \cdot 5} = -1.$$

Так как нас интересует угол в геометрическом смысле, без учета направления угла, то мы знак  $(-)$  отбрасываем; очевидно,  $\omega = 45^\circ$ .



Черт. 133.



Из формулы для  $\operatorname{tg} \omega$  легко вывести аналитические признаки параллельности и перпендикулярности двух прямых (I) и (II). Если эти прямые параллельны, то угол  $\omega$  между ними равен  $0^\circ$  или  $180^\circ$ , а тогда  $\operatorname{tg} \omega = 0$ , следовательно, числитель дроби, выражающей  $\operatorname{tg} \omega$ , должен обратиться в нуль:

$$a_1 - a_2 = 0, \text{ или } a_2 = a_1.$$

и обратно, — из выполнения этого условия вытекает параллельность прямых. Это, впрочем, мы видели и раньше в §4. Для перпендикулярности же двух прямых (I) и (II), очевидно, нужно, чтобы угол  $\omega$  был равен  $90^\circ$  или  $270^\circ$ , т. е. чтобы  $\operatorname{tg} \omega$  обратился в бесконечность, а это возможно лишь тогда, когда знаменатель выражения для  $\operatorname{tg} \omega$  обратится в нуль, т. е.

$$1 + a_1 a_2 = 0, \text{ или } a_2 = -\frac{1}{a_1}.$$

Таким образом,

*условие параллельности:* угловой коэффициент  $a_2$  равен угловому коэффициенту  $a_1$ ;

*условие перпендикулярности:* угловой коэффициент  $a_2$  равен обратной величине углового коэффициента  $a_1$  с обратным знаком.

Если данные прямые выражены уравнениями в неявной форме:

$$(Ia) A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad (IIa) A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то, преобразовав их к явному виду, найдем, что их угловые коэффициенты, соответственно, равны:

$$a_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad a_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Подставим эти выражения, вместо  $a_1$  и  $a_2$ , в полученные выше условия параллельности и перпендикулярности, и таким путем приведем эти условия к следующему виду:

*условие параллельности:*

$$-\frac{A_2}{B_2} = -\frac{A_1}{B_1}, \quad \text{или} \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1},$$

*т. е. коэффициенты при  $x$  и  $y$  в обоих уравнениях пропорциональны;*  
*условие перпендикулярности:*

$$1 + \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} = 0, \quad \text{или} \quad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0,$$

*т. е. сумма произведений соответствующих коэффициентов равна нулю.*



Пусть некоторая прямая задана своим неявным уравнением (12):

$$Ax + By + C = 0.$$

Если, сохранив коэффициенты  $A$  и  $B$ , заменить  $C$  любым числом  $C'$ , то, полученное уравнение

$$Ax + By + C' = 0 \quad (21)$$

выразит прямую, очевидно, параллельную данной прямой. Можно показать, что и обратно — каждая прямая, параллельная данной, выражается уравнением вида (21), которое лишь свободным членом разнится от уравнения данной прямой. Действительно, пусть имеем вторую прямую:

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

параллельную данной, тогда:

$$\frac{A_2}{A} = \frac{B_2}{B}$$

или, если общее значение этих отношений обозначить через  $k$ ,

$$A_2 = A \cdot k \quad \text{и} \quad B_2 = B \cdot k.$$

Разделив на  $k$  уравнение второй прямой (что не отразится на его геометрическом смысле), мы и получим при  $x$  и  $y$  те же коэффициенты, что и в уравнении (12).

Таким образом, можно сказать, что уравнение (21) есть *общий вид уравнения прямой, параллельной данной прямой (12)*. Аналогично устанавливается, что уравнение

$$Bx - Ay + C' = 0 \quad (21a)$$

представляет *общий вид уравнения прямой, перпендикулярной к данной прямой (12)*.

**Задачи. 1.** Среди прямых

$$(I) 2x + 3y = 1, \quad (II) x - 4y = 0, \quad (III) 4x + y - 7 = 0,$$

$$(IV) 4x + 6y - 11 = 0, \quad (V) 3x - 2y - 3 = 0$$

указать, параллельные и перпендикулярные между собой прямые.

*Отв.* Паралл. (I) и (IV); перп. (I) и (V); (II) и (III).

2. Найти угол  $\omega$  между прямыми: *a)*  $2x + 5y = 1$  и  $3x - 2y = 2$ , *b)*  $7x + 3y = 1$  и  $x - y = 1$ , *c)*  $3x - 4y = 1$  и  $4x + 3y = 2$ , *d)*  $2x - y = 4$  и  $4x - 2y = 1$ .

*Отв.* *a)*  $78^\circ 7'$ , *b)*  $62^\circ 26'$ , *c)*  $90^\circ$ , *d)*  $0^\circ$ .

3. Через точку  $(1, 1)$  провести прямую *a)* параллельно прямой  $y = 2x - 3$ , *b)* перпендикулярно к ней, *c)* под углом в  $45^\circ$  к этой прямой.



*Решение.* Согласно 93 [см. (16)] уравнение искомой прямой может быть взято в виде:

$$y - 1 = a(x - 1),$$

где угловой коэффициент  $a$  еще подлежит определению: в случае  $a)$  он должен быть равен угловому коэффициенту данной прямой, т. е. 2; в случае  $b)$   $a = -\frac{1}{2}$ . Наконец, для того чтобы определить  $a$  в случае  $c)$ , положим в форм. (20):  $\omega = 45^\circ$ ,  $a_1 = a$ ,  $a_2 = 2$ , или  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = a$ ; получим:  $\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \frac{a-2}{1+2a}$  или  $1 = \frac{2-a}{1+2a}$ .

Из первого уравнения  $a = -3$ , а из второго  $a = \frac{1}{3}$ ; таким образом, в случае  $c)$  получаются две прямые:  $y - 1 = -3(x - 1)$ ,  $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$  (начертить).

4. Через точку  $(-2, 0,5)$  провести прямую,  $a)$  параллельную и  $b)$  перпендикулярную к прямой  $3x - 7y + 13 = 0$ .

*Решение.* Если представить уравнение данной прямой в явном виде:

$$y = \frac{3}{7}x + \frac{13}{7},$$

то станет очевидным, что угловой коэффициент искомой прямой в случае  $a)$  должен равняться  $\frac{3}{7}$ , а в случае  $b)$   $-\frac{7}{3}$ , так что, согласно (14), уравнения иско- мых прямых будут:

$$a) y - 0,5 = \frac{3}{7}(x + 2), \quad b) y - 0,5 = -\frac{7}{3}(x + 2).$$

Однако легко избежать необходимости представлять данное уравнение в явном виде, если воспользоваться уравнениями (16  $a$ ) и (21) или (21  $a$ ). Уравнение

$$A(x + 2) + B(y - 0,5) = 0$$

выражает (при произвольных  $A$  и  $B$ ) любую прямую, проходящую через дан- ную точку; для того чтобы эта прямая была параллельна прямой  $3x - 7y + 13 = 0$ , достаточно взять  $A = 3$  и  $B = -7$ ; для того же, чтобы прямая оказалась перпен- дикулярна данной, проще всего положить  $A = 7$ ,  $B = 3$ . Таким образом, ответ с р а з у можно писать в виде:

$$a) 3(x + 2) - 7(y - 0,5) = 0, \quad b) 7(x + 2) + 3(y - 0,5) = 0.$$

5. Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $(x_1, y_1)$  и парал- лельной прямой (12).

$$\text{Отв. } A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

6. Провести через точку  $(0, -2)$  прямую, перпендикулярную к прямой, со- единяющей точки  $(2, -3)$  и  $(-1, 3)$ .

*Решение.* Прямая, соединяющая названные точки, в силу (19) имеет урав- нение:

$$y + 3 = \frac{3+3}{-1-2}(x - 2), \quad \text{или } 2x + y - 1 = 0,$$

а тогда искомая прямая будет [см. (16  $a$ ) и (21  $a$ )]:

$$1 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y + 2) = 0 \quad \text{или } x - 2y - 4 = 0.$$

2°. *Расстояние между двумя параллельными прямыми.* Пусть две парал-



лельные прямые заданы своими уравнениями, которые, как мы видели, всегда можно предположить приведенными к виду:

$$(I) Ax + By + C = 0, \quad (II) Ax + By + C' = 0.$$

Из черт. 134 ясно, что расстояние  $d$  между этими прямыми выражается, напр., перпендикуляром  $KL$ . Если обозначить через  $\theta$  угол, составленный любой из данных прямых с осью  $Ox$ , то из  $\triangle KKL'$  будем иметь:

$$d = KL = KK' \cdot \cos \theta.$$

Отрезок  $KK'$  равен разности отрезков  $m'$  и  $m$ , отсекаемых нашими прямыми на оси  $Oy$ ; но [92]

$$m = -\frac{C}{B}, \quad m' = -\frac{C'}{B},$$

так что

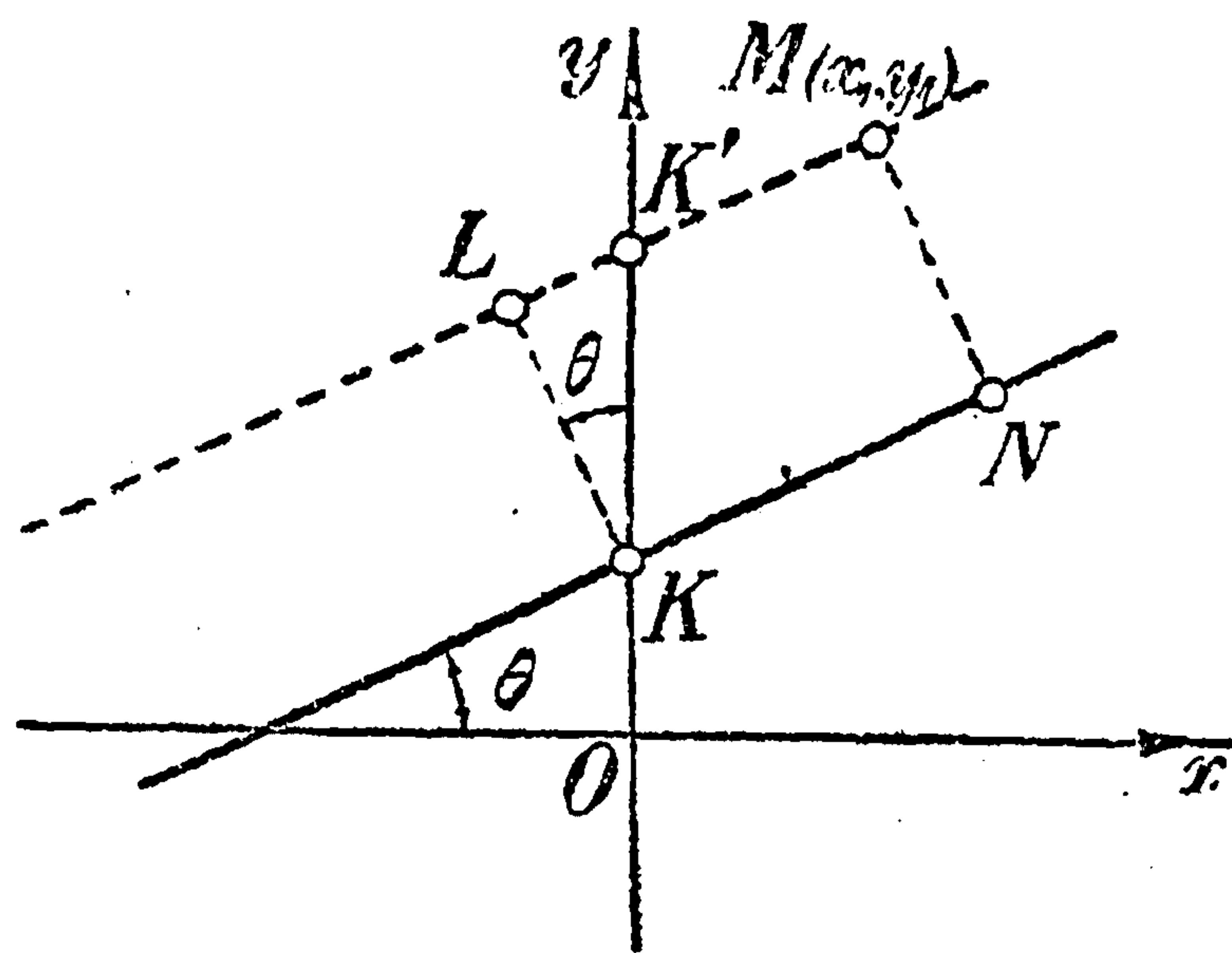
$$KK' = m' - m = \frac{C - C'}{B}.$$

С другой стороны, угловой коэффициент данных прямых есть

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{A}{B},$$

откуда

$$\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Черт. 134.

Вставляя в выражение для расстояния  $d = KL$  полученные значения  $KK'$  и  $\cos \theta$ , найдем окончательно:

$$d = \pm \frac{C - C'}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (22)$$

Знак должен быть выбран так, чтобы в результате получилось положительное число; иными словами:

$$d = \frac{|C - C'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (22a)$$

Напр., для прямых

$$4x - 9y - 10 = 0, \quad 4x - 9y + 2 = 0$$

имеем

$$d = \frac{2 - (-10)}{\sqrt{4^2 + (-9)^2}} = \frac{12}{\sqrt{97}} \approx 1,215.$$

Если даны прямые

$$4x + 3y + 2,2 = 0, \quad 2x - 1,5y + 1,4 = 0,$$

то хотя по пропорциональности коэффициентов:

$$\frac{-4}{2} = \frac{3}{-1,5} (= -2)$$

и ясно, что они параллельны, но непосредственно пользоваться формулой (22) или (22a) еще нельзя — сначала нужно уравнивать коэффициенты при  $x$  и  $y$  в обоих уравнениях. С этой целью умножим второе уравнение на  $-2$ :

$$-4x + 3y - 2,8 = 0$$



и тогда:

$$d = \frac{-2,2 - (-2,8)}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{5}{5} = 1.$$

3°. *Расстояние от точки до прямой.* Предположим, что заданы точка  $M$  и некоторая прямая: точка — своими координатами  $(x_1, y_1)$ , а прямая — уравнением

$$Ax + By + C = 0.$$

Для того чтобы определить расстояние  $\delta$  от точки  $M$  до этой прямой, мы проведем через  $M$  параллельную прямую (черт. 134); тогда, очевидно, расстояние  $d = KL$  между обеими параллельными прямыми и будет вместе с тем и искомым расстоянием. Уравнение проведенной прямой (см. зад. 5) будет

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \quad \text{или} \quad Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0,$$

так что по формуле (22), полагая  $C' = -Ax_1 - By_1$ ,

$$\delta = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (23)$$

или

$$\delta = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (23a)$$

Обращаем внимание читателя, что в числителе этой формулы стоит *число*, которое получится из *левой части* уравнения данной прямой, если в нее подставить, вместо текущих координат, координаты данной точки. Это обстоятельство облегчает запоминание формулы. Пусть, напр., дана прямая  $3x - 2y + 5 = 0$  и точка  $M(-1, 2)$ ; тогда расстояние между ними будет:

$$\delta = \pm \frac{3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 + 5}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \doteq 0,5547.$$

*Задачи. 7.* Найти расстояния между прямыми:

$$a) 2x + 5y + 11 = 0, \quad 2x + 5y + 3 = 0; \quad b) -3x + 7y + 4 = 0, \quad 3x - 7y + 4 = 0;$$

$$c) 0,8x - 1,2y + 2 = 0, \quad 4x - 6y - 1 = 0.$$

*Отв. a)*  $d = \frac{8}{\sqrt{29}} \doteq 1,486$ ; *b)* умножить второе уравнение на  $(-1)$ ,  $d = \frac{8}{\sqrt{58}} \doteq 1,0504$ ; *c)* умножить первое уравнение на  $5$ ,  $d = \frac{11}{\sqrt{52}} \doteq 1,525$ .

8. Найти расстояние между точкой и прямой в следующих случаях:

$$a) (-2, 3), \quad 5x - y + 7 = 0; \quad b) (1,5, 0), \quad 12x - 5y + 1 = 0;$$

$$c) (0,2, 0,5), \quad 5x - 8y + 3 = 0; \quad d) (0, 0), \quad x + y + 1 = 0,$$

*Отв. a)*  $\delta = \frac{6}{26} \doteq 1,176$ ; *b)*  $\delta = \frac{19}{13}$ ; *c)*  $\delta = 0$ , точка лежит на прямой!

$$d) \delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0,7071.$$

9. На каком расстоянии точка  $(0, -2)$  отстоит от прямой, соединяющей точки  $(2, -3)$  и  $(-1, 3)$ ?

*Решение.* Мы уже имели в зад. 6 уравнение этой прямой:

$$2x + y - 1 = 0;$$

в таком случае искомое расстояние:

$$\delta = \frac{3}{\sqrt{5}} \doteq 1,342.$$



Интересно сопоставить эту задачу с задачей 6: там мы искали уравнение перпендикуляра, а здесь — длину его отрезка.

10. Провести прямую, параллельную прямой  $2x + y - 1 = 0$ , так, чтобы расстояние от начала координат до нее было равно  $\sqrt{5}$ .

*Решение.* Искомая прямая выражается уравнением [см. (21)]:

$$2x + y + C' = 0;$$

ее расстояние до начала координат получится по формуле (23а), при  $x_1 = y_1 = 0$ :

$$\delta = \frac{|C'|}{\sqrt{5}}$$

Так как, по требованию задачи, это расстояние должно равняться  $\sqrt{5}$ , то отсюда:  $|C'| = 5$ , так что  $C' = \pm 5$ . Итак, в виде ответа получаются две прямые:

$$2x + y \pm 5 = 0.$$

Геометрически легко проверить, что так и должно быть; но мы решили задачу чисто аналитически, даже без чертежа, который лишь теперь мы содейдем читателю сделать.

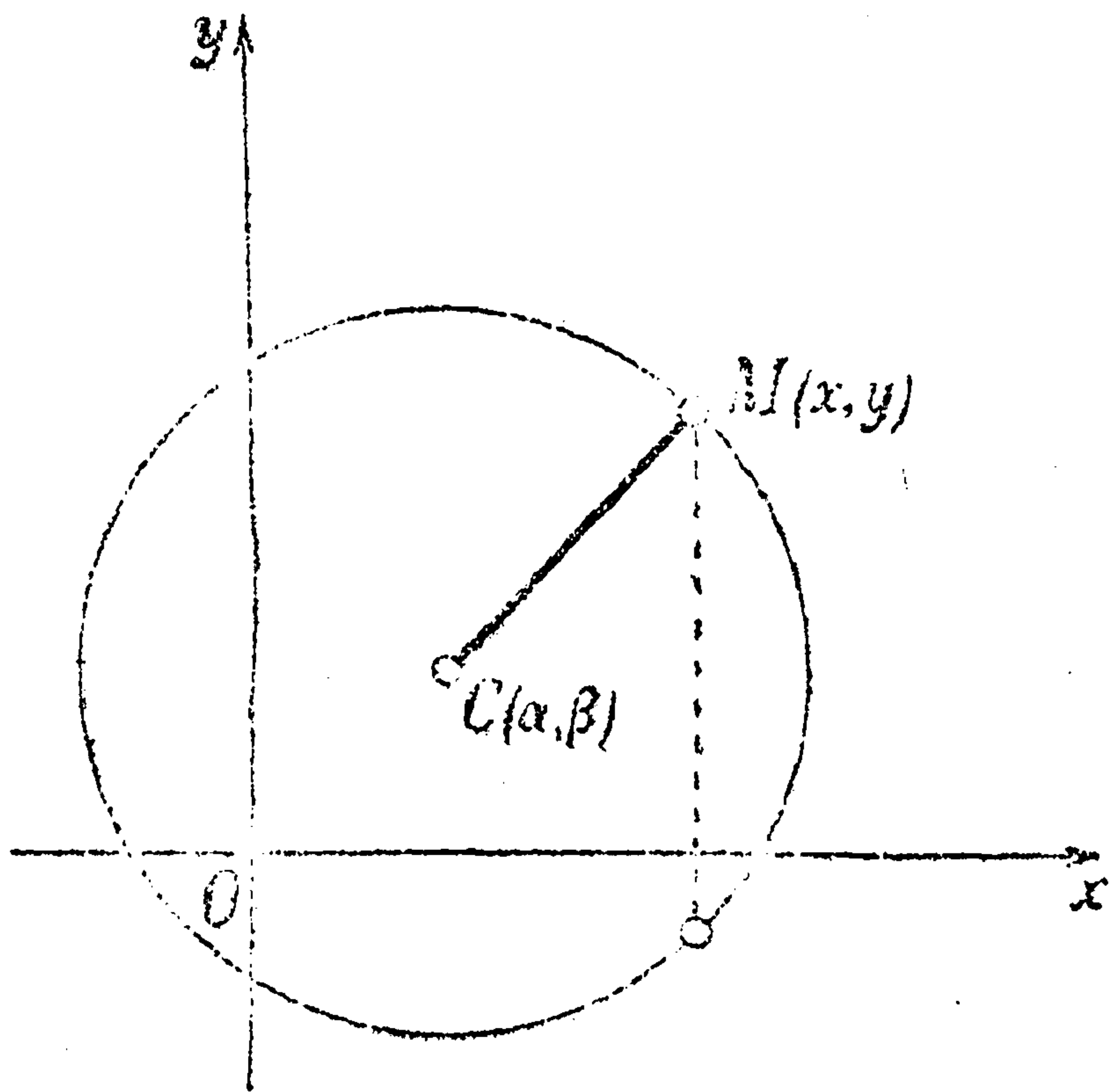
Изложенными простейшими задачами на прямую мы и ограничимся; их все же достаточно для того, чтобы у читателя составилось представление о возможности применения аналитических приемов к решению геометрических вопросов. Мы переходим теперь к ознакомлению с некоторыми кривыми, играющими роль в механике и технике, главным образом — с точки зрения их аналитического представления.

**96. Окружность.** После прямой на первом месте стоит, конечно, окружность, с которой мы и начнем. Мы знаем, что *окружностью* называется геометрическое место точек  $M$ , расстояния которых от постоянной точки  $C$  (центр) равны постоянному отрезку  $R$  (радиус).

Если (черт 135а) координаты точки  $M$  обозначить через  $(x, y)$ , а координаты центра  $C$  через  $(\alpha, \beta)$ , то — пользуясь формулой (1) [88] для расстояния между двумя точками — можно записать это определение в следующей форме:

$$[CM = ] \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = R.$$

В сущности это и есть *уравнение окружности*: ему удовлетворяет каждая точка  $M(x, y)$  нашей окружности; точки же, не лежащие на окружности, не могут ему удовлетворять [ибо расстояние их от  $C(\alpha, \beta)$



Черт. 135 а).



не равно  $R$ ]. Возведя обе части в квадрат, мы получим равносильное, но более простое по форме уравнение:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \quad (24)$$

В такой форме обычно и пользуются уравнением окружности. Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $R$  — постоянные числа (координаты центра окружности и ее радиус), а  $x$  и  $y$  „текущие координаты“, т. е. координаты переменной точки  $M$  окружности. Если центром служит начало координат, то уравнение окружности принимает более простой вид;

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Хотя уравнение (24) окружности можно разрешить относительно  $y$  и получить *явное уравнение*

$$y = \beta \pm \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2},$$

выражающее ординату  $y$  в виде функции от абсциссы  $x$ , но так как каждому  $x$  здесь соответствуют *две* точки окружности (одна *выше* центра, а другая — *ниже* его; см. чертеж) и *два* значения  $y$  (вследствие чего и *двойной знак* перед корнем), то предпочитают выражать окружность уравнением в *неявной* форме (24).

Если переписать уравнение (24) в развернутом виде и положить

$$-2\alpha = p, \quad -2\beta = q, \quad \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = r,$$

то получим:

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0. \quad (24a)$$

Эта сумма квадратов  $x^2 + y^2$ , в сопровождении членов низших измерений, и является характерной для уравнения окружности. Обратно, если дано уравнение вида (24a), по нему не трудно восстановить  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $R$  и написать уравнение в форме (24). Пусть, напр., дано:

$$x^2 + y^2 - 3,6x + 4,5y - 0,6975 = 0.$$

Сумму  $x^2 - 2 \cdot 1,8x$  дополняем до полного квадрата членом  $1,8^2 = 3,24$ , а сумму  $y^2 + 2 \cdot 2,25y$  — членом  $2,25^2 = 5,0625$ , и, конечно, тотчас же для компенсации эти члены вычитаем; в результате получим:

$$(x - 1,8)^2 + (y + 2,25)^2 - 0,6975 - 3,24 - 5,0625 = 0$$

или

$$(x - 1,8)^2 + (y - (-2,25))^2 = 3^2,$$

т. е. уравнение вида (24); наша окружность, очевидно, имеет центр  $(1,8, -2,25)$  и радиус  $R = 3$ . Аналогично можно поступить и с общим уравнением (24a), представив его в виде:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 - r.$$

Это уравнение отождествляется с (24), если положить

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = -\frac{q}{2}, \quad R^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 - r.$$

[При этом мы, конечно, предполагаем последнее выражение положительным, иначе наше уравнение вообще не выражало бы никакой кривой!]



Легко видеть, что уравнение

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (24b)$$

делением на  $A$  сразу приводится к виду (21a), следовательно, и оно выражает окружность; это и будет самый общий вид уравнения окружности.

**Задачи.** 1. Написать уравнения окружностей, изображенных на черт. 135b).

*Отв.*  $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$ ;  $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + (y-5)^2 = 1$ ;  
 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ ;  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ ;  $(x-7)^2 + (y+1)^2 = 1$ ;  $(x-7)^2 + y^2 = 9$ .

2. Найти точки пересечения окружности  $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$  и прямой  $x+y+1=0$ .

*Реш.* Точки пересечения должны удовлетворять обоим уравнениям, так что их координаты находятся, если совместно решить эти уравнения как систему. Подставляя в первое из них, вместо  $y$ , его выражение:  $y = -x - 1$ , найденное из второго, получим для  $x$  квадратное уравнение, из которого  $x = 1$  или  $-6$ , в соответствии с чем  $y = -2$  или  $5$ .

*Отв.*  $(1, -2)$  и  $(-6, 5)$ .

3. Найти точки пересечения окружностей с центрами в точках  $C(1, -1)$ ,  $C'(-2, 0)$  и с радиусами  $R=3$  и  $R'=\sqrt{13}$ .

*Указ.* Представив уравнения окружностей в развернутом виде:  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ ,  $x^2 + y^2 + 4x - 9 = 0$ , следует вычесть одно из другого и полученное уравнение первой степени:  $6x - 2y - 2 = 0$  решить совместно с одним из предшествующих уравнений. *Отв.*  $(1, 2)$  и  $(-0,8, -3,4)$ .

4. Написать уравнение окружности, имеющей центр в точке  $(2, -2)$  и проходящей через точку  $(1, 0)$ . *Указ.* Радиусом окружности служит расстояние между точками  $(2, -2)$  и  $(1, 0)$ . *Отв.*  $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 5$ .

5. Выявить центр и радиус окружности:

$$5x^2 + 5y^2 + 2x - 3y - 0,6 = 0.$$

*Реш.* Разделив на 5 и дополняя члены, содержащие  $x$ , и члены, содержащие  $y$ , до полного квадрата суммы (разности), последовательно получим:

$$x^2 + y^2 + 0,4x - 0,6y - 0,12 = 0, \quad (x+0,2)^2 + (y-0,3)^2 = 0,25,$$

откуда видно, что  $\alpha = -0,2$ ;  $\beta = 0,3$ ;  $R = 0,5$ .

6. Провести окружность через три точки:

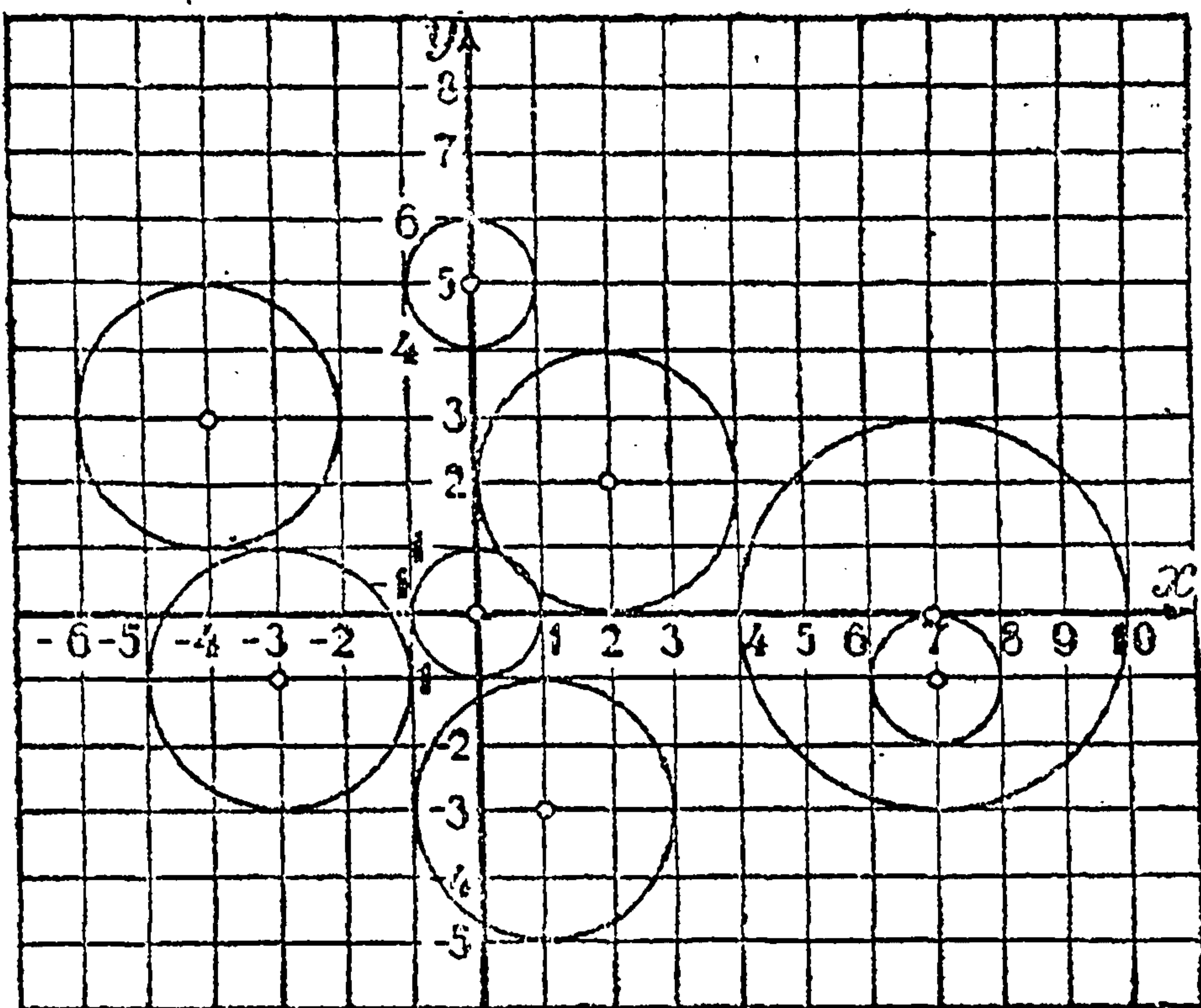
$$1) A(1,7, -0,7), \quad B(-0,7, -0,7), \quad C(1, 0);$$

$$\text{или } 2) A(-1,2, 2,0), \quad B(3,4, 0,9), \quad C(4,8, -1,5);$$

$$\text{или } 3) A(0,5, -1,3), \quad B(-1,5, -2,1), \quad C(1, -1,1).$$

1) *Реш.* Удобно искать уравнение окружности в виде (24a). Так как данные точки должны ему удовлетворять, то, подставляя их координаты вместо  $x, y$ , поочередно, получим:

$$1,7^2 + (-0,7)^2 + 1,7p - 0,7q + r = 0 \quad \text{или} \quad +1,7p - 0,7q + r = -3,38,$$



Черт. 135 b).



и аналогично

$$-0,7p - 0,7q + r = -0,98, \quad p + r = -1.$$

Полученную систему уравнений относительно  $p$ ,  $q$  и  $r$  решаем:  $p = -1, q = 2,4, r = 0$ , так что искомое уравнение будет:

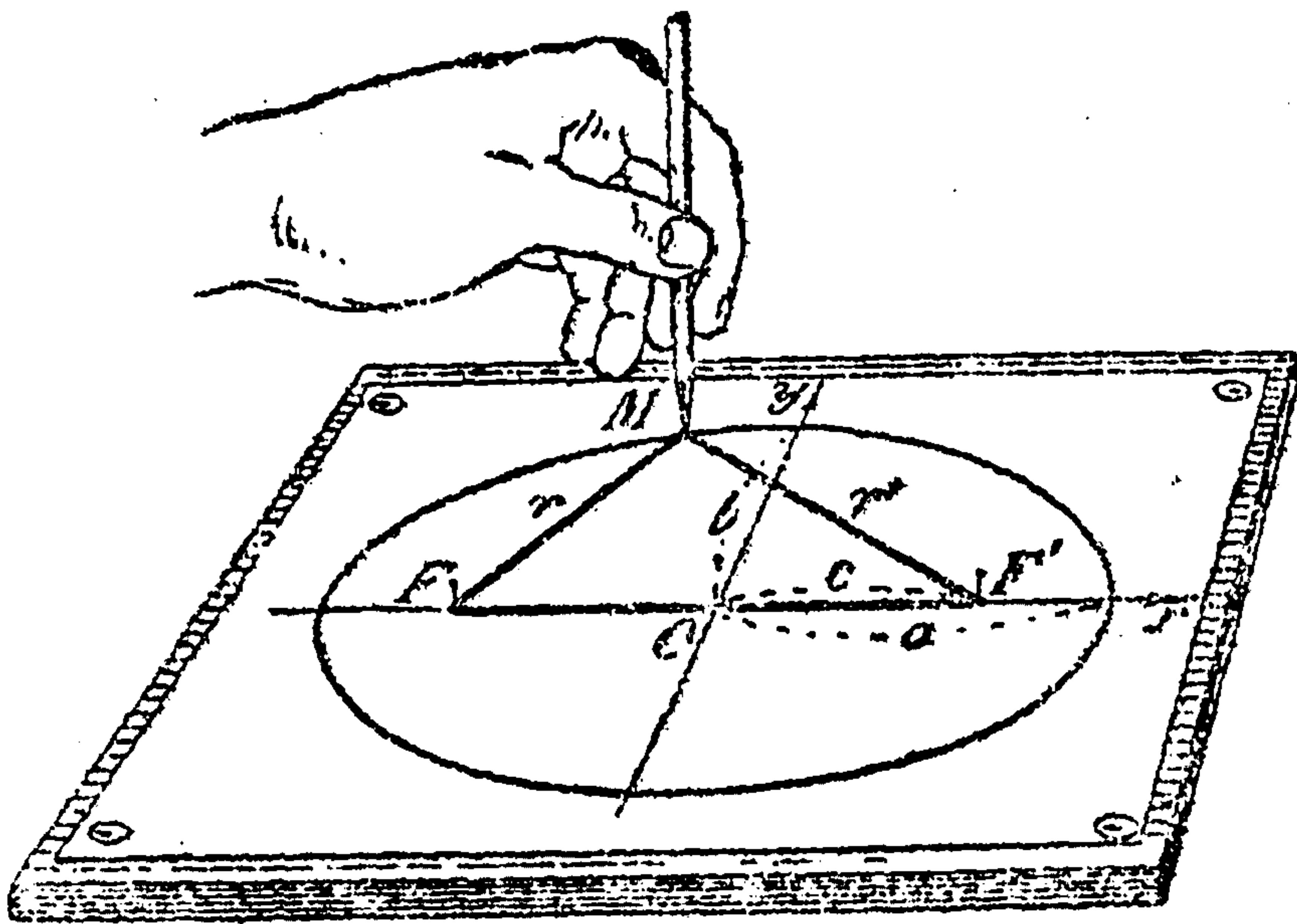
$$x^2 + y^2 - x + 2,4y = 0$$

или, если угодно, переходя к виду (24):

$$(x - 0,5)^2 + (y + 1,2)^2 = 1,3^2.$$

2) *Отв.*  $x^2 + y^2 - 0,26x + 5,23y - 16,21 = 0$  (коэффициенты округлены!) или  $(x - 0,13)^2 + (y + 2,12)^2 = 4,97^2$ .

3) *Отв.* Задача невозможна, ибо три точки лежат на одной прямой, в чем легко убедиться, вычислив площадь составленного ими  $\Delta$ ; она окажется равной 0 [ср. 91, зад. 1, c)].



Черт. 136.

97. **Эллипс.** Важнейшей после окружности кривой является эллипс. Его геометрическое определение может быть дано в следующей форме (черт. 136):

Эллипс есть геометрическое место точек  $M$ , для которых сумма расстояний  $r = MF$  и  $r' = MF'$  до двух постоянных точек  $F$  и  $F'$  (называемых фокусами) равна данному постоянному отрезку  $2a$ .

Из чертежа видно, как получается подобная кривая: нить длиной  $2a$  прикрепляется концами в точках  $F$  и  $F'$  и натягивается с помощью карандаша; острие карандаша  $M$  будет чертить эллипс, потому что сумма расстояний его до точек  $F$  и  $F'$ , очевидно, всегда будет равна длине нити, т. е.  $2a$ .

Желая вывести уравнение эллипса, мы положим в основу не произвольную систему координатных осей, как сделали это в случае прямой или окружности, но надлежащим образом подобранную, для того чтобы и выкладки, и само уравнение эллипса были проще. Именно, за ось  $Ox$  мы возьмем прямую  $FF'$ , а за ось  $Oy$  — перпендикуляр к отрезку  $FF'$  в его середине  $O$  (черт. 136). Пусть  $FF' = 2c$ , так что абсциссы фокусов  $F$  и  $F'$  будут, соответственно,  $-c$  и  $+c$ . Очевидно,  $2c < 2a$ , или  $c < a$ , ибо иначе определение эллипса было бы бессмысленно, так как в  $\Delta FMF'$  сумма двух сторон:  $MF + MF' = 2a$  должна быть больше третьей  $FF' = 2c$ . Если обозначить через  $(x, y)$  координаты произвольной точки  $M$  эллипса, то по формуле (1) 88,

$$r = MF = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad r' = MF' = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \quad (25)$$

и определение эллипса может быть записано так:

$$[r + r' = 2a] \quad \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$



Это и есть уравнение эллипса, но еще в неудобной форме. Переносим один из радикалов направо и избавляясь обычным путем от корней, последовательно получим:

$$(x + c)^2 + y^2 = (x - c)^2 + y^2 + 4a^2 - 4a \sqrt{(x - c)^2 + y^2};$$

$$a^2 - cx = a \sqrt{(x - c)^2 + y^2};$$

$$a^4 + c^2 x^2 = a^2 x^2 + a^2 c^2 + a^2 y^2;$$

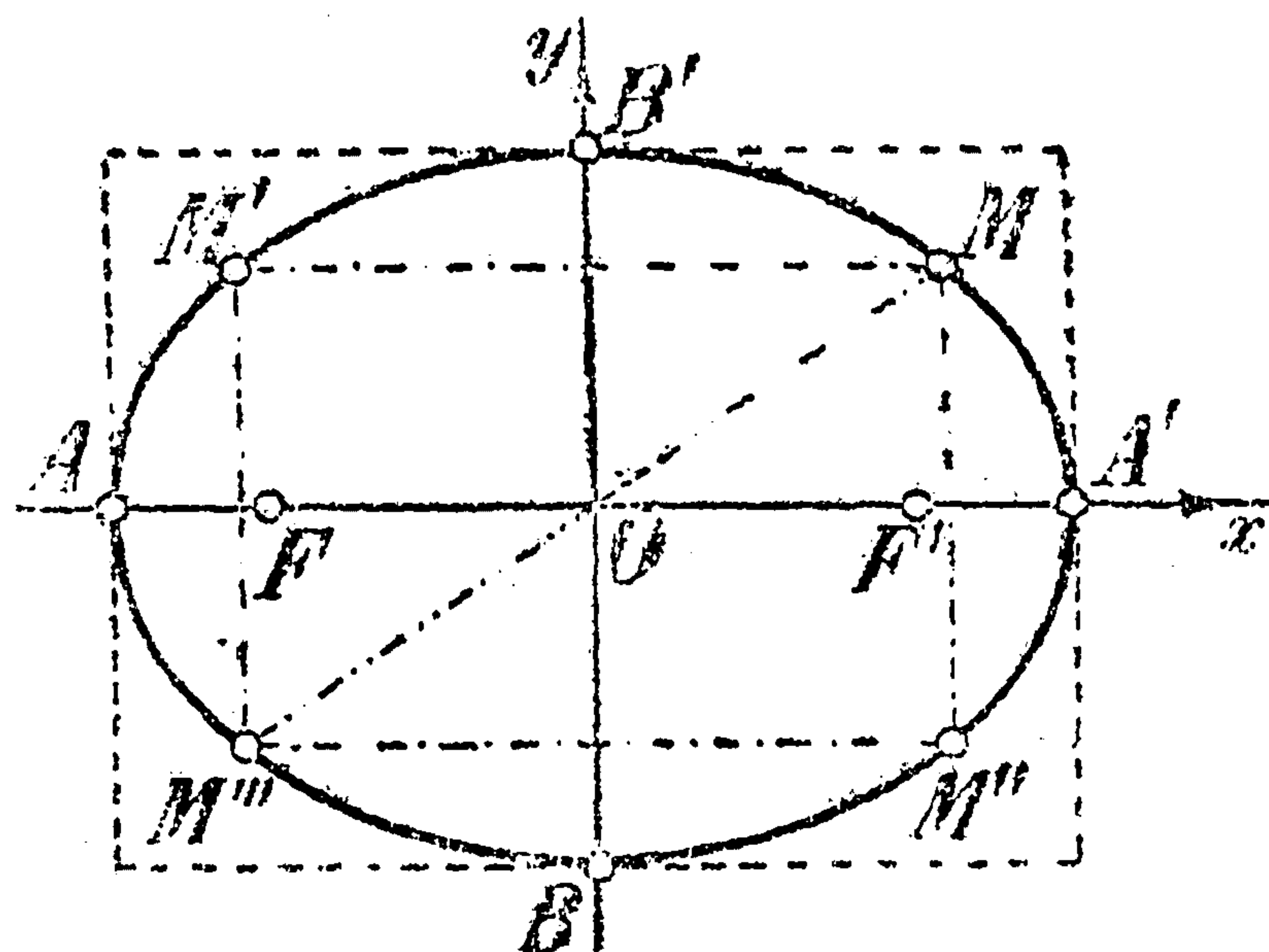
$$x^2 (a^2 - c^2) + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2);$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Так как  $a > c$ , то можно положить  $a^2 - c^2 = b^2$  ( $b$  есть катет прямоугольного треугольника, у которого другой катет  $c$ , а гипотенуза  $a$ ) и тогда уравнение эллипса (при выбранных осях!) представится в простом виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (26)$$

98. Общий вид кривой. Оси и центр симметрии. Полученное нами уравнение эллипса позволяет сразу сделать ряд заключений об этой кривой:



Черт. 137.

1. Каждое из слагаемых  $\frac{x^2}{a^2}$  и  $\frac{y^2}{b^2}$  не может быть больше 1, следовательно,  $x^2 \leq a^2$  и  $y^2 \leq b^2$ , так что  $x$  по абсолютному значению не превосходит  $a$ , а  $y$  по абсолютному же значению не превосходит  $b$ . Иными словами:  $x$  может изменяться лишь между  $-a$  и  $a$ , а  $y$  лишь между  $-b$  и  $b$ , и вся кривая уместится в прямоугольнике (черт. 137) со сторонами  $2a$  и  $2b$ , параллельными осям.

2. Ордината  $y$  входит в уравнение лишь в квадрате, и, решая уравнение эллипса относительно  $y$ , мы получим для него (при данном  $x$ ) два значения:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (26a)$$

которые равны между собой по абсолютному значению, но разнятся знаками. Соответствующие данному  $x$  две точки кривой лежат одна над осью  $Ox$  ( $y > 0$ ), а другая на таком же расстоянии под этой осью. Ось абсцисс служит, таким образом, для эллипса осью симметрии.

То же можно сказать и об оси  $Oy$ , так как и абсцисса  $x$  входит в уравнение эллипса лишь в квадрате.



3. Итак, если взять на эллипсе произвольную точку  $M$ , то, опустив из нее перпендикуляры на оси координат и продолжив их на такое же расстояние по другую сторону осей, мы снова придем к точкам  $M'$  и  $M''$  того же эллипса. Повторив это построение, мы, очевидно, от обеих точек  $M'$  и  $M''$  придем к одной и той же точке  $M'''$  (четвертой вершине прямоугольника со сторонами  $MM'$  и  $MM''$ ), которая также лежит на эллипсе. Хорда  $MM'''$  делится в точке  $O$  пополам; это справедливо для всякой хорды эллипса, проходящей через начало координат. Иными словами, если любую точку эллипса ( $M$ ) соединить с точкой  $O$  прямой и продолжить ее на такое же расстояние по другую сторону от  $O$ , то снова придем к точке эллипса ( $M'''$ ). Это свойство точки  $O$  выражают, называя ее *центром симметрии* (или просто *центром*) эллипса.

4. В виду симметрии эллипса относительно осей, достаточно составить себе представление о ходе кривой в первой четверти. Взяв поэтому в явном уравнении (26 а) эллипса знак (+), при  $x=0$  имеем:  $y=b$ , так что эллипс проходит через точку  $B'$  прямоугольника. При возрастании  $x$  подкоренное выражение, а с ним и  $y$ , убывают; наконец, при  $x=a$  (большим, чем  $a$ ,  $x$  уже не может быть!)  $y$  обращается в 0, т. е. и точка  $A'$  принадлежит эллипсу. В общем кривая имеет указанный на чертеже вид. (Ср. черт. 29.)

Точки  $A, A', B, B'$  называются *вершинами* эллипса, отрезки  $AA'$  и  $BB'$ , соответственно, *большой и малой осями* эллипса, так что  $a$  и  $b$  будут длины его *полуосей* (теперь лишь выявляется геометрическая роль числа  $b$ , которым мы по началу просто для удобства заменили  $\sqrt{a^2-c^2}$ ).

Расстояние  $c=FO=OF'$  фокусов эллипса от его центра называется *линейным эксцентриситетом* эллипса, в отличие от отвлеченного числа  $\frac{c}{a}=\epsilon$  (всегда меньшего 1), которое называется *численным эксцентриситетом*, или просто — *эксцентриситетом*. При  $\epsilon=0$  имеем  $c=0$ ,  $b=a$ , фокусы сливаются с центром, уравнение эллипса (26) принимает вид:  $x^2+y^2=a^2$  и эллипс превращается в окружность (что и геометрически очевидно); таким образом, *окружность можно рассматривать как частный случай эллипса*. Чем меньше число  $\epsilon$ , тем ближе эллипс по форме напоминает окружность, наоборот, если эксцентриситет  $\epsilon$  близок к 1, то эллипс получает форму очень вытянутого овала.

Как известно, каждая из планет (в том числе и наша Земля) вращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится само Солнце. Но эксцентриситеты планетных орбит очень малы (для Земли — 0,0168; наибольший эксцентриситет у Меркурия — 0,2056), так что эти орбиты близки к круговым.

Заметим еще, что фигура Земли часто принимается за так называемый *сжатый эллипсоид вращения*, т. е. за тело, полученное от вращения эллипса вокруг его малой оси. Для этого эллипса по Бесселю:  $a \parallel = 6377,397$  км,  $b = 6356,079$  км, так что и здесь эксцентриситет мал:  $\epsilon = 0,0817$ .

99. **Эллипс и вписанный и описанный круги.** Отложив на осях, координат вправо и влево отрезки  $a$ , вверх и вниз отрезки  $b$  ( $b < a$ ), на полученных отрезках, как на диаметрах, построим окружности (черт. 138). Произвольный луч, исходящий из начала, пересечет эти окружности со-



ответственно в точках  $K$  и  $L$ . Выполним теперь следующее построение: из точки  $K$  проведем прямую  $KM$  параллельно оси  $Ox$ , а из точки  $L$  — прямую  $LM$  параллельно оси  $Oy$ . Точка пересечения  $M$  этих прямых лежит на эллипсе, имеющем отложенные отрезки  $2a$  и  $2b$  своими осями.

Для доказательства этого обозначим координаты точек  $M$ ,  $K$  и  $L$  соответственно через  $(x, y)$ ,  $(X, y)$ ,  $(x, Y)$ . Из рассмотрения подобных  $\Delta$ -ов  $OLN$  и  $OKP$ , получим

$$\frac{Y}{y} = \frac{LN}{KP} = \frac{OL}{OK} = \frac{a}{b},$$

откуда

$$Y = \frac{ay}{b}.$$

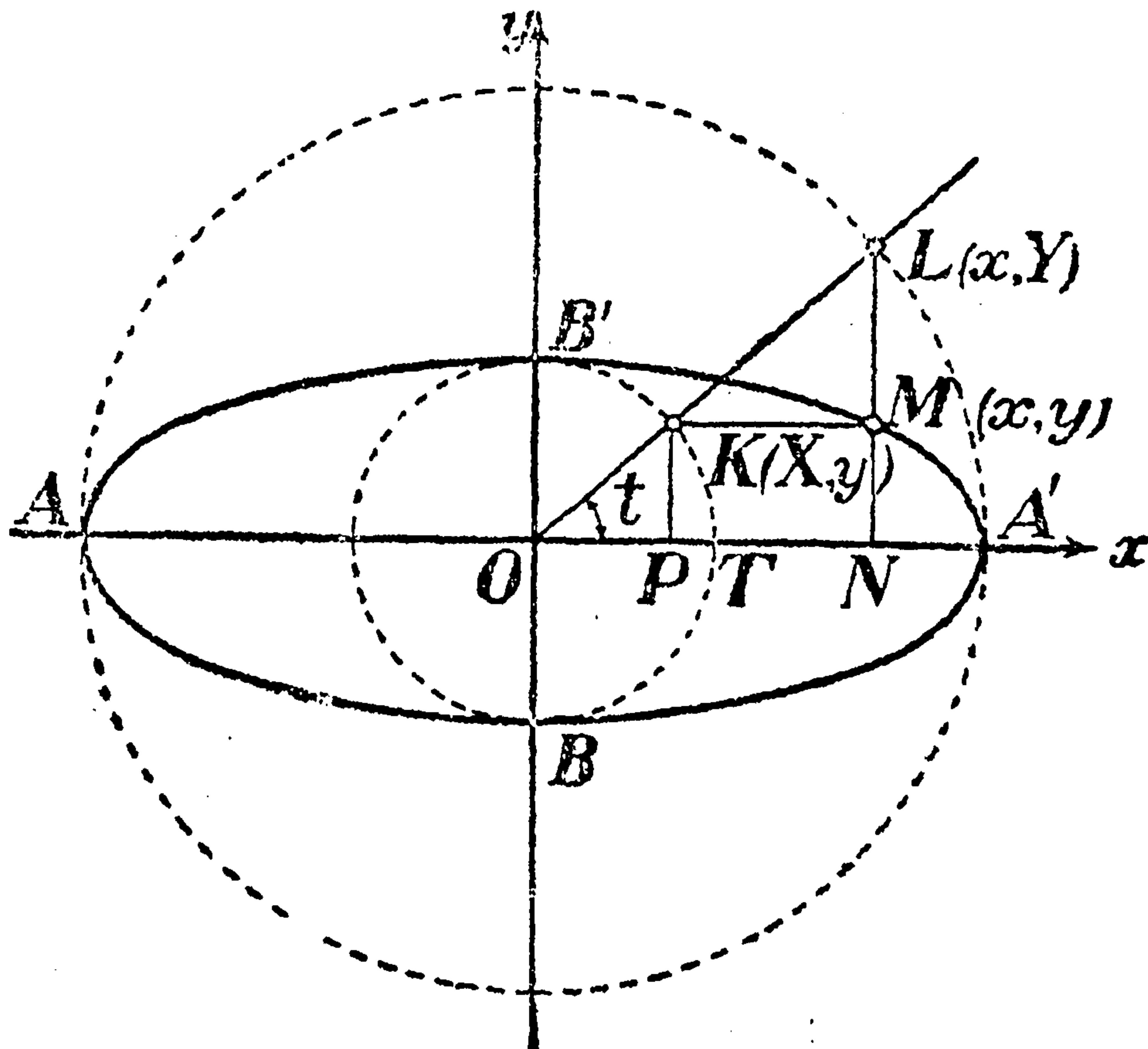
Так как, в силу уравнения (большой) окружности  $x^2 + Y^2 = a^2$ , то, подставляя сюда вместо  $Y$  полученное выражение, после простых преобразований приходим к результату:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

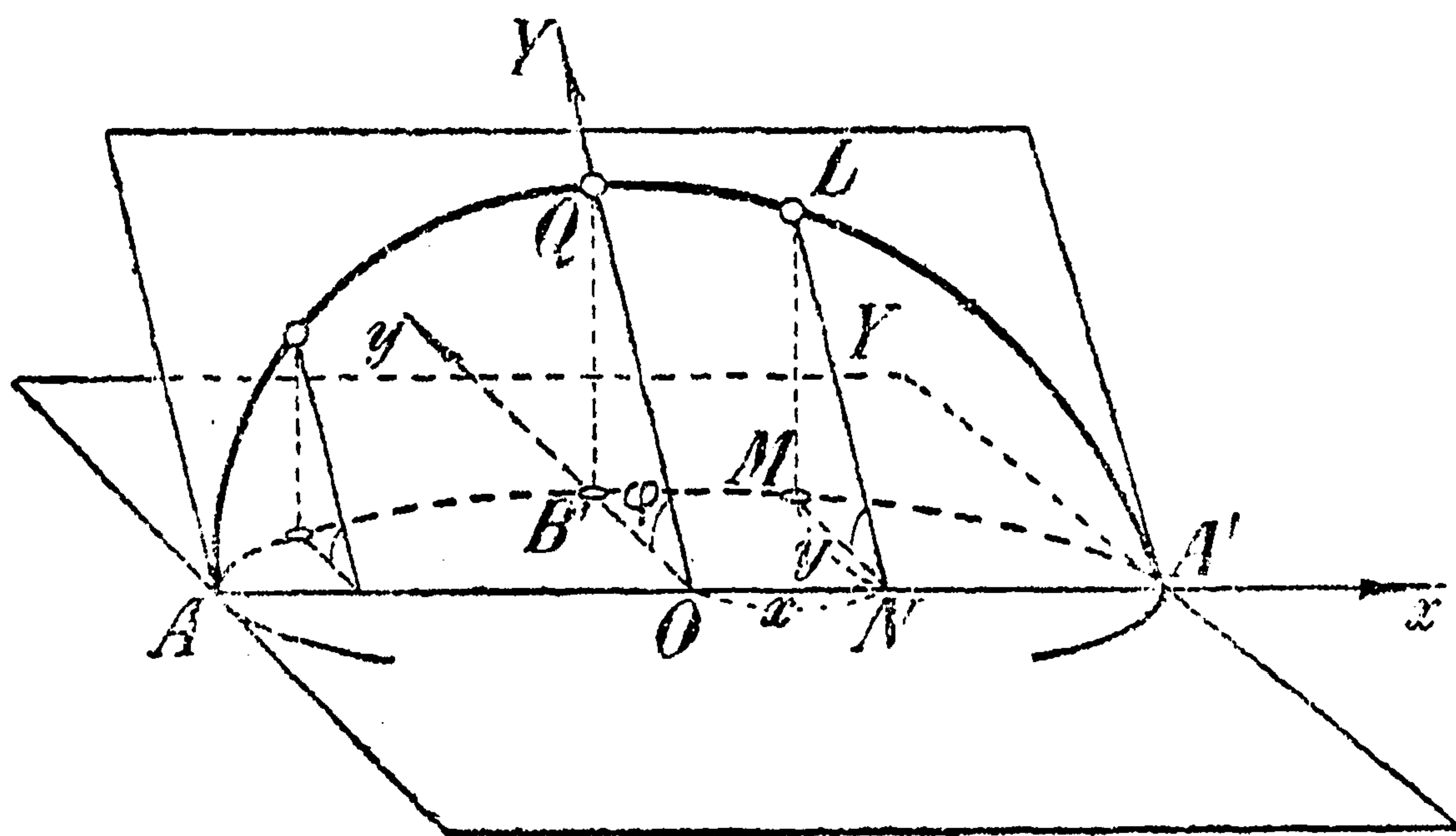
это и показывает, что построенная точка  $M$ , действительно, лежит на эллипсе (ибо ее координаты удовлетворяют его уравнению).

Таким путем, вращая луч  $OKL$ , можно получить любое число точек эллипса (построение эллипса по точкам); в то же время ясно, что каждая точка эллипса может быть так построена при надлежащем направлении названного луча.

Перепишав зависимость между ординатами точек  $M$  и  $L$  в виде:  $y = \frac{b}{a} Y$ , мы убе-



Черт. 138.

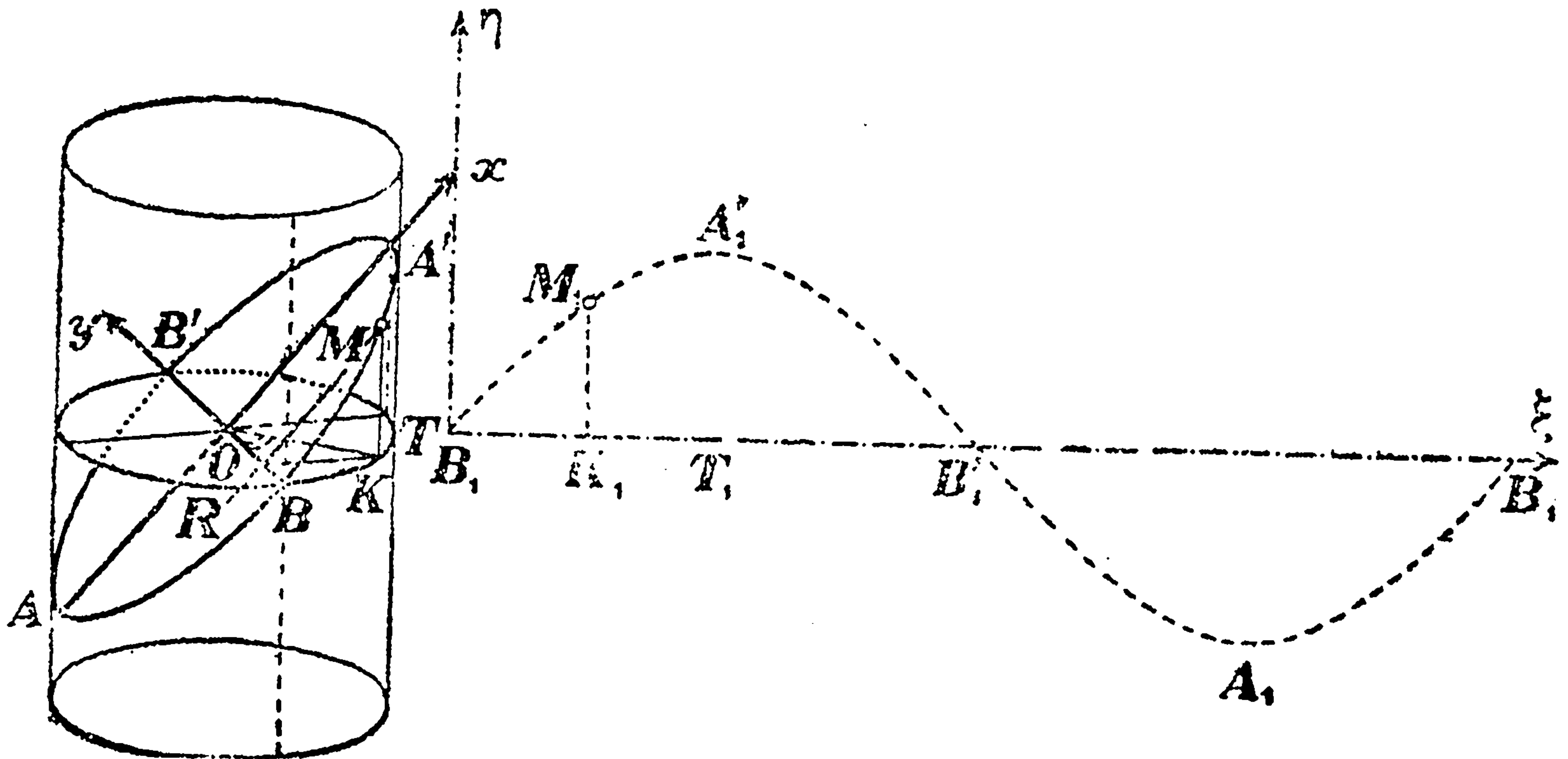


Черт. 139.

ждаемся в том, что эллипс может быть получен из окружности (радиуса  $a$ ), если ординаты всех точек последней укоротить в отношении  $\frac{b}{a}$ . Это же можно представить и в такой форме.



Вообразим, что плоскость круга (радиуса  $a$ ) повернута вокруг оси  $Ox$  на угол  $\varphi$ , для которого  $\cos \varphi = \frac{b}{a}$  (черт. 139). Если спроектировать круг на горизонтальную плоскость, то абсциссы  $x$  для точек круга и его проекции будут те же; ордината же  $Y$  точки круга укорачивается при



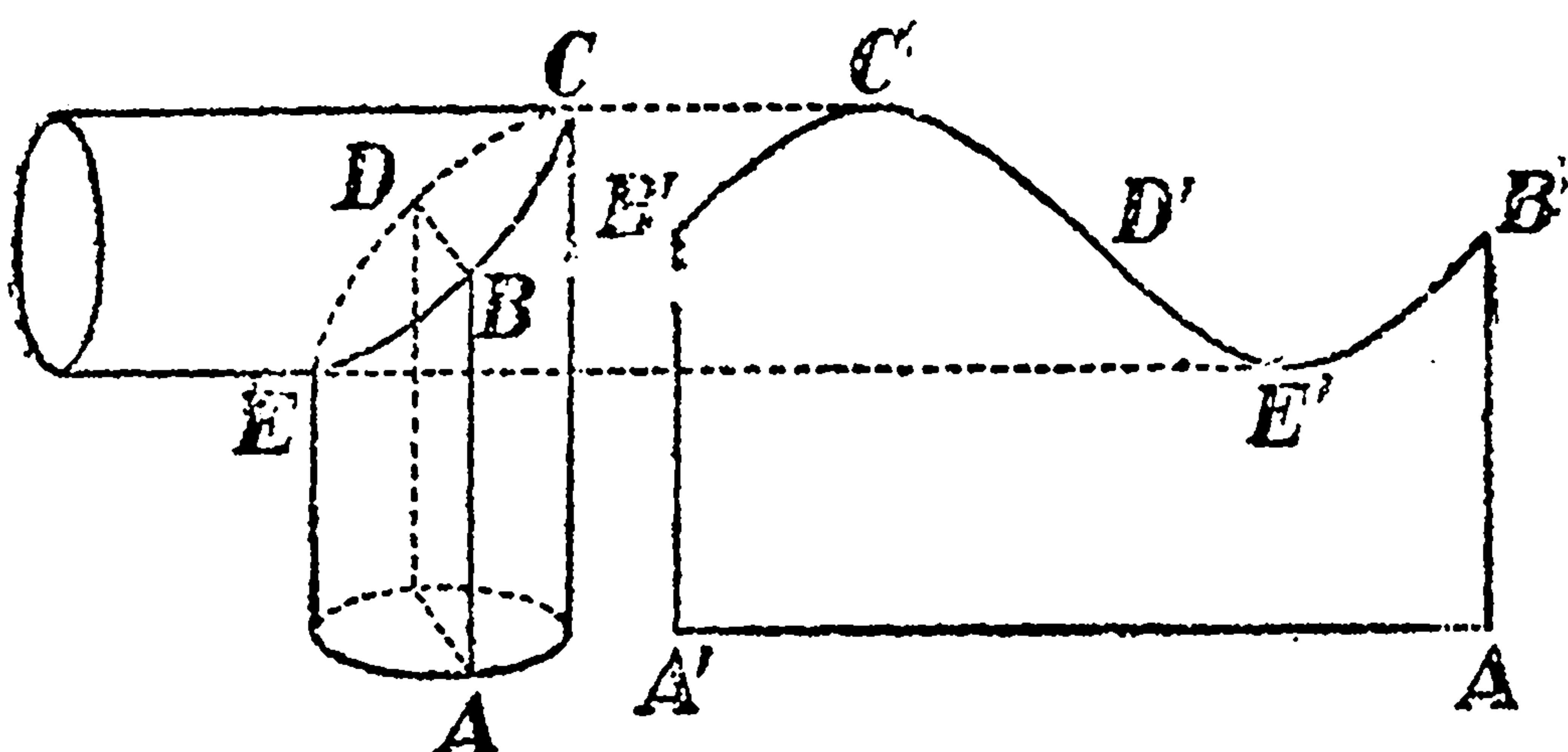
Черт. 140.

этом как раз в отношении, равном  $\cos \varphi = \frac{b}{a}$ . Итак, в проекции круга получается эллипс. Результат получился бы тот же, если бы плоскость круга была предварительно перемещена параллельно самой себе.

Подобным же образом, из рассмотрения тех же треугольников (черт. 138) выводим:

$$\frac{X}{x} = \frac{OP}{ON} = \frac{OK}{OL} = \frac{b}{a},$$

так что  $X$  получается из  $x$  путем укорочения последнего в отношении  $\frac{b}{a}$ . Если мы теперь повернем на угол  $\varphi = \arccos \frac{b}{a}$  плоскость эллипса,



Черт. 141.

то убедимся в том, что круг радиуса  $b$  будет его проекцией (черт. 140). Отсюда видно также, что эллипс может быть получен сечением прямого кругового цилиндра плоскостью, наклонной к его оси.

Представим себе, что эллипс начерчен на листе бумаге, наверху на цилиндр; если разрезать этот лист по образующей, проходящей через точку  $B$  (см. черт. 140), и развернуть его, то получится синусоида. Действительно, обозначая для произвольной точки  $M$  эллипса  $KM = K_1M_1$  через  $\eta$ , а дугу  $\widehat{BK} = \widehat{B_1K_1}$  через  $\xi$ , из подобия  $\Delta$ -ов  $A'OT$  и  $MRK$  имеем:

$$\frac{KM}{\eta} = \frac{RK}{OT} = \frac{RK}{OK} = \sin \angle BOK,$$



но  $TA' = \sqrt{a^2 - b^2} = c$ ,  $KM = \eta$ ,  $\sphericalangle BOK = \frac{BK}{OK} = \frac{\xi}{b}$ , так что  $\eta = c \cdot \sin \frac{\xi}{b}$ , откуда и вытекает наше утверждение.

Обратно, если эту синусоиду на цилиндр радиуса  $b$ , то получится эллипс.

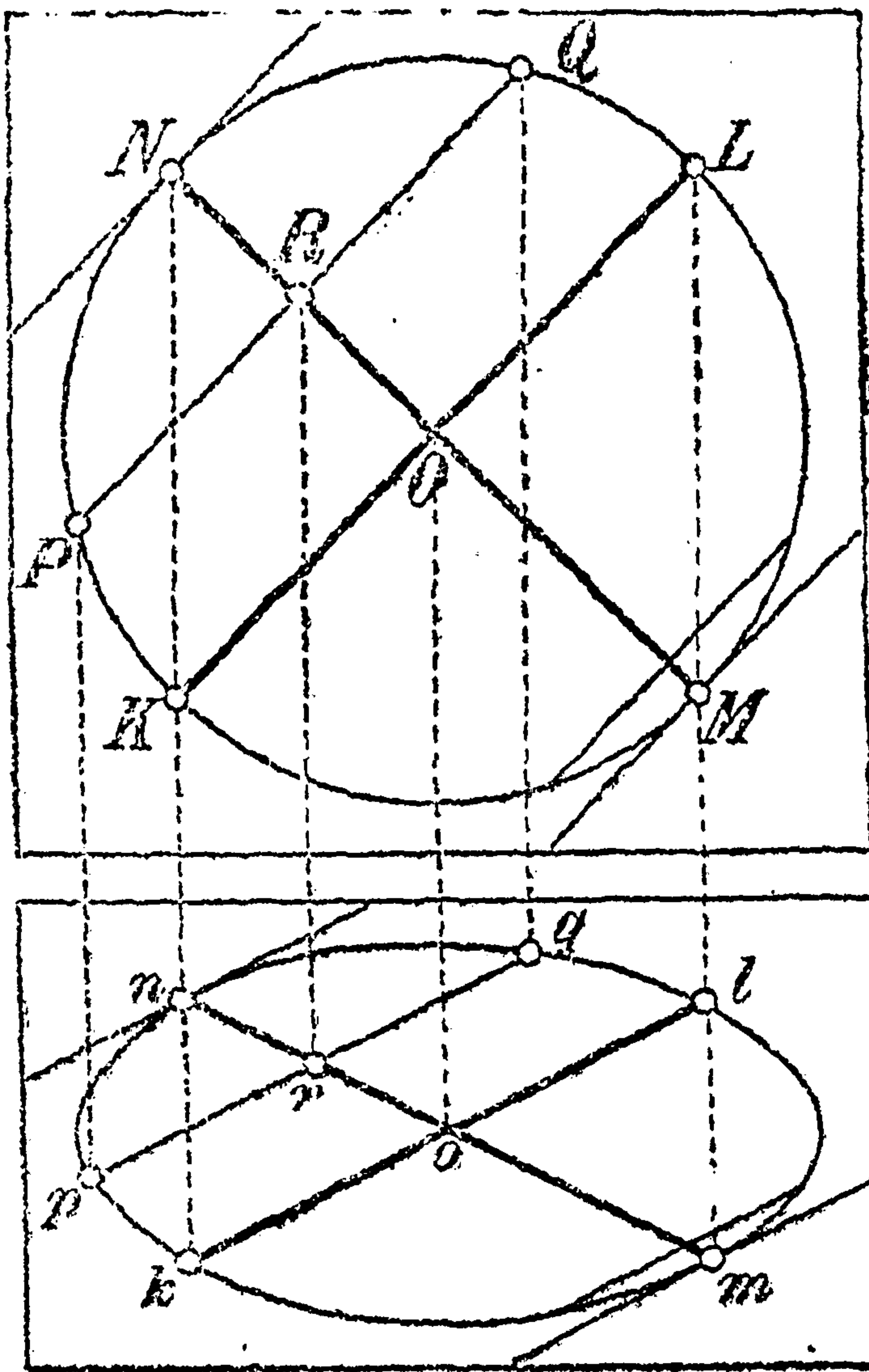
Последним обстоятельством пользуются при изготовлении коленчатых труб. Для того чтобы две цилиндрических трубы можно было соединить под углом, их нужно срезать плоскостью наискось так, чтобы в обеих трубах в сечении получились (равные) эллипсы. Но сделать это, когда свинцовые (или из другого материала) листы уже свернуты в трубы, трудно. Вот и приходится заранее срезать листы по синусоиде с тем, чтобы, после сворачивания в цилиндрическую трубу, из этих синусоид образовались эллипсы (черт. 141). Если колено делается состоящим из ряда цилиндрических кусков, соединяемых под небольшими углами (чтобы избежать резкого поворота трубы сразу), то каждый кусок приходится и снизу и сверху обрезать по синусоиде.

100. Сопряженные диаметры эллипса. Рассмотрение эллипса, как ортогональной проекции круга, позволяет с легкостью установить многие свойства эллипса (уже не прибегая к анализу). Мы остановимся, в виде примера, на одном из них.

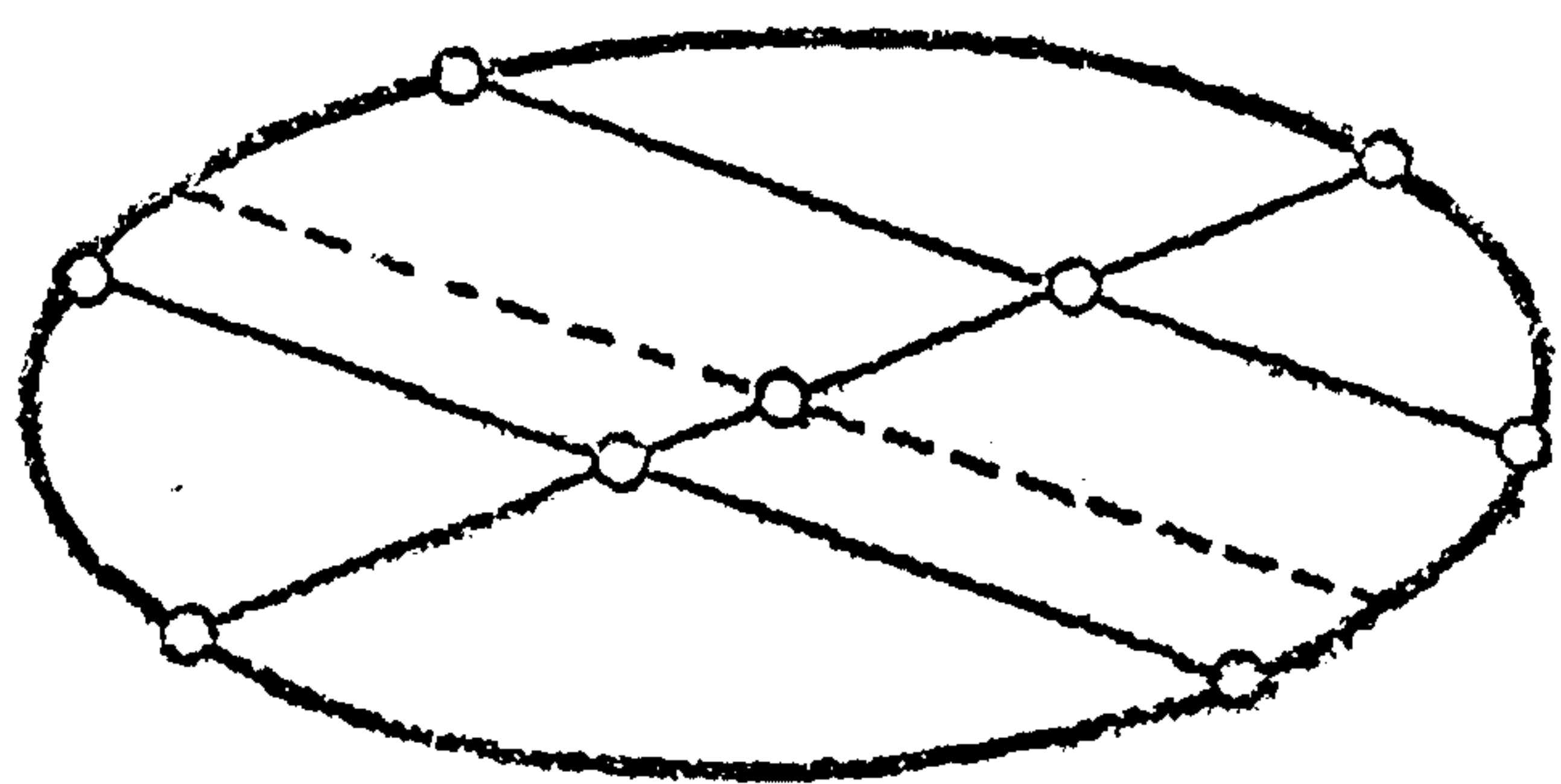
Проведем в проектируемом круге какие-либо два взаимно перпендикулярных диаметра  $KL$  и  $MN$ ; в эллипсе им соответствуют диаметры  $kl$  и  $mn$  (см. черт. 142, где круг и эллипс представлены без искажения). Рассмотрим теперь в круге ряд хорд (в роде  $PQ$ ), параллельных диаметру  $KL$ ; по известному свойству круга середины всех этих хорд будут лежать на диаметре  $MN$ . Вспомним однако, что при ортогональном проектировании параллельные прямые проектируются в параллельные же прямые, а середина отрезка — в середину же отрезка, получаемого в проекции (напр., середина  $R$  хорды  $PQ$  круга — в середину  $r$  хорды  $pq$  эллипса). В таком случае, при проектировании круга, его хорды, параллельные  $KL$ , спроектируются в хорды эллипса, параллельные  $kl$ , и их середины окажутся лежащими

на диаметре  $mn$  эллипса. Итак, все хорды эллипса, параллельные его диаметру  $kl$ , делятся пополам диаметром  $mn$ ; очевидно, и обратно: хорды, параллельные диаметру  $mn$ , делятся пополам диаметром  $kl$ . Такие два диаметра эллипса называются взаимно сопряженными. Нетрудно видеть, что для каждого диаметра эллипса существует сопряженный с ним диаметр. Оси эллипса, очевидно, также являются сопряженными диаметрами, ибо каждая из них делит пополам хорды, параллельные другой. Хотя сопряженные диаметры эллипса будут проекциями двух взаимно перпендикулярных диаметров круга, но угол между этими сопряженными диаметрами вообще отличен от прямого. Единственное исключение представляют именно оси эллипса.

Если эллипс начерчен, то центр его может быть построен очень просто. Достаточно провести любые две параллельные хорды и разделить их пополам (черт. 143); прямая, соединяющая их середины, очевидно, будет диаметром эллипса (сопряженным с параллельным им диаметром), а его середина и даст искомый центр.



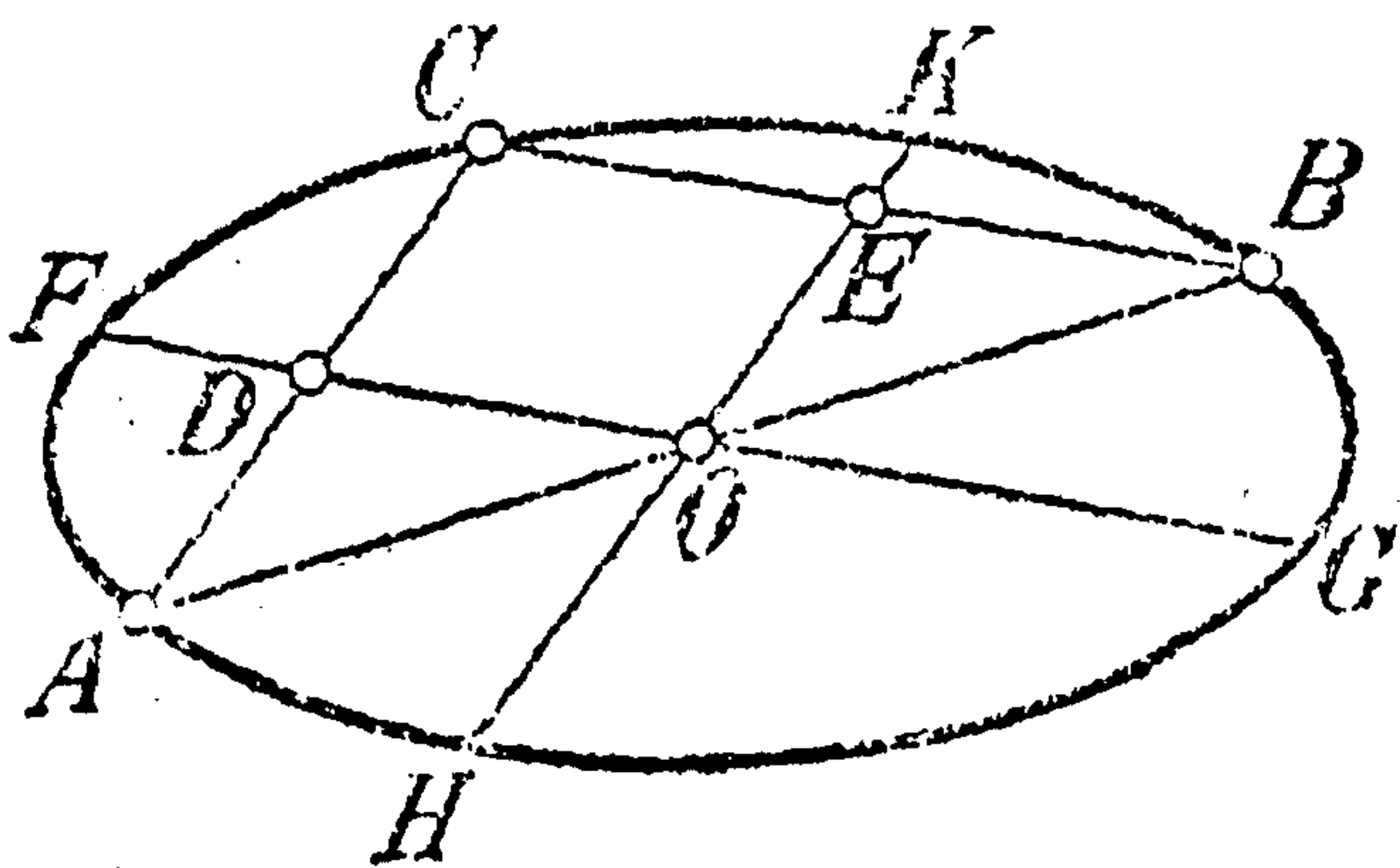
Черт. 142.



Черт. 143.



Для того чтобы показать, как строятся оси начерченного эллипса, установим предварительно понятие о *дополнительных хордах* эллипса. Так называются две хорды, соединяющие любую точку эллипса  $C$  с концами какого-нибудь диаметра  $AB$  (черт. 144). Мы утверждаем, что диаметры эллипса, параллельные двум его дополнительным хордам, будут взаимно сопряженными. В самом деле, если  $FG \parallel CB$  и  $HK \parallel AC$ , то (так как  $AO = OB$ ), очевидно, диаметр  $FG$  делит в точке  $D$  пополам хорду  $AC$ , а диаметр  $HK$  — в точке  $E$  хорду  $CB$ , откуда и явствует их сопряженность.

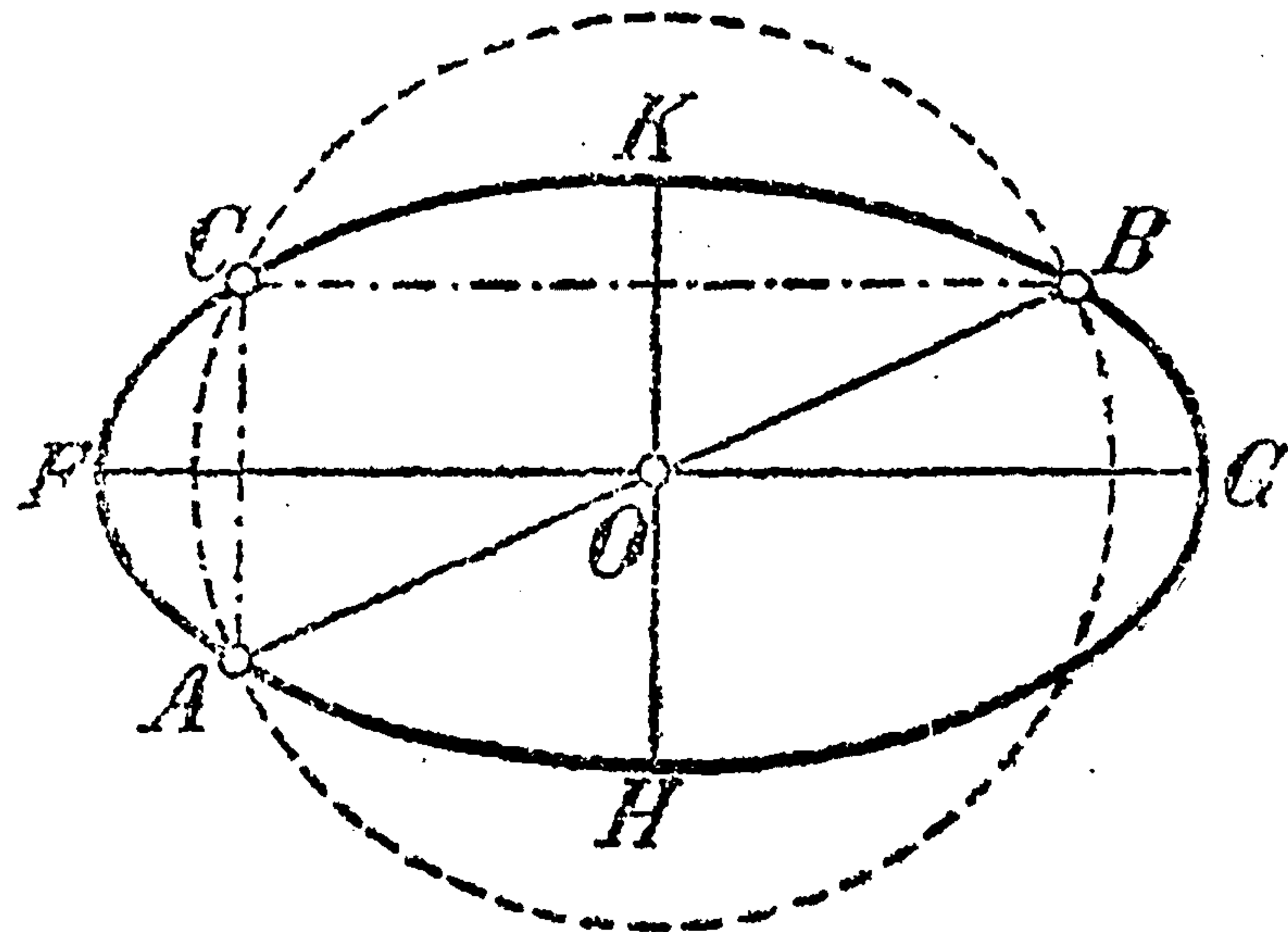


Черт. 144.

Пусть теперь дан начерченный эллипс и уже построен его центр  $O$ , через который проведем наудачу диаметр  $AB$  (черт. 145). На этом диаметре построим окружность, которая пересечет эллипс еще в двух точках; одну из них,  $C$ , соединим с  $A$  и  $B$ . Дополнительные хорды  $AC$  и  $CB$  взаимно перпендикулярны, ибо угол  $\sphericalangle ACB$  есть вписанный угол в окружности, опирающийся на ее диаметр. Тогда параллельные им диаметры  $FG$  и  $HK$ , будучи (по доказанному свойству дополнительных хорд) сопряженными, в то же время оказываются взаимно перпендикулярными. Следовательно, это и будут оси эллипса.

**101. Гипербола.** Рассмотрим теперь другую кривую, называемую *гиперболой*, которая по виду сильно разнится от эллипса, но, как увидим, имеет с ним некоторые важные общие свойства. Эта кривая уже встречалась нам как график обратно-пропорциональной зависимости. Теперь мы подойдем к ней с иной точки зрения, исходя из следующего ее геометрического определения (черт. 146):

*Гипербола есть геометрическое место точек  $M$ , для которых разность расстояний  $r = MF$  и  $r' = MF'$  до двух постоянных точек  $F$  и  $F'$  (называемых фокусами) равна данному постоянному отрезку  $2a$ .*



Черт. 145.

Пусть линейка длины  $l$  с одним концом прикреплена в точке  $F$  штифтом, вокруг которого она может вращаться; к другому концу ее и к точке  $F'$  прикреплены концами нить длины  $l - 2a$ . Если карандашом натянуть нить, как показано на чертеже, то при движении линейки острое карандаша  $M$  будет чертить гиперболу, потому что разность расстояний его от точек  $F$  и  $F'$ , очевидно, будет всегда равна разности длин всей линейки и всей нити, т. е.  $2a$ .

Для вывода уравнения гиперболы мы будем исходить из системы координатных осей, аналогичной той, которой пользовались в 97. Обозначая  $FF'$  через  $2c$ , имеем на этот раз  $c > a$  (так как в  $\triangle MFF'$  разность  $2a$  двух сторон  $MF$  и  $MF'$  должна быть меньше третьей его стороны  $FF' = 2c$ ). Получив для расстояний  $r = MF$  и  $r' = MF'$  те же выражения, что и выше [(23) 97], запишем определение гиперболы в следующем виде:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad (27)$$

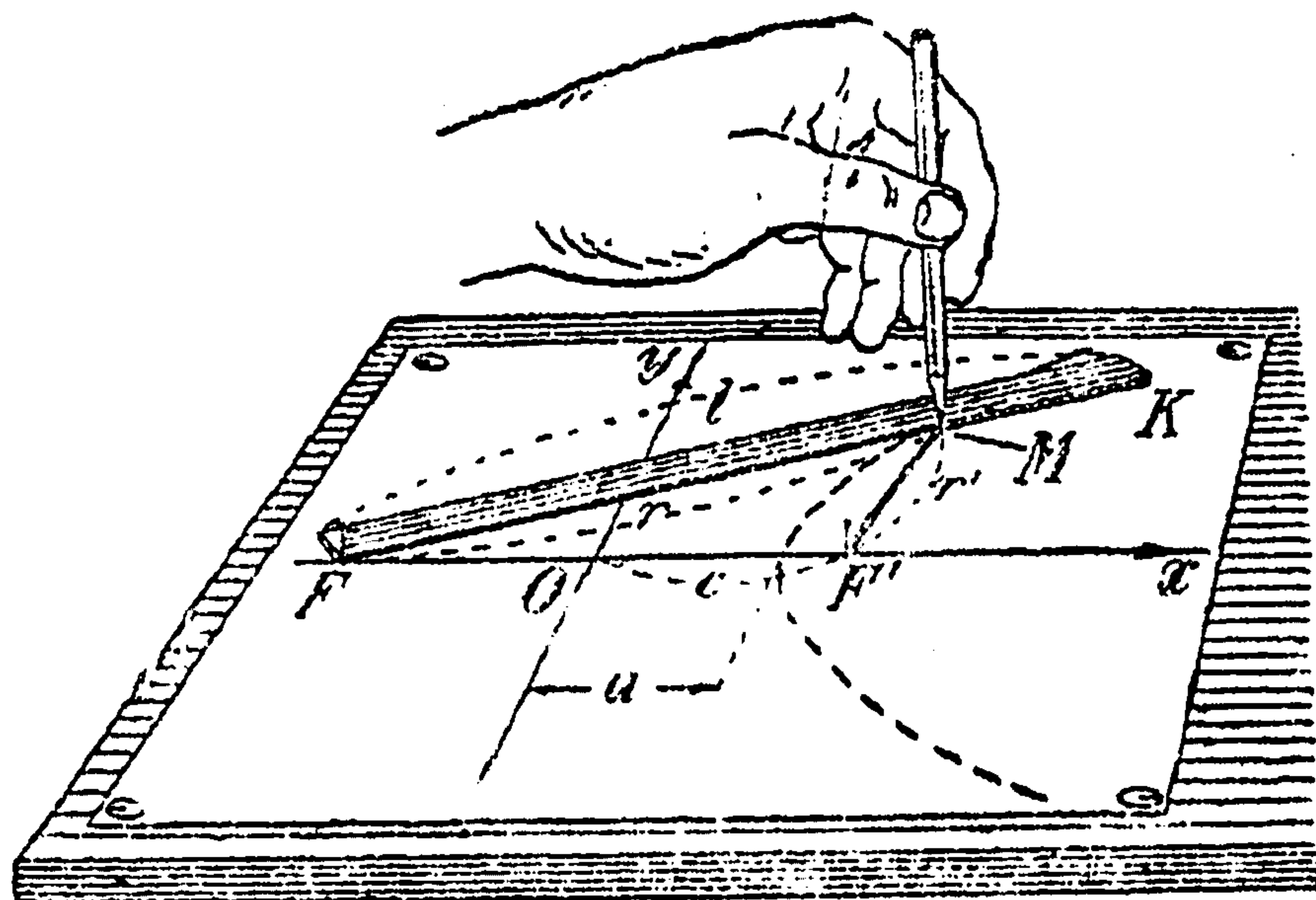


Двойной знак перед  $2a$  объясняется тем, что в определении гиперболы нет упоминаний о том, из какого расстояния и какое надлежит вычитать, т. е. равняться  $2a$  может как разность  $MF - MF'$ , так и  $MF' - MF$ . Освободившись от корней так же, как и в случае эллипса, получим следующее уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1,$$

или, полагая  $b^2 = c^2 - a^2$  (здесь  $c > a$ ),

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (28)$$



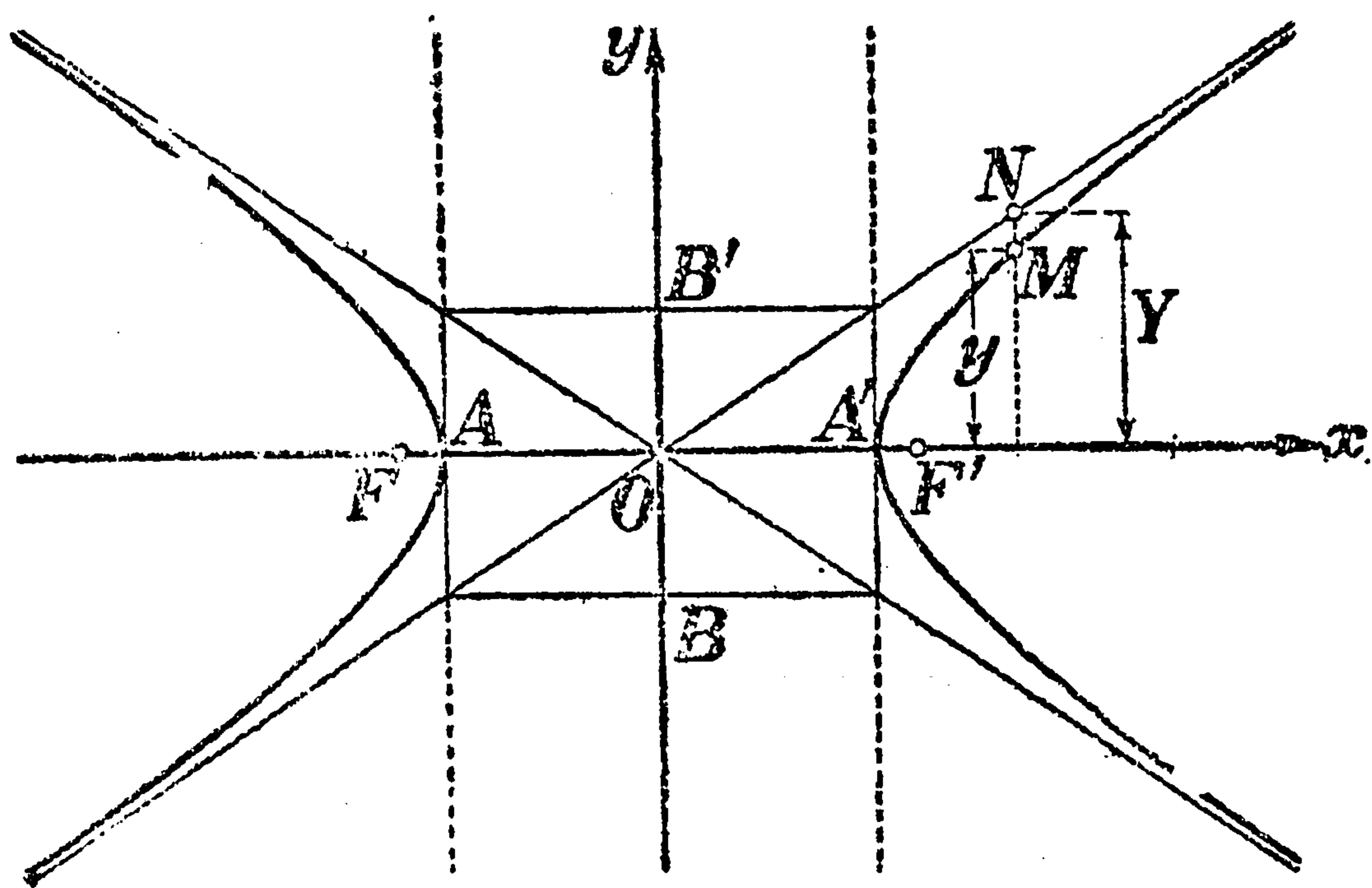
Черт. 146.

Как видим, получилось уравнение, совершенно не похожее на прежнее уравнение  $y = \frac{k}{x}$ , график

которого мы также называли (равнобочной) гиперболой. Читателю ясно, что это зависит от выбора осей. Ниже [107] этот вопрос будет подробно рассмотрен.

### 102. Общий вид кривой. Оси и центр симметрии. Асимптоты.

1. Так как  $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ , то  $x$  не может принимать значений между  $-a$  и  $a$ , т. е. либо  $x > a$ , либо  $x < -a$ . Вертикальная полоса между прямыми  $x = -a$ ,  $x = a$  не содержит вовсе точек кривой, которые все располагаются справа или слева от нее. Кривая распадается на две обособленные ветви [одна соответствует верхнему знаку в формуле (27), а другая — нижнему]. Пересечений с осью  $Oy$  кривая не имеет (черт. 147).



Черт. 147.

2. Подобно тому, как это было сделано для эллипса, убеждаемся в том, что оси координат служат осями симметрии гиперболы, а начало — ее центром симметрии (их называют просто осями и центром гиперболы).

3. Решая уравнение гиперболы относительно  $y$ , получим:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

Ограничиваясь первой четвертью, мы возьмем знак (+) и станем увели-

чивать  $x$  от  $a$  до бесконечности. Тогда  $y$  будет увеличиваться от 0 до бесконечности. Если же  $x$  будет уменьшаться от  $a$  до бесконечности, то  $y$  будет уменьшаться от 0 до бесконечности. Таким образом, кривая распадается на две ветви, одна из которых расположена в первой четверти, а другая — в четвертой.



чивать  $x$  от  $a$  (меньших значений  $x$  не может принимать) до  $\infty$ . При  $x=a$  имеем:  $y=0$ , точка лежит на горизонтальной оси; с возрастанием  $x$  подкоренное выражение, а с ним и  $y$  — бесконечно возрастает. Кривая имеет вид, указанный на чертеже. (Ср. черт. 29.)

Точки  $A, A'$  называются *вершинами* гиперболы, отрезок  $AA'$  — *вещественной осью* гиперболы. Далее, если на оси  $Oy$ , которая не пересекает гиперболы, отложить вверх и вниз отрезки  $BO=OB'=b$ , то отрезок  $BB'$  будет *мнимой осью* гиперболы (название это подчеркивает отсутствие вещественных точек пересечения);  $a$  и  $b$  будут длины полуосей. Наконец, расстояние  $c=FO=OF'$  и его отношение к вещественной полуоси  $e=\frac{c}{a}$  называются, как и в случае эллипса, соответственно, *линейным* и *численным эксцентриситетом* гиперболы. Очевидно, здесь число  $e > 1$ .

4. Для того, чтобы лучше представить себе ход кривой при удалении точки в бесконечность, построим прямоугольник со сторонами  $2a$  и  $2b$ , параллельными координатным осям (см. черт. 147) и сопоставим гиперболу с его диагоналями, бесконечно продолженными. Угловые коэффициенты этих прямых, очевидно, равны  $\pm \frac{b}{a}$ , так что уравнения их будут

$Y = \pm \frac{bx}{a}$  (мы обозначаем здесь ординату буквой  $Y$ , чтобы не смешивать ее с ординатой  $y$  точки на гиперболе). Сопоставим ветвь гиперболы в первой четверти с прямой  $Y = \frac{bx}{a}$ ; будем сравнивать ординаты точки  $M$  гиперболы и точки  $N$  прямой, имеющих одну и ту же абсциссу  $x (\geq a)$ ; очевидно,

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Желая определить, что будет с этой разностью при безграничном возрастании  $x$ , преобразуем ее, \* умножая и деля на  $x + \sqrt{x^2 - a^2}$ :

$$Y - y = \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \cdot (x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 - a^2})^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Теперь ясно, что при  $x \rightarrow \infty$  знаменатель последней дроби также  $\rightarrow \infty$ ; следовательно, дробь, а с нею и разность  $Y - y \rightarrow 0$ . Таким образом,

\* Разность  $Y - y$  является „неопределенным выражением“ вида  $\infty - \infty$ , для которого ничего нельзя сказать о его пределе без специального исследования [ср. 22]. Преобразуя эту разность, мы сначала свели ее к неопределенному же выражению, но более удобного типа:  $\frac{\infty}{\infty}$ , а затем уже к выражению, предел которого усматривается сразу.



при удалении точки  $M$  вдоль по кривой в бесконечность эта точка безгранично приближается к прямой  $Y = \frac{bx}{a}$ . Из соображений симметрии

ясно, что будет происходить в других четвертях. Прямые  $Y = \pm \frac{bx}{a}$  называются *асимптотами* гиперболы. Нам уже приходилось сталкиваться с этим понятием, но асимптоты, которые мы рассматривали раньше, были параллельны одной из осей; сейчас же мы видим, что асимптоты могут быть и наклонными к осям. Заслуживает быть отмеченным частный случай, когда полуоси гиперболы равны ( $a = b$ ,  $\varepsilon = \sqrt{2}$ ). Тогда уравнение гиперболы приобретает особенно простой вид:  $x^2 - y^2 = a^2$  (напоминающий уравнение окружности). Прямоугольник, диагонали которого служат асимптотами, оказывается квадратом, так что в этом случае (и только в этом случае!) асимптоты взаимно перпендикулярны. Гипербола, обладающая указанными особенностями, носит название *равнобочной*.

5. Если в уравнении (28), вместо 1, в правой части поместить  $-1$ , то получим уравнение:

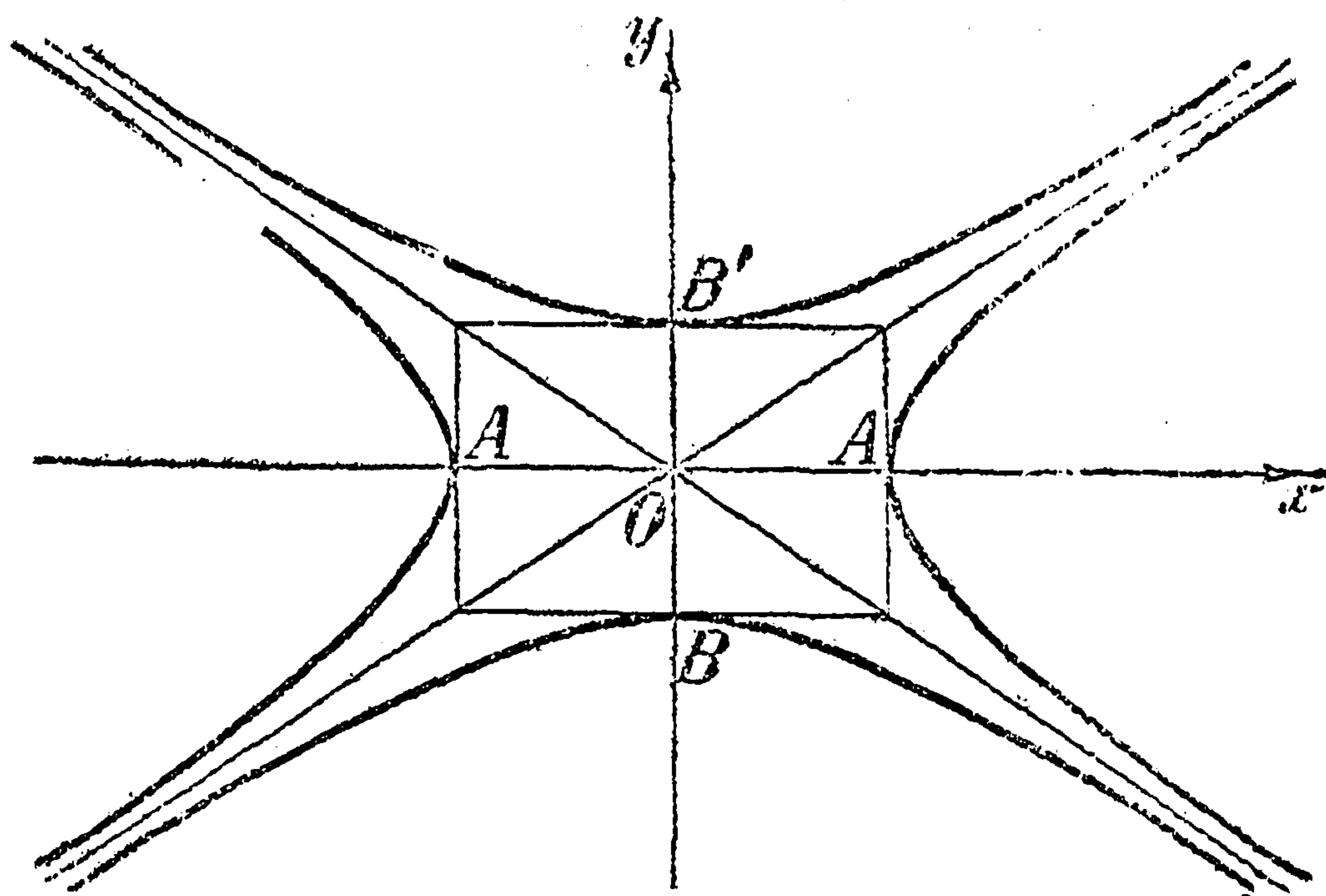
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \text{ или} \quad (28a)$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Нетрудно видеть, что оно также выражает гиперболу; но здесь оси  $Ox$  и  $Oy$  обменялись ролями, именно, ось  $Oy$  на этот раз будет вещественной осью гиперболы, а ось  $Ox$  — мнимой. Для построения асимптот придется предварительно построить тот же прямоугольник, что и выше (ибо на осях нужно будет отложить те же отрезки  $a$  и  $b$ ). Следовательно, *обе гиперболы (28) и (28a) имеют одни и те же асимптоты*, но располагаются в различных вертикальных углах между ними (см. черт. 148); эти гиперболы называют *сопряженными*.

103. Примеры применения эллипса и гиперболы. Ниже нам представятся случаи использовать эллипс, опираясь на его аналитическое представление [110, 111]. Здесь же мы возьмем пример другого типа, где эллипс является на основе его геометрического определения [97].

1°. Рассмотрим механизм, известный под именем *антипараллелограмма* или *антипараллельного кривошипа*; он состоит из четырех попарно равных звеньев  $AB$ ,  $CD$  и  $AD$ ,  $BC$ , шарнирно соединенных между собой, как показано на черт. 149a.\* Пусть закреплено одно из коротких звеньев,  $AD$ , так что звенья (кривошипы)  $AB$  и  $DC$  вращаются вокруг неподвижных центров  $A$  и  $D$ . Тогда звено  $BC$  (а также неизменно с ним связанная подвижная плоскость)



Черт. 148.

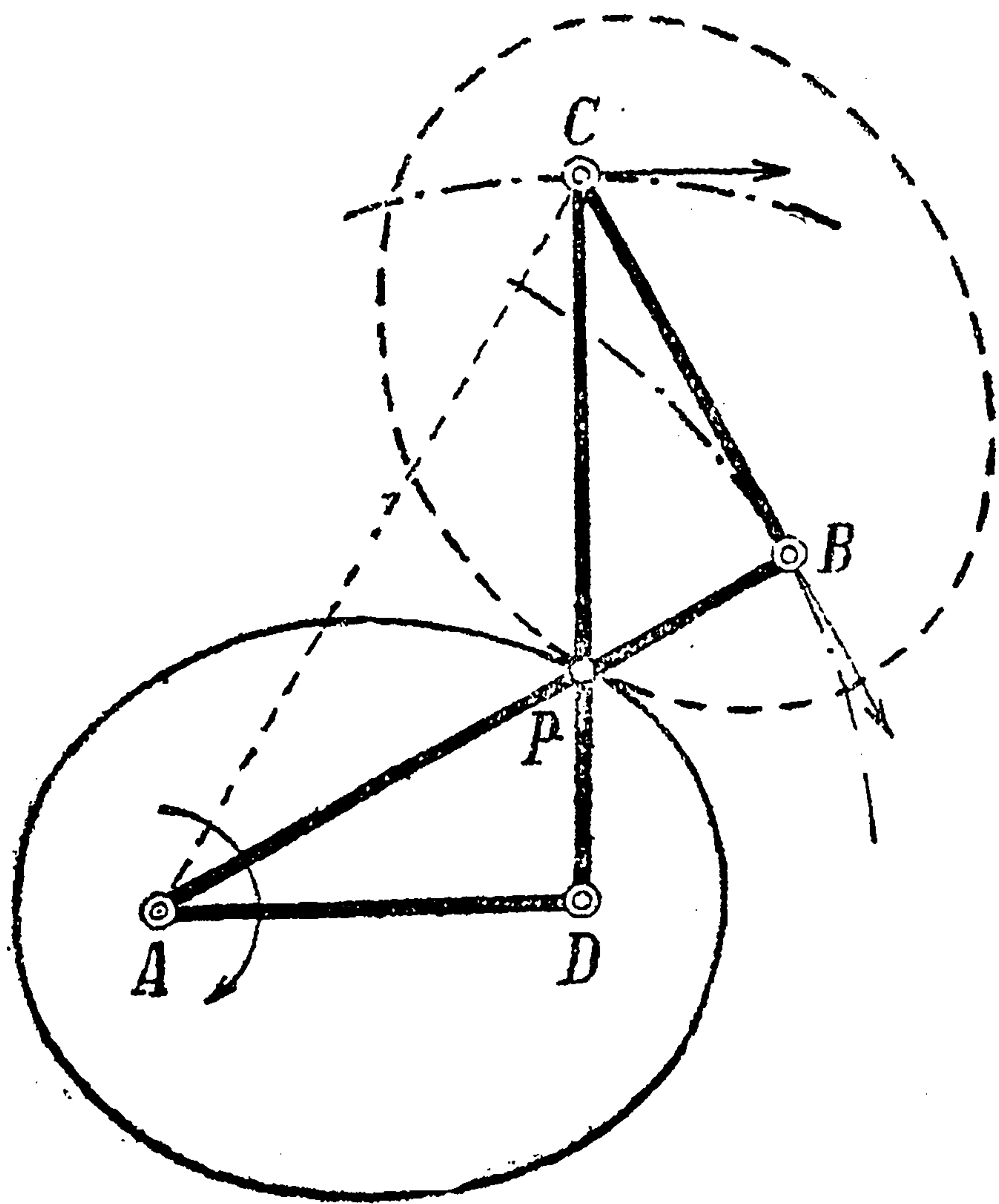
\* Разумеется, физическое осуществление этого механизма (нередко встречающегося в машиностроении) может быть весьма многообразно; важно наличие стержней  $A$ ,  $BC$ , ..., а постоянство этих расстояний, как бы оно ни было достигнуто [ср. 125, 1°].



будет производить сложное колебательное движение. В кинематике плоского движения устанавливается, что движение плоскости в каждый момент происходит так, как если бы она вращалась вокруг некоторой точки, называемой *мгновенным центром* вращения. Положение этого центра от момента к моменту вообще изменяется, и геометрическое место мгновенных центров, называемое *центроидой* играет важную роль в характеристике плоского движения. Постараемся же определить центроиду для движения плоскости, неизменно связанной с колеблющимся звеном  $BC$  антипараллелограмма.

Точки  $B$  и  $C$  этого звена, очевидно, движутся по окружностям с центрами в  $A$  и  $D$ , так что радиусы  $AB$  и  $CD$  соответственно перпендикулярны к скоростям этих точек во взятом их положении. Если рассматривать движение точек  $B$  и  $C$  (вместе со всей подвижной плоскостью) в данный момент как вращение вокруг общего центра, то этот центр должен лежать на каждом из этих перпендикуляров  $AB$  и  $CD$ , т. е. необходимо совпадает с точкой их пересечения  $P$ ; таким образом мгновенный центр найден. Далее, из равенства  $\Delta$ -ков  $ABC$  и  $ADC$  (по трем сторонам) ясно, что углы  $\sphericalangle CAB$  и  $\sphericalangle ACD$  равны, так что  $\Delta APC$  будет равнобедренным:  $AP = CP$ . В таком случае, сумма расстояний

$$AP + PD = CP + PD = CD$$



Черт. 149 а).

оказывается постоянной, и искомая центроида представляет не что иное, как эллипс с фокусами в точках  $A$  и  $D$ .

Обыкновенно изучают также траекторию, которую мгновенный центр описывает в подвижной плоскости, т. е. геометрическое место тех точек подвижной плоскости, которые поочередно играют роль мгновенного центра; эту линию называют *подвижной центроидой*. Для данного случая это будет, очевидно, эллипс с фокусами в точках  $B$  и  $C$  (движущийся вместе со звеном  $BC$ ).

Желая аналогичным образом проиллюстрировать применение гиперболы, мы могли бы воспользоваться тем же антипараллелограммом, но закрепить в нем длинное звено,  $AB$ ; тогда для звена  $CD$  центроидой (как неподвижной, так и подвижной) будет гипербола. Мы предпочитаем однако, не останавливаясь на этом, обратиться к примерам из других областей.

2. Пусть на железнодорожной линии  $AB$  (черт. 149 б) в точках  $A$  и  $B$  расположены станции. Из точек  $N$  в окрестности станции  $B$  груз может доставляться на станцию  $A$  двояко: либо гужом, по шоссе, до станции  $B$ , а оттуда по железной дороге в  $A$ , либо непосредственно гужом в  $A$ .

Требуется определить область точек, для которых первый способ выгоднее второго (так сказать, *область влияния* станции  $B$ ).

Обозначим расстояние  $AB$  (в км) через  $l$ , а через  $p$  и  $q$  соответственно железнодорожный тариф и тариф при гужево́й перевозке (т. е. стоимость провоза 1 тонны на расстояние в 1 км, в рублях), наконец, через  $r$  — стоимость погрузки и выгрузки тонны груза на ж.-д. станции. Тогда стоимость доставки тонны груза из  $N$  в  $A$  через  $B$  выразится так:  $q \cdot NB + r + p \cdot l$ , в то время как стоимость гужево́й перевозки из  $N$  непосредственно в  $A$  будет  $q \cdot NA$ .

Если для точки  $N$  первая стоимость перевозки меньше второй, т. е.:

$$q \cdot NB + r + p \cdot l < q \cdot NA,$$



то для нее выполняется неравенство

$$NA - NB > \frac{r + pl}{q},$$

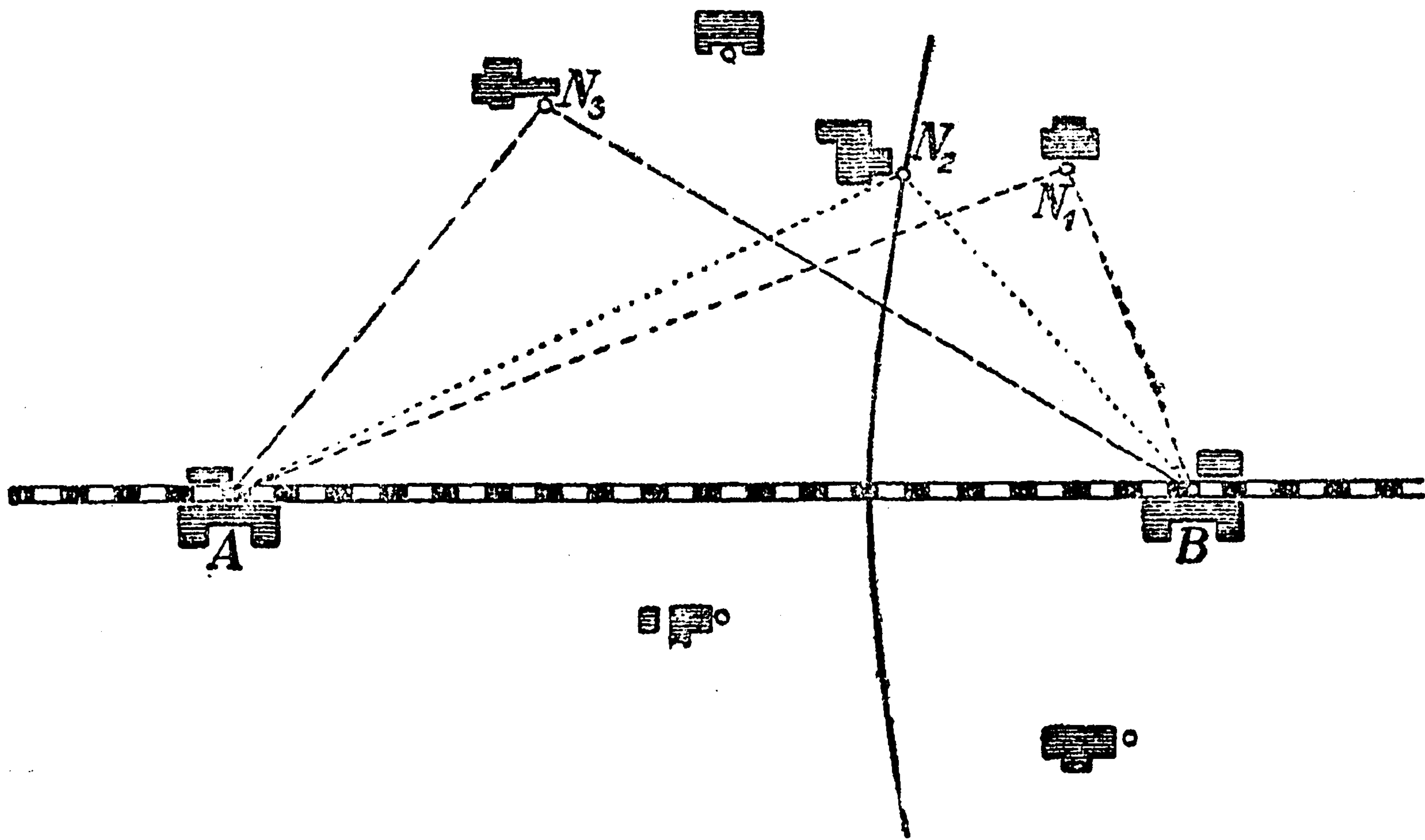
т. е. разность ее расстояний от точек  $A$  и  $B$  превосходит (постоянное) число  $\frac{r + pl}{q}$  (такова на чертеже, например, точка  $N_1$ ). Если гужевая перевозка оказывается дешевле, то аналогично получим

$$NA - NB < \frac{r + pl}{q}$$

(напр., для точки  $N_3$ ). На границе между двумя этими областями будет, очевидно, выполняться равенство

$$NA - NB = \frac{r + pl}{q}$$

(для точки  $N_2$ ). Таким образом, интересующая нас область слева ограничена кривой, для точки которой имеет место предыдущее равенство. На основании опре-



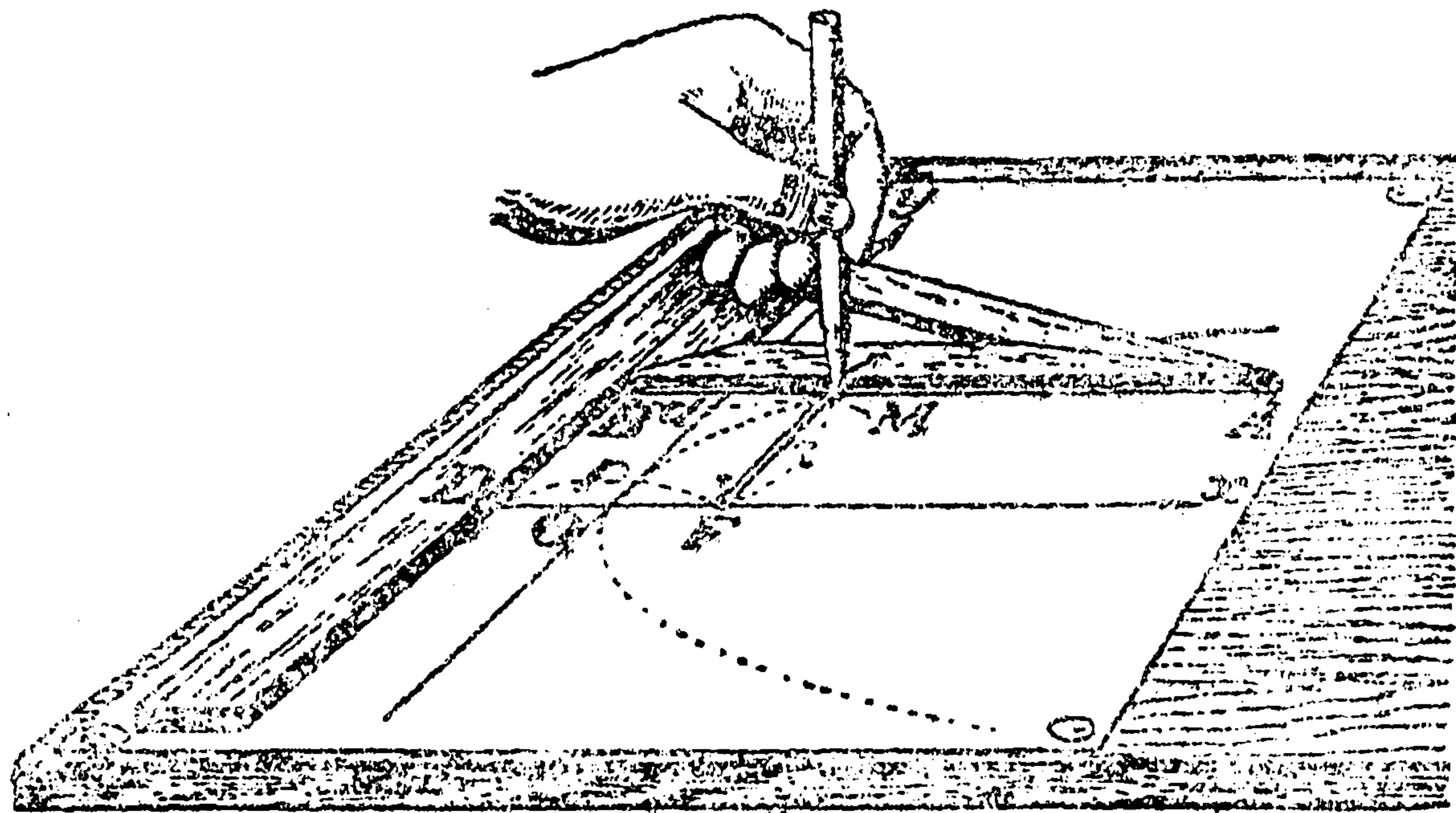
Черт. 149 б).

деления [101] заключаем, что это будет ветвь гиперболы, с фокусами в точках  $A$  и  $B$ .

3. Другой подобный же пример мы позаимствуем из военного дела. Пусть требуется обнаружить расположение неприятельской батареи  $N$ . На двух наблюдательных постах  $A$  и  $B$  (можно пользоваться хотя бы тем же черт. 149 б) звуки ее выстрелов слышны неодновременно, скажем, на poste  $A$  позже  $t$  секундами, нежели в  $B$ . Если принять во внимание скорость распространения звука (около 330 м/сек.), то отсюда можно заключить, что расстояние  $AN$  больше расстояния  $NB$  на величину  $2a = 330t$  (м). Так как геометрическое место точек  $N$ , для которых  $AN - BN = 2a$ , есть ветвь гиперболы с фокусами в точках  $A, B$ , то и искомая точка лежит на этой ветви. При отдаленности точки  $N$  можно заменить ветвь гиперболы ее асимптотой, которую легко построить на карте, зная  $2c = AB$  и  $2a$ . Эта асимптота, очевидно, составляет с направлением  $AB$  угол, косинус



104. Парабола. Эта кривая также нам знакома, как график трехчлена второй степени  $y = ax^2 + bx + c$  [36, 38]; теперь мы займемся геометрическим определением параболы (черт. 150).



Черт. 150.

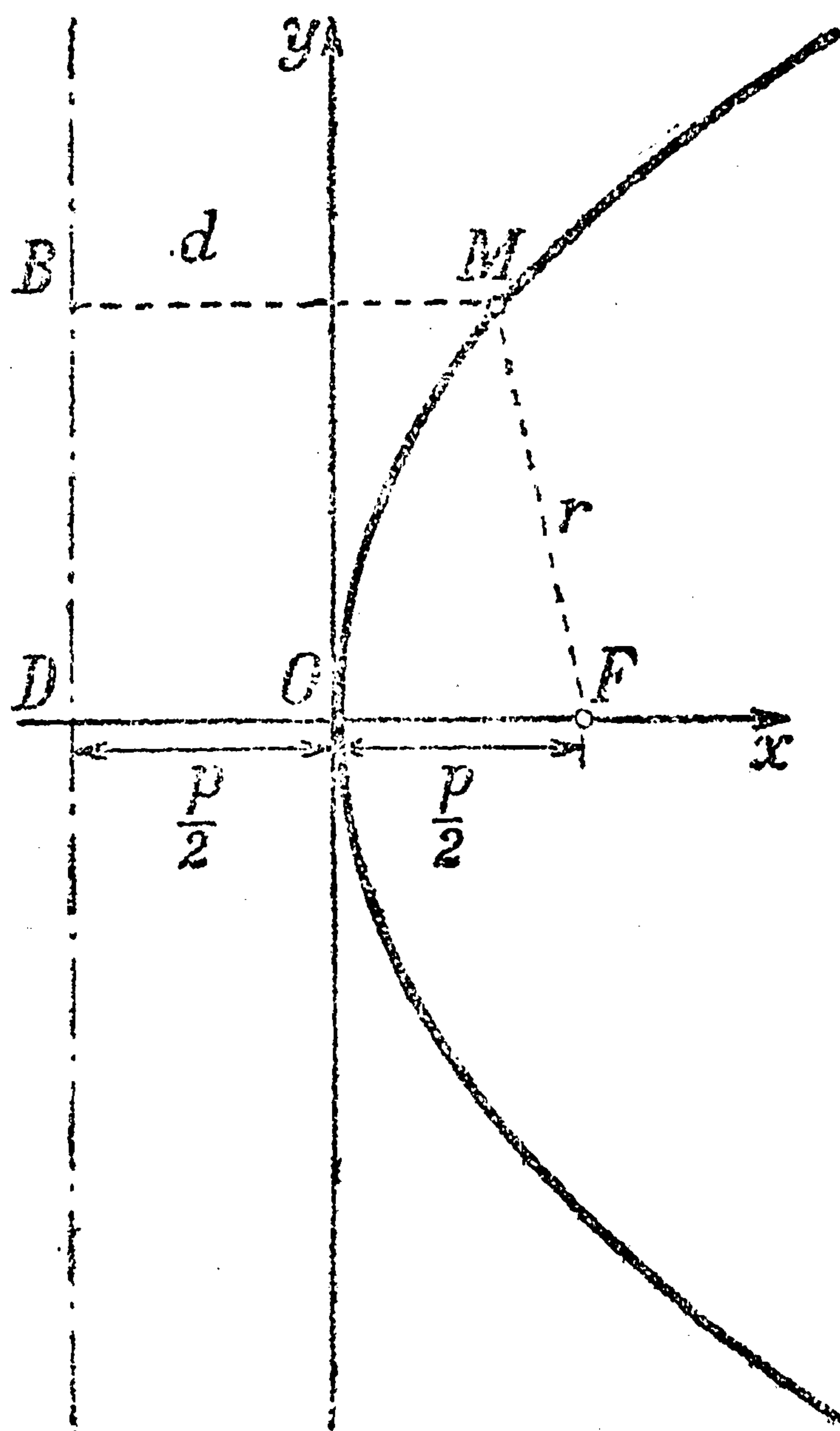
Парабола есть геометрическое место точек  $M$ , для которых расстояние  $r = MF$  до постоянной точки  $F$  (называемой фокусом) и расстояние  $d = MB$  до постоянной прямой (называемой директрисой или направляющей) равны между собой.

Предположим, что вдоль директрисы прикреплена линейка, по которой скользит наугольник; нить, длина которой равна стороне  $AB$  наугольника, прикреплена одним концом в фокусе  $F$ , а другим — в конце  $A$  наугольника. Если карандашом натянуть нить, как показано на чертеже, то, при передвижении наугольника, острое карандаша будет вычерчивать параболу, так как, за вычетом  $AM$ , расстояния  $FM$  и  $BM$  равны.

Для вывода уравнения параболы выберем в качестве оси  $Ox$  прямую, проходящую через фокус  $F$  и перпендикулярную директрисе (черт. 151); ось же  $Oy$  проведем параллельно директрисе между нею и фокусом, на равных от них расстояниях. Если обозначить через  $p$  отрезок  $DF$ , то, как видно из чертежа,

$$d = BM = x + \frac{p}{2},$$

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$



Черт. 151.

[по формуле (1) 88], так что определение параболы может быть записано в форме следующего равенства:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$



которое и служит уравнением ее. После обычных преобразований (возведения в квадрат и т. п.) приведем его к виду

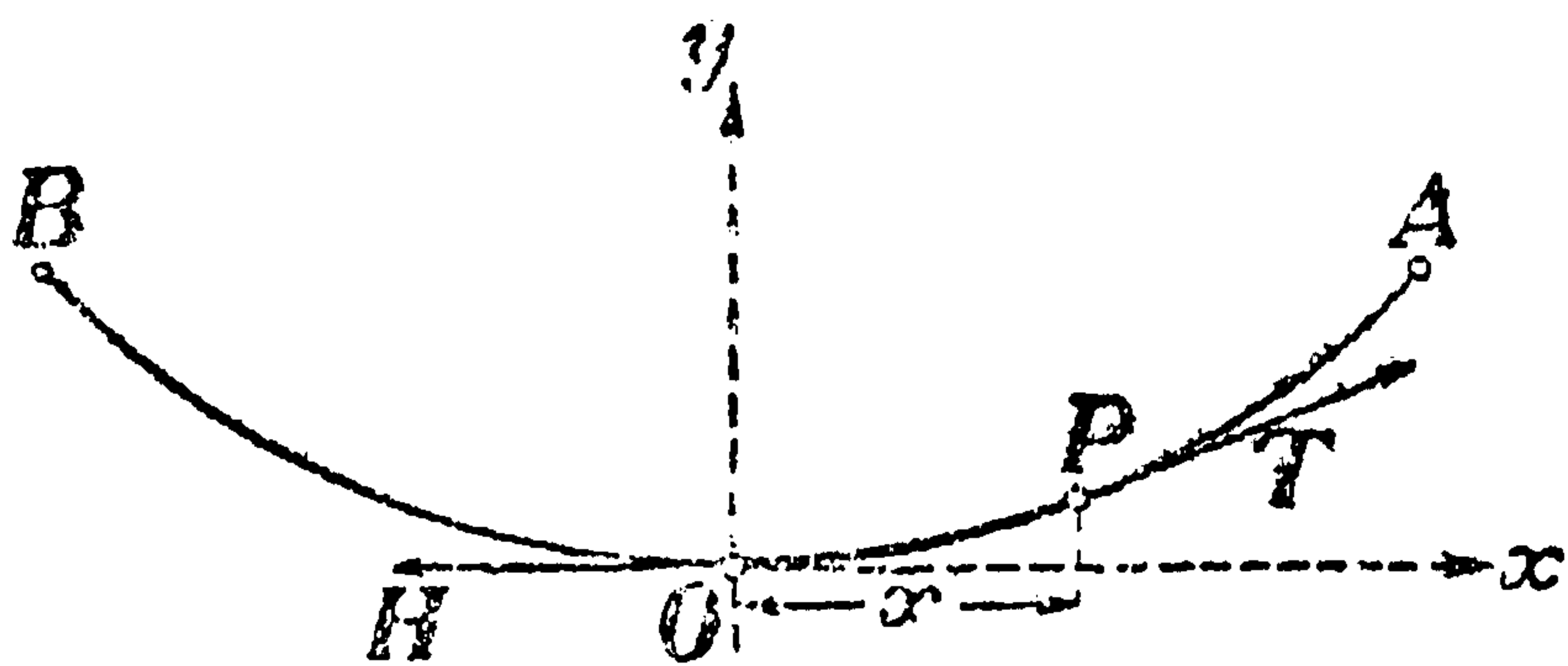
$$y^2 = 2px,$$

в котором оно нам уже встречалось [36].

Из уравнения параболы ясно, что каждому *положительному* значению  $x$  отвечают *два* значения  $y$ , равных по абсолютному значению, но различающихся знаками:

$$y = \pm \sqrt{2px},$$

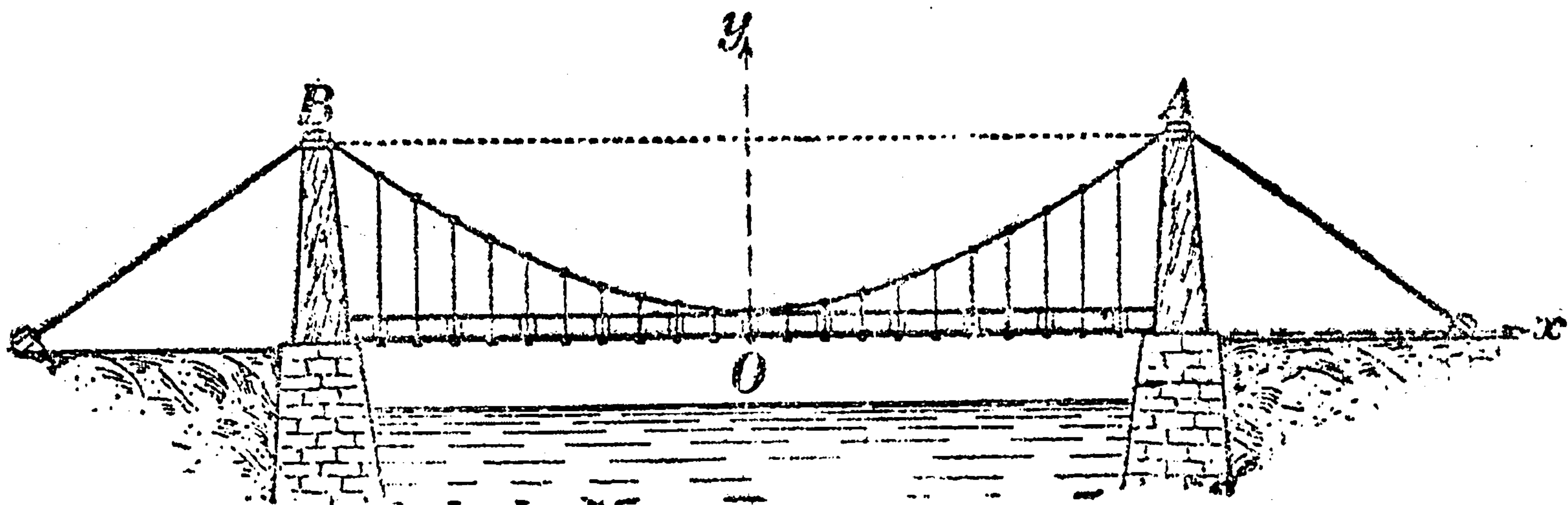
так что ось  $Ox$  служит осью симметрии параболы. Отрицательных значений  $x$  принимать не может (ибо  $y^2$  не может быть  $< 0$ ), так что параболы всеми точками лежит вправо от оси  $Oy$ . Начало координат, через которое параболы проходит, называется ее *вершиной*.



Черт. 152.

С возрастанием  $x$ ,  $y$  также растет (по абсолютному значению) до  $\infty$ ; асимптот параболы не имеет, и это обстоятельство резко отличает ее облик от ветви гиперболы (с которой ее отнюдь нельзя смешивать!).

105. Форма нити, отягченной грузом. Чтобы дать пример использования параболы, рассмотрим гибкую нерастяжимую нить, подвешенную концами в точках  $A$  и  $B$  (черт. 152), и предположим, что на нить действует нагрузка, причем на каждую единицу длины ее горизонтальной проекции приходится постоянная нагрузка  $q$ . В таком примерно положении находится цепь висячего моста



Черт. 153.

(черт. 153), поддерживающая груз при помощи большого числа стержней, если весом самой цепи можно пренебречь по сравнению с весом моста. Поставим себе задачей — определить форму этой нити (цепи), предполагая ее в равновесии.

Пусть  $O$  будет самая низкая точка нити, ее и выберем за начало координат, расположив оси как показано на чертеже. Если мы выделим дугу  $OP$  нити, то коль скоро она в равновесии, все действующие на нее силы должны взаимно уравновешиваться. Сообразим, какие же это силы. Прежде всего, в точке  $O$  действует *натяжение* нити  $H$ , направленное влево по оси  $Ox$  (которая касается кривой в точке  $O$ ). Точно так же действует на дугу  $OP$  и натяжение нити  $T$  в точке  $P$ , направленное по касательной вправо и вверх. Наконец, на этот участок нити действует еще груз, величина которого (пропорциональная горизонтальной проекции дуги, т. е. абсциссе  $x$  точки  $P$ ) измеряется числом  $qx$ . Рассчи-



тывая действие этих сил так, как если бы дуга  $OP$  была твердым телом, видим, что при равновесии эти силы должны составлять треугольник (черт. 154). Отсюда, если  $\alpha$  есть угол наклона касательной (и силы  $T$ ) к горизонту,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{qx}{H}.$$

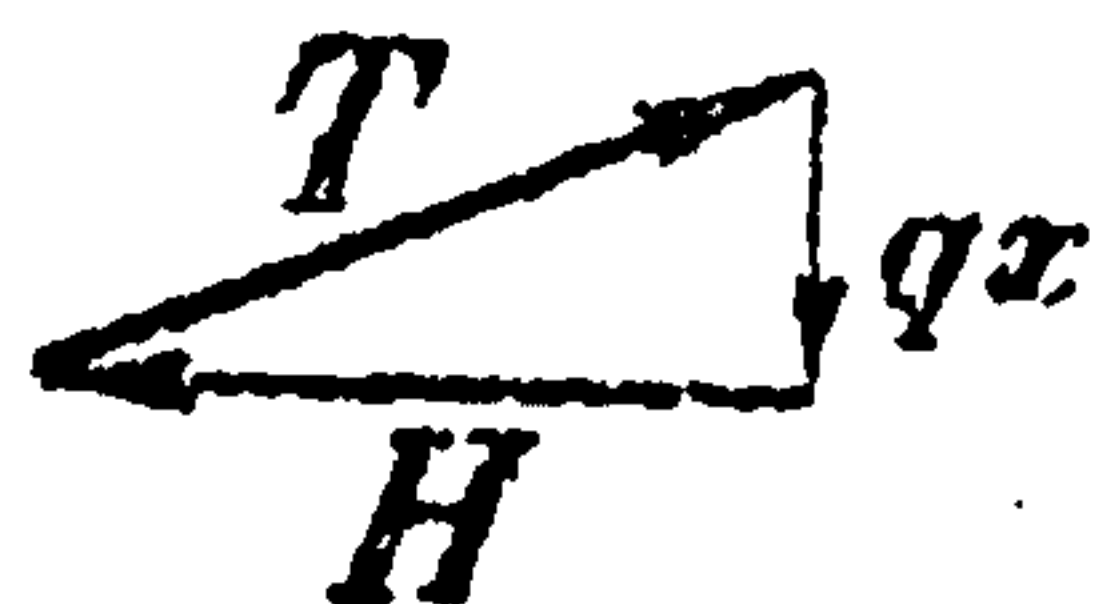
Но ведь  $\operatorname{tg} \alpha$  равен производной  $\frac{dy}{dx}$  [65]; таким образом, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{H} x \quad (29)$$

и из этого дифференциального уравнения [см. 74 и примечание на стр. 209] путем интегрирования, находим неизвестную нам до сих пор функцию  $y$ :

$$y = \frac{q}{2H} x^2 + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  следует положить равной 0, так как при  $x = 0$  и  $y$  должно обратиться в 0. Таким образом, наша нить расположится по *параболе*  $y = \frac{q}{2H} x^2$ ; на этот раз вид кривой мы установили по ее уравнению.



Черт. 154.

Если *вертикальное расстояние* точек подвеса нити и наименьшей ее точки (называемое *стрелой провеса*) обозначить через  $f$ , а величину полупролета — через  $l$ , то координаты точки  $A$  будут  $x = l$ ,  $y = f$ ; подставляя эти значения в уравнение параболы, получим

$$f = \frac{ql^2}{2H}, \quad \text{откуда} \quad H = \frac{ql^2}{2f}.$$

Так как  $ql$  есть вес  $Q$  груза, приходящегося на половину нити, то можно выразить натяжение  $H$  в наименьшей точке и так:

$$H = \frac{Ql}{2f}.$$

Если тяжесть, действующая на нить, равномерно распределена по длине нити, так что *на единицу длины нити* приходится постоянная нагрузка  $q$ , то для определения формы нити получается условие, отличающееся от (29) лишь тем, что горизонтальная проекция  $x$  дуги  $OP$  заменяется длиной  $s$  этой дуги:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{H} s. \quad (30)$$

Проинтегрировать это уравнение мы в состоянии будем лишь в последующем. Сейчас же ограничимся указанием, что в результате получается так называемая *цепная линия* (форма цепи под действием ее веса):

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad (31)$$

(где  $a = \frac{H}{q} = \text{пост.}$ ), имеющая вид, указанный на черт. 155. При этом ось  $Ox$  расположена так, что наименьшая ордината (при  $x = 0$ ) равна именно  $a$ .

Хотя провисание нитей (цепей, телеграфных проводов и т. п.) под действием лишь их веса (который распределяется именно равномерно по длине нити) происходит по цепной линии, но если провес невелик, обыкновенно расчет произво-



дят так, как если бы нить провисала по параболе. (На черт. 155 для сравнения, на ряду с цепной линией, представлена пунктиром и парабола.)

**106. Уравнения, отнесенные к вершине.** При выводе уравнений эллипса, гиперболы и параболы мы подчеркивали, что оси координат там нами выбирались особым образом, с целью придать уравнению кривой простейший вид. При другом выборе осей та же кривая оказалась бы выраженной уравнением другой формы. По отношению к параболе мы уже сталкивались с этим обстоятельством в 38.

Поставим себе теперь задачей отнести уравнение эллипса к его вершине  $A$  (черт. 156), сохранив прежние направления осей. Так как координаты нового начала  $A$  будут  $(-a, 0)$ , то старые координаты  $(x, y)$  любой точки плоскости будут связаны с новыми ее координатами  $(x', y')$  простыми соотношениями:  $x =$

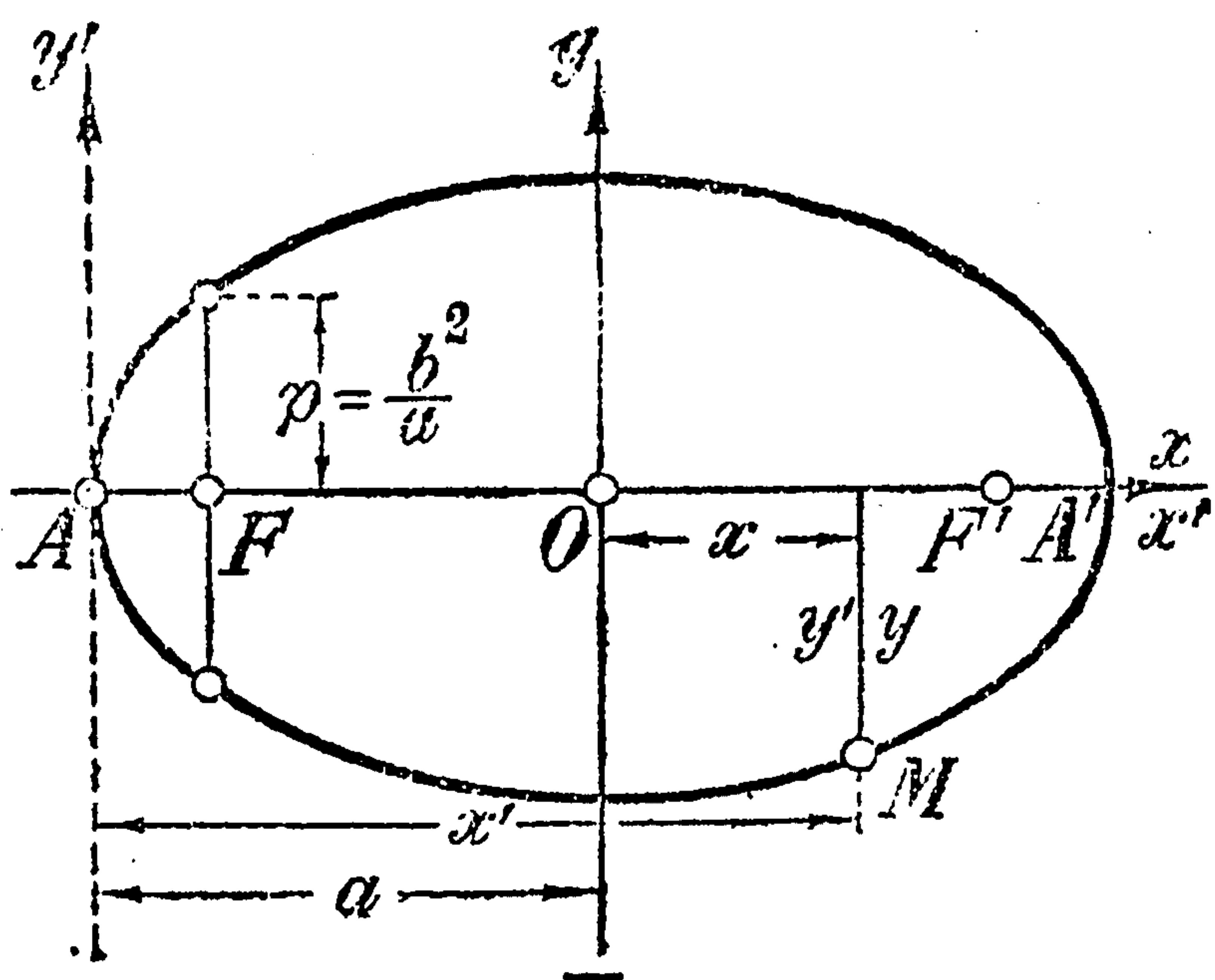
$= x' - a, y = y'$  [см. 37, формулы (11)]. Подставляя эти выражения в уравнение эллипса (24), отнесенное к центру, получим после преобразований:

$$y'^2 = 2 \frac{b^2}{a} x' - \frac{b^2}{a^2} x'^2.$$

Полагая  $\frac{b^2}{a} = p$ , заметим, что величина  $2p$  (называемая *параметром*

эллипса) есть не что иное, как длина хорды эллипса, проходящей через фокус и перпендикулярной к большой оси (см. чертеж); действительно, если взять в уравнении (24)  $x = \pm c$ , то ординаты соответствующих точек эллипса как раз и окажутся равными  $\pm p$ . С этим обозначением полученное уравнение переписется так:

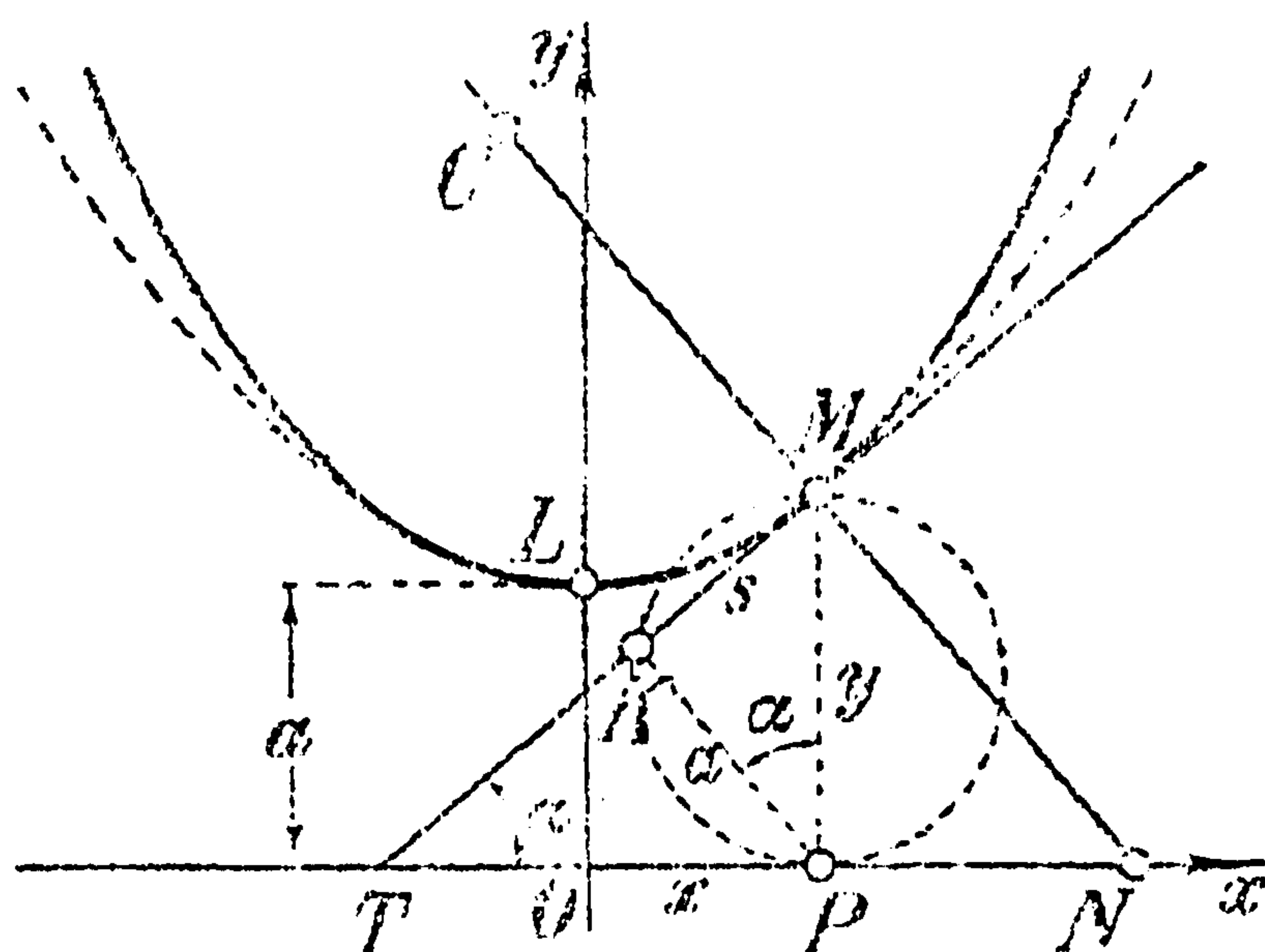
$$y'^2 = 2px' - \frac{p}{a} x'^2.$$



Черт. 156

Аналогично, если отнести уравнение гиперболы к ее вершине  $A'$  (черт. 147), то в новых координатах, скажем  $-x', y'$ , уравнение примет вид:

$$y'^2 = 2px' + \frac{p}{a} x'^2,$$



Черт. 155.



где  $p = \frac{b^2}{a}$  играет ту же роль, что и в случае эллипса, и  $a$  есть вещественная полуось.

Мы видим, что уравнение как эллипса, так и гиперболы в новых координатах становится очень похожим на уравнение параболы, отнесенное к вершине:  $y'^2 = 2px'$  (если и здесь текущие координаты обозначим через  $x', y'$ ). Величина  $2p$  (параметр параболы) имеет тот же геометрический смысл, что и выше: так как фокус имеет абсциссу  $\frac{p}{2}$ , то, поло-

жив в уравнении параболы  $x' = \frac{p}{2}$ , найдем, что  $y' = \pm p$ .

Таким образом, если отнести эллипс, гиперболу и параболу к вершине (черт. 157), то (возвращаясь к прежним обозначениям для текущих координат) мы во всех трех случаях будем иметь уравнение вида:

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

с тем лишь различием, что для эллипса  $q = -\frac{p}{a} < 0$ , для гиперболы

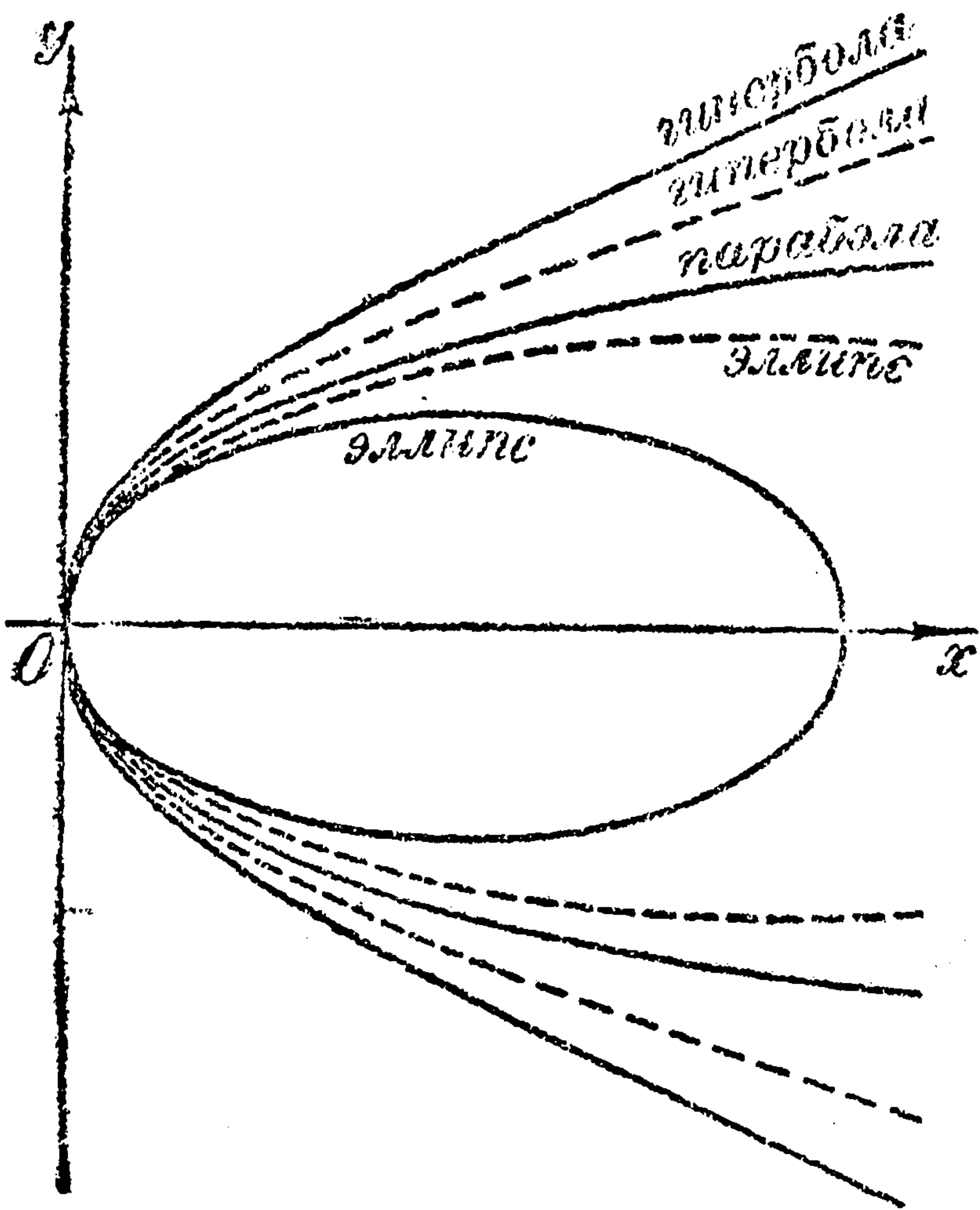
$q = \frac{p}{a} > 0$ , а для параболы  $q = 0$ .

Заметим, что при сохранении  $p$  неизменным и безграничном увеличении большой оси  $a$  эллипса,  $q = -\frac{p}{a}$  очевидно будет стремиться к нулю,

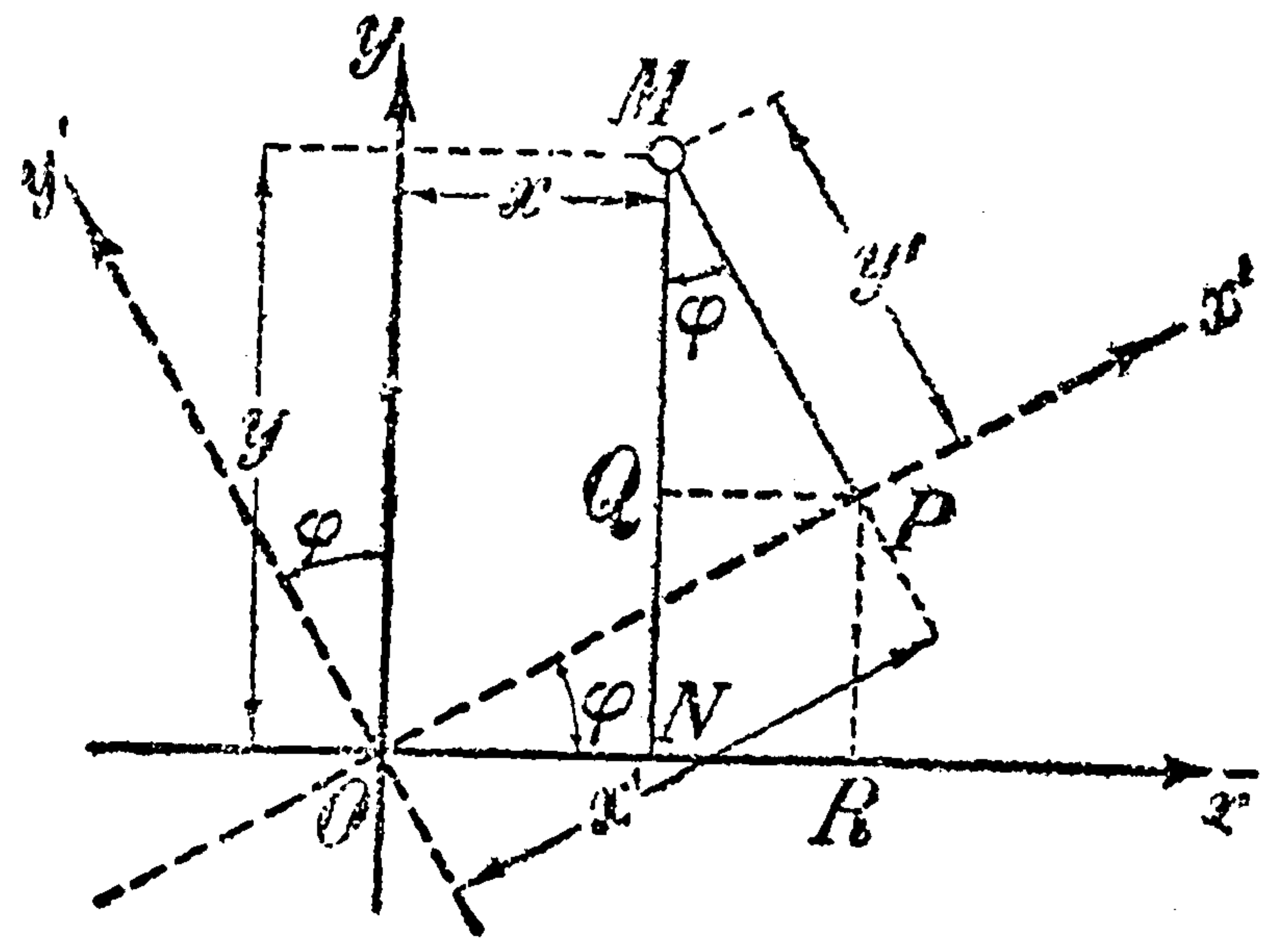
так что в пределе уравнение эллипса обратится в уравнение параболы и эллипс перейдет в параболу (причем вторая его вершина „уйдет в бесконечность“). Точно так же и гипербола перейдет в ту же параболу при безграничном увеличении ее вещественной оси. Парабола служит предельным образом как для эллипсов, так и для гипербол, и в то же время — как бы переходным образом от одних к другим!

**107. Поворот осей координат. Общий случай преобразования координат.** Для того чтобы дать себе

отчет в том, какой вид могут приобрести уравнения изученных нами кривых, если отнести их к произвольным координатным осям, мы выведем здесь формулы преобразования координат, соответствующие изменению направления осей, при сохранении начала.



Черт. 157.



Черт. 158.



Повернем координатную систему  $xOy$  на угол  $\varphi$  (черт. 158), в положение  $x'Oy'$ , и будем обозначать координаты любой точки  $M$  по отношению к старой системе через  $x, y$ , а по отношению к новой — через  $x', y'$ . Требуется установить зависимость между  $x, y$  и  $x', y'$ .

Имеем из чертежа последовательно:

$$x = ON = OR - NR = OR - QP,$$

но из  $\Delta$ -ов  $OPR$  и  $MPQ$ :

$$OR = OP \cdot \cos \varphi = x' \cdot \cos \varphi, \quad QP = PM \cdot \sin \varphi = y' \cdot \sin \varphi,$$

так что  $x = x' \cdot \cos \varphi - y' \sin \varphi$ . Аналогично:

$$y = NM = NQ + QM = RP + QM,$$

те же  $\Delta$ -ки дают:

$$RP = OP \cdot \sin \varphi = x' \cdot \sin \varphi, \quad QM = PM \cdot \cos \varphi = y' \cdot \cos \varphi,$$

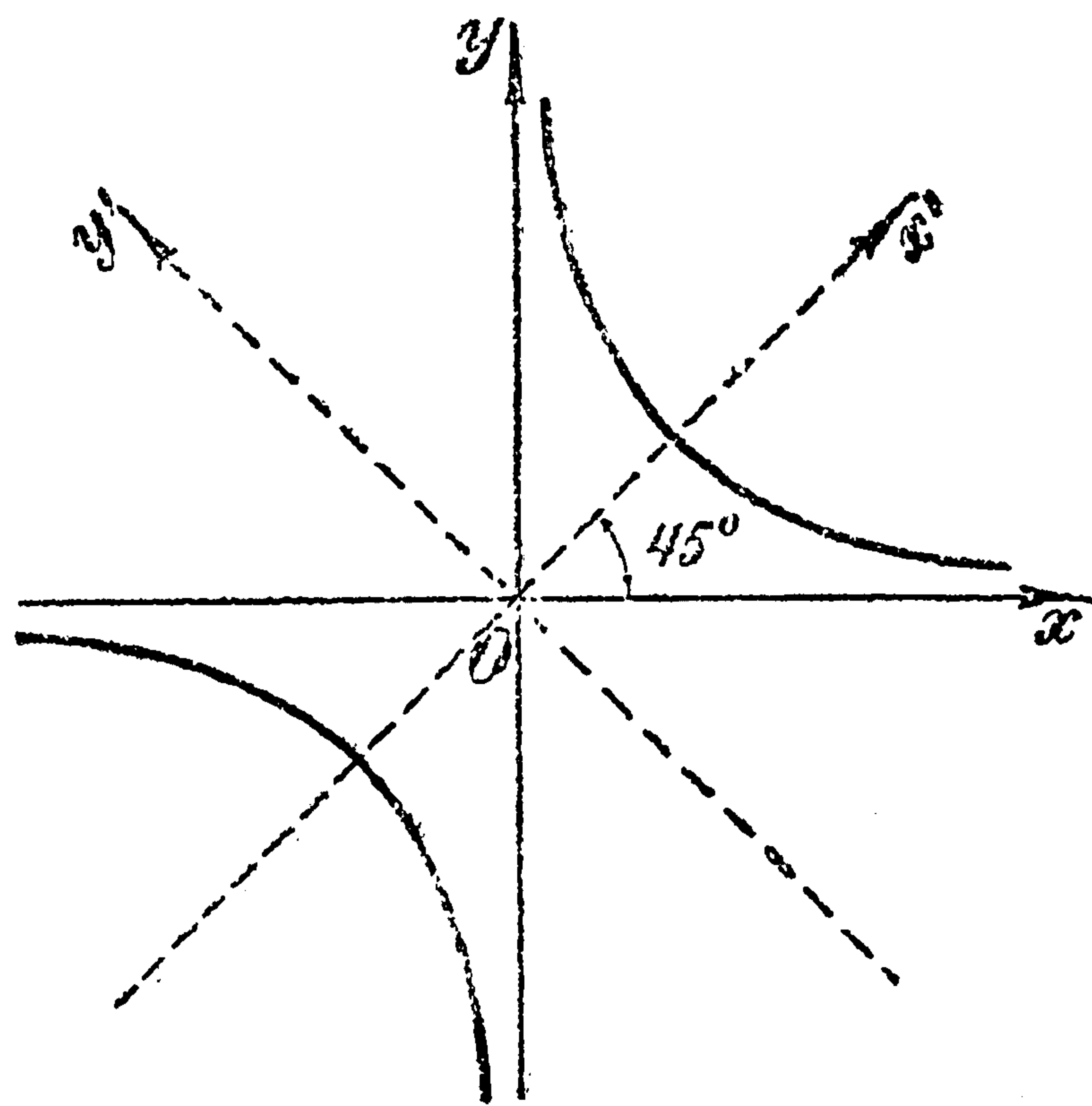
и  $y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi$ . Итак, окончательно, старые координаты точки  $M$  следующим образом выражаются через новые ее координаты:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (32)$$

Эти уравнения легко решить относительно  $x', y'$  и выразить новые координаты через старые:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi, \\ y' = -x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (32 a)$$

Еще проще получить эти формулы из предыдущих, если переставить там  $x, y$  и  $x', y'$  одни на место других, и заменить  $\varphi$  на  $-\varphi$ , ибо если считать систему  $x'Oy'$  за „исходную“, то ее нужно было бы повернуть на угол  $-\varphi$ , чтобы привести ее в совпадение с системой  $xOy$ , принимаемой за „новую“. Впрочем, при преобразовании уравнений кривых к новым координатам нужны именно формулы (32), а не (32 a).



Черт. 159.

В виде примера рассмотрим кривую, определяемую в данной системе координат уравнением  $y = \frac{k}{x}$  ( $k > 0$ ), или  $xy = k$  (черт. 159). Сохраняя начало, повернем оси на  $45^\circ$ ; читатель уже по чертежу видит, что по отношению к новым осям  $Ox'$  и  $Oy'$  кривая располагается так, как обыкновенная гипербола по отношению к своим осям симметрии. Мы подтвердим это выкладками. Вспомнив,



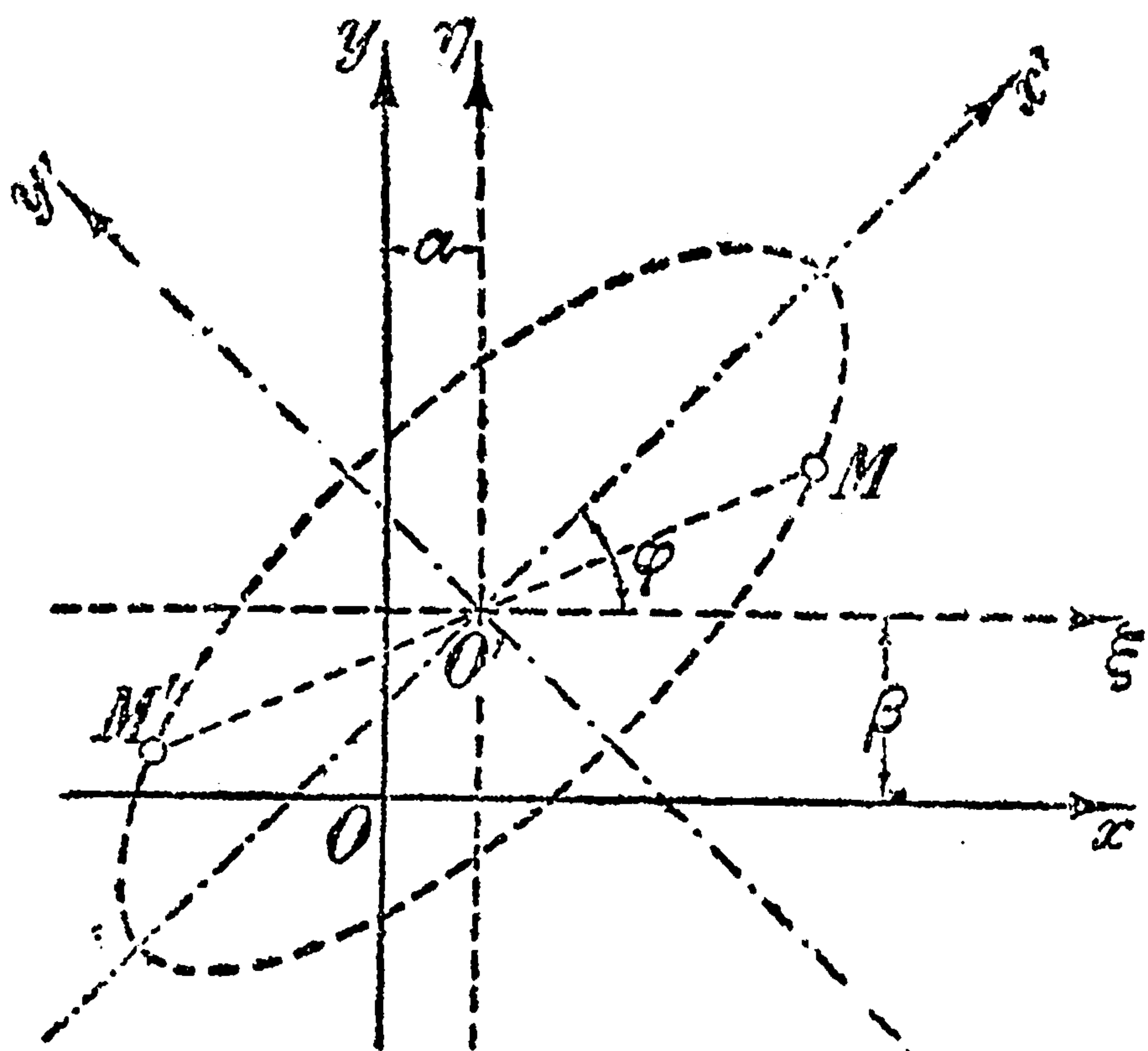
что при  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ )  $\sin \varphi = \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , и подставив эти значения в формулы преобразования (32), получим:

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Теперь нужно в уравнение  $xu = k$ , связывающее старые координаты точки кривой, подставить найденные их выражения через новые. Окончательно получим уравнение

$$x'^2 - y'^2 = 2k, \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{2k} - \frac{y'^2}{2k} = 1,$$

выражающее, как мы знаем, *равнобочную гиперболу*. Таким образом, мы доказали тождество между гиперболой, изученной в главе IV [41], и частным случаем гиперболы, геометрическое определение которой было дано в 101; лишь в первом случае (равнобочная) гиперболы была отнесена к асимптотам, а во втором — к осям симметрии.



Черт. 160.

Рассмотрим теперь самый общий случай преобразования координат, при котором и начало переносится в новое положение, и оси меняют направление (черт. 160). Такое преобразование может быть сведено к двум последовательным преобразованиям уже изученного типа: 1) к переносу начала в новое положение  $O'$ , с сохранением направления осей, и 2) к повороту осей, при неподвижном начале. Таким образом, сначала система  $xOy$  за-

меняется системой  $\xi O'\eta$  (см. чертеж) и, если координаты точки  $O'$  суть  $\alpha, \beta$ , то формулы преобразования [согласно (11), 37] будут:

$$x = \alpha + \xi, \quad y = \beta + \eta; \quad (33)$$

затем, система  $\xi O'\eta$  заменяется системой  $x'O'y'$ , чему отвечают [см. (32)] формулы:

$$\xi = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \quad \eta = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi. \quad (34)$$

Если сопоставить эти все формулы, то получатся следующие окончательные зависимости между старыми и новыми координатами:

$$\begin{cases} x = \alpha + x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = \beta + x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi. \end{cases} \quad (35)$$

Применим эти формулы к следующему примеру. Очертание свода (черт. 161)



составлено из двух симметричных кривых  $ACB$  и  $AED$ . Левая из них, по отношению к указанной на чертеже системе осей  $Ox$  и  $Oy$ , имеет уравнение:

$$(x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0. \quad (36)$$

Проверить, что эта кривая представляет собой параболу с осью  $OF$ , с вершиной в середине  $C$  отрезка  $OF$  и с фокусом в точке  $F$ .

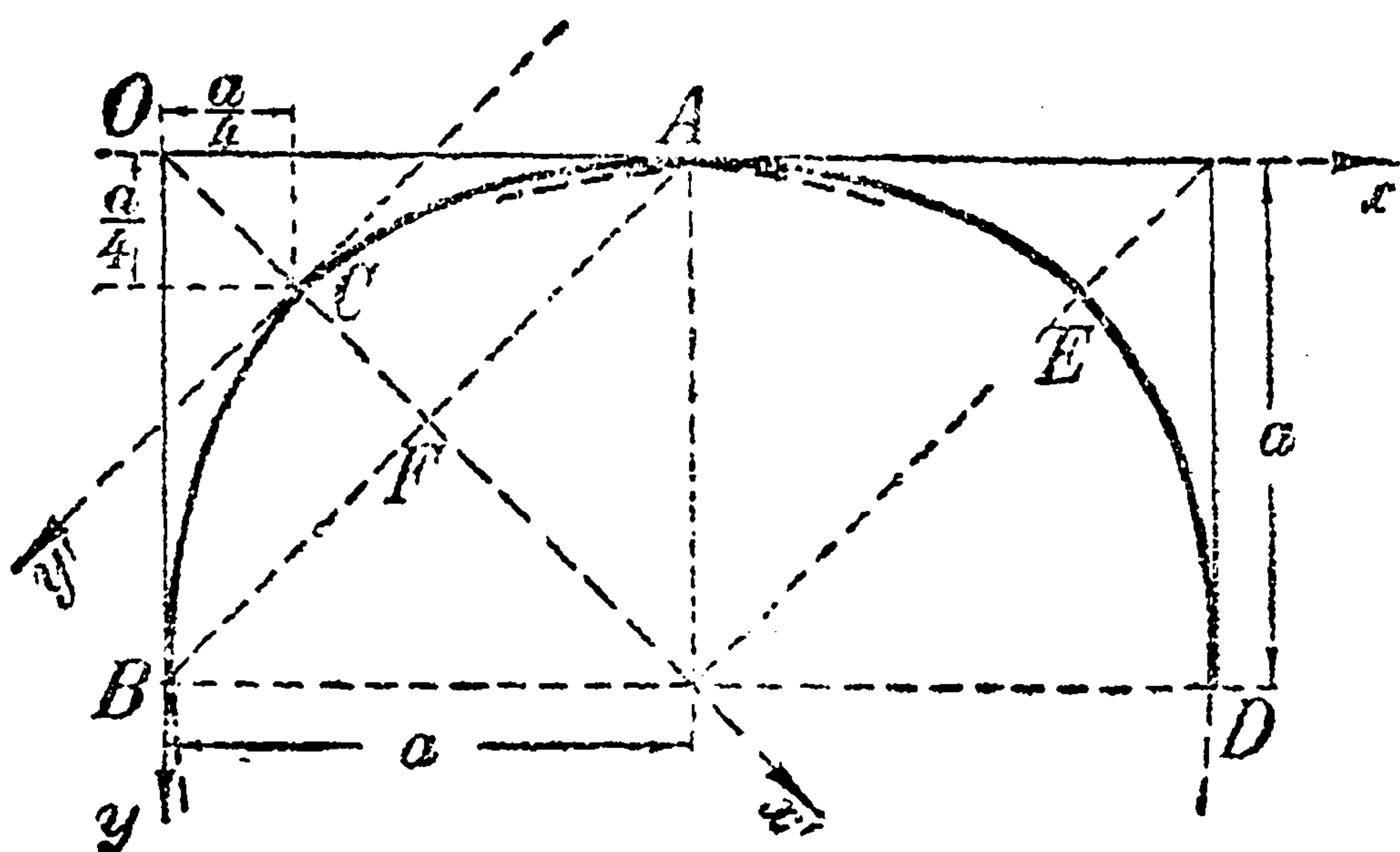
С этой целью перенесем начало в точку  $C\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$  и повернем оси на  $45^\circ$ . В силу (35) формулы преобразования будут

$$x = \frac{a}{4} + \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{a}{4} + \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

так что

$$x - y = -y' \cdot \sqrt{2}, \quad x + y = \frac{a}{2} + x' \cdot \sqrt{2};$$

подставляя эти выражения в уравнение (36), после упрощений, придем к уравнению:  $y'^2 = a\sqrt{2} \cdot x'$ , которое, действительно, выражает параболу с параметром  $2p = a\sqrt{2}$ , и следовательно с фокусом в точке  $F$ , ибо  $CF$  как раз и равно  $\frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{p}{2}$ .



Черт. 161.

**108. Кривые второго порядка.** Даже немногие рассмотренные примеры обращают внимание на одно замечательное обстоятельство: при преобразовании координат уравнения кривых сохраняли свою степень. Это обстоятельство не случайно, оно является простым следствием того, что зависимости (33), связывающие старые и новые координаты, оказываются первой степени относительно тех и других. Таким образом, эллипс (в частности, окружность), гипербола и парабола всегда выражаются уравнениями второй степени относительно координат  $x, y$  точки, какая бы система координат ни была положена в основу. Вообще, те кривые, которые в какой-нибудь системе координат выражаются алгебраическими уравнениями  $n$ -ой степени, и во всякой другой системе выразятся тоже уравнениями  $n$ -ой степени. Таким образом, степень уравнения есть нечто характерное для этих кривых, не зависящее от случайного выбора осей координат, вследствие чего о них говорят как о *кривых  $n$ -го порядка*. Сообразно с этим эллипс, гиперболу и параболу называют *кривыми второго порядка*. Наоборот, произвольное уравнение второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (37)$$

где  $A, 2B, C, 2D, 2E$  и  $F$  — данные коэффициенты, выражает, вообще



говоря, одну из этих кривых.\* Существуют признаки, с помощью которых можно сразу установить, с какой кривой мы имеем дело. Именно, стоит лишь составить выражение  $\Delta = AC - B^2$ ; тогда

при	имеем:
$\Delta > 0,$	<i>эллипс;</i>
$\Delta < 0,$	<i>гиперболу;</i>
$\Delta = 0,$	<i>параболу.</i>

Напр., из уравнений:

- 1)  $x^2 - 4xy - 3y^2 - 2x + 5y - 1 = 0,$  2)  $2x^2 + 12xy + 18y^2 - 3x + 7 = 0,$   
3)  $5x^2 + 15xy + 12y^2 + 10x - 27y + 11 = 0$

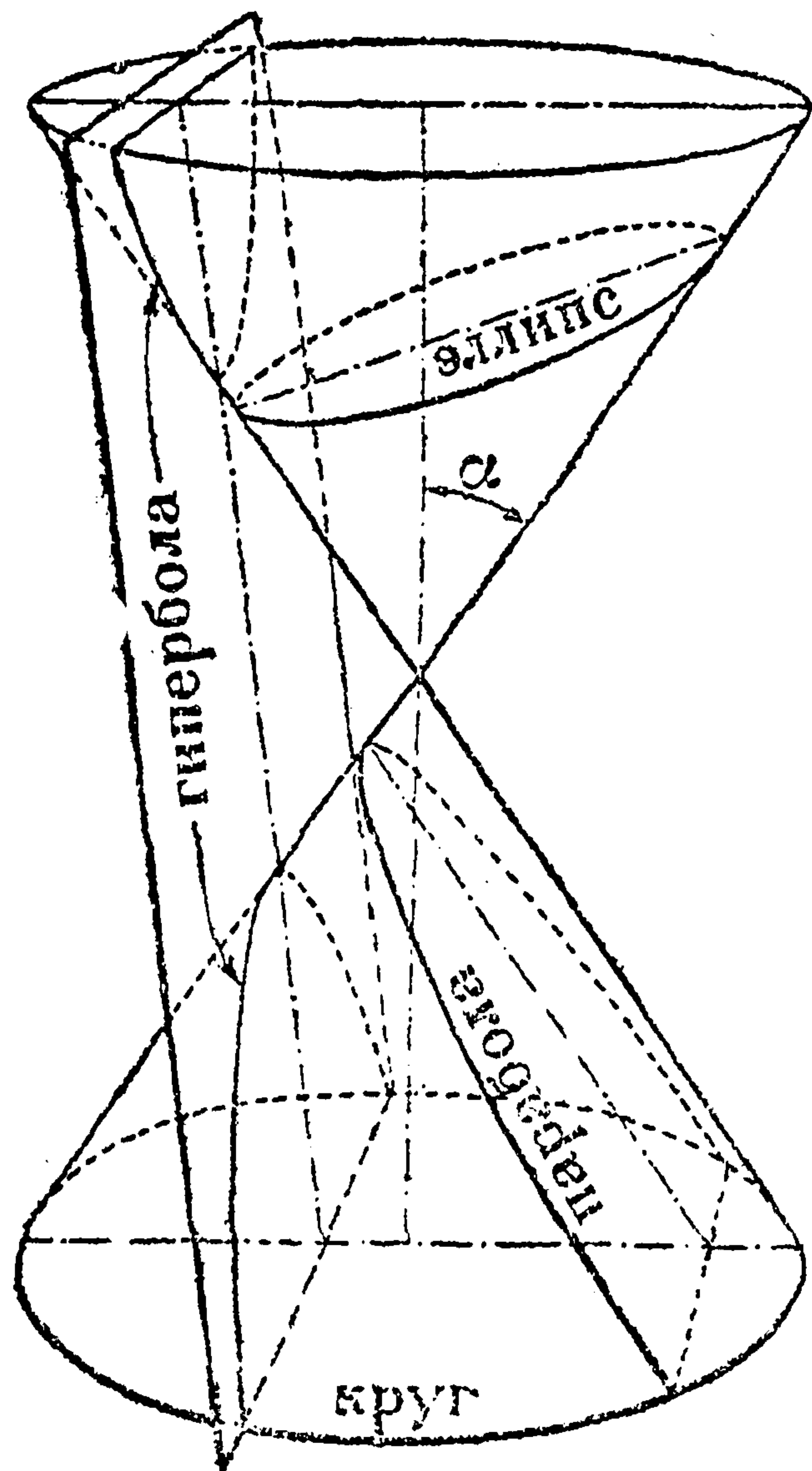
первое выражает гиперболу ( $A=1, B=-2, C=-3; \Delta=-7$ ), второе — параболу ( $A=2, B=6, C=18; \Delta=0$ ), а третье — эллипс ( $A=5,$

$B=\frac{15}{2}, C=12; \Delta=\frac{15}{4}$ ). Столь же легко

сразу по виду уравнения (36) установить, что оно выражает параболу ( $A=C=-B=1, \Delta=0$ ).

Полное доказательство высказанных утверждений выходит из рамок этого курса; в следующем п<sup>0</sup>, впрочем, мы сделаем некоторые указания, относящиеся к наиболее важному для техники случаю, когда рассматриваемая кривая есть эллипс.

Заметим еще, что *эллипс, гипербола и параболы* получаются в сечении прямого кругового конуса, при различных наклонах секущей плоскости к оси. На черт. 162 изображен такой конус, с его двумя полками (полостями), отверстия которых направлены в противоположные стороны. В сечении плоскостью, перпендикулярной к оси, получается *круг*: вообще, если угол  $\theta$  наклона секущей плоскости к оси конуса больше угла  $\alpha$  между осью и образующими, то в сечении окажется *эллипс*. Когда  $\theta = \alpha$  и секущая плоскость становится параллельной одной из образующих,



Черт. 162.

кривая сечения будет *параболой*. Наконец, если  $\theta > \alpha$ , секущая плоскость пересекает обе полки конуса, и в сечении получается кривая, состоящая из двух отдельных ветвей — *гипербола*.

\* Обыкновенно, для упрощения многих формул, через  $B, D, E$  обозначают не полные коэффициенты при  $xy, x$  или  $y$ , а их половины.

В исключительных случаях уравнение (37) может выражать и две прямые (напр., уравнение  $x^2 - y^2 = 0$ , очевидно, равносильно совокупности двух уравнений  $x + y = 0$  и  $x - y = 0$ , выражающих прямые); на этих случаях останавливаться не будем.



Эти свойства эллипса, гиперболы и параболы были известны еще древним грекам, которые и дали этим кривым название *конических сечений*.

Таким образом, мы видим, что эллипс, гипербола и парабола тесно между собой связаны с разных точек зрения. Они обладают многими важными общими свойствами. Так, изложенное в 100 свойство параллельных хорд эллипса (середины их оказались лежащими на одной прямой) переносится и на гиперболу и параболу. Ниже [124] мы установим некоторые сходные между собой свойства касательных ко всем этим кривым, и т. п.

**109. Исследование общего уравнения эллипса.** Пусть дано уравнение (35), при условии, что  $\Delta = AC - B^2 > 0$ . Покажем, что переносом начала в надлежаще выбранную точку  $O'(\alpha, \beta)$  можно добиться уничтожения в уравнении членов первой степени, т. е. привести уравнение к виду:

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + F' = 0, \quad (38)$$

а затем — поворотом осей на надлежащий угол  $\varphi$  уничтожить и член с произведением переменных координат, и окончательно придать уравнению форму:

$$A'x'^2 + B'y'^2 + F' = 0. \quad (39)$$

Начнем с частного примера:

$$29x^2 - 42xy + 29y^2 + 26x - 74y - 139 = 0.$$

Переносим начало координат в точку  $O'(\alpha, \beta)$  (черт. 160), координаты которой пока еще не определены, мы воспользуемся формулами преобразования (33), выражающими старые координаты  $x, y$  через новые  $\xi, \eta$ . Если подставить эти выражения в наше уравнение, то получим:

$$29(\alpha + \xi)^2 - 42(\alpha + \xi)(\beta + \eta) + 29(\beta + \eta)^2 + 26(\alpha + \xi) - 74(\beta + \eta) - 139 = 0$$

или, после раскрытия скобок и приведения,

$$29\xi^2 - 42\xi\eta + 29\eta^2 + \frac{(58\alpha - 42\beta + 26) \cdot \xi + (-42\alpha + 58\beta - 74) \cdot \eta + (29\alpha^2 - 42\alpha\beta + 29\beta^2 + 26\alpha - 74\beta - 139)}{1} = 0.$$

Уравнение получило очень громоздкий вид только потому, что мы еще не выбрали  $\alpha$  и  $\beta$ ! Если мы хотим, чтобы исчезли оба подчеркнутые члена, то нужно выбрать  $\alpha$  и  $\beta$  так, чтобы выполнялись равенства:

$$58\alpha - 42\beta + 26 = 0, \quad -42\alpha + 58\beta - 74 = 0.$$

Решая совместно эти два уравнения с двумя неизвестными, найдем, что  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ . Итак, переносим начало в точку  $O'(1, 2)$ , действительно, упростим наше уравнение, получив вместо него следующее уравнение:

$$29\xi^2 - 42\xi\eta + 29\eta^2 - 200 = 0.$$

Аналогично, и в общем случае, подставляя вместо  $x, y$  выражения (33), приведем уравнение (35) к виду:

$$A(\alpha + \xi)^2 + 2B(\alpha + \xi)(\beta + \eta) + \dots = 0$$

или, после преобразований:

$$A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 + \underline{2(A\alpha + B\beta + D)\xi + 2(B\alpha + C\beta + E)\eta} + F' = 0,$$



где

$$F' = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2D\alpha + 2E\beta + F. \quad (40)$$

Координаты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из уравнений

$$A\alpha + B\beta + D = 0, \quad B\alpha + C\beta + E = 0 \quad (41)$$

следующим образом:

$$\alpha = \frac{BE - CD}{AC - B^2}, \quad \beta = \frac{BD - AE}{AC - B^2},$$

причем дроби эти имеют определенные конечные значения именно потому, что их общий знаменатель  $AC - B^2$ , как предположено, не нуль.

Итак, уравнение (38) достигнуто. Заметим, что самый вид его обнаруживает, что *новое начало  $O'$  служит центром нашей кривой*. Действительно, уравнение это не меняется, если  $\xi$  заменить на  $-\xi$  и, одновременно,  $\eta$  на  $-\eta$ ; иными словами, одновременно с точкой  $M(\xi, \eta)$  удовлетворяет уравнению (следовательно, лежит на кривой) и точка  $M'(-\xi, -\eta)$ , симметричная ей относительно начала (см. черт. 160).

Весь смысл произведенного преобразования как раз в том, что мы перенесли начало именно в центр кривой!

Станем теперь поворачивать оси; обозначая (пока неопределенный) угол поворота через  $\varphi$ , заменим координаты  $\xi$  и  $\eta$  в уравнении (38) выражениями (34):

$$A(x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi)^2 + 2B(x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi)(x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi) + \\ + C(x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi)^2 + F' = 0.$$

Если раскрыть скобки и собрать отдельно члены, содержащие  $x'^2$ ,  $x'y'$  или  $y'^2$ , то получим:

$$A'x'^2 + 2B' \cdot x'y' + C'y'^2 + F' = 0, \quad (39 a)$$

где для сокращения положено:

$$\begin{cases} A' = A \cdot \cos^2 \varphi + 2B \cdot \sin \varphi \cos \varphi + C \cdot \sin^2 \varphi, \\ B' = B \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (A - C) \sin \varphi \cos \varphi, \\ C' = A \cdot \sin^2 \varphi - 2B \cdot \sin \varphi \cos \varphi + C \cdot \cos^2 \varphi. \end{cases}$$

Вспомнив, что

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi, \quad 2\sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi,$$

мы можем переписать эти выражения для новых коэффициентов в следующем виде:

$$\begin{cases} 2A' = (A + C) + [(A - C) \cos 2\varphi + 2B \sin 2\varphi], \\ 2B' = 2B \cos 2\varphi - (A - C) \sin 2\varphi, \\ 2C' = (A + C) - [(A - C) \cos 2\varphi + 2B \sin 2\varphi]. \end{cases} \quad (42)$$

Отсюда, между прочим, сразу получаются два замечательных тождества. Складывая первое и третье из равенств (42), прежде всего находим:

$$A' + C' = A + C. \quad (43)$$

Затем, легко вычислить:

$$4(A'C' - B'^2) = (A + C)^2 - [(A - C) \cos 2\varphi + 2B \sin 2\varphi]^2 - [2B \cos 2\varphi - (A - C) \sin 2\varphi]^2 = \\ = (A + C)^2 - (A - C)^2 - 4B^2 = 4(AC - B^2),$$

так что

$$A'C' - B'^2 = AC - B^2. \quad (44)$$

Таким образом, выражения  $A + C$  и  $AC - B^2$  сохраняют при преобразовании (34) неизменную величину, несмотря на то, что отдельные коэффициенты  $A, B, C$



при этом могут и измениться. (Эти выражения называют *инвариантами* преобразования.)

Так как нашей целью, при повороте осей, было добиться уничтожения члена с произведением переменных, то угол  $\varphi$  следует подобрать так, чтобы выполнялось условие:

$$2B' = 2B \cos 2\varphi - (A - C) \sin 2\varphi = 0,$$

откуда:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2B}{A - C} \quad (45)$$

Если повернуть оси именно на угол  $\varphi$ , определяемый этой формулой, то уравнение кривой, по отношению к новой системе координат, примет уже вид (39).

В рассмотренном примере было:  $A = C = 29$ ,  $B = -21$ , так что  $\operatorname{tg} 2\varphi = \infty$ , и можно положить  $2\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . \* Подставляя это значение  $\varphi$  в формулы (42), получим, конечно,  $B' = 0$ , и затем:  $A' = 8$ ,  $C' = 50$ , так что при повороте ранее найденной системы осей на  $45^\circ$  уравнение преобразуется к виду:

$$8x'^2 + 50y'^2 - 200 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{4} = 1,$$

откуда сразу усматриваем, что кривая наша представляет собою эллипс с полуосями 5 и 2 (который и изображен на черт. 160).

Новые оси координат оказываются осями кривой, и в этом именно был смысл произведенного преобразования.

В общем случае, имея уравнение (39), и переписав его в виде:

$$A'x'^2 + C'y'^2 = -F',$$

относительно знаков его коэффициентов заметим следующее. Так как  $B' = 0$  и, в виду (44),  $A'C' = \Delta > 0$ , то  $A'$  и  $C'$  будут *одного знака*: если уравнение наше, действительно, выражает кривую, то и правая часть его должна иметь *тот же знак* — иначе ни одна точка не могла бы ему удовлетворять. Итак, число  $-F'$  одного знака, как с  $A'$ , так и с  $C'$ . Разделяя обе части уравнения на  $-F'$ , преобразуем его к виду:

$$\frac{\frac{x'^2}{-F'}}{\frac{A'}{-F'}} + \frac{\frac{y'^2}{-F'}}{\frac{C'}{-F'}} = 1$$

или, если обозначить положительные знаменатели этих дробей, соответственно, через  $a^2$  и  $b^2$ , — к знакомому нам уже виду уравнения эллипса:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Заметим, что из уравнения (45) для угла  $2\varphi$  получится не одно, а ряд значений, разнящихся одно от другого на целое число  $\pi$ , следовательно, для  $\varphi$  получится ряд значений, разнящихся на целое число  $\frac{\pi}{2}$ . (В рассмотренном только-что случае, напр., можно было положить  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4} + \pi$ ,  $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}$  и т. д.).

\* Заметим, что это всегда будет так, если  $A = C$ . Исключение представляет случай, когда одновременно и  $B = 0$ , так что правая часть формулы (45) оказывается *неопределенной*. Но в этом случае исходное уравнение имеет вид (21 b), 96, и, как мы знаем, выражает окружность, для которой *любые* два взаимно перпендикулярных диаметра служат осями симметрии, так что и угол  $\varphi$ , действительно, можно взять любым.



На какой бы из этих углов ни повернуть оси координат, они все равно совместятся с осями кривой. Вопрос только в том, какая из них окажется осью  $O'x'$ , а какая — осью  $O'y'$ .

В заключение укажем, что определить коэффициенты  $A'$  и  $C'$  окончательного уравнения (39) можно и не находя угла  $\varphi$ . Так как числа  $\Delta = AC - B^2$  и  $S = A + C$  нам даны, то в виду (43) и (44) нам даны сумма и произведение коэффициентов  $A'$  и  $C'$ :

$$A' + C' = S, \quad A'C' = \Delta.$$

В таком случае, как известно из элементарной алгебры,  $A'$  и  $C'$  будут корнями квадратного уравнения:

$$z^2 - S \cdot z + \Delta = 0. \quad (46)$$

Итак, для нахождения  $A'$  и  $C'$  следует решить это уравнение; какой из корней взять за  $A'$  и какой — за  $C'$ , в сущности, безразлично, ибо выбор этот связан лишь с наименованием осей. В нашем примере:  $S = 58$ ,  $\Delta = 29^2 - 21^2 = 50 \cdot 8 = 400$ ; уравнение (46) имеет вид:  $z^2 - 58z + 400 = 0$ , его корни будут  $z_1 = 8$  и  $z_2 = 50$ , что согласуется с найденными раньше значениями  $A'$  и  $C'$ .

*Пример.*  $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 14x - 20y - 19 = 0$ ,  $\Delta = 36$ ,  $S = 13$ ; центр — из уравнений (41):  $5\alpha + 2\beta - 7 = 0$ ,  $2\alpha + 8\beta - 10 = 0$ , откуда  $\alpha = \beta = 1$ ; затем  $F'$  определяем по (40):  $F' = -36$ , а  $A'$  и  $C'$ , как корни уравнения (46):  $z^2 - 13z + 36 = 0$ , что дает  $A' = 4$ ,  $C' = 9$ ; уравнение (39):  $4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$  или, наконец,

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

— эллипс с полуосями 3 и 2. Для получения этого уравнения нужно начало перенести в точку (1, 1) и повернуть оси на угол  $\varphi$ , определяемый по формуле (45):  $\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{4}{3}$ .

Итак, для случая  $\Delta > 0$ , мы, в сущности, доказали, что уравнение (35) выражает эллипс; в случае  $\Delta < 0$  (что отвечает гиперболе) рассуждения вполне аналогичны; лишь в случае  $\Delta = 0$  (парабола) приходится несколько изменить их схему, в виду отсутствия центра.

**110. Параметрическое представление кривых.** Кроме представления плоской кривой с помощью явной зависимости:  $y = f(x)$  или неявного уравнения  $F(x, y) = 0$  между координатами  $x$ ,  $y$  переменной точки кривой, можно аналитически охарактеризовать кривую и иным способом, который, так сказать, подсказывается механикой. Там координаты движущейся точки  $M(x, y)$  стараются выразить в функции от времени  $t$  и считают вопрос о движении точки решенным, когда найдены выражения

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (47)$$

дающие возможность определить положение точки в любой момент  $t$ . Этими уравнениями определяется вполне и траектория точки, т. е. описываемая точкой кривая; обычное уравнение этой кривой можно получить из уравнений (47) путем исключения  $t$  (примеры чего читатель найдет ниже).

Не трудно понять, однако, что, если каким бы то ни было образом установлены зависимости (47), выражающие координаты  $x$ ,  $y$  переменной точки через третью вспомогательную переменную  $t$  (будь то время, или какая-нибудь другая величина), этим так же, как и выше, вполне определяется некоторая кривая, как геометрическое место положений точки  $M(x, y)$ , соответствующих различным значениям вспомогательной пере-



менной  $t$ . [Заметим, что вспомогательную переменную называют в математике *параметром*, вследствие чего и представление кривой с помощью уравнений вида (47) называется *параметрическим*.]

Например, легко видеть (черт. 163), что координаты  $x, y$  любой точки  $M$  окружности, описанной радиусом  $a$  вокруг начала координат, выражаются через угол  $t = \sphericalangle MOx$  следующим образом:

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t. \quad (48)$$

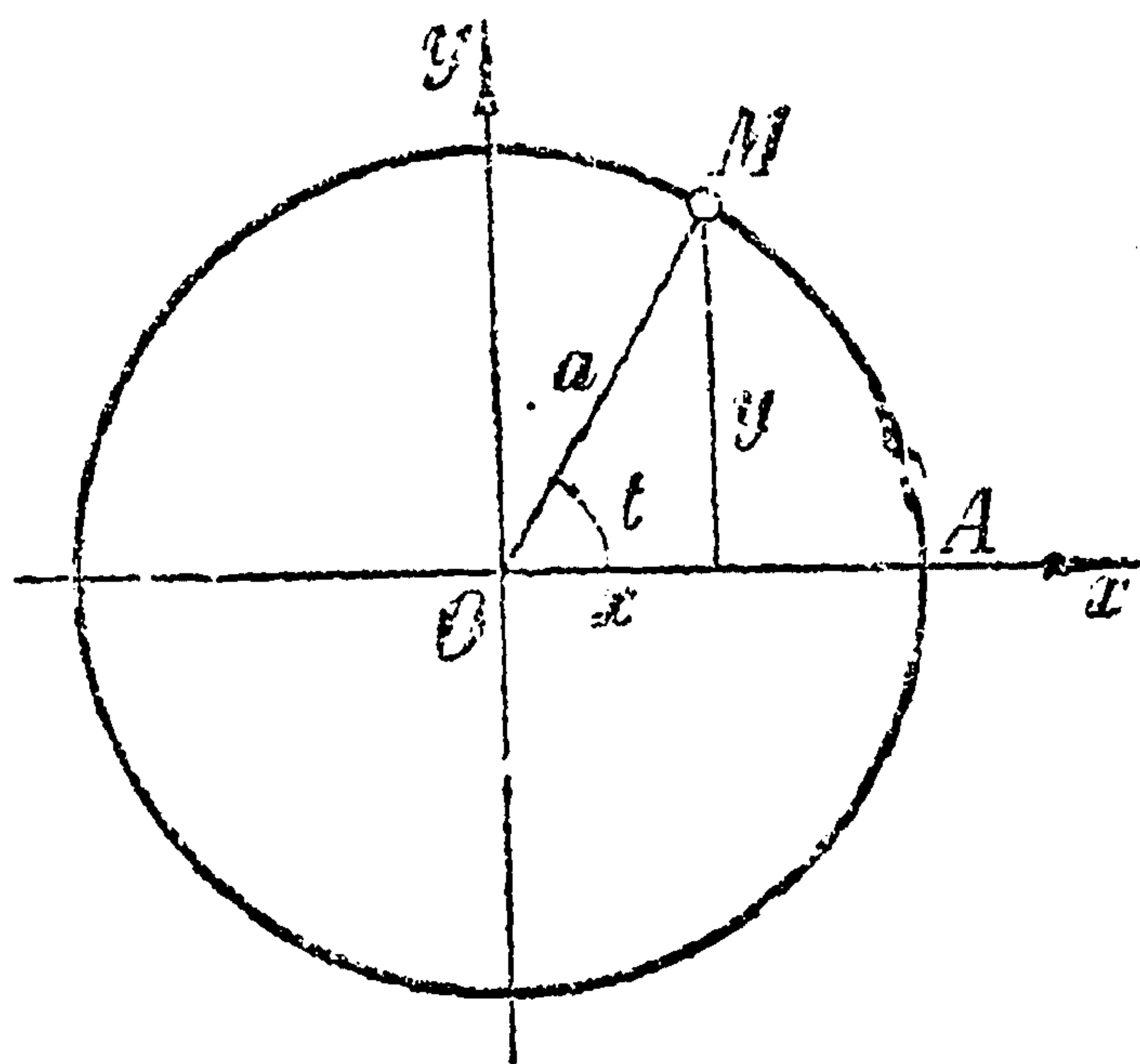
Обратно, если выполняются эти равенства, то точка  $M(x, y)$  непременно лежит на окружности, ибо, возводя их в квадрат и складывая, мы исключим  $t$  и получим  $x^2 + y^2 = a^2$ , что представляет известное уже нам уравнение окружности. Уравнения (48) и являются *параметрическими уравнениями окружности*; когда параметр  $t$  (в данном случае — угол) изменяется от 0 до  $2\pi$ , точка, координаты которой даются этими уравнениями, описывает окружность.

Так как в левой части уравнения эллипса (24)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

мы также имеем сумму квадратов, то естественно и здесь использовать (как мы это только-что сделали для окружности) соотношение:  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  и положить:

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t.$$



Черт. 163.

Какое бы значение ни придать параметру  $t$ , значения  $x$  и  $y$ , определяемые по этим формулам, дают точку эллипса; действительно, возводя в квадрат предшествующие формулы и складывая, приходим к уравнению (24). Наоборот, каждая точка эллипса может быть получена таким путем, ибо два числа, сумма квадратов которых равна единице, всегда можно рассматривать как косинус и синус некоторого угла. Таким образом, мы приходим к *параметрическому представлению эллипса*:

$$x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t. \quad (49)$$

Очевидно, достаточно параметр  $t$  изменять от 0 до  $2\pi$ .

Читатель легко проверит далее, что уравнения

$$x = \frac{a}{\cos t} = a \cdot \operatorname{sc} t, \quad y = b \cdot \operatorname{tg} t \quad \text{или} \quad x = a \cdot \operatorname{ch} t, \quad y = b \cdot \operatorname{sh} t$$

выражают гиперболу (28). В частности, для равнобочной гиперболы мы получаем параметрическое представление

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t \quad (48a)$$



которое от параметрического представления окружности (48) отличается лишь заменой тригонометрических функций — гиперболическими!

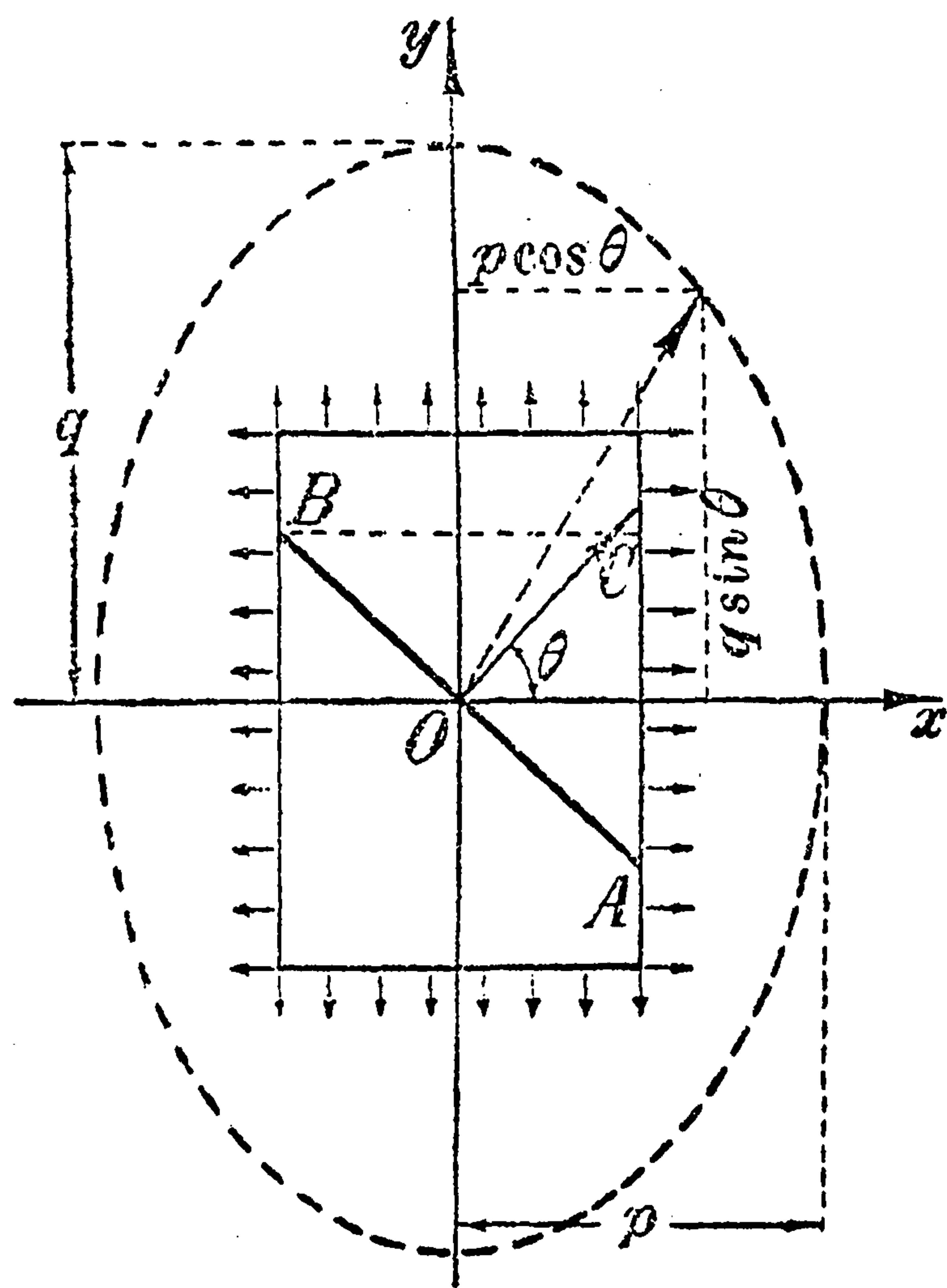
Параметру  $t$ , в случае эллипса, легко дать и геометрическое истолкование: напр., если строить точку  $M(x, y)$  эллипса по вписанному и описанному кругам, как указано в 99, и обозначить через  $t$  угол, составленный с осью  $Ox$  проводимым там лучом  $OKL$ , то для  $x$  и  $y$  получим именно выражения (49). Однако, для пользования параметрическими уравнениями знание этого истолкования не нужно.

Во многих случаях рассматриваемый вопрос естественно приводит именно к параметрическим уравнениям кривой; напр., это часто имеет место по отношению к эллипсу. Приведем примеры.

1. В гармоническом колебательном движении [46, (35)] пройденный путь выражается формулой:  $s = \frac{A}{\omega} \sin \omega t$ , а скорость — формулой:  $v = A \cos \omega t$  [62, (30)].

Если пожелать выразить графически связь между  $v$  и  $s$ , откладывая  $s$  по оси абсцисс, а  $v$  — по оси ординат, то получится эллипс с полуосями  $A$  и  $A\omega$  (для которого предыдущие формулы и служат параметрическими уравнениями!).

2. Пусть прямоугольный брус (черт. 164) подвергается растяжению по двум взаимно перпендикулярным направлениям; напряжения\* на левой и правой вертикальных гранях обозначим через  $p$ , а на нижней и верхней горизонтальных гранях — через  $q$ . Станем теперь искать напряжение в каком-нибудь наклонном сечении  $AB$ , перпендикуляр к которому составляет угол  $\theta$  с осью  $Ox$ . Очевидно, в горизонтальном направлении на сечение  $AB$  действует, напр., справа та растягивающая сила, которая приложена к части  $AC$  правой грани; если площадь сечения  $AB$  обозначить через  $F$ , то площадь  $AC$  будет  $F \cos \theta$ , действующая сила  $= Fp \cos \theta$ , горизонтальная слагающая напряжения  $= p \cos \theta$ . Аналогично найдем, что вертикальная его слагающая есть  $q \sin \theta$ . Если эти слагающие отложить по горизонтальной и вертикальной осям, то составленное из них (по „правилу параллелограмма“) на-



Черт. 164.

пряжение будет изображаться *вектором* (направленным отрезком), конец которого имеет как раз координаты:  $x = p \cos \theta$ ,  $y = q \sin \theta$ . Геометрическим местом этих концов служит эллипс (он изображен на чертеже), называемый *эллипсом напряжений*; он характеризует напряженное состояние вокруг точки  $O$ .

3. Рассмотрим, наконец, более сложный пример — *сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний*. Пусть точка  $M(x, y)$  участвует одновременно в двух гармонических колебательных движениях одной частоты, в направлении осей координат. Тогда и абсцисса, и ордината ее представляют синусоидальные величины:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad y = B \sin(\omega t + \beta),$$

где  $A, B$  — амплитуды колебаний,  $\alpha, \beta$  — начальные фазы, а  $\omega$  — их общая частота. В сущности, в лице этих уравнений мы уже имеем параметрическое представление траектории точки (параметр —  $t$ , время). Для лучшего выяснения типа

\* Напряжением мы называем усилие, рассчитанное на единицу площади.



траектории постараемся исключить параметр. С этой целью развернем полученные выражения по формуле для синуса суммы:

$$\frac{x}{A} = \cos \alpha \cdot \sin \omega t + \sin \alpha \cdot \cos \omega t, \quad \frac{y}{B} = \cos \beta \cdot \sin \omega t + \sin \beta \cdot \cos \omega t,$$

разрешим эти равенства относительно  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$ :

$$\cos \omega t = \frac{1}{\sin(\alpha - \beta)} \left( \frac{x \cos \beta}{A} - \frac{y \cos \alpha}{B} \right),$$

$$\sin \omega t = \frac{1}{\sin(\alpha - \beta)} \left( \frac{x \sin \beta}{A} - \frac{y \sin \alpha}{B} \right);$$

теперь, снова пользуясь тождеством, связывающим синус и косинус, возведем оба равенства почленно в квадрат и сложим. Этим процесс исключения заканчивается, и мы получим неявное уравнение траектории точки  $M$ :

$$\left( \frac{x \cos \beta}{A} - \frac{y \cos \alpha}{B} \right)^2 + \left( \frac{x \sin \beta}{A} - \frac{y \sin \alpha}{B} \right)^2 = \sin^2(\alpha - \beta)$$

или, раскрывая скобки и применяя формулу для косинуса разности,

$$\frac{x^2}{A^2} - 2 \frac{\cos(\alpha - \beta)}{AB} xy + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2(\alpha - \beta).$$

Если  $\alpha$  и  $\beta$  не разнятся на кратное  $\pi$ , так что  $\sin(\alpha - \beta)$  не нуль, то это уравнение выражает эллипс с центром в начале координат: оно имеет вид (38), причем

$$\Delta = \frac{1}{A^2} \cdot \frac{1}{B^2} - \left( \frac{\cos(\alpha - \beta)}{AB} \right)^2 = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{A^2 B^2} > 0$$

[108, 109]. Если при этом начальные фазы разнятся на прямой угол или вообще на нечетное кратное  $\frac{\pi}{2}$ , так что  $\cos(\alpha - \beta) = 0$ , то оси эллипса совпадут с осями координат; в противном случае они будут наклонны к координатным осям. В частности, при  $A = B$ , [см. примечание на стр. 293] оси эллипса будут составлять с этими осями угол в  $45^\circ$ , независимо от разности фаз.

В исключительном случае, когда  $\alpha - \beta$ , напр., равно 0 или  $\pi$ , имеем:

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad y = \pm B \sin(\omega t + \alpha).$$

что равносильно уравнению:

$$y = \pm \frac{B}{A} x,$$

выражающему прямую, проходящую через начало.

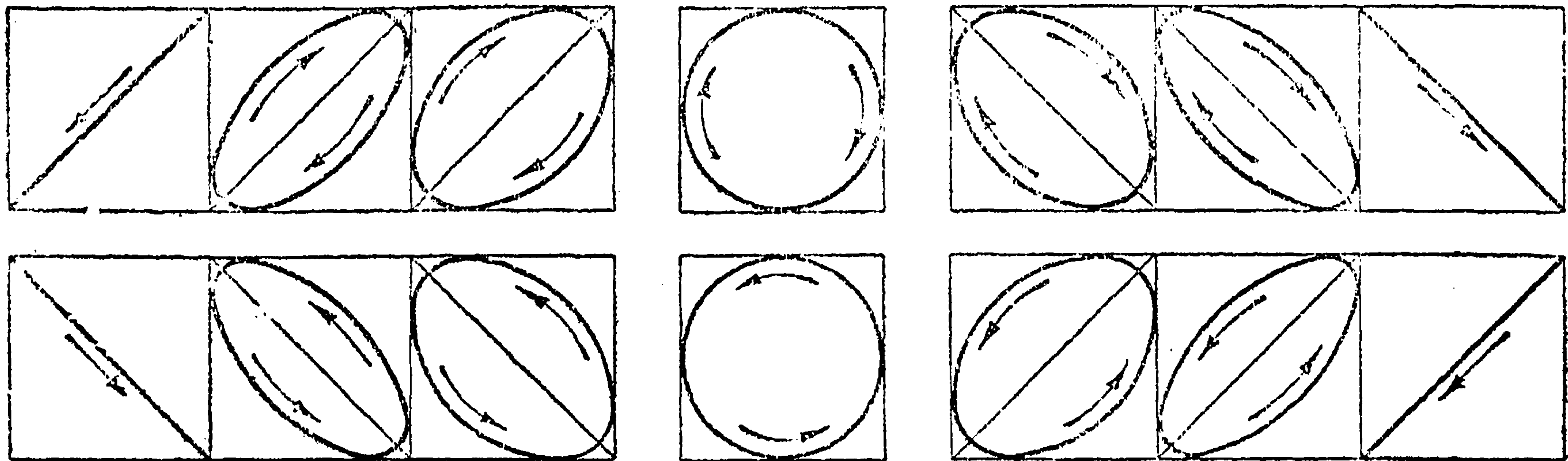
На черт. 165 показано, для случая  $A = B$ , как изменяется траектория в зависимости от разности фаз  $\delta = \alpha - \beta$ , которая принимает значения от 0 до  $2\pi$ , через каждые  $\frac{\pi}{6}$ .

**111. Механическое черчение эллипса.** С параметрическим представлением эллипса (48) тесно связана конструкция так назыв. *эллиптического циркуля*, или *эллипсографа*, т. е. прибора, чертящего эллипс непрерывным движением.\* Основная идея его состоит в следующем.

\* Тот способ черчения эллипса (с помощью натянутой нити), который был указан [97] непосредственно вслед за его определением, неудобен и весьма неточен.



Возьмем две взаимно перпендикулярные прямые (которые и выберем за оси координат) и предположим, что отрезок  $AB$  (постоянной длины) передвигается так, что концы его  $A$  и  $B$  скользят по осям (черт. 166). Выберем на отрезке  $AB$  произвольную точку  $M$ . Если угол  $ABO$ , определяющий положение отрезка,

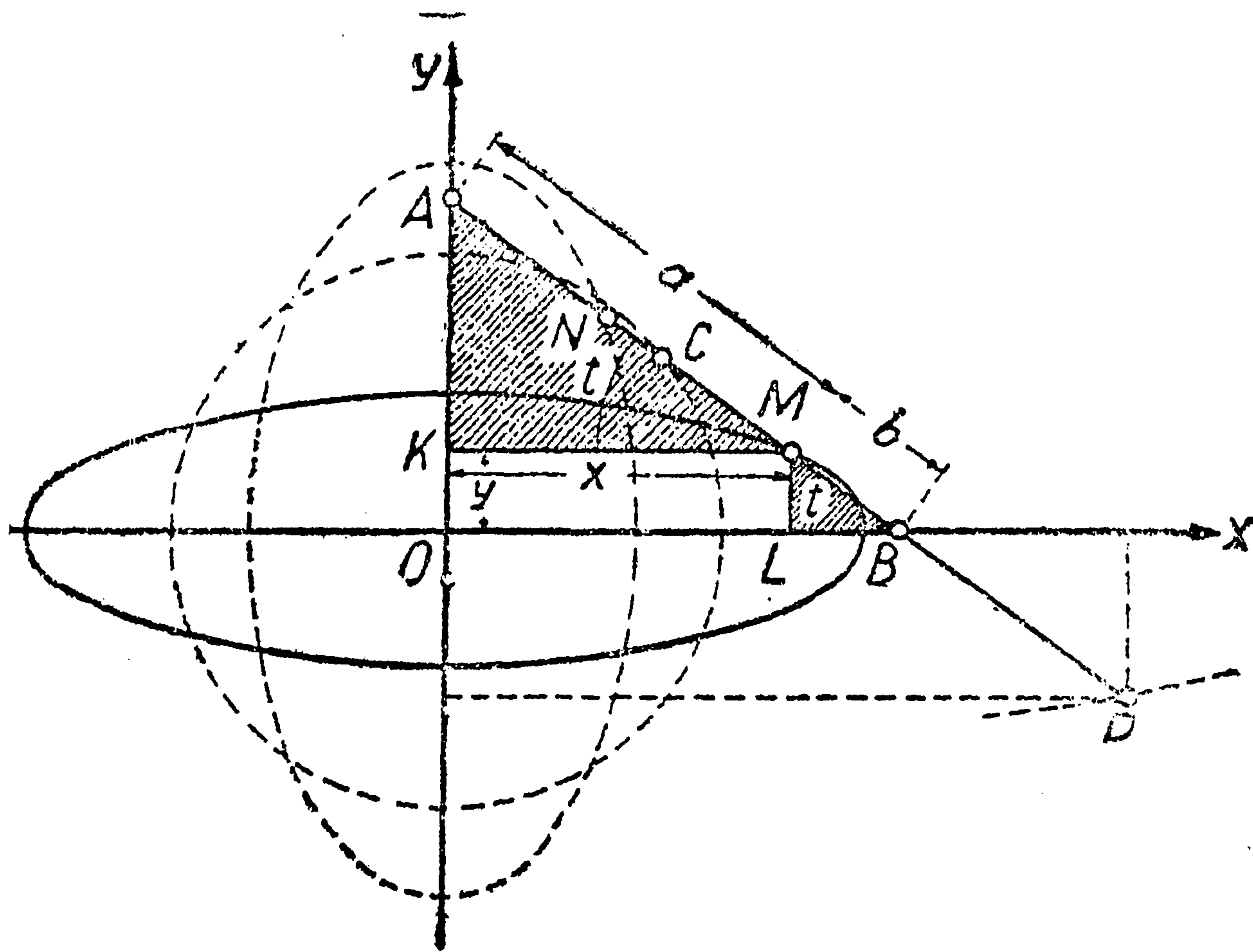


Черт. 165.

обозначить через  $t$ , а отрезки  $AM$  и  $MB$  — через  $a$  и  $b$ , то координаты  $x$ ,  $y$  точки  $M$  выразятся через  $t$  (из  $\Delta$ -ков  $AKM$  и  $MLB$ ) следующим образом:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Это есть уже знакомое нам параметрическое представление эллипса с полуосями  $a$  и  $b$ ! Итак, точка  $M$  будет двигаться по эллипсу, имеющему своими осями оси координат, причем величины полуосей его соответственно, равны



Черт. 166.

расстояниям  $AM$  и  $MB$  точки  $M$  от концов движущегося отрезка. Если, в частности, взять за точку  $M$  середину  $C$  отрезка  $AB$ , то полуоси окажутся равными, т. е. эллипс превратится в окружность.

Можно было бы взять точку и на продолжении отрезка  $AB$  в ту или другую сторону (точка  $P$  на черт. 166). Если положить  $AP = a'$ ,  $PB = -b'$  (отрезок  $PB$ , направленный теперь иначе, чем в предыдущем случае, естественно считать отрицательным), то  $x = a' \cos t$ ,  $y = -b' \sin t$ , откуда, исключением  $t$ , снова получается уравнение эллипса.

Самый эллипсограф (черт. 167) состоит из крестовины, в которой сделаны



два прореза, под прямым углом. В эти прорезы вложены ползуны  $A$  и  $B$ , к которым шарнирами прикреплена линейка  $AB$ . По линейке ходит муфта  $M$  с зажимным винтом  $s$  и с отверстием  $m$  для вставления карандаша. При передвижении линейки острое карандаша (установленного в каком-либо месте линейки) вычерчивает эллипс.

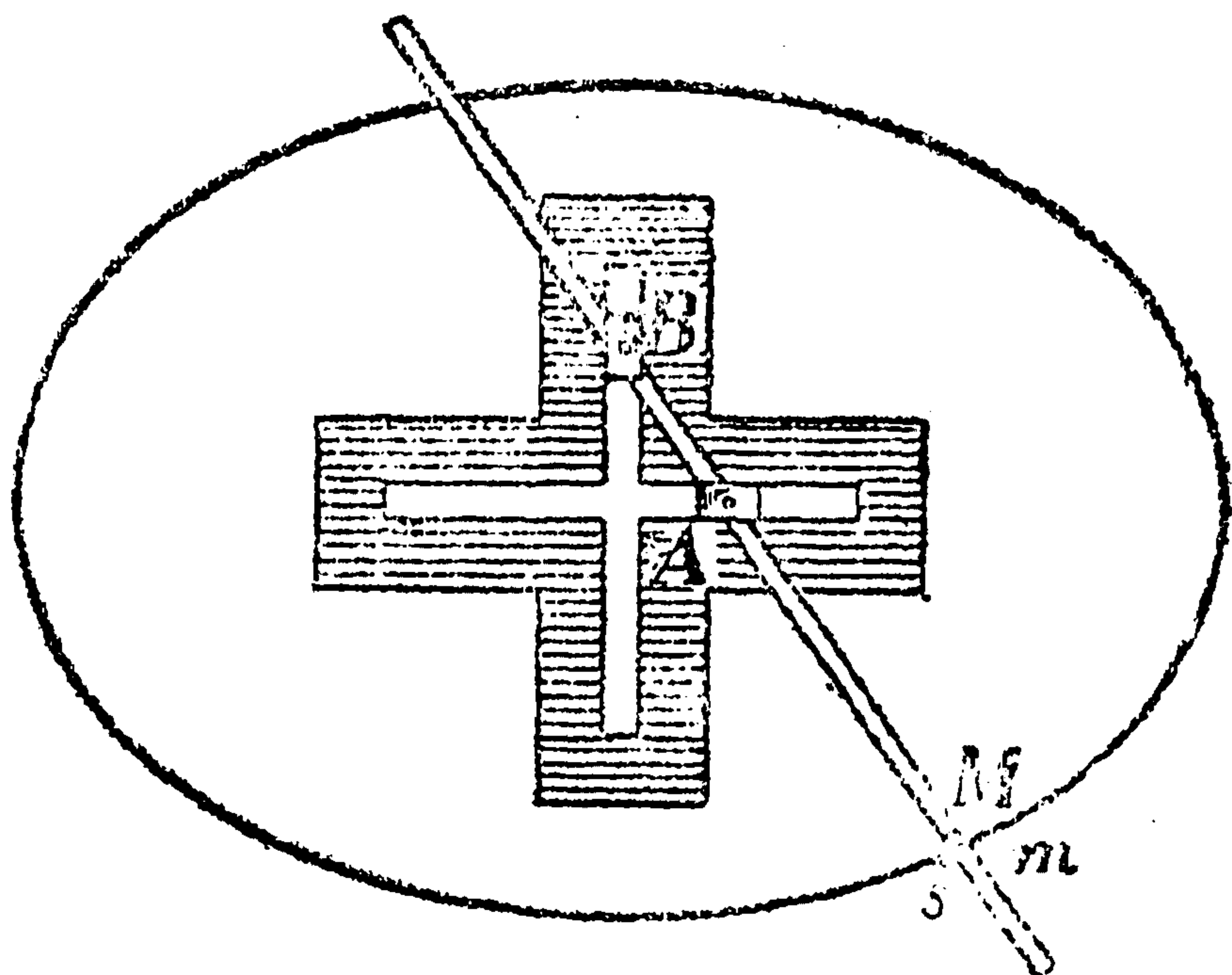
Изложенный способ черчения применяется также при построении эллиптических сводов (для расчерчивания кружал и разрезки камней). Пусть  $AA$  (черт. 168) пролет свода (большая ось эллипса), а  $OB$  — подъем свода (малая полуось). Отметив на ребре линейки  $CD$  такие три точки  $E, F, G$ , чтобы  $EG$  было равно большой полуоси эллипса, а  $FG$  — малой полуоси, и придавая линейке различные положения, при которых точка  $E$  находилась бы постоянно на прямой  $BO$ , а точка  $F$  — на оси  $AA$ , получим в  $G$  точки, принадлежащие обводу эллипса.

Итак, мы видели, что когда две точки  $A$  и  $B$ , соединенные постоянным отрезком, движутся по двум взаимно перпендикулярным прямым (черт. 166), то различные точки  $M, N, P, \dots$  этого отрезка (или его продолжения) описывают эллипсы; в частности, середина его  $C$  движется по окружности. Пло-

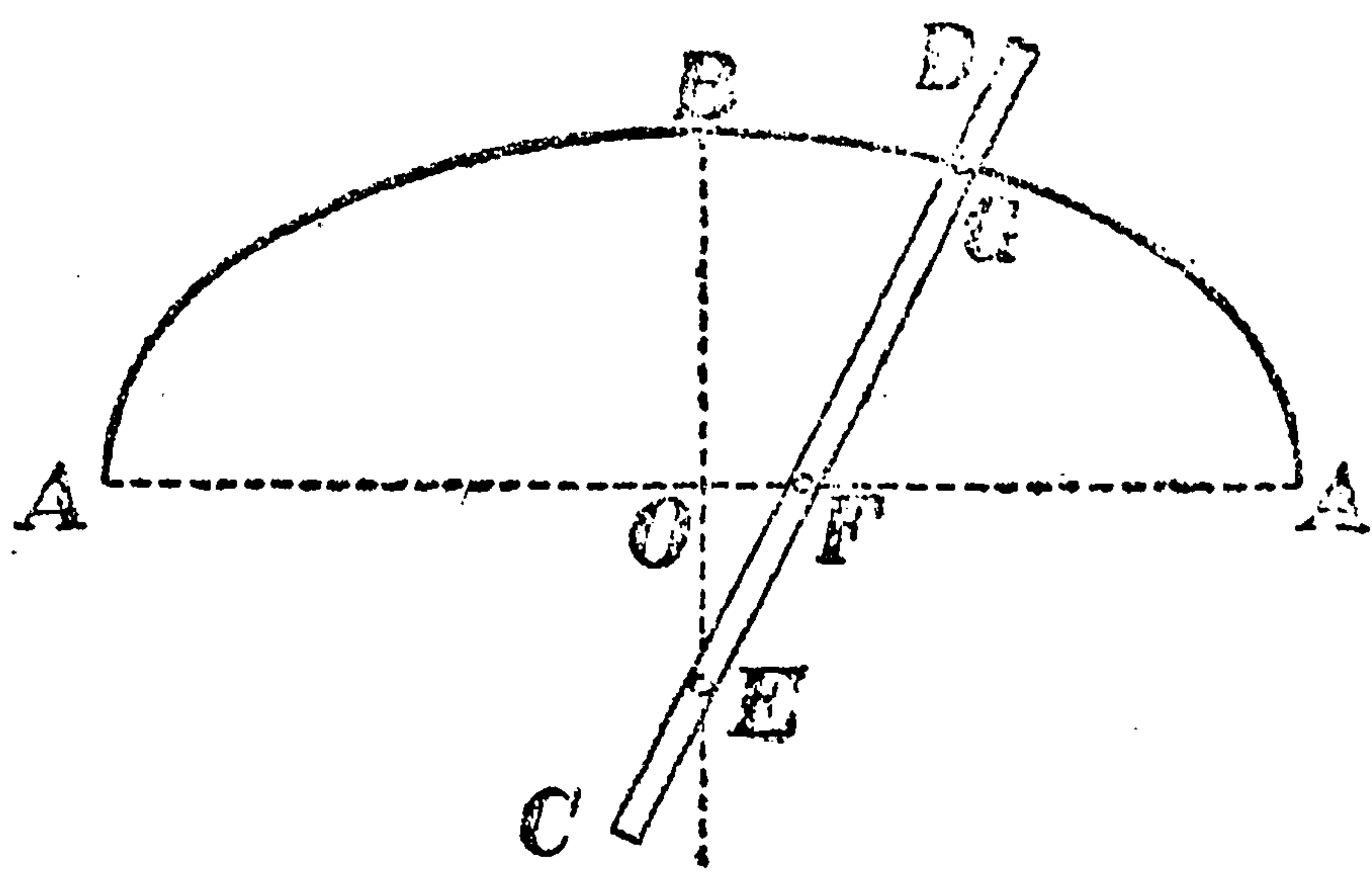
скость, неизменно связанная со всеми этими точками, будет в целом определенным образом двигаться. Ясно, что если заставить теперь точку  $B$  двигаться по прямой  $OB$ , а какую-нибудь точку  $N$  (на прямой  $AB$ ) — описать тот именно эллипс, по которому она только-что двигалась, то снова вся плоскость будет двигаться так, как двигалась раньше, так что и точка  $A$  будет двигаться вверх и вниз по вертикальной прямой  $AO$ . На этом основано устройство некоторых механизмов, осуществляющих прямолинейное движение точки („прямил“) и носящих название *эллиптических коромысел*.

Так как реальное осуществление эллиптического движения точки  $N$  представляет трудности, то обыкновенно заставляют эту точку описывать дугу окружности, которая очень близко воспроизводит дугу эллипса. Тогда, разумеется, точка  $A$  будет двигаться не по вертикальной прямой, но по кривой, которая весьма мало от этой прямой отличается, чего на практике достаточно. На черт. 169 изображен соответствующий механизм для случая, когда за *ведущую* точку (кроме  $B$ ) выбирается точка  $N$ . Когда точка  $B$  будет передвигаться горизонтально вправо и влево, точка  $N$  будет описывать дугу окружности (заменившей эллиптическую дугу), а точка  $A$  (а с ней и весь стержень  $AA'$ ) будет колебаться вниз и вверх.

Если, вместо  $N$ , взять точку  $C$ , которая, в упомянутом в начале движении, в *точности* описывает окружность, и заставить ее двигаться по дуге именно этой окружности, то точка  $A$  в *точности* будет двигаться по прямой, так что в этом случае получается *точное* прямилло (называемое *прямиллом* или *коромыслом Эванса*). В других случаях прямилла будут *приближенными*. Заметим еще, что вместо того, чтобы заставлять точку  $B$  передвигаться по горизонтальной прямой, часто и ее заставляют описывать дугу круга, с достаточно большим радиусом, чтобы небольшие колебания по его дуге можно было рассматривать как прямолинейные. В таком виде эти прямилла применяются, напр., в индикаторах.



Черт. 167.

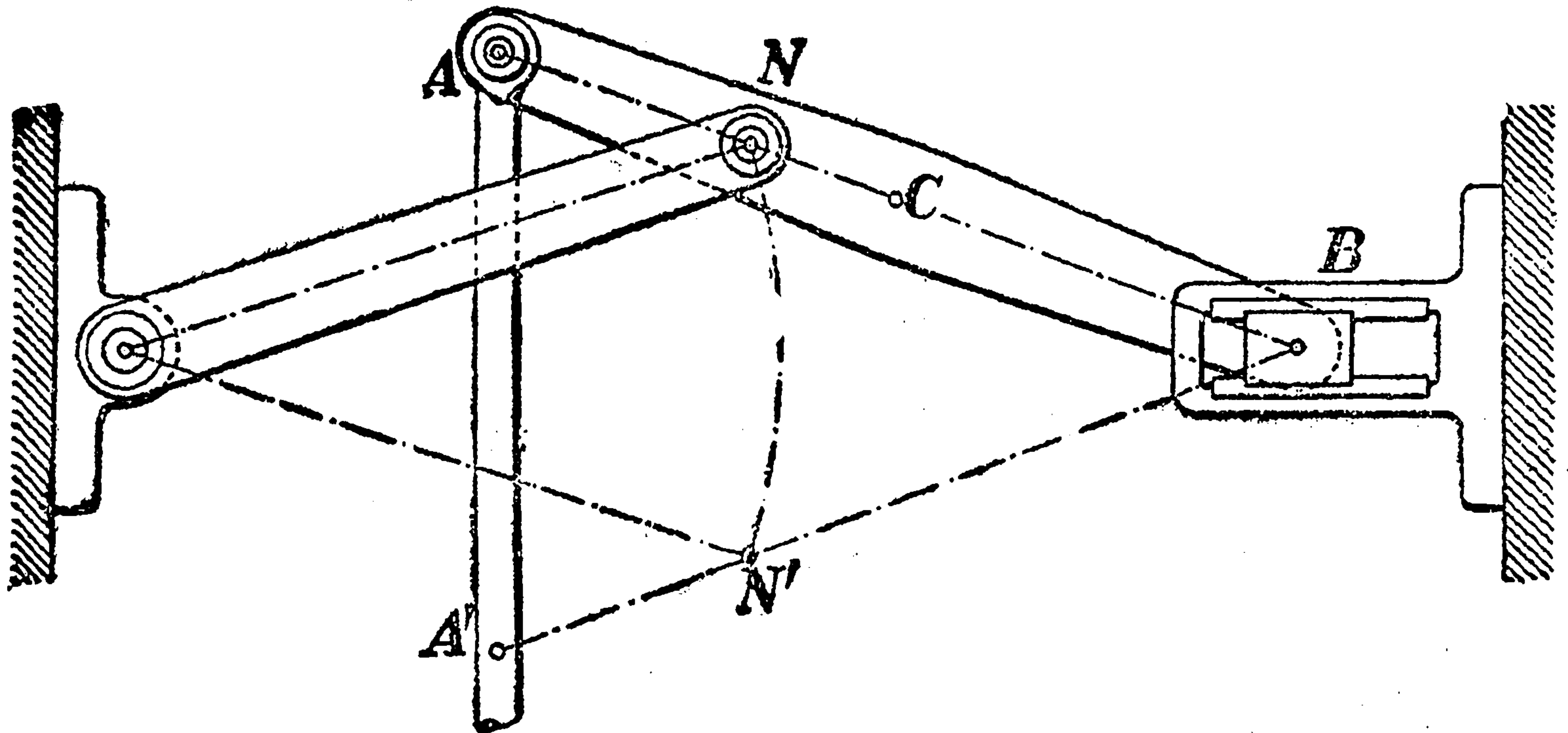


Черт. 168.



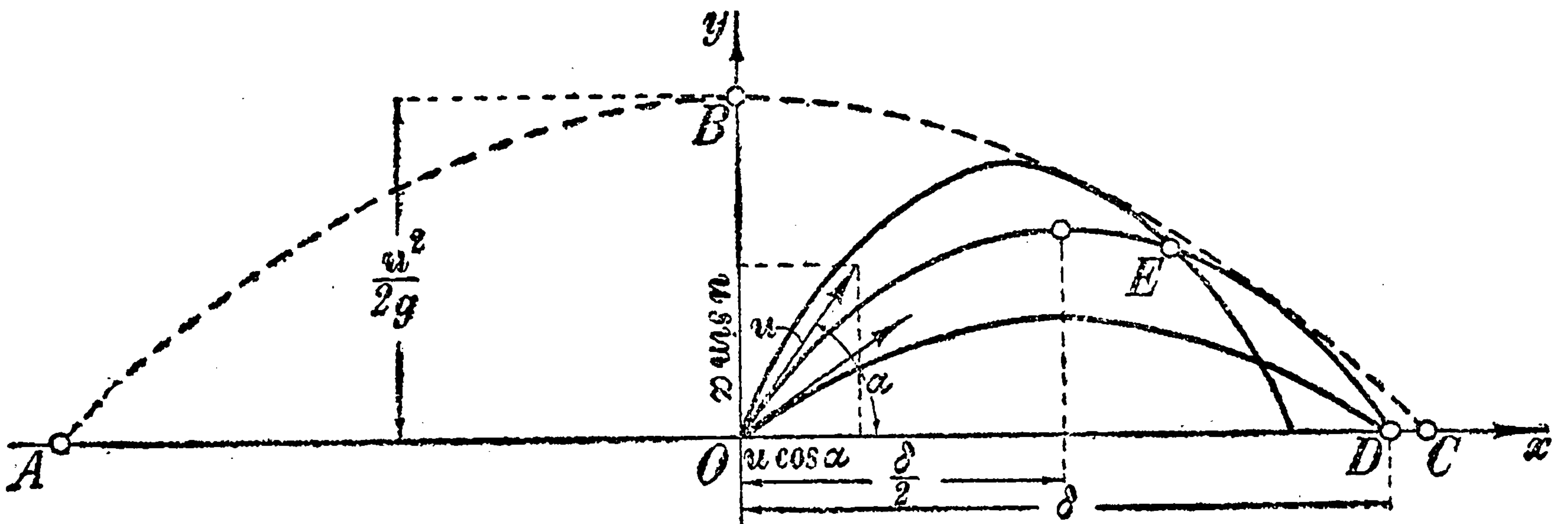
112. Бросание точки под углом к горизонту. Траектория водяной струи. Пусть материальная точка  $M$ , находясь в начале координат  $O$  (черт. 170), бросается с некоторой скоростью  $u$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Какую траекторию опишет точка под действием силы тяжести, если пренебречь сопротивлением воздуха?

Прежде всего ясно, что движение будет происходить в вертикальной плоскости, проходящей через направление начальной скорости; в этой плоскости мы и расположим систему координатных осей.



Черт. 169.

Если начальную скорость  $u$  разложить по осям координат, то по оси  $Ox$  получится слагающая  $u \cos \alpha$ , а по оси  $Oy$  — слагающая  $u \sin \alpha$ . Движение точки можно себе представить как бы состоящим из двух движений — равномерного, с постоянной скоростью  $u \cos \alpha$ , в горизонтальном направлении и равнозамедленного (благодаря действию силы тяжести), с начальной скоростью



Черт. 170.

$u \sin \alpha$ , в вертикальном. Но тогда пути, пройденные точкой за время  $t$  в горизонтальном и вертикальном направлениях, выразятся формулами [ср. 32 и 74, (63a)]

$$x = u \cos \alpha \cdot t, \quad y = u \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \quad (50)$$

Эти уравнения и дают параметрическое представление траектории точки. Для того чтобы получить уравнение последней в явном виде, нужно лишь исключить  $t$  из полученных уравнений. Этого можно достигнуть, определяя



$t$  через  $x$  из первого из уравнений (50) и подставляя полученное выражение  $t = \frac{x}{u \cos \alpha}$  во второе уравнение. В результате мы приходим к уравнению

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}. \quad (51)$$

Мы уже знаем [38], что такое уравнение выражает *параболу*, ось которой направлена вертикально вниз, а вершина имеет координаты:

$$x = \frac{u^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{u^2}{2g} \sin 2\alpha, \quad y = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (52)$$

Эти формулы получаются из формул (16), 38, если вспомнить, что в нашем случае

$$a = -\frac{g}{2u^2 \cos^2 \alpha}, \quad b = \operatorname{tg} \alpha, \quad c = 0.$$

Непосредственно ясно (черт. 170), что дальность полета  $\delta = OD$  равна удвоенной абсциссе вершины, так что

$$\delta = \frac{u^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (52a)$$

Вот любопытный пример применения этой формулы. В одном случае маховое колесо разорвалось на множество кусков, из которых один был найден на расстоянии  $\delta = 280$  м. Попробуем на этом основании оценить *скорость*  $u$  на ободе колеса в момент разрыва. Подставляя в (52a) указанное значение  $\delta$ , получим:

$$280 = \frac{u^2}{9,81} \sin 2\alpha, \quad \text{откуда } u^2 = \frac{280 \cdot 9,81}{\sin 2\alpha} \geq 280 \cdot 9,81 \quad (\text{так как, во всяком}$$

случае,  $\sin 2\alpha \leq 1$ !) и, наконец,

$$u \geq \sqrt{280 \cdot 9,81} = 52,4 \text{ (м/сек.)}$$

Диаметр  $D$  махового колеса был равен 3,25 м, так что этой скорости отвечало число оборотов в минуту

$$n = \frac{u \cdot 60}{\pi D} \geq \frac{52,4 \cdot 60}{3,14 \cdot 3,25} \doteq 298$$

(против нормального для данной машины числа оборотов  $n = 110$ !).

Возвращаясь к формуле (52a), мы видим, что дальность полета  $\delta$  наибольшей величины достигает при  $\sin 2\alpha = 1$ , т. е. когда  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ ). Наоборот, задаваясь расстоянием  $\delta$  и определяя  $\alpha$  из уравнения  $\sin 2\alpha = \frac{\delta g}{u^2}$ , мы получим для  $2\alpha$  ряд значений, из них однако отвечают вопросу только два: острый положительный угол  $\beta = \operatorname{arcsin} \frac{\delta g}{u^2}$  [см. 49] и его дополнение до  $\pi$ .

Итак, если только расстояние  $\delta$  *меньше* наибольшей дальности полета (которая осуществляется лишь при одном угле  $\frac{\pi}{4}$ ), то в намеченную точку  $D$  можно попасть двояко — бросая точку  $M$  под углом  $\frac{\beta}{2}$  или под углом  $\frac{(\pi - \beta)}{2}$  к горизонту.

Артиллеристы различают обе траектории пули или снаряда (движущихся примерно в условиях рассмотренной материальной точки) и называют одну *настильной*, а другую *навесной* (см. чертеж).

Аналогично можно поставить вопрос о попадании в любую точку  $E$  плоскости



(который представляет интерес, напр., при стрельбе по неприятельскому самолету). Если координаты этой точки обозначить через  $x$  и  $y$ , то нужно найти такой угол  $\alpha$ , чтобы — при заданных  $x$  и  $y$  — выполнялось уравнение (51). Подставляя вместо  $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$  в последнем члене  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ , можно это уравнение представить в виде:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2u^2}{gx} \cdot \operatorname{tg} \alpha + \frac{2u^2}{gx^2} \left( y + \frac{gx^2}{2u^2} \right) = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно  $\operatorname{tg} \alpha$ , из которого для  $\operatorname{tg} \alpha$  находим вообще два значения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u^2}{gx} \pm \sqrt{\frac{u^4}{g^2 x^2} - \frac{2u^2}{gx^2} \left( y + \frac{gx^2}{2u^2} \right)} = \frac{u^2}{gx} \pm \frac{1}{gx} \sqrt{u^4 - 2gu^2 \cdot y - g^2 \cdot x^2},$$

так что и здесь попасть в данную точку можно по двум траекториям — если только подкоренное выражение оказывается положительным; если же это выражение отрицательно, то в соответствующую цель вообще попасть нельзя (при заданной начальной скорости  $u$ ). Точки первого рода отделяются от точек второго рода кривой, состоящей из точек, для которых подкоренное выражение равно нулю:

$$u^4 - 2gu^2 \cdot y - g^2 \cdot x^2 = 0, \text{ или } y = \frac{u^2}{2g} - \frac{g}{2u^2} \cdot x^2.$$

Это уравнение также выражает параболу, с вертикально вниз направленной осью и с вершиной на оси  $Oy$  (см. кривую  $ABC$  на черт. 170).\* В баллистике она известна под именем *параболы безопасности*. Если вращать ее вокруг оси  $Oy$ , то получится некоторая поверхность, называемая *параболоидом вращения*; эта поверхность, вместе с поверхностью земли, ограничивает ту часть пространства вокруг точки  $O$ , которая доступна попаданию из точки  $O$  при начальной скорости  $u$ . Если в точке  $O$  разрывается шрапнельный снаряд, то упомянутый параболоид обрисовывает снап разлета пуль шрапнели.

Другим примером параболического движения может служить движение водяных частиц в струе, бьющей из рукава насоса, вытекающей из отверстия сосуда, и т. п. В последнем случае (взяв ось  $Ox$  выше земной поверхности), можно углу  $\alpha$  давать нулевое и отрицательное значения, так как струя может быть направлена горизонтально или наклонно вниз. Удобнее, впрочем, при этом направить ось  $Oy$  вниз и угол, под которым пущена струя, все же считать положительным. Очевидно, уравнение параболы переписывается тогда так:

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}. \quad (53)$$

Тот параболоид вращения, о котором упоминалось выше, ясно обрисовывается в фонтане, благодаря многочисленным струйкам, вытекающим из сетки (при почти одинаковой начальной скорости частиц воды).

**113. Циклоида.** В предыдущих пп<sup>0</sup> показано на примерах, как различные вопросы непосредственно приводят к уравнениям кривых в параметрической форме, причем кривые оказывались уже знакомыми нам (эллипс, парабола) и были раньше изучены по уравнениям в другой форме. Иной раз случается, что параметрическое представление кривой проще всякого другого и кривую изучают именно по ее параметрическим уравнениям. Особенно это относится к кривым механического происхождения, полученным путем катания одних кривых по другим. Некоторыми из таких кривых мы и займемся в этом и ближайших пп<sup>0</sup>.

\* Эту параболу не следует принимать за геометрическое место вершин всевозможных параболических траекторий. Таким геометрическим местом является некоторый эллипс, как можно убедиться, исключая параметр  $\alpha$  из уравнений (52).



Вообразим, что по прямой  $Ox$  (черт. 171) слева направо катится без скольжения круг (с центром в  $A$ , радиуса  $a$ ). Кривая, описываемая при этом любой точкой окружности, называется *циклоидой*. (Примером может служить траектория головки гвоздя на ободе колеса при катании последнего.) Если проследить путь точки  $O$  за время одного оборота круга, то он будет иметь вид, указанный на чертеже; когда круг повернется на  $180^\circ$ , точка  $O$  очутится наверху круга и в то же время в верхней точке  $H$  своей траектории; после полного оборота она совместится с точкой  $K$ , снова сделавшись точкой касания. Постараемся найти уравнения этой кривой.

Рассмотрим катящийся круг в новом положении. Точкой касания служит уже другая точка  $N$ ; точка же  $O$  переместится в положение  $M$ , пройдя по окружности круга путь  $\frown MN$ . По прямой же точка касания переместилась из  $O$  в  $N$ , пройдя путь  $ON$ . Так как катание происходит без скольжения, то эти пути равны:

$$\frown MN = ON.$$

Если выбрать теперь в качестве параметра (определяющего положение точки) угол  $t = \sphericalangle NDM$ , на который успел повернуться радиус, имевший в начале катания вертикальное положение  $AO$ , то координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  через него выразятся следующим образом:

$$x = OF = ON - FN = \frown MN - MG = at - a \sin t,$$

$$y = FM = NG = ND - GD = a - a \cos t$$

(так как угол  $t$  предполагается выраженным в радианах, то длина соответствующей дуги и представится произведением его на радиус; отрезки  $MG$  и  $GD$  вычислены из прямоугольного  $\triangle MGD$ ). Итак, имеем следующие *параметрические уравнения циклоиды*\*

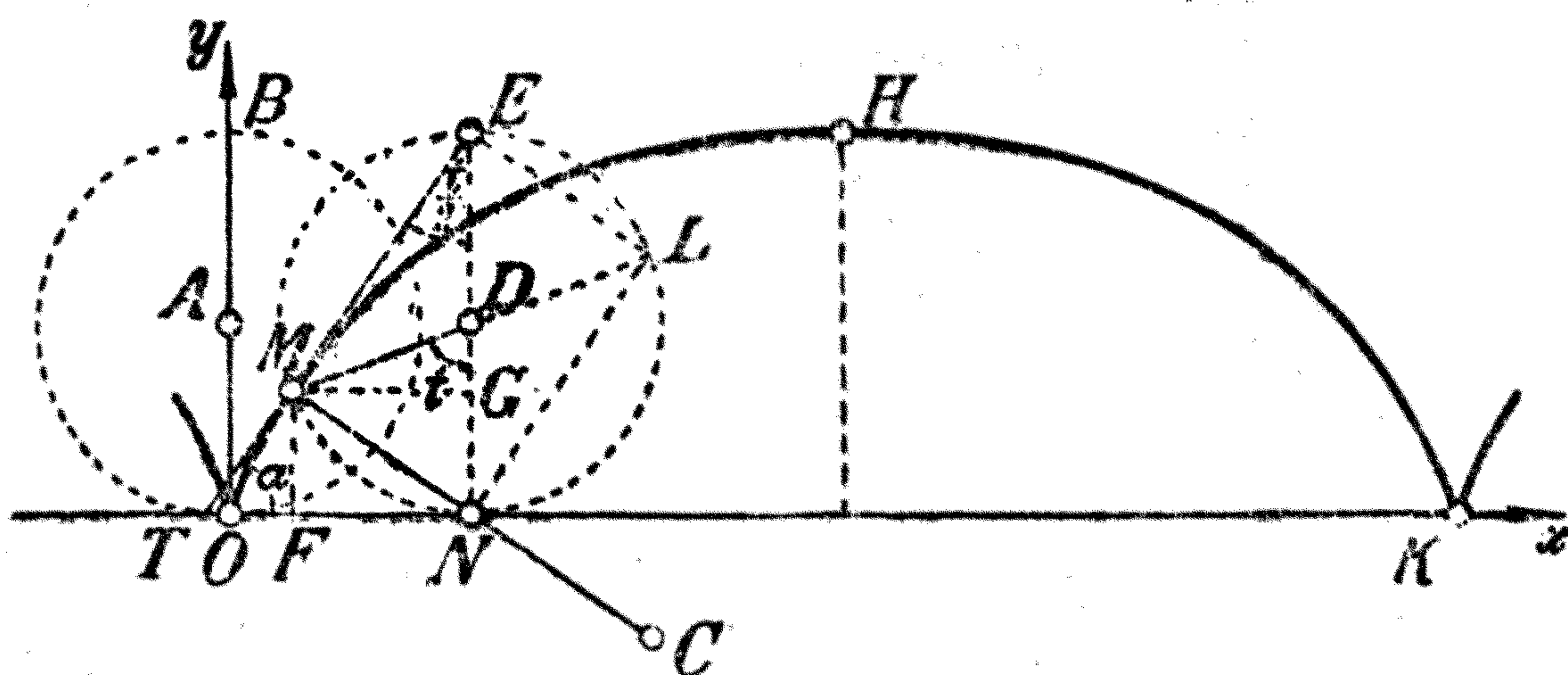
$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t). \quad (54)$$

При изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  получится кривая, состоящая из бесчисленного множества таких ветвей, какая изображена на черт. 171.

Желая выразить циклоиду явным уравнением, мы могли бы определить из второго уравнения (54)  $t$  через  $y$ :

$$\cos t = \frac{a - y}{a}, \quad t = \arccos \frac{a - y}{a}$$

\* Читатель легко убедится в том, что те же уравнения получаются при  $t > \frac{\pi}{2}$ .



Черт. 171.



(если ограничиться левой половиной ветви циклоиды) и подставить полученное выражение в первое уравнение (54), сообразая, что

$$\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \frac{\sqrt{a^2 - (a - y)^2}}{a} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}.$$

Тогда явное уравнение циклоиды мы найдем в виде (изменение ролей  $x$  и  $y$  несущественно!):

$$x = a \cdot \arccos \frac{a - y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Совершенно ясно, что изучать циклоиду по ее параметрическим уравнениям гораздо проще, чем по такому явному уравнению!

114. Эпи- и гипоциклоида. Если один круг катится *извне* по другому кругу без скольжения, то кривая, описываемая произвольной точкой

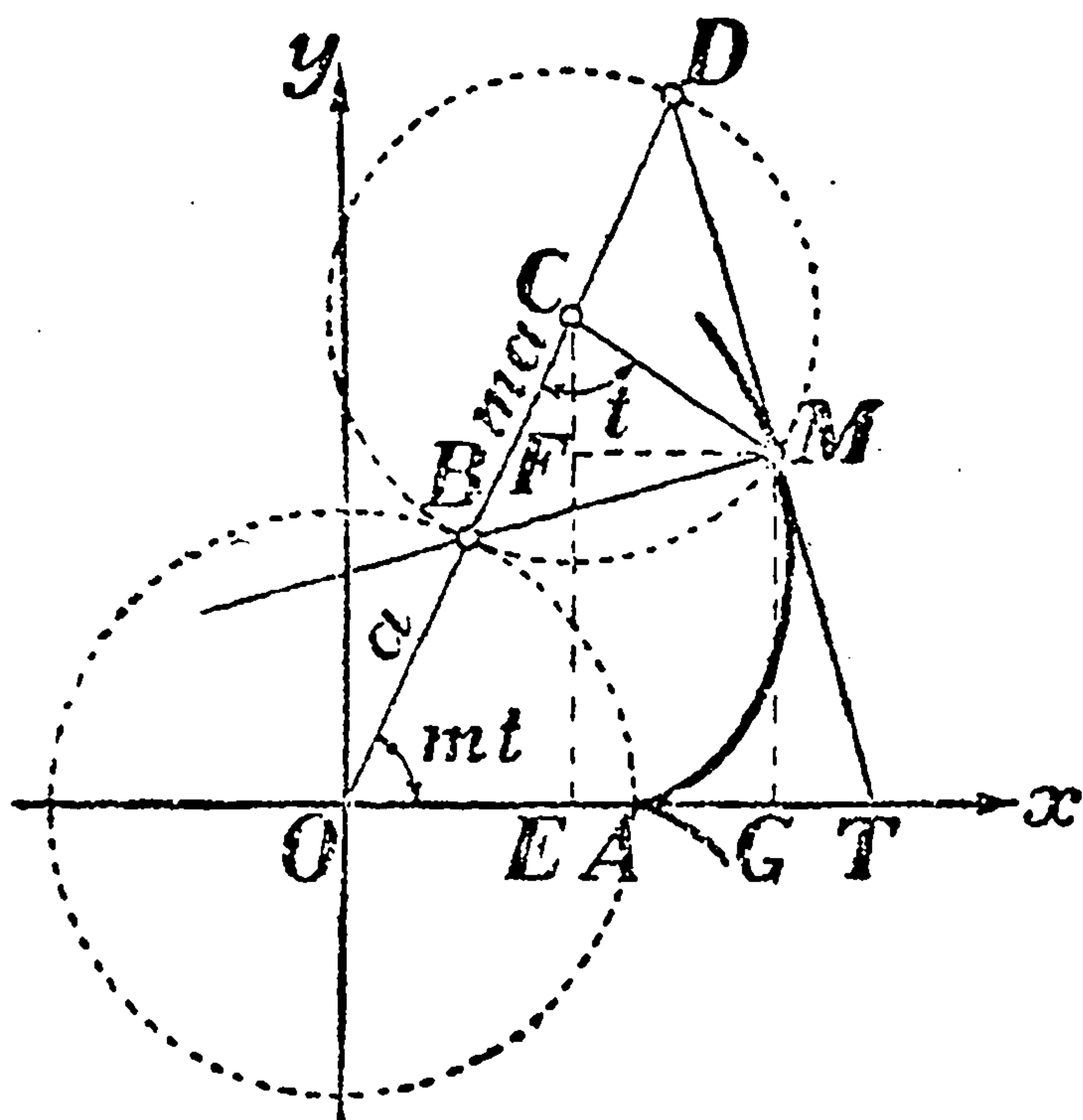
окружности подвижного круга, называется *эпициклоидой*. В случае же катания *изнутри* (т. е. по внутренней стороне окружности неподвижного круга) мы имеем дело с *гипоциклоидой*. Такое катание легко может быть осуществлено с помощью зубчатых колес [ср. черт. 174]. Остановимся на выводе уравнений первой из этих кривых.

Возьмем систему координатных осей так, чтобы начало было в центре неподвижного круга, и предположим, что в начале катания подвижный круг касается неподвижного в точке  $A$  на оси  $Ox$  (черт. 172). Когда подвижный круг перейдет в новое положение, указанное на чертеже, точка  $A$  перейдет в  $M$ ; геометрическое место точек  $M$  нам и надлежит определить. Обозначим через  $a$  радиус неподвижного круга, а через  $ma$  — радиус катящегося круга (отношение  $m$  обоих радиусов есть положительное число, которое может быть  $>$ ,  $=$  и  $<$  1). Выберем за параметр здесь угол  $t = \sphericalangle MCB$  между радиусом  $CM$ , соединяющим центр катящегося круга с интересующей нас точкой на его окружности, и радиусом  $CB$ , проведенным в точку касания. В начале движения этот угол равен 0.

Прежде всего посмотрим, в чем здесь проявляется отсутствие скольжения; дуга  $AB$ , пройденная точкой касания по неподвижной окружности, должна равняться дуге  $MB$ , пройденной точкой касания по катящейся окружности; если принять во внимание выражение дуги через произведение радиуса на центральный угол (в радианах), то этот результат можно записать так:

$$a \cdot \sphericalangle AOB = ma \cdot \sphericalangle MCB = mat,$$

откуда  $\sphericalangle AOB = mt$ .



Черт. 172.



Координаты  $x$  и  $y$  точки  $M$  выразятся через  $t$ , если рассмотрим  $\Delta$ -ки  $OCE$  и  $MCF$ , следующим образом:

$$x = OG = OE + FM = (a + ma) \cdot \cos mt + ma \cdot \sin \sphericalangle FCM,$$

но

$$\sphericalangle FCM = \sphericalangle BCM - \sphericalangle OCE,$$

в свою очередь,

$$\sphericalangle OCE = \frac{\pi}{2} - mt$$

так что

$$\sphericalangle FCM = t - \left( \frac{\pi}{2} - mt \right) = (1 + m)t - \frac{\pi}{2}$$

и

$$\sin \sphericalangle FCM = -\sin \left[ \frac{\pi}{2} - (1 + m)t \right] = -\cos (1 + m)t,$$

окончательно,

$$x = a [(1 + m) \cos mt - m \cos (1 + m)t]. \quad (55)$$

Подобно этому

$$\begin{aligned} y = GM = EF = EC - FC &= (a + ma) \cdot \sin mt - ma \cdot \cos \sphericalangle FCM = \\ &= a(1 + m) \sin mt - ma \cos \left[ \frac{\pi}{2} - (1 + m)t \right], \end{aligned}$$

наконец,

$$y = a [(1 + m) \sin mt - m \sin (1 + m)t]. \quad (56)$$

Уравнения (55) и (56) и являются *параметрическими уравнениями эпициклоиды*.

Когда катящийся круг снова придет в соприкосновение с неподвижным кругом в той же *своей* точке, что и в начале движения, точка  $M$  закончит одну ветвь кривой и при дальнейшем катании будет описывать следующую ветвь, подобную первой. Если  $m = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ , так что окружность катящегося круга уложится, по длине, в окружности неподвижного круга, соответственно 1, 2, 3, 4,  $\dots$  раз, то после такого же числа ветвей мы снова вернемся к точке  $A$ , так что в этом случае кривая оказывается *замкнутой*. Вообще возвращение к точке  $A$  возможно, если отношение  $m$  выражается *рациональной* дробью (например,  $\frac{5}{7}, \frac{18}{13}, \dots$ ).

В случае гипоциклоиды рассуждения совершенно такие же. Мы не будем их повторять и ограничимся только сообщением *параметрических уравнений гипоциклоиды*:

$$\left. \begin{aligned} x &= a [(1 - m) \cos mt + m \cos (1 - m)t], \\ y &= a [-(1 - m) \sin mt + m \sin (1 - m)t]. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Здесь  $m$  также означает отношение радиуса катящегося круга к радиусу неподвижного. Читатель без труда заметит, что эти уравнения получаются из уравнений эпициклоиды заменой  $m$  на  $-m$ .

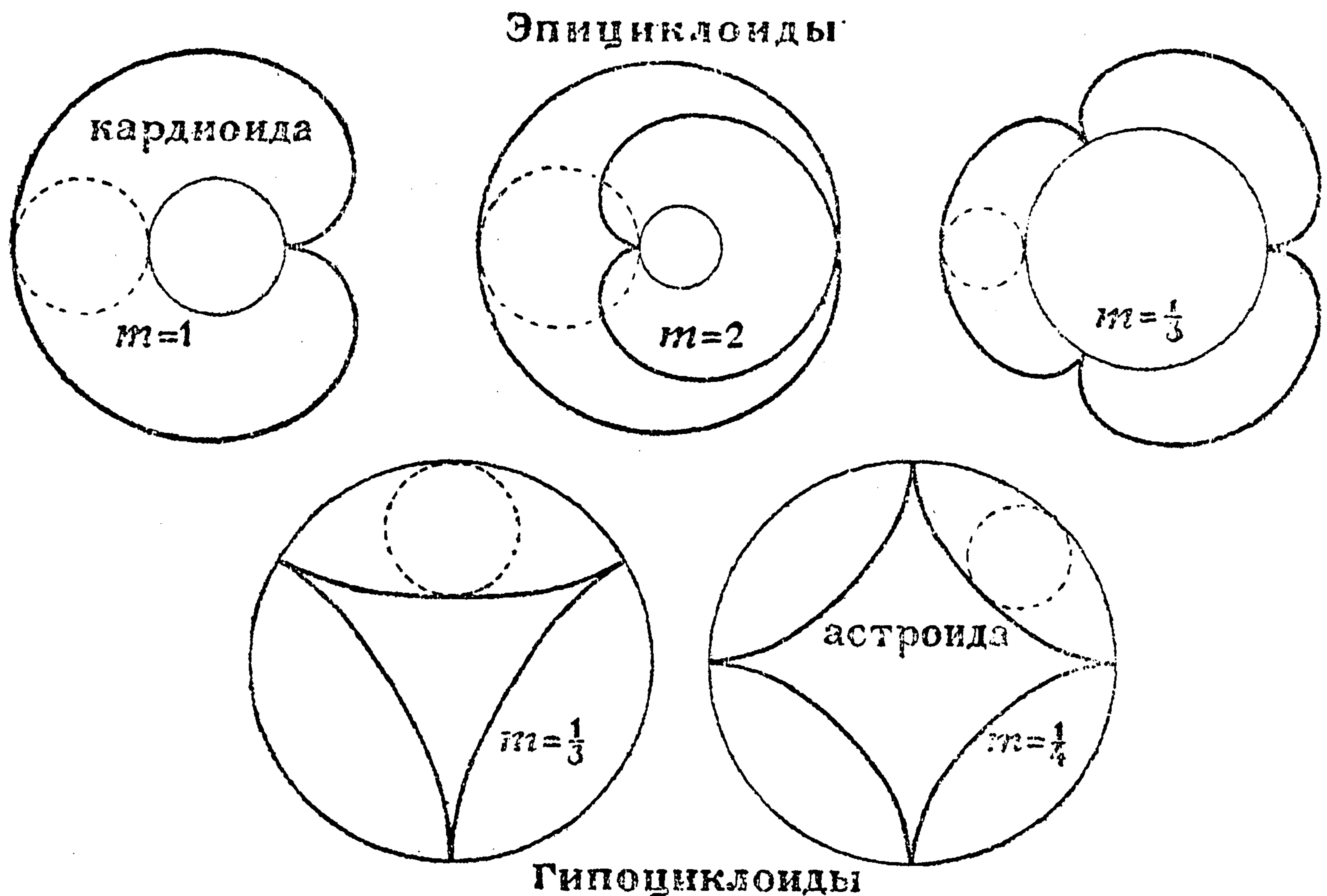


На черт. 173 изображены эпициклоиды, соответствующие  $m = 1, 2, \frac{1}{3}$ , и гипоциклоиды, соответствующие  $m = \frac{1}{3}$  и  $\frac{1}{4}$ ; в виду их формы, первая из этих кривых получила название *кардиоиды* (сердцевидной кривой), а последняя — *астроиды* (звездчатой кривой).

Для астроиды попытаемся получить неявное уравнение, исключив параметр  $\tau$  из уравнений:

$$x = \frac{a}{4} (3 \cos \tau + \cos 3\tau), \quad y = \frac{a}{4} (-3 \sin \tau + \sin 3\tau),$$

которые получатся из уравнений (57), если в них положить  $m = \frac{1}{4}$ ,  $\tau = \frac{t}{4}$ .



Черт. 173.

В тригонометрии устанавливаются формулы:

$$\cos 3\tau = 4 \cos^3 \tau - 3 \cos \tau, \quad \sin 3\tau = 3 \sin \tau - 4 \sin^3 \tau. *$$

Пользуясь ими, сразу преобразуем уравнения астроиды к виду:

$$x = a \cdot \cos^3 \tau, \quad y = -a \cdot \sin^3 \tau.$$

Отсюда:

$$x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot \cos \tau, \quad y^{\frac{1}{3}} = -a^{\frac{1}{3}} \cdot \sin \tau, \quad \text{затем, } x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot \cos^2 \tau, \quad y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cdot \sin^2 \tau$$

и, наконец, почленно складывая последние уравнения, получаем:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \quad (53)$$

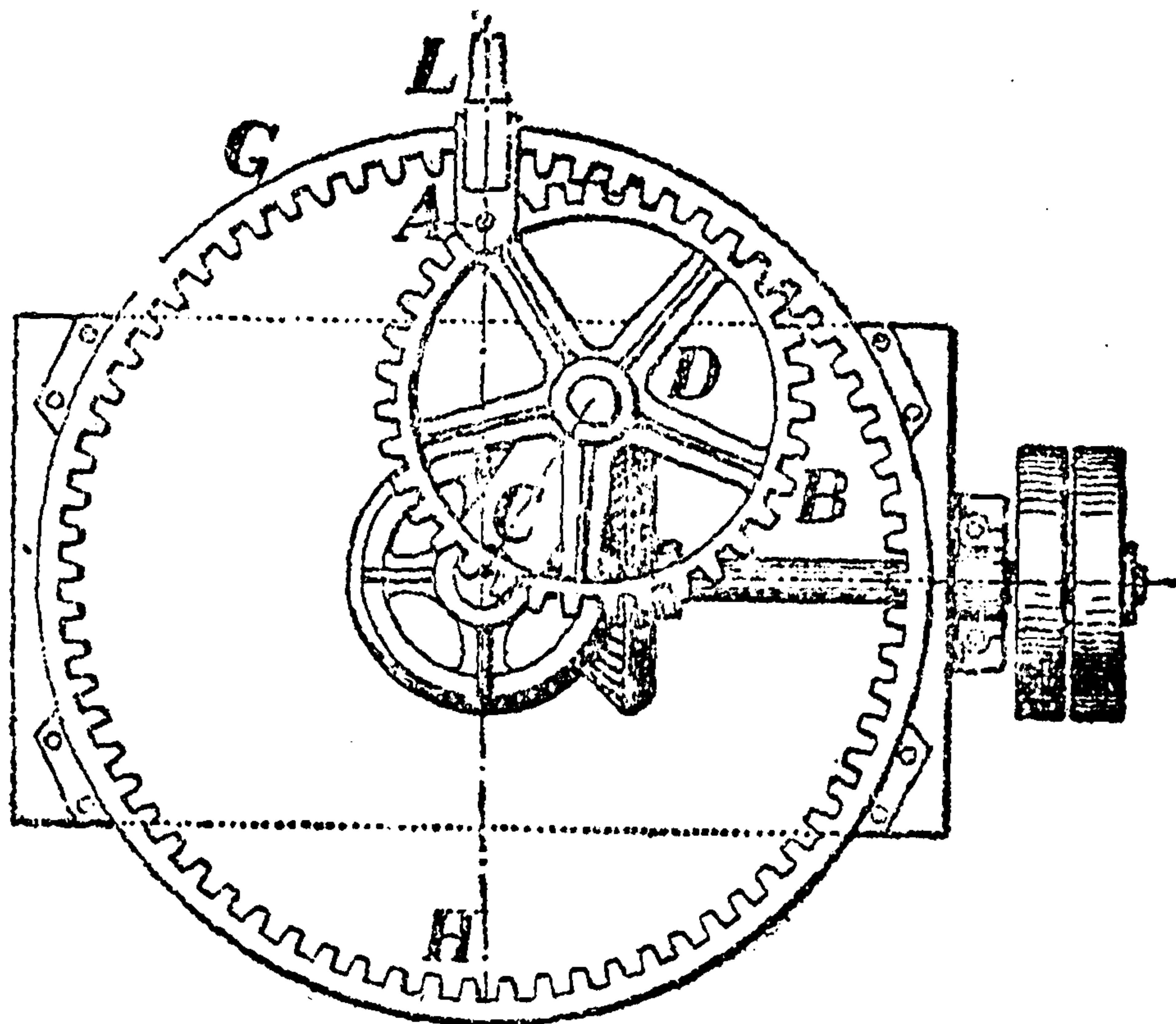
\* Их нетрудно вывести, исходя из формул для синуса и косинуса суммы углов (в частности, двойного угла); напр.:  $\cos 3\tau = \cos(2\tau + \tau) = \cos 2\tau \cdot \cos \tau - \sin 2\tau \cdot \sin \tau = (\cos^2 \tau - \sin^2 \tau) \cdot \cos \tau - (2 \sin \tau \cos \tau) \cdot \sin \tau = \cos^3 \tau - 3 \sin^2 \tau \cdot \cos \tau = \cos^3 \tau - 3(1 - \cos^2 \tau) \cdot \cos \tau = 4 \cos^3 \tau - 3 \cos \tau$ .



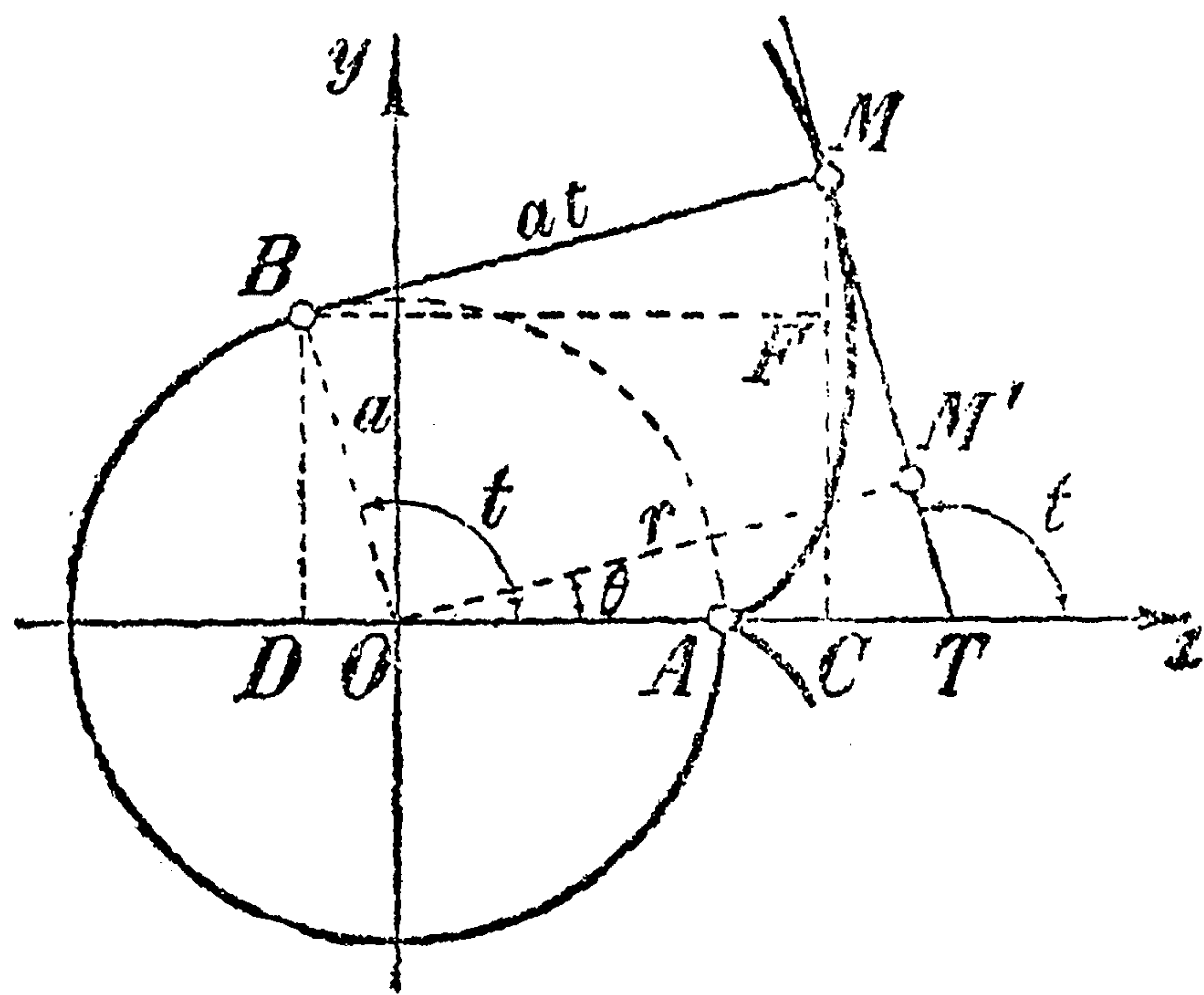
Это и есть искомое неявное уравнение астроида в прямоугольных координатах.

Отметим особо, что когда  $m = \frac{1}{2}$ , т. е. когда внутри круга радиуса  $a$  катится круг вдвое меньшего радиуса, второе из уравнений (57) дает просто:  $y = 0$ , так что точка, взятая на окружности малого круга, описывает прямую (при данном выборе системы координат — ось  $Ox$ ). Точнее говоря, так как в этом случае  $x = a \cdot \cos \frac{t}{2}$ , траекторией точки является прямолинейный отрезок длины  $2a$ , вдоль которого точка колеблется взад и вперед (при возрастании  $t$ ). \* Не лишено интереса реальное осуществление этого катания кругов в так называемом *гипоциклоидальном механизме*, который иногда применяется в типографских скоростных машинах.

На черт. 174 большой круг представлен в виде колеса  $GH$  с внутренней зубчатой нарезкой, которое укреплено неподвижно. Зубчатое же колесо  $AB$  играет роль меньшего круга. Оно вращается вокруг цапфы  $D$ , которая при помощи кривошипа  $CD$  неизменно скреплена с вращающимся вертикальным валом  $C$ . При вращении точки  $D$  вокруг  $C$  (напр., по часовой стрелке) колесо  $AB$  будет, цепляясь своими зубцами за зубцы большого колеса, вращаться вокруг  $D$  (против часовой стрелки), и катание кругов получит реальное осуществление. Но тогда точка  $A$  на окружности малого колеса, как мы только-что видели, будет двигаться взад и вперед по прямой  $AN$ , проходящей через центр неподвижного круга. Это движение при посредстве кривошипа  $AL$  и передается салазкам (или тележке) с типографской формой.



Черт. 174.



Черт. 175.

тягивая ее за конец. Кривая, описываемая при этом концом нити, и называется *эвольвентой круга* \*\*) (черт. 175).

\* Если взять две диаметрально противоположные точки на окружности малого круга, то при катании они будут передвигаться по двум взаимно перпендикулярным прямым, проходящим через центр большого круга. Таким образом диаметр малого круга будет в положении отрезка  $AB$ , о котором была речь в 111.

\*\* Иногда ее называют *развертывающей круга* или также *разверткой круга*.

115. Эвольвента круга. Представим себе, что на круг, описанный из центра  $O$  радиусом  $a$ , накрута по часовой стрелке нить; пусть конец нити приходится в точке  $A$ . Станем нить *развертывать* (против часовой стрелки), сматывать с круга, все время на-



Возьмем начало в центре  $O$  и проведем ось  $Ox$  через точку  $A$ . Когда будет смотана часть  $AB$  нити, она займет положение  $BM$ , располагаясь по касательной к кругу, а точка  $A$  перейдет в  $M$ . Итак,  $\overset{\frown}{AB} = BM$ . В качестве параметра введем угол  $t = \sphericalangle AOB$  между радиусами  $OA$  и  $OB$ . Координаты  $x, y$  точки  $M$  выразятся следующим образом:

$$x = DC - DO = BF - DO = BM \cdot \sin \sphericalangle BMC - OB \cdot \cos \sphericalangle DOB,$$

но  $BM = \overset{\frown}{AB} = at$ , затем,  $\sphericalangle BMC$ , равно как и  $\sphericalangle DOB$ , дополняет до  $\pi$  угол  $\sphericalangle BOA = t$ , так что

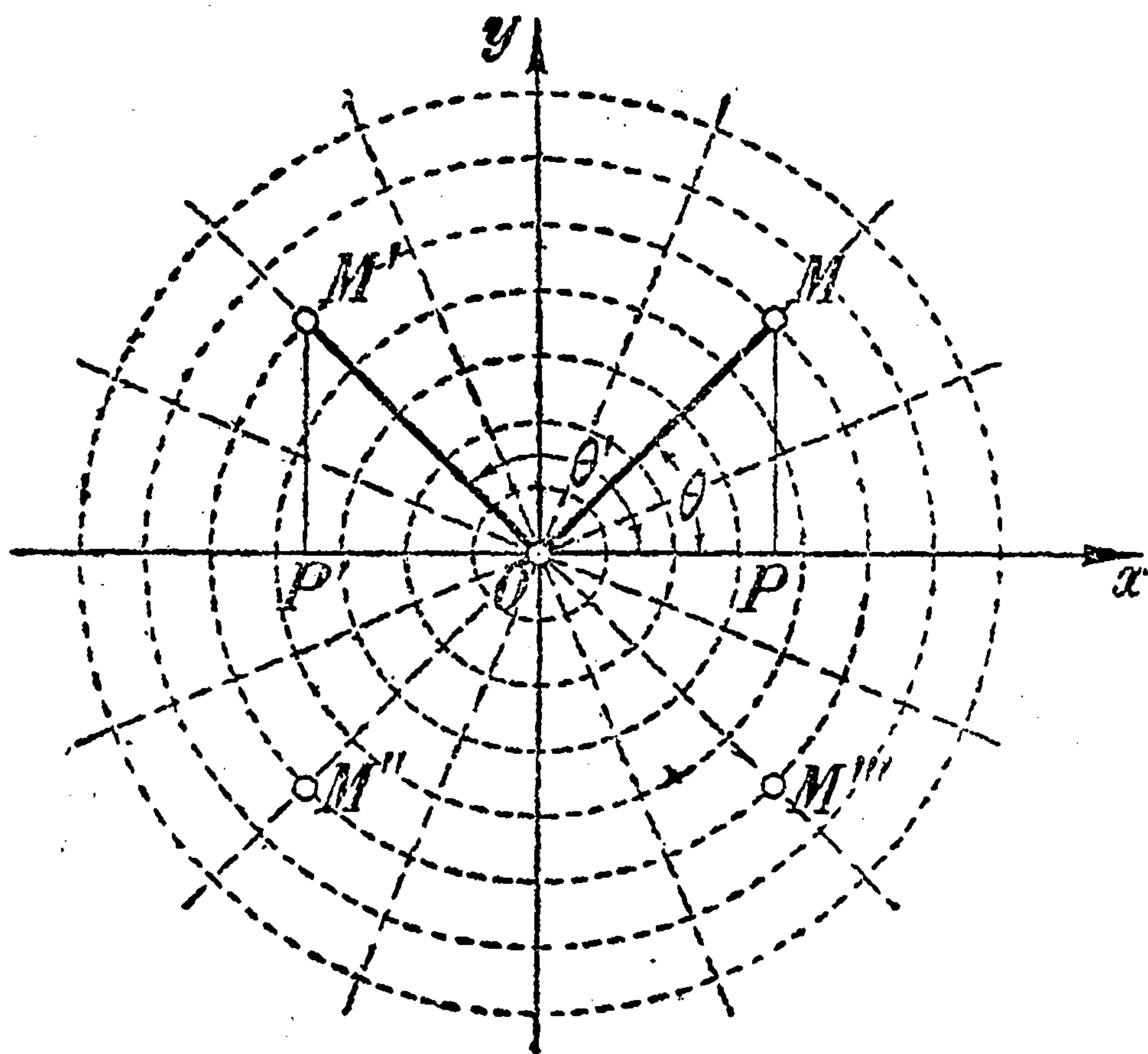
$$x = at \sin (\pi - t) - a \cos (\pi - t) = a (t \sin t + \cos t).$$

Далее,

$$y = CM = CF + FM = DB + FM = OB \cdot \sin \sphericalangle DOB + \\ + BM \cdot \cos \sphericalangle BMC = a (\sin t - t \cos t).$$

Таким образом, наша кривая представляется такими параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= a (\cos t + t \sin t), \\ y &= a (\sin t - t \cos t). \end{aligned} \quad (59)$$



Черт. 176.

Предлагаем читателю убедиться в том, что та же кривая получится, если *катать* прямую по окружности, без скольжения, и рассмотреть траекторию какой-либо точки прямой.

Кривые, о которых шла речь в пп<sup>о</sup> 113—115, играют роль в теории зубчатых колес, именно, по ним вырезаются очертания зубцов.

Встречаются они и в других технических приложениях — по циклоиде иногда очерчивают

своды, по эвольвенте — лопатки в гидравлических турбинах, и т. п.

116. Полярные координаты. Положение точки  $M$  на плоскости мы до сих пор определяли ее *прямоугольными* (*прямолинейными*) координатами  $x, y$ , отнесенными к некоторой положенной в основу системе взаимно перпендикулярных координатных осей. Однако этот способ не является единственным; часто бывает удобнее определять положение точки  $M$  другими связанными с ней величинами. Мы остановимся на том способе, когда за эти величины выбирают, во-первых, расстояние  $r = OM$  точки  $M$  от полюса  $O$  и, во-вторых, угол  $\theta$ , который луч  $OM$  составляет с полярной осью  $Ox$  (черт. 176). Величины  $(r, \theta)$  называются *полярными координатами* точки  $M$ , в частности, отрезок  $r$  называют *полярным радиусом-вектором*, а угол  $\theta$  — *полярным углом*. Очевидно, зада-



нием значений  $r$  и  $\theta$  положение точки  $M$ , действительно, вполне определяется: угол  $\theta$  устанавливает направление луча  $OM$ , а отрезок  $r$  — положение точки на этом луче. Обратное, по точке  $M$  однозначно определяется расстояние  $r$ ; что же касается до угла  $\theta$ , то он определяется неоднозначно: каждой точке  $M$  отвечает бесчисленное множество полярных углов, разнящихся один от другого на  $2k\pi$ , где  $k$  — целое число. В исключительном же случае, когда  $M$  совпадает с полюсом  $O$ , полярный радиус-вектор равен нулю, а полярный угол может быть взят вообще каким угодно!

Если, в случае прямоугольных координат, считать  $x = \text{пост.}$  и произвольно изменять  $y$ , или взять  $y = \text{пост.}$  и изменять  $x$ , то получится прямоугольная сетка „координатных“ прямых, хорошо знакомая читателю. Переходя к полярным координатам, легко видеть, что при постоянном  $r$  и меняющемся  $\theta$ , точка  $M(r, \theta)$  будет описывать окружность радиуса  $r$  с центром в полюсе; наоборот, при постоянном  $\theta$  и меняющемся  $r$  эта точка будет передвигаться вдоль луча, проведенного из полюса под углом  $\theta$  к полярной оси. Всевозможные такие концентрические окружности, вместе с исходящими из полюса лучами, образуют сетку „координатных линий“ для рассматриваемого случая; эта сетка изображена на черт. 176 пунктиром.

Не трудно установить связь между полярными координатами  $(r, \theta)$  точки  $M$  и ее же прямоугольными координатами  $(x, y)$ ; при этом обычно предполагается, что за начало координат взят полюс, а за ось абсцисс — полярная ось. Из  $\triangle OPM$  (черт. 176) непосредственно ясно, что

$$x = r \cdot \cos \theta, \quad y = r \cdot \sin \theta. \quad (60)$$

Эти формулы верны, в каком бы координатном угле ни лежала точка  $M$ , ибо правила знаков для координат  $x, y$ , с одной стороны, и для  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$ , с другой — совпадают, напр., для точки  $M'$ , лежащей во втором координатном угле, имеем (означая величины, относящиеся к точке  $M'$ , штрихами):

$$x' = - \text{дл. } OP' = - r' \cdot \cos \sphericalangle P'OM' = - r' \cdot (- \cos \theta') = r' \cdot \cos \theta'$$

$$y' = \text{дл. } P'M' = r' \cdot \sin \sphericalangle P'OM' = r' \cdot \sin \theta'.$$

Обратно, по формуле (1а) для расстояния точки  $M(x, y)$  от начала координат,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (61)$$

Кроме того, из формул (60) получаем:

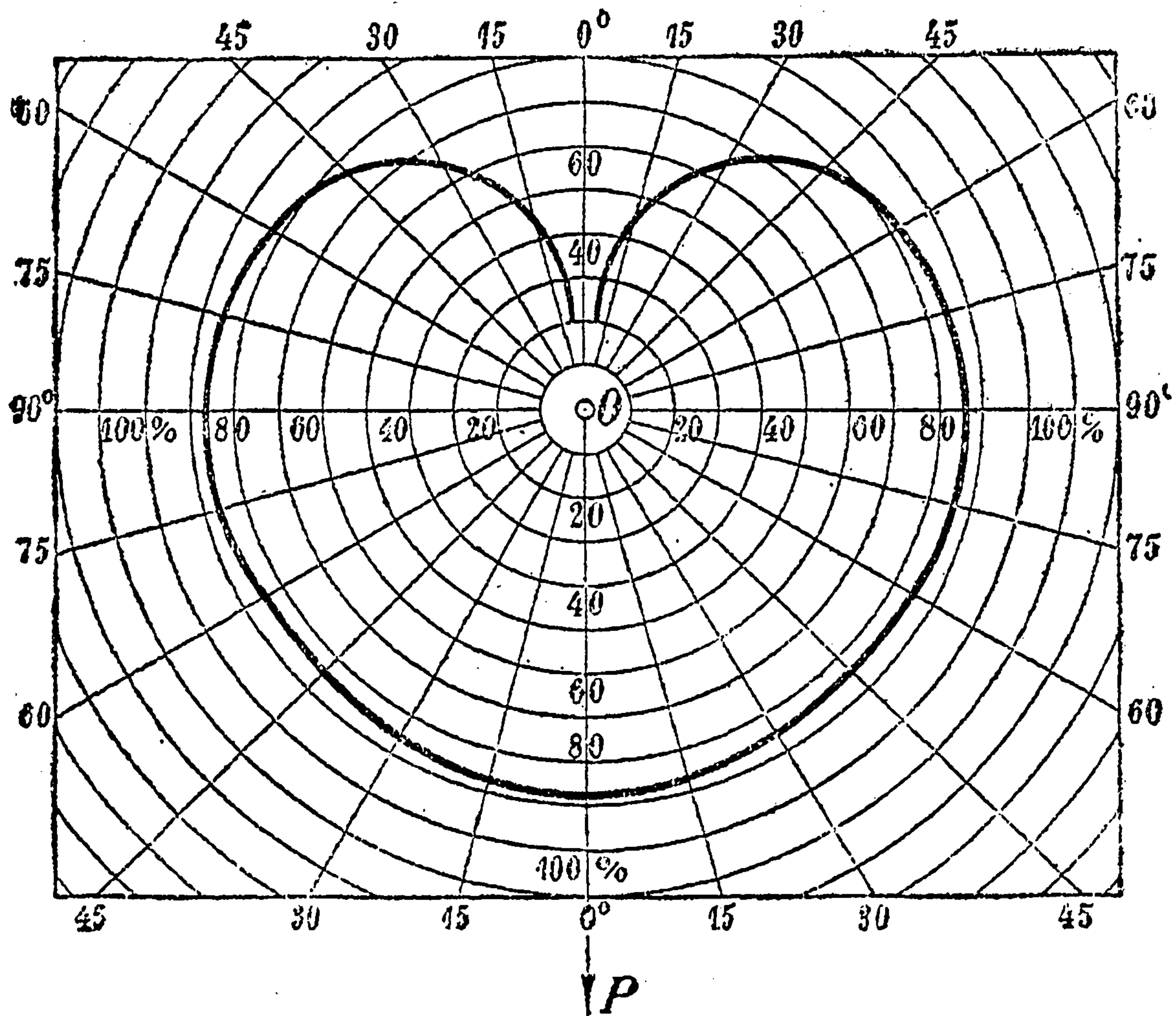
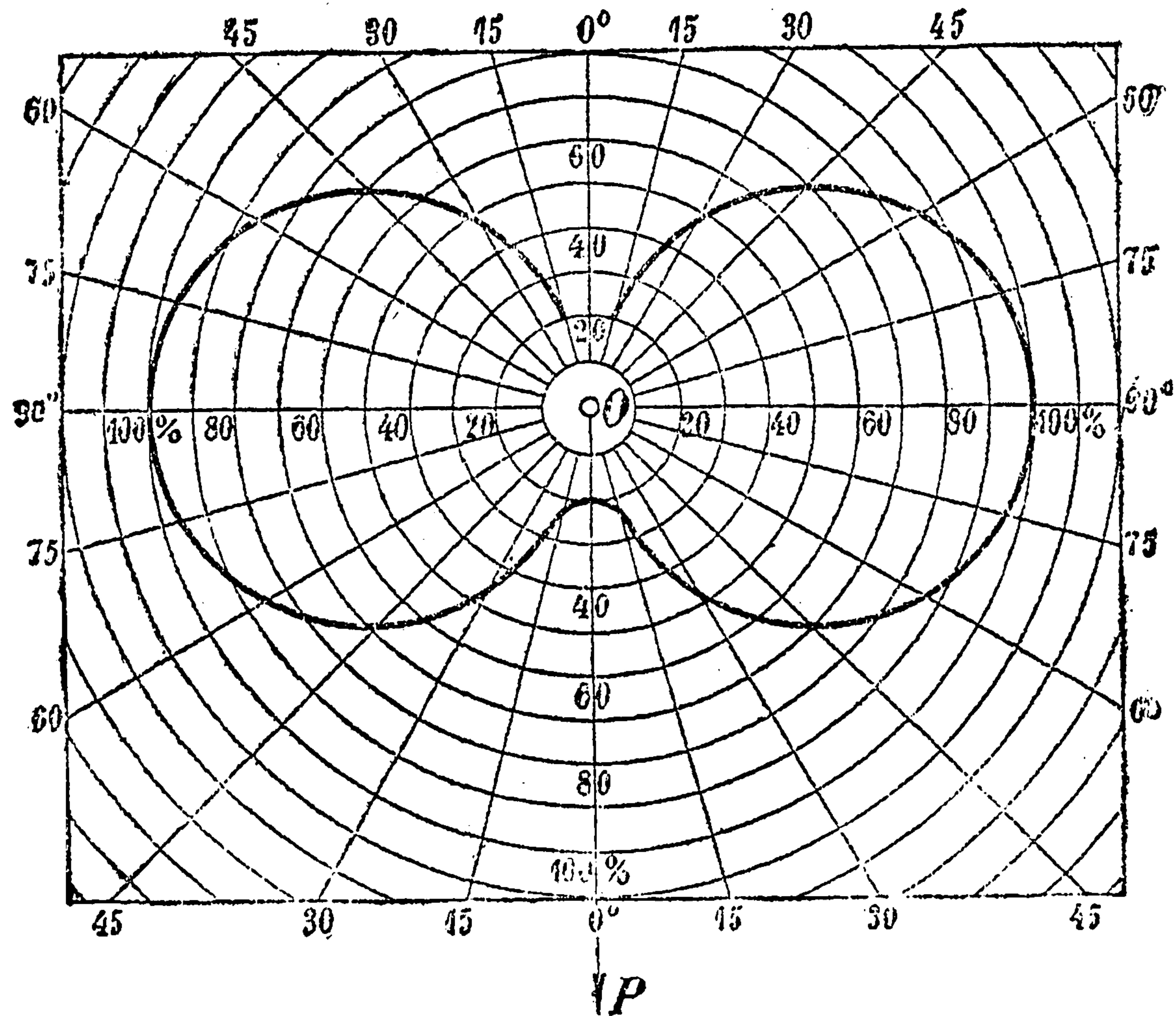
$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}; \quad (61a)$$

деля эти равенства почленно, можно было бы прийти и к более простой формуле для определения полярного угла  $\theta$ :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x},$$



но так как период тангенса есть  $\pi$ , а не  $2\pi$ , то эта формула определяет угол не достаточно точно: так, по положительному тангенсу найдутся точки и в I и в III координатном углу (в роде  $M$  и  $M''$ ), а отрицательному тангенсу будут отвечать точки и во II и в IV углах (как  $M'$  и  $M'''$ ).

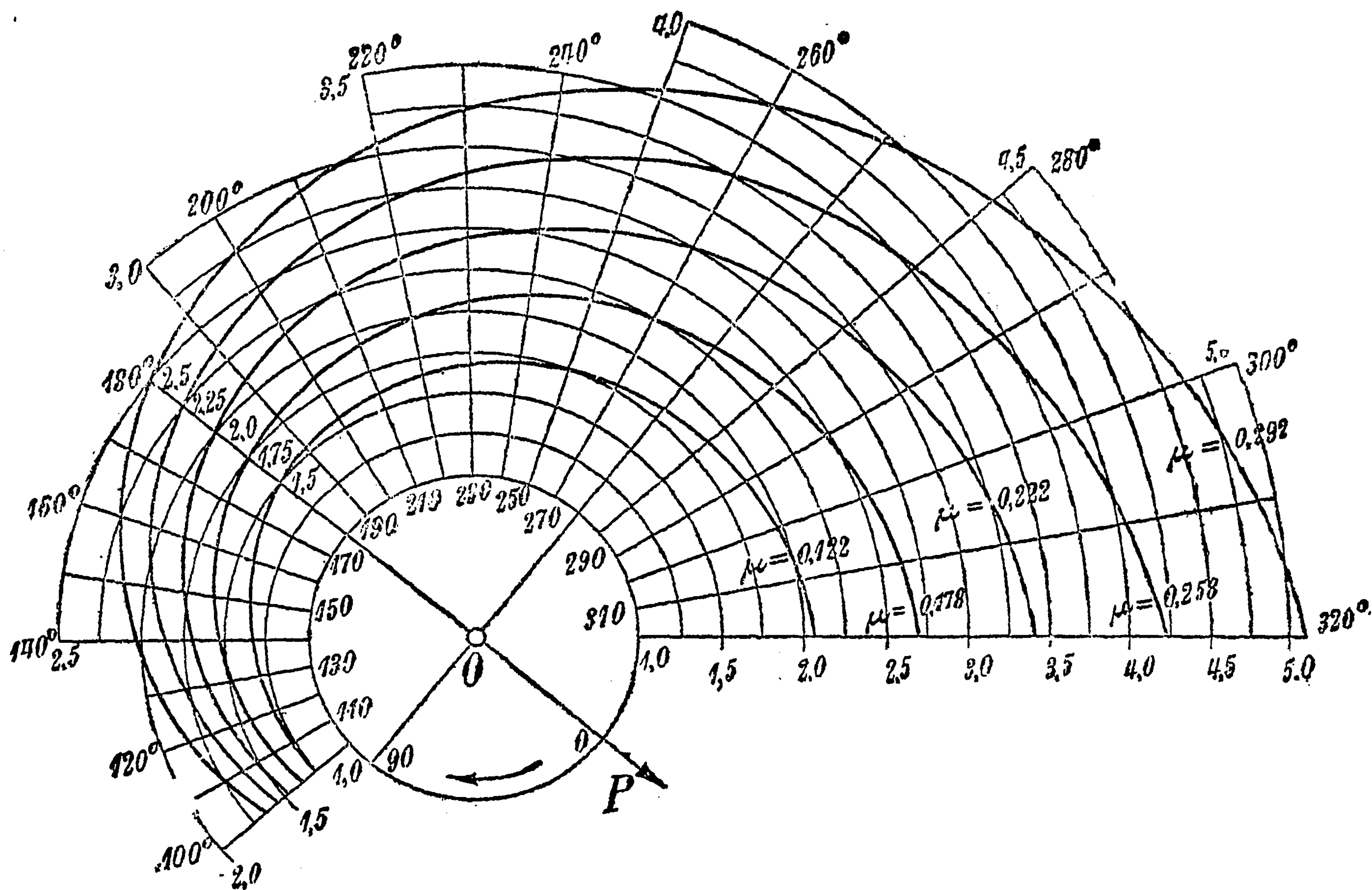


Черт. 177.

**117. Полярные диаграммы. Полярные уравнения кривых.** Понятие о прямоугольных координатах служило нам [30] для иллюстрации функциональной зависимости между двумя переменными, и первоначально было введено [29] именно для этой цели. Мы изображали значения независимой



переменной  $x$  отрезками на горизонтальной оси, а по вертикали откладывали соответствующие им значения функции  $y$ ; из полученных таким путем точек  $(x, y)$  составлялась линия — „график“ нашей функциональной зависимости, который и давал нам наглядное представление о ходе изменения функции  $y$  с изменением независимой переменной  $x$ . Полярная система координат, разумеется, может служить для той же цели: если переменные  $r$  и  $\theta$  связаны зависимостью, то, изображая значения  $\theta$  углами и откладывая на определяемых ими лучах отрезки, равные



Черт. 178.

соответствующим значениям  $r$ , получим ряд точек  $(r, \theta)$ , из которых, как и раньше, образуется некоторая линия, называемая *полярной диаграммой* интересующей нас зависимости.

Особенно удобно прибегнуть именно к полярной диаграмме, если переменная  $\theta$  и фактически является (а не только „изображается“) углом. Напр., известно, что сила света электрической лампы накаливания неодинакова по различным направлениям, исходящим из нее (в вертикальной плоскости). Для иллюстрации изменения силы света, естественно откладывать ее на исходящих из центра лампы лучах; таким образом и составлены диаграммы, приведенные на черт. 177. За независимую переменную здесь принят угол  $\theta$ , составленный рассматриваемым направлением с идущей вниз вертикалью, которая играет роль полярной оси.

Для упражнения предлагаем читателю самому построить полярные диаграммы для следующих зависимостей.



1.  $I$  — сила света источника,  $\theta$  — угол направления с вертикалью, идущей вниз ( $^\circ$ )

$\theta$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$I$	3000	10000	20500	33000	41500	41500	43000	43000	30000	2400

$\theta$	100	110	120	130	140	150	160	170	180
$I$	9000	6000	5000	5000	3000	2000	1500	1500	1500

2.  $F$  — усилие в пальце кривошипа (кг),  $\alpha$  — угол поворота кривошипа, считая от горизонтали ( $^\circ$ )

$\alpha$	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
$F$	0	2,45	4,4	6,1	7,0	7,4	7,4	6,6	5,8	4,4	3,0	1,5	0

(для  $\alpha > 180^\circ$  значения  $F$  повторяются в обратном порядке).

Другой пример полярной диаграммы представлен на черт. 178, но здесь она иллюстрирует зависимость, заданную формулой или уравнением:  $r = e^{\mu\theta}$ . Формула эта выражает закон распределения натяжений в ремне, переброшенном через барабан; диаграмма дана для нескольких значений постоянной  $\mu$  (коэффициент трения). Ср. 44, зад. 2.

Аналогично можно построить диаграмму для любой зависимости вида:

Аналогично можно построить диаграмму для любой зависимости вида:

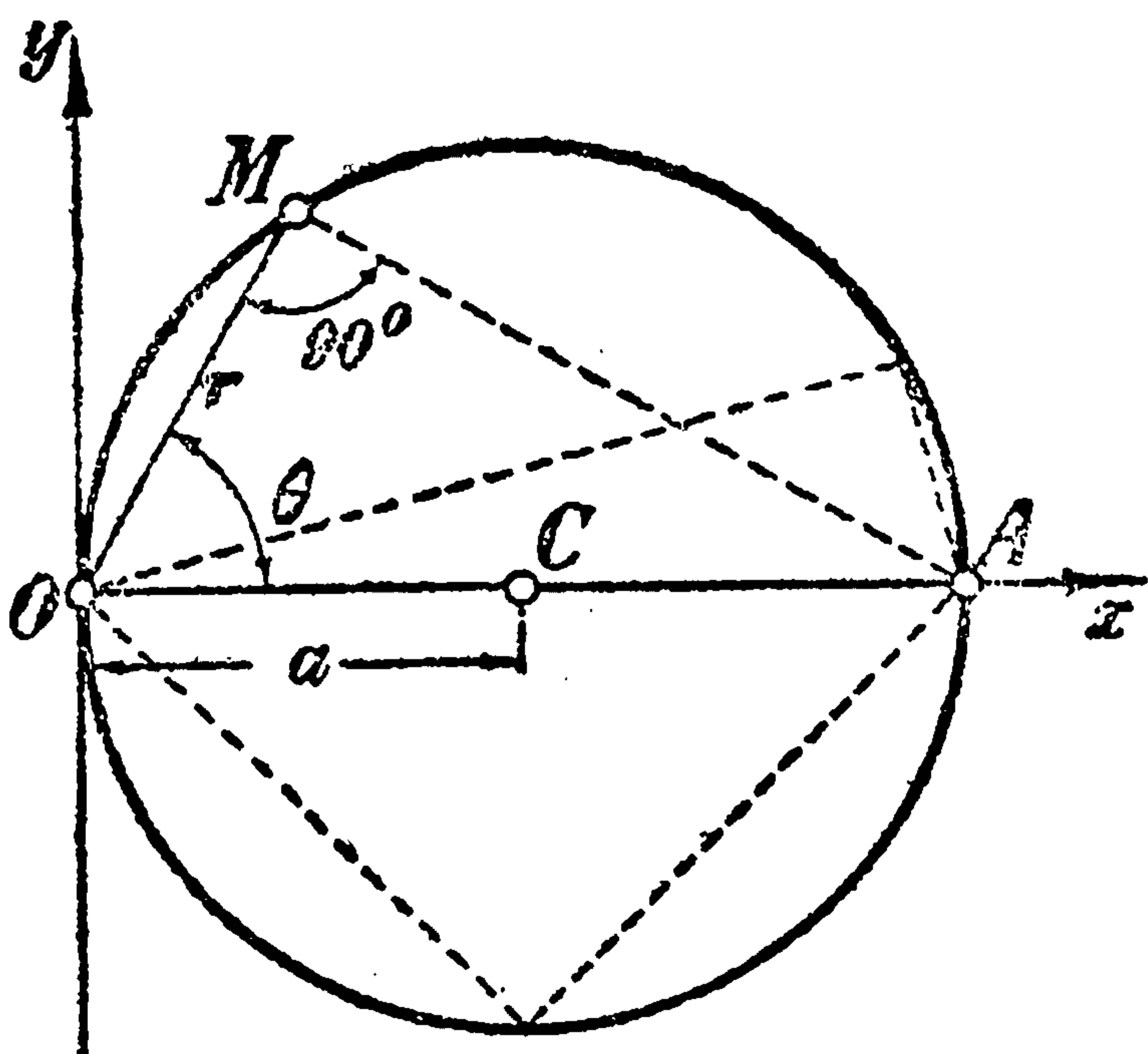
$$r = f(\theta); \quad (62)$$

наоборот, можно для заданной кривой искать аналитическое представление ее уравнением вида (62), которое в этом случае называется ее *полярным уравнением*. Если, напр.,

для окружности радиуса  $a$  за полюс взять центр, то, очевидно, для всех точек окружности (и только для них) имеет место равенство:  $r = a$ , которое и будет полярным уравнением окружности. Если же, как это иногда приходится делать, за полюс берется какая-нибудь точка  $O$  на самой окружности (черт. 179), а полярная ось проводится через центр  $C$ , то из  $\triangle OMA$ , прямоугольного при  $M$ , получаем в этом случае *полярное уравнение окружности* в следующем виде:

$$r = 2a \cdot \cos \theta, \quad (63)$$

причем  $\theta$  достаточно изменять от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ . Покажем на этом простом примере, как от полярного уравнения перейти к уравнению



Черт. 179.



в прямоугольных координатах. Подставляя вместо  $r$  и  $\cos \theta$  их выражения (61), (61a), получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

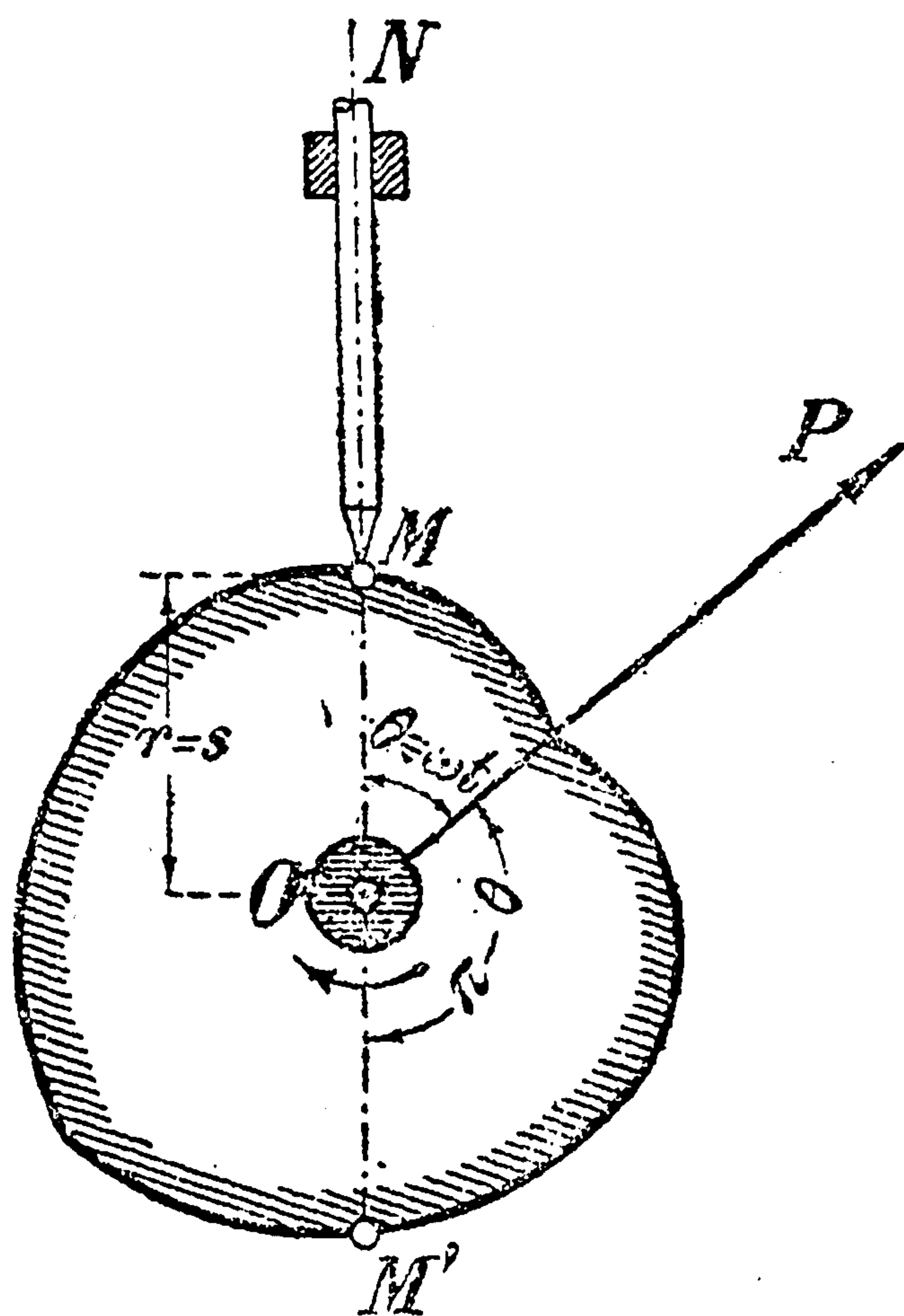
что можно также представить в виде:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2 \quad \text{или} \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2;$$

это, действительно, есть уравнение окружности радиуса  $a$  с центром в точке  $(a, 0)$  на оси  $Ox$  [96, (21)].

В следующем п° читатель найдет ряд примеров кривых, которые проще и естественнее изучать по их полярным уравнениям. Здесь же мы укажем одну важную в теории механизмов область вопросов, где находят себе применение как раз полярные уравнения кривых. Выше уже упоминалось о поступательно движущихся кулаках [65, черт. 91]; несравненно большее распространение имеют *вращающиеся кулаки*, или *эксцентрики*. Эксцентриком вообще называется шайба, насаженная на вращающуюся ось (черт. 180); вращение эксцентрика преобразуется в возвратно-поступательное движение примыкающего к нему стержня  $MN$ . Пусть полярное уравнение профиля эксцентрика будет иметь вид (62), причем за полюс взята точка  $O$ , лежащая на оси вращения. Предполагая для простоты, что вал, на который насажен эксцентрик, вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega$ , и отсчитывая время  $t$  от момента, когда полярная ось  $OP$  прошла через острие  $M$  стержня, видим, что к моменту  $t$  эксцентрик повернется на угол  $\theta = \omega t$ . В этот момент, следовательно, расстояние  $r = OM$  будет равно  $f(\theta) = f(\omega t)$ . Итак, отсчитывая „пройденный путь“  $s$  для точки  $M$  от полюса  $O$ , имеем:

$$s = r = f(\omega t), \quad (64)$$



Черт. 180.

так что закон движения стержня выражается с помощью функции  $f$ , фигурирующей именно в полярном уравнении кривой, по которой очерчен эксцентрик. Это обстоятельство, как увидим ниже на примерах, и используется при решении различных вопросов, относящихся к эксцентрикам.

**118. Спирали.** Перейдем теперь к рассмотрению ряда кривых, обычно определяемых их полярными уравнениями. К числу их, прежде всего, относятся разного рода *спирали*.

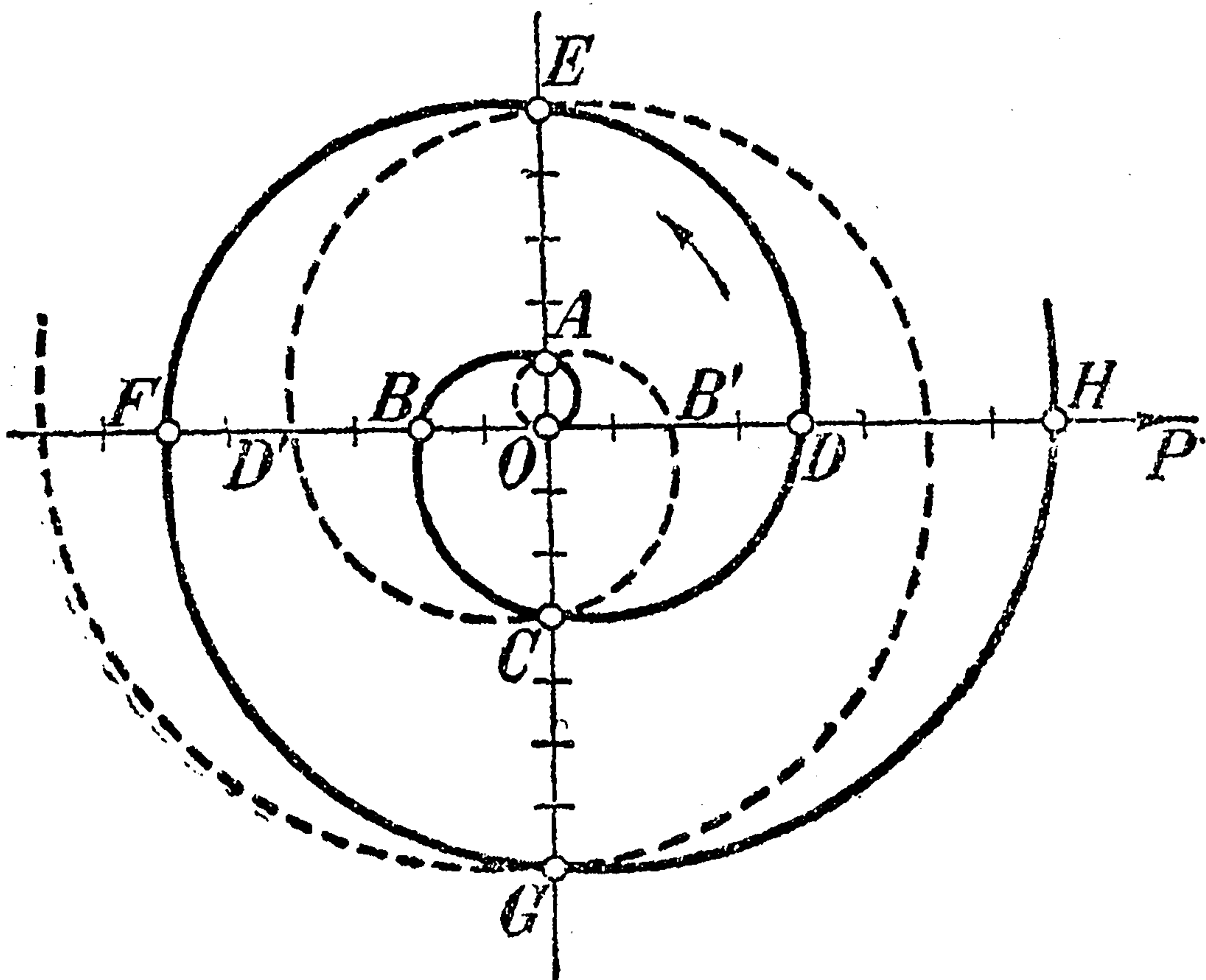
1. *Архимедова спираль*. Кривая эта — механического происхождения. Вообразим себе, что некоторая точка равномерно движется по лучу  $OP$ , в то время как этот луч равномерно же вращается вокруг точки  $O$  (скажем, против часовой стрелки) (черт. 181). Если точку  $O$  принять за полюс, а первоначальное положение луча  $OP$  — за полярную ось, то и полярный радиус-вектор  $r$  движущейся точки (представляющий собою „пройденный путь“ в ее движении по лучу) и ее полярный угол  $\theta$  (угол



поворота самого луча) растут пропорционально времени, а следовательно и пропорционально один другому. Итак, имеем:

$$r = a\theta, \quad (65)$$

где  $a$  — некоторая положительная постоянная (коэффициент пропорциональности). Это есть полярное уравнение траектории нашей точки, которая и носит название Архимедовой спирали. Для построения нескольких ее точек  $A, B, C, D, \dots$  (черт. 181) мы отложили по вертикали любой отрезок  $OA$  (представляющий величину  $a \frac{\pi}{2}$ ), а затем взяли  $OB = 2 \cdot OA$ ,  $OC = 3 \cdot OA$ ,  $OD = 4 \cdot OA$ , и т. д., ибо им отвечают углы  $2 \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $3 \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $4 \cdot \frac{\pi}{2}$  и т. д. Так как  $\theta$  может расти от 0



Черт. 181.

до  $\infty$ , то кривая имеет бесконечное множество витков:  $OABCD, DEFGH, \dots$ ; расстояния соседних витков, считая по лучу, напр.  $AE, DH$  и т. п., очевидно все равны  $2\pi a$ .

Можно было бы углу  $\theta$  придавать и отрицательные значения, но тогда и для  $r$  получились бы отрицательные значения! Понимать это следует так, что углом  $\theta$  устанавливается определенное направление луча, а отрезок  $r$  откладывается в прямо противоположном направлении.

Так составится часть кривой  $OAB'CD' \dots$ , намеченная пунктиром.

Теперь понятно, что в уравнении (65) коэффициент  $a$  может быть и отрицательным.

Наконец, если повернуть полярную ось на некоторый угол  $\alpha$ , то это изменит все углы  $\theta$  на постоянное слагаемое  $(-\alpha)$ , и уравнение (65) получит вид:

$$r = a\theta + b, \quad (65a)$$

где  $b = -a\alpha$ ; это и есть общая форма уравнения Архимедовой спирали. Обратное, это уравнение надлежащим поворотом полярной оси всегда может быть приведено к простому виду (65).

При конструировании механизмов пропорциональность изменения  $r$  и  $\theta$  в Архимедовой спирали — не раз оказывается полезной. Пусть, напр., требуется построить эксцентрик [117], который сообщал бы стержню равномерное поступательное движение, по формуле:

$$s = v \cdot t + s_0.$$



Задавшись наперед законом движения, мы можем отсюда заключить о необходимой для него форме эксцентрика; именно, сопоставляя это уравнение с (64), видим, что в нашем случае:

$$f(\omega t) = v \cdot t + s_0,$$

или — если положить  $\omega t = \theta$  и  $t = \frac{\theta}{\omega}$ ,

$$f(\theta) = \frac{v}{\omega} \cdot \theta + s_0.$$

Таким образом, эксцентрик должен быть очерчен по кривой, имеющей полярное уравнение [ср. (62)]:

$$r = \frac{v}{\omega} \cdot \theta + s_0,$$

которое совпадает с (65 a) при  $a = \frac{v}{\omega}$  и  $b = s_0$  и, следовательно, выражает Архимедову спираль.

На практике применяются такие эксцентрики, очерченные двумя дугами спирали, в роде фигуры  $ABCB'A$  на черт. 181 (иногда их называют *сердцевидными*); такой эксцентрик, собственно, и изображен на черт. 180. Отметим одну важную особенность сердцевидного эксцентрика. Если взять точку  $M'$ , диаметрально противоположную  $M$ , то одновременно с

$$r = OM = a \cdot \theta,$$

имеем:

$$r' = OM' = a \cdot (\pi - \theta),$$

так что  $r + r' = \pi a =$  пост.: *все диаметры эксцентрика постоянны.*

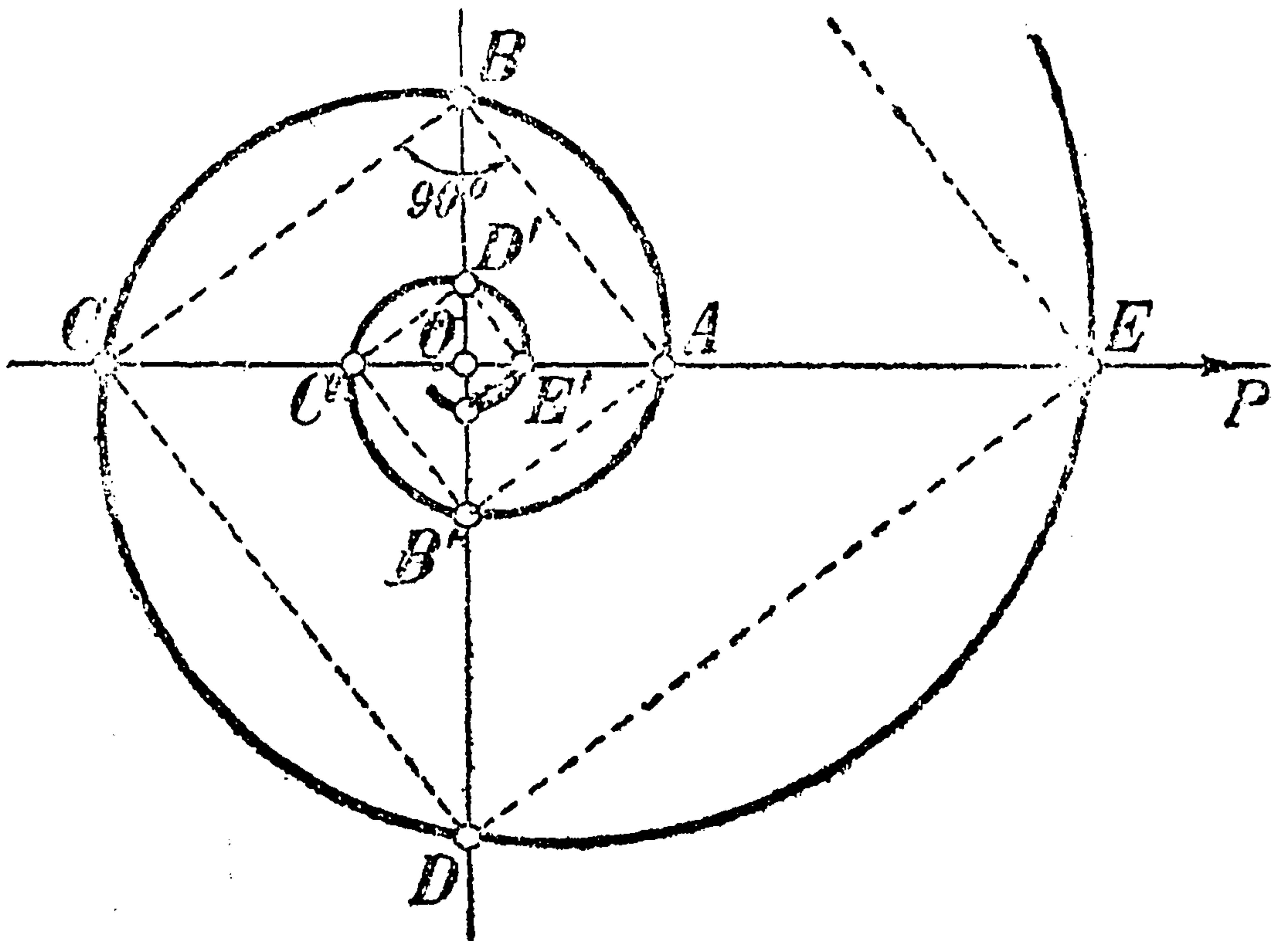
Это позволяет неизменно связать два стержня, примыкающие к эксцентрику в диаметрально противоположных точках и следующие за движением эксцентрика без всяких добавочных приспособлений. Постоянство скорости является однако и недостатком сердцевидного эксцентрика, ибо в начале и в конце каждого хода стержня, при перемене знака скорости, происходят удары.

**2. Логарифмическая спираль.** Так называется кривая, выражаемая полярным уравнением:

$$r = ae^{m\theta}, \quad (66).$$

где  $a$  и  $m$  — постоянные. (С частными случаями таких спиралей мы уже имели дело на черт. 178.)

Если угол  $\theta$  увеличить на  $\Delta\theta$ , то радиус-вектор  $r$  приобретет множитель  $e^{m \cdot \Delta\theta}$ ; таким образом, если  $\theta$  возрастает (убывает) в арифметической прогрессии, то  $r$  возрастает (убывает) в геометрической прогрессии. Отложим на полярной оси отрезок  $OA = a$  (черт. 182),

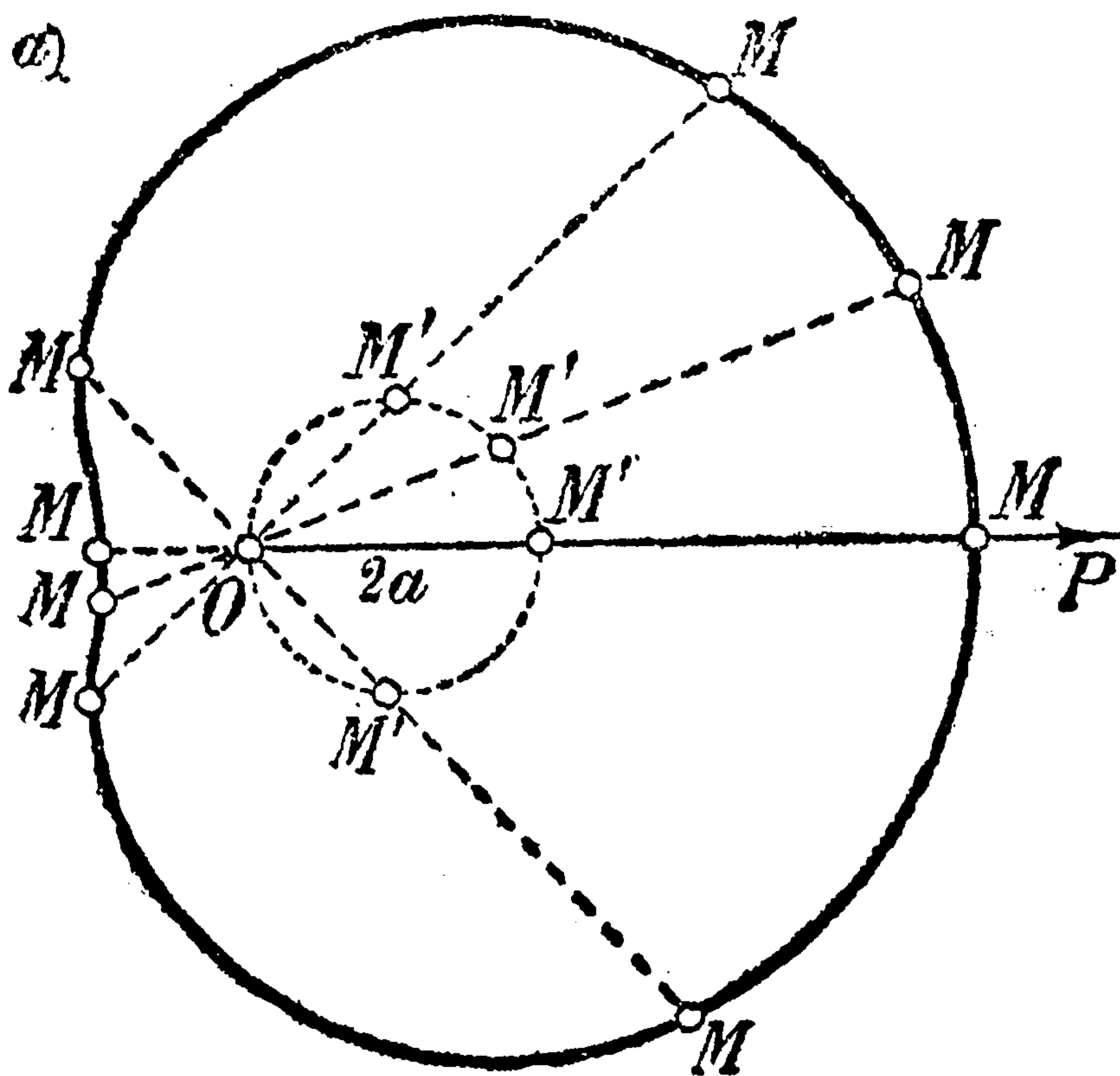


Черт. 182.

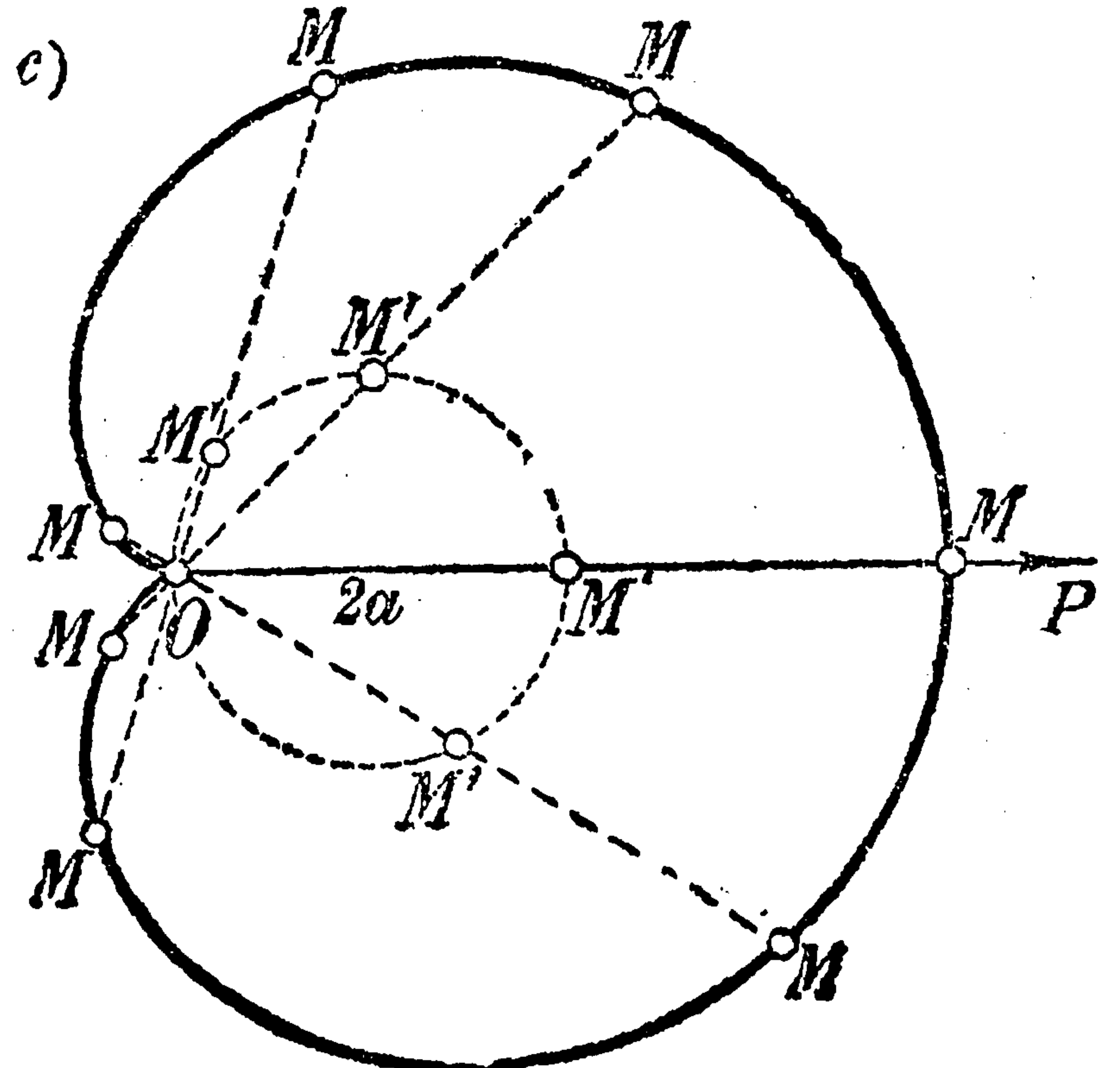


а на вертикали к ней — отрезок  $OB = ae^{m \cdot \frac{\pi}{2}}$ ; обе точки  $A, B$  принадлежат нашей кривой. Если построить теперь прямоугольную ломаную  $ABCDE \dots$ , то (из подобия треугольников) не трудно заключить, что отрезки  $OA, OB, OC, OD, OE, \dots$  образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $\rho = e^{m \cdot \frac{\pi}{2}}$ ; так как соответствующие углы суть  $0, \frac{\pi}{2}, 2 \cdot \frac{\pi}{2}, 3 \cdot \frac{\pi}{2}$  и т. д., то очевидно, что все точки  $C, D, E \dots$

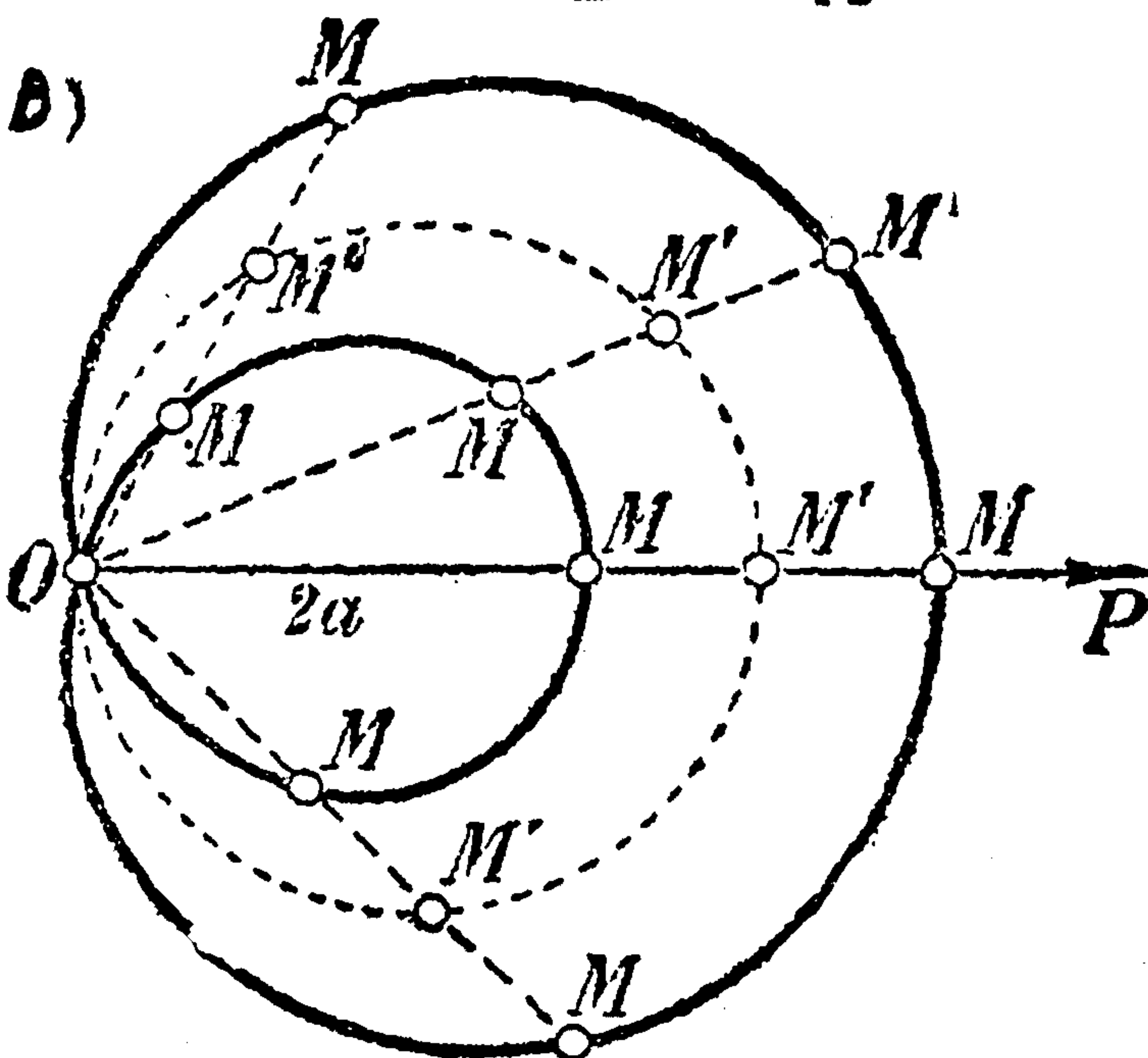
$$M'M = d > 2a$$



$$M'M = d = 2a$$



Черт. 183.



$$M'M = d < 2a$$

также лежат на рассматриваемой спирали.

Когда угол  $\theta$  растет от 0 до  $+\infty$ , точка делает бесчисленное множество оборотов вокруг полюса, быстро удаляясь от него в бесконечность (расстояния между витками уже не равны!). Угол  $\theta$  может изменяться и через отрицательные значения; когда  $\theta$  стремится к  $-\infty$ , то радиус-вектор, убывая, стремится к нулю. Кривая бесконечное множество раз заворачивается вокруг

полюса, безгранично к нему приближаясь (см. часть  $AB'C'D'E' \dots$  на черт. 182), но никогда не достигая.

Отметим, наконец, что, поворачивая полярную ось вокруг полюса, можно добиться уничтожения множителя  $a$  и привести уравнение логарифмической спирали к простейшему виду:  $r = e^{m \cdot \theta}$ .

**119. Улитки. Лемниската. 1.** Мы уже сталкивались с полярным уравнением окружности, когда за полюс была взята точка, лежащая на самой окружности; она имела вид [см. (63)]:

$$r = 2a \cdot \cos \theta.$$

Если изменять здесь угол  $\theta$  от 0 до  $2\pi$ , то — как не трудно проверить — переменная точка два раза опишет окружность (против часовой стрелки); при этом



отрицательные радиусы-векторы надлежит понимать так, как разъяснено выше. Если теперь удлинить все радиусы-векторы окружности на постоянный отрезок  $d$  ( $d > 0$ ), то из построенных таким путем точек составит новая кривая, которая и носит общее название *улитки*; ее полярное уравнение, очевидно, будет:

$$r = 2a \cdot \cos\theta + d. \quad (67)$$

Проще всего обстоит дело, если  $d > 2a$ , ибо тогда (так как  $\cos\theta$  не превосходит по абсолютной величине единицы) радиус-вектор  $r$  всегда положителен, и кривая окружает полюс со всех сторон (черт. 183а). При  $d < 2a$ , кривая проходит через полюс и, сама себя пересекая, образует внутреннюю петлю, как на черт. 183б). Полагая  $r = 0$ , для определения угла  $\theta$ , при котором переменная точка проходит через полюс, получаем уравнение:  $\cos\theta = -\frac{d}{2a}$ , которое имеет решения именно потому, что  $d < 2a$ . Особенно интересен промежуточный тип кривой, отвечающий случаю, когда  $d = 2a$ ; здесь полюс лежит на кривой ( $\theta = \pi$ ), но петли нет; кривая изображена на черт. 183,с.

Сразу бросается в глаза тождество этой кривой и *кардиоиды*, рассмотренной выше, как частный случай эпициклоиды (черт. 173); разница лишь в расположении кривых.

Для того чтобы установить этот факт, будем исходить из параметрических уравнений кардиоиды [которые получаем из уравнений (55), (56), полагая в них  $m = 1$ ]:

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t),$$

$$y = a(2 \sin t - \sin 2t).$$

Для удобства мы воспроизводим здесь черт. 172, но в измененном, применительно к рассматриваемому частному случаю ( $m = 1$ ), виде (черт. 184). Если в написанных уравнениях заменить  $\cos 2t$  через  $2\cos^2 t - 1$ , а  $\sin 2t$  через  $2\sin t \cdot \cos t$ , то легко привести их к виду:

$$x - a = 2a \cdot \cos t \cdot (1 - \cos t), \quad y = 2a \cdot \sin t \cdot (1 - \cos t).$$

Отсюда, по формуле (1), сразу получается для величины отрезка  $AM$ :

$$r = AM = \sqrt{(x - a)^2 + y^2} = 2a \cdot (1 - \cos t).$$

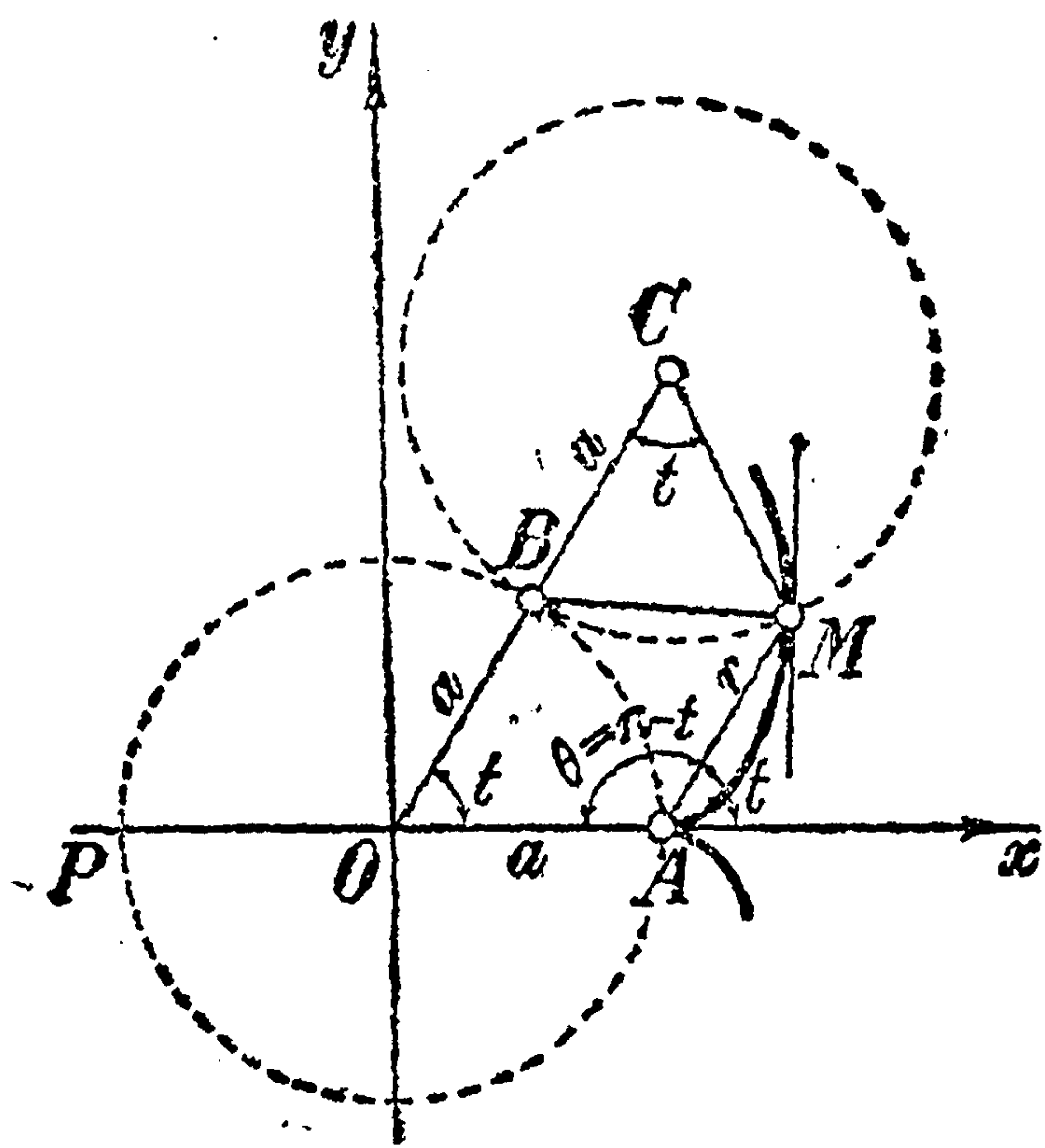
Наконец, из черт. 184 ясно, что отрезок  $AM \parallel OC$  (фигура  $AOCM$  — равнобедренная трапеция!); если ввести угол  $\theta = \sphericalangle OAM$ , то  $\theta = \pi - t$ , так что предшествующее выражение для  $r$  можно переписать так:

$$r = 2a(1 + \cos\theta).$$

Взяв за полюс точку  $A$  и направив полярную ось по горизонтали влево, мы видим, что полярное уравнение кардиоиды, действительно, получается из (67) при  $d = 2a$ .

Заметим, что эксцентрики, очерченные по улитке (разумеется, при  $d > 2a$ ), сообщают примыкающему к ним стержню гармоническое колебательное движение [46]. Действительно, движение стержня определится уравнением [ср. (64)]:

$$s = 2a \cdot \cos \omega t + d = 2a \cdot \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + d.$$



Черт. 184.



В этом случае не только скорость  $v = s'_t = -2a\omega \cdot \sin\omega t$ , но и ускорение  $w = v'_t = -2a\omega^2 \cdot \cos\omega t$  изменяется плавно, без скачков, так что движение происходит без ударов.

2. Наконец, остановимся еще на одной кривой, называемой *лемнискатой*. Ее можно геометрически определить, как *геометрическое место точек  $M$ , для которых произведение их расстояний  $\rho = FM$  и  $\rho' = F'M$  до двух данных точек  $F$  и  $F'$ , отстоящих одна от другой на расстояние  $2a$ , есть величина постоянная  $a^2$ \** (черт. 185).

При обозначениях чертежа имеем (из  $\Delta$ -ков  $OMF$  и  $OMF'$ ):

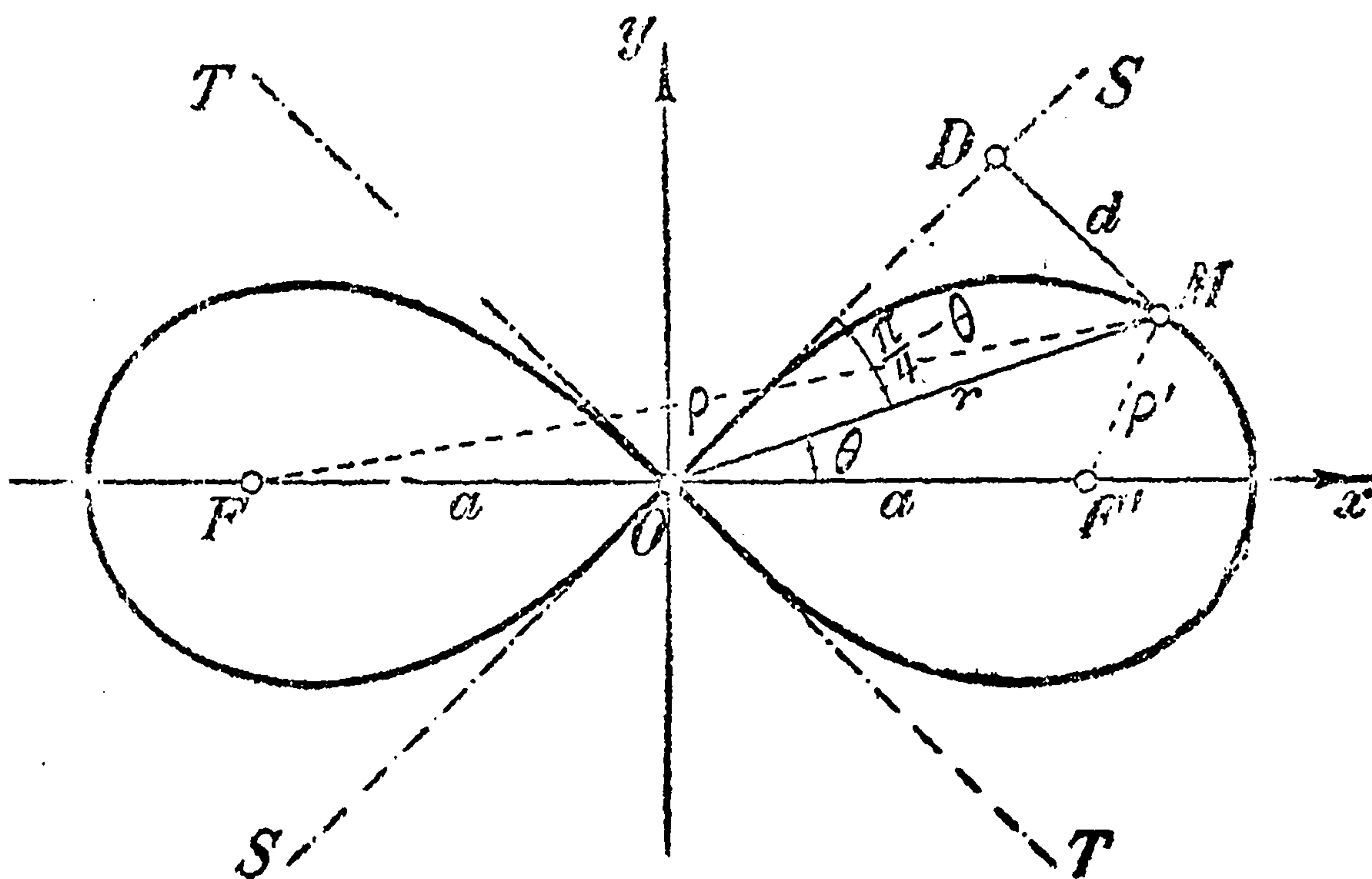
$$\rho^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos\theta, \quad \rho'^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos\theta,$$

так что — по определению —

$$\rho^2 \cdot \rho'^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4a^2r^2 \cdot \cos^2\theta = a^4,$$

откуда, по сокращении на  $r^2$  и замене  $2\cos^2\theta - 1$  через  $\cos 2\theta$ , получаем:

$$r^2 = 2a^2 \cdot \cos 2\theta. \quad (68)$$



Черт. 185.

Если точку  $O$  выбрать за полюс, а ось  $Ox$  — за полярную ось, то это уравнение можно рассматривать, как *полярное уравнение лемнискаты* (легко решаемое относительно  $r$ !).

Так как левая, а с нею и правая часть уравнения (68) не может принимать отрицательных значений, то угол  $\theta$  может изменяться лишь в таких промежутках, для которых  $\cos 2\theta \geq 0$ . Это будут промежутки:

$$\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right).$$

Вся кривая расположится в двух вертикальных углах между прямыми  $SS$  и  $TT$ , проведенными под углами  $\frac{\pi}{4}$  и  $\frac{3\pi}{4}$  к оси  $Ox$  (см. чертеж). Она сама себя пересекает в полюсе, которому отвечают  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ .

секает в полюсе, которому отвечают  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ .

\* При указанных соотношениях между расстоянием  $FF'$  и постоянной величиной произведения  $\rho\rho'$ , очевидно, середина  $O$  отрезка  $FF'$  принадлежит кривой (ибо для нее  $\rho = \rho' = a$ ). В общем случае, когда  $\rho\rho' = b^2$  ( $b \geq a$ ), получаются так называемые *овалы Кассини*, на которых останавливаться не будем.



Если переписать уравнение (68) в виде:

$$r^2 = 2a^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (68a)$$

и воспользоваться формулами (61) и (61a), то—после простых преобразований—получим неявное уравнение лемнискаты в прямоугольных координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 \cdot (x^2 - y^2).$$

Таким образом, лемниската оказывается кривой четвертого порядка.

Интересно отметить еще, что наша кривая очень тесно примыкает к прямой  $SS$  (и  $TT$ ) вблизи точки  $O$ . Для того чтобы оценить степень этого приближения, вычислим расстояние  $d = MD$  из  $\triangle OMD$ :

$$d = r \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) = r \cdot \left( \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \theta - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \theta \right) = \frac{r}{\sqrt{2}} (\cos \theta - \sin \theta).$$

Выражение в скобках, при помощи равенства (68a), можно заменить через

$$\frac{r^2}{2a^2 \cdot (\cos \theta + \sin \theta)}.$$

Таким образом, окончательно,

$$\frac{d}{r^3} = \frac{1}{2 \sqrt{2} a^2 \cdot (\cos \theta + \sin \theta)};$$

это отношение, при  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$  (и  $r \rightarrow 0$ ), стремится к конечному пределу  $\frac{1}{4a^2}$ . Расстояние  $d$  оказывается [25] третьего порядка малости относительно  $r$ !



## ГЛАВА VIII.

### КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ.

**120. Касательная и связанные с нею отрезки.** Предыдущая глава была посвящена, главным образом, различным способам аналитического представления плоских кривых и выводу уравнений важнейших из них. Теперь мы займемся применением анализа, главным образом — дифференциального исчисления к изучению некоторых более глубоких свойств кривых (*дифференциальная геометрия*).

Все эти свойства, так или иначе, связаны с *касательными* к кривым. С вопроса о проведении касательных мы и начнем. Мы уже хорошо знаем [65], что угловой коэффициент касательной к кривой  $y = f(x)$ , в какой-либо ее точке  $(x, y)$  выражается производной  $\frac{dy}{dx} = y'$ . Итак, если через  $\alpha$  обозначить угол, составленный касательной с осью  $Ox$ , то

$$\operatorname{tg} \alpha = y'.$$

Если, для примера, взять *цепную линию* [(31), 105, черт. 155] то, дифференцируя, получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Желая определить  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ , вычислим:

$$\begin{aligned} 1 + y'^2 &= 1 + \frac{1}{4} \left( e^{2\frac{x}{a}} - 2 + e^{-2\frac{x}{a}} \right) = \frac{1}{4} \left( e^{2\frac{x}{a}} + 2 + e^{-2\frac{x}{a}} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 = \frac{y^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Еще проще это получается, если воспользоваться известными свойствами гиперболических функций [75, 15; 50, (42)]:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} = \left( \frac{y}{a} \right)^2.$$

Таким образом,  $\cos \alpha = \frac{a}{y}$ , или  $y \cos \alpha = a$ . Это дает легкий способ построения касательной к цепной линии (см. черт. 155). Если на ординате  $y = MP$ , как на диаметре, построить окружность, и из точки  $P$  сделать засечку радиусом  $a$  в точке  $K$ , то угол  $\sphericalangle KPM$ , косинус которого равен  $\frac{a}{y}$ , есть  $\alpha$ , следовательно и  $\sphericalangle MTP$  равен  $\alpha$ , т. е. прямая  $MK$  и есть касательная.



Зная угловой коэффициент  $y'$  касательной и точку  $(x, y)$  кривой, через которую касательная должна проходить, легко написать и уравнение касательной по образцу (14) 93; так как  $x$  и  $y$  теперь означают *постоянные* координаты точки касания (заменяя  $x_1$  и  $y_1$  упомянутого уравнения), то для обозначения переменных, *текущих*, координат произвольной точки касательной (вместо прежних  $x, y$ ) введем обозначения  $X, Y$ . Заменяя еще  $a$  через  $y'$ , мы получим уравнение касательной в следующем виде:

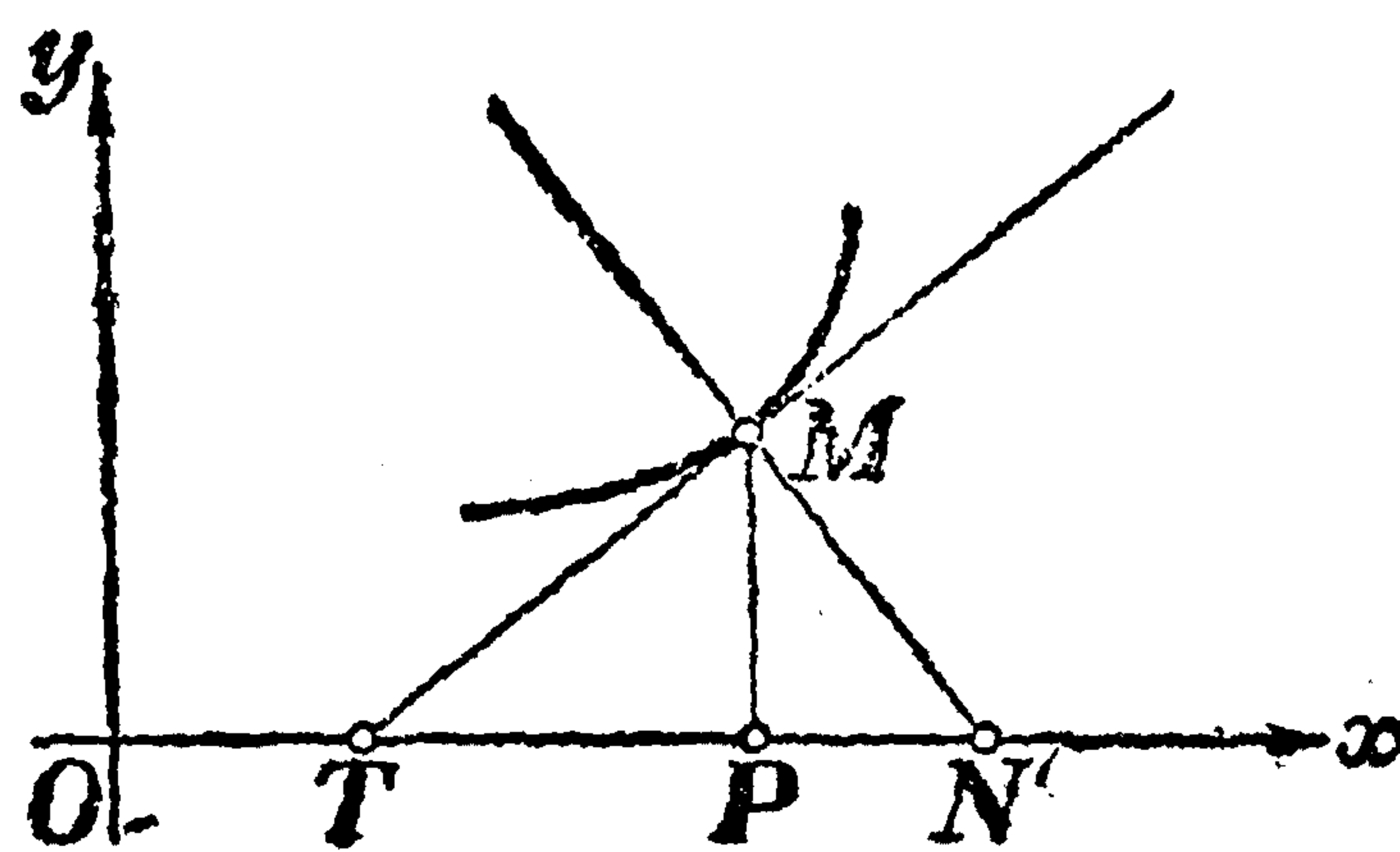
$$Y - y = y'(X - x). \quad (1)$$

Если положить здесь  $Y = 0$ , то найдем точку  $T$  пересечения касательной с осью  $Ox$  (черт. 186). Отрезок  $TP$  от этой точки до основания  $P$  опущенного из  $M$  на ось  $Ox$  перпендикуляра называется *подкасательной*. Знание этого отрезка облегчает построение касательной. Так как его величина, очевидно, равна  $x - X$  (где  $X$  — абсцисса точки  $T$ ), то из уравнения касательной, при  $Y = 0$ , имеем:

$$TP = \frac{y}{y'}. \quad (2)$$

Например, для *параболы*  $n$ -го порядка  $y = ax^n$  получаем:

$$y' = nax^{n-1}, \quad TP = \frac{x}{n}; \quad (3)$$



Черт. 186.

таким образом, стоит лишь отложить налево от  $P$  (при  $x > 0$ )  $n$ -ую часть абсциссы и соединить найденную точку с точкой на кривой, чтобы получить касательную.

Иногда рассматривают и *отрезок касательной*  $TM$ ; его не трудно вычислить из прямоугольного  $\triangle TMP$ .

Прямая  $MN$ , проходящая через точку касания  $M$  перпендикулярно к касательной  $MT$ , называется *нормалью* к кривой (черт. 186). Так как угловой коэффициент касательной равен  $y'$ , то угловой коэффициент нормали будет  $-\frac{1}{y'}$  [95], и уравнение нормали можно написать в виде:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x), \text{ или } X - x + y'(Y - y) = 0 \quad (4)$$

(здесь также текущие координаты обозначены через  $X, Y$ ). Полагая в этом уравнении  $Y = 0$ , определим пересечение нормали с осью  $Ox$ . Отрезок  $PN$ , называемый *поднормалью*, вычисляется по формуле

$$PN = X - x = yy'. \quad (5)$$

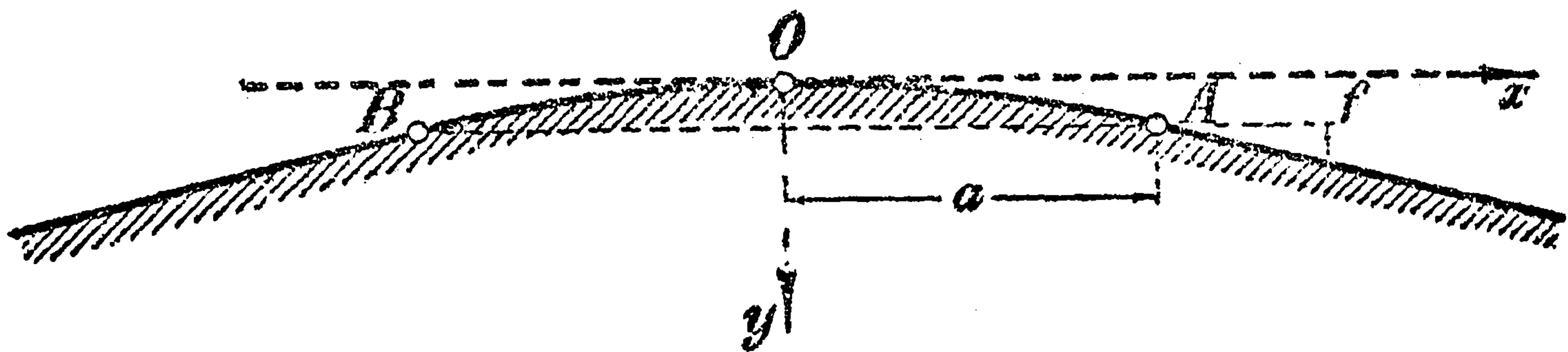
Поднормаль также в иных случаях облегчает проведение нормали (а, следовательно, и касательной) к кривой. Наконец, иногда представляет интерес и *отрезок нормали*  $MN$ ; его легко вычислить из  $\triangle MPN$ .



Напр., для цепной линии (см. черт. 155)  $\sphericalangle PMN = \alpha$ , а его косинус мы уже знаем:  $\cos \alpha = \frac{a}{y}$ . Имеем в этом случае:

$$MN = \frac{PM}{\cos \alpha} = \frac{y}{\frac{a}{y}} = \frac{y^2}{a}. \quad (6)$$

**121. Примеры и задачи. 1.** Профиль моста обыкновенно очерчивается по двум наклонным к горизонту прямым, имеющим небольшой уклон  $m$  (около 2—3‰), которые сопрягаются дугой *параболы* (см. черт. 187, где, разумеется, уклоны прямых значительно преувеличены). Требуется построить эту параболу так,



Черт. 187.

чтобы профиль моста не имел углов или изломов, т. е. чтобы и парабола в точках стыка с прямыми имела тот же уклон  $m$ .

*Решение.* Взяв оси координат, как указано на чертеже, параболу выразим уравнением

$$x^2 = 2py, \text{ или } y = \frac{x^2}{2p}.$$

Угловый коэффициент касательной к параболе найдется тогда по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p},$$

Если хорду  $AB$  обозначить через  $2a$ , то в точке  $A$  (абсцисса которой равна  $a$ ) подъем кривой будет  $\frac{a}{p}$ ; согласно заданию, он должен равняться  $m$ ,

откуда  $p = \frac{a}{m}$ . Для определения

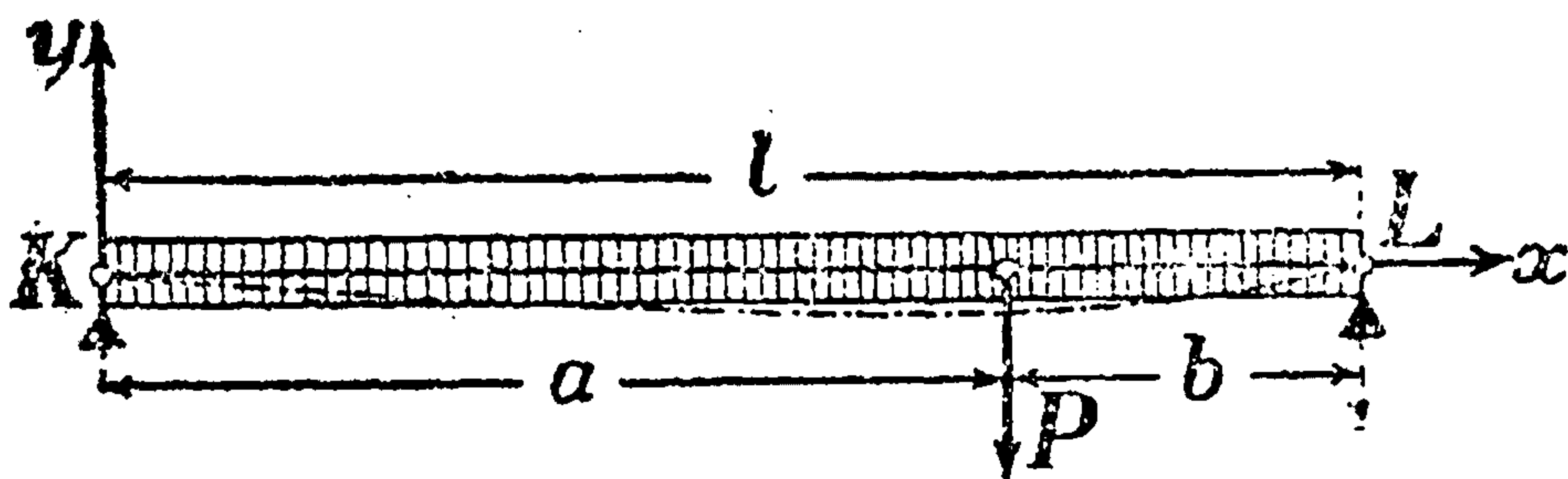
положения вершины параболы найдем так называемую *стрелу*  $f$ . Очевидно, она служит ординатой точки  $A$ , и из уравнения параболы полу-

чаем  $f = \frac{a^2}{2p}$ , или  $f = \frac{am}{2}$ . Напри-

мер, если  $m = 0,02$ ,  $2a = 20$  м, то получим величину  $p$  и стрелу  $f$ :

$$p = \frac{10}{0,02} = 500; \quad f = \frac{10 \cdot 0,02}{2} = 0,1 \text{ м.}$$

**2.** Рассмотрим балку длины  $l$ , подпертую на концах  $K$  и  $L$  (черт. 188), и предположим, что в некоторой точке на расстоянии  $a$  от левого конца (и  $b$  — от правого) к ней приложена сосредоточенная сила  $P$ . Тогда (как доказывается в прикладной механике) изогнутая ось балки, при указанном на чертеже выборе осей, представляется двумя различными уравнениями, из которых одно относится к левой части балки ( $0 \leq x \leq a$ ), а другое — к правой части балки ( $a \leq x \leq l$ ).



Черт. 188.



Уравнения эти имеют вид:

$$1) y = \frac{Pb}{6lEI} [x^3 - (l^2 - b^2)x], \quad 2) y = \frac{Pb}{6lEI} [x^3 - (l^2 - b^2)x - \frac{l}{b}(x - a)^3]$$

(где  $E$  — модуль упругости, а  $J$  — момент инерции сечения балки относительно среднего слоя). Проверить, что оба уравнения дают одно и то же значение ординаты  $y$  при  $x = a$  и что в этой точке  $y$  кривой не будет угла, т. е. что и уклоны для кривой, при  $x = a$ , по обеим формулам получаются одни и те же.

3. Пусть цепь висячего моста [105, черт. 153] поддерживает груз в 160 т, при пролете  $2l = 50$  м и стреле провеса  $f = 5$  м. Определить угол провеса  $\alpha$ , т. е. угол касательной к цепи, в точке привеса  $A$ , с горизонтом.

*Решение.* Подставляя в уравнение параболы

$$y = \frac{q}{2H} x^2$$

координаты точки  $A$ :  $x = l = 25$  и  $y = f = 5$  (нагрузка  $q$  на 1 м горизонтальной проекции цепи будет, очевидно, равна  $160 : 50 = 3,2$  т/м), найдем, что горизонтальное натяжение  $H$  в точке  $O$  равно 200 т. А тогда по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{qx}{H},$$

при  $x = l$ , получим:  $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$ , откуда  $\alpha = 21^\circ 48'$ .

4. Найти подкасательную и поднормаль для кривой  $y = \frac{c}{x^n}$  ( $x$  и  $n > 0$ ).

*Отв.* —  $\frac{x}{n}$ ; —  $\frac{c^2 n}{x^{2n+1}}$ . Истолковать геометрически отрицательные знаки!

5. То же для параболы  $y^2 = 2px$ . *Указ.* Представить уравнение в явной форме  $y = \pm \sqrt{2px}$ . *Отв.*  $2x$ ;  $p$ . Поднормаль оказывается постоянной и равной полупараметру! Это обстоятельство делает очень простым построение нормали к параболе.\*

6. То же для кривой  $y = e^x$ . *Отв.* 1;  $e^{2x} = y^2$ .

7. Пусть для некоторого движения построена диаграмма  $(v, s)$ , т. е. график зависимости скорости  $v$  от пути  $s$ . Доказать, что поднормаль для построенной кривой выражает ускорение  $w$  движения.

*Доказательство.* По формуле (5) поднормаль равна

$$v \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} = w.$$

8. Равенство (3) позволяет *графически* определить показатель  $n$  в формуле  $y = ax^n$  путем проведения касательной:

$$n = \frac{x}{TP};$$

этот прием, в случае *эмпирической* формулы, может оказаться полезным. Все соображения остаются в силе и при  $n < 0$ , лишь подкасательная  $TP$  оказывается отрицательной (этот отрезок тогда имеет отрицательное направление, по сравнению с осью  $Ox$ !).

Пусть, напр., нас интересует „кривая расширения“ в дизеле (верхняя кривая на черт. 189); ее обыкновенно рассматривают как „политропическую кривую“  $p \cdot v^n = \text{пост.} = c$ , однако показатель  $n$  этой политропы не остается для всех ча-

\* Обращаем внимание читателя на то, что все отрезки, о которых идет речь в настоящем  $n^0$ , зависят от выбора осей; поэтому в частности, для парабол  $y = ax^2$  и  $y^2 = 2px$  получатся различные результаты.



стей кривой одним и тем же. Так как здесь  $p = c \cdot v^{-n}$ , то подкасательная  $TP$ , по абсолютной величине, равна  $\frac{v}{n}$ ; проведя горизонтальную прямую на расстоянии 1 под осью  $Ov$  и далее поступая, как указано на чертеже, легко получить на оси  $Op$  отрезок  $OB$ , равный  $n$ . Прделав это построение для различных участков политропы расширения, мы составим себе таким путем представление об изменении показателя  $n$ .

9. Найти кривую  $y = f(x)$ , для которой подкасательная  $= a = \text{пост.}$

Решение. Имеем дифференциальное уравнение, выражающее требование задачи [см. (2)]:

$$\frac{y}{y'} = a, \text{ или } \frac{y}{dy} = a, \text{ или, наконец, } \frac{dx}{dy} = \frac{a}{y}.$$

Удобнее рассматривать здесь  $y$  как независимую переменную, а  $x$  — как функцию. Тогда по написанному выражению производной  $x'_y = \frac{dx}{dy}$ , интегрируя,

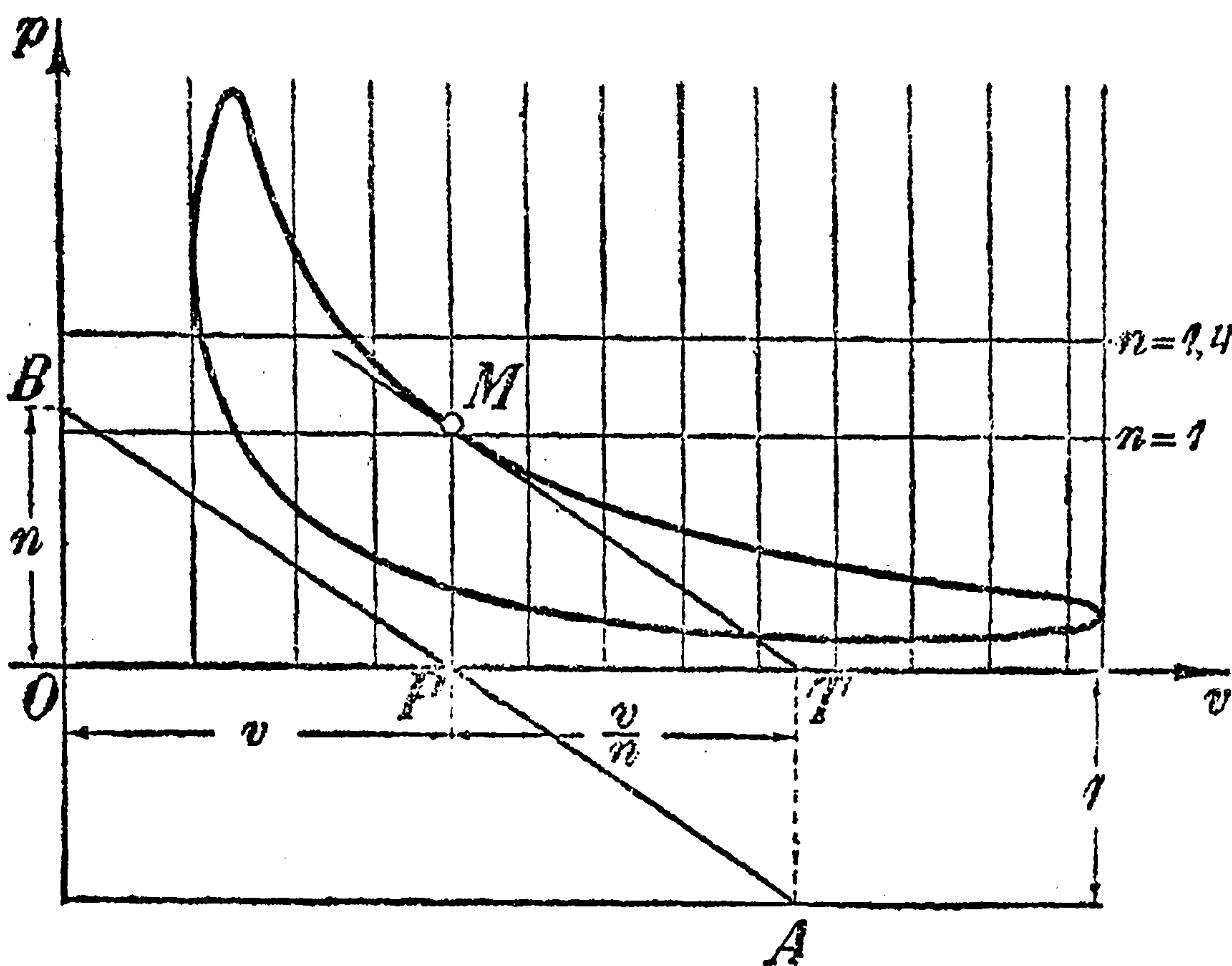
находим  $x = a \log y + c$ , где  $c$  — постоянная интегрирования. Отсюда можно выразить  $y$  через  $x$ :

$$\log y = \frac{x - c}{a},$$

$$y = e^{\frac{x - c}{a}}.$$

Если обозначить постоянную  $e^{-\frac{c}{a}}$  через  $C$ , то ответ можно записать и в виде

$$y = Ce^{\frac{x}{a}}.$$



Черт. 189.

10. Найти кривую  $y = f(x)$ , для которой поднормаль  $= p = \text{пост.}$  [ср. зад. 5].

Решение. Задача приводит к дифференциальному уравнению [см. (5)].

$$yy' = p, \text{ или } 2yy' = 2p.$$

Нетрудно видеть, что левая часть представляет собой производную по  $x$  от  $y^2$ , в этом читатель убедится, если продифференцирует  $y^2$  как сложную функцию; помня о том, что  $y$  есть функция от  $x$  [75, V]. Итак,  $(y^2)'_x = 2p$ . Восстанавливая интегрированием первообразную функцию, найдем:  $y^2 = 2px + C$ ; полагая для удобства  $C = -2pc$ , где  $c$  — также постоянная, перепишем уравнение в виде

$$y^2 = 2p(x - c).$$

Кривая оказывается *параболой*, ось которой совпадает с осью  $Ox$ , а вершина (ей соответствует  $y = 0$ ) лежит к точке  $x = c$ . Таким образом параболы с параметром  $2p$ , имеющие ось  $Ox$  своею осью, оказываются единственными кривыми, для которых поднормаль равна постоянной величине  $p$ .

Приведем в заключение интересный пример, где как раз используется это обстоятельство.

В сосуд налита жидкость. Сосуд приведен в равномерное вращательное дви-



жение (с угловой скоростью  $\omega$ ) вокруг некоторой оси. Тогда свободная поверхность жидкости примет вогнутую форму и вся масса жидкости будет пребывать в равновесии относительно сосуда, т. е. будет вращаться вместе с ним как твердое тело. Требуется определить форму свободной поверхности жидкости в этом ее состоянии.

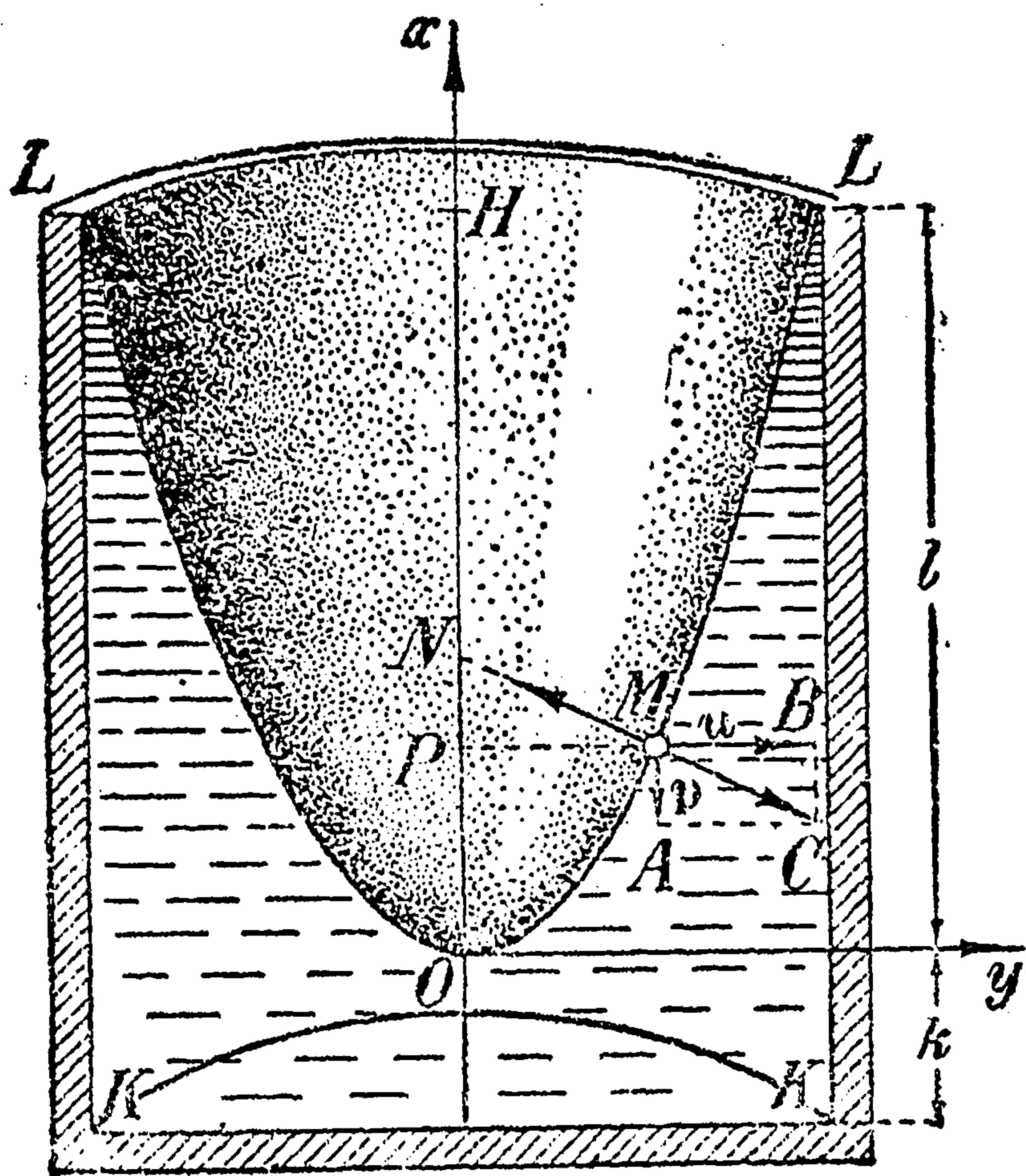
Проведя произвольную плоскость через ось вращения (пусть это и будет плоскость чертежа 190), установим вид кривой  $LOL$ , получившейся в сечении поверхности жидкости. Выбрав за начало координат точку  $O$ , в которой ось вращения пересекает эту поверхность, направим координатные оси, как указано на чертеже. Возьмем теперь произвольную точку  $M$  на кривой. Она описывает окружность с центром в  $P$  и радиусом  $R = PM$ , причем плоскость этой окружности перпендикулярна к плоскости чертежа, так что для получения направления движения точки  $M$  в том положении, в котором она изображена, нужно восставить к плоскости чертежа перпендикуляр; скорость  $v$  точки, очевидно, будет  $v = \omega R$ . Рассмотрим же, какие силы действуют на точку в названной плоскости, т. е. перпендикулярно к направлению движения. Прежде всего — ее вес, направленный вертикально вниз и по величине равный  $p = mg$  (где  $m$  — масса точки). Его следует сложить с *центробежной силой*, направленной по горизонтали в сторону от оси; как устанавливается в механике, она имеет величину:

$$u = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R \quad (7)$$

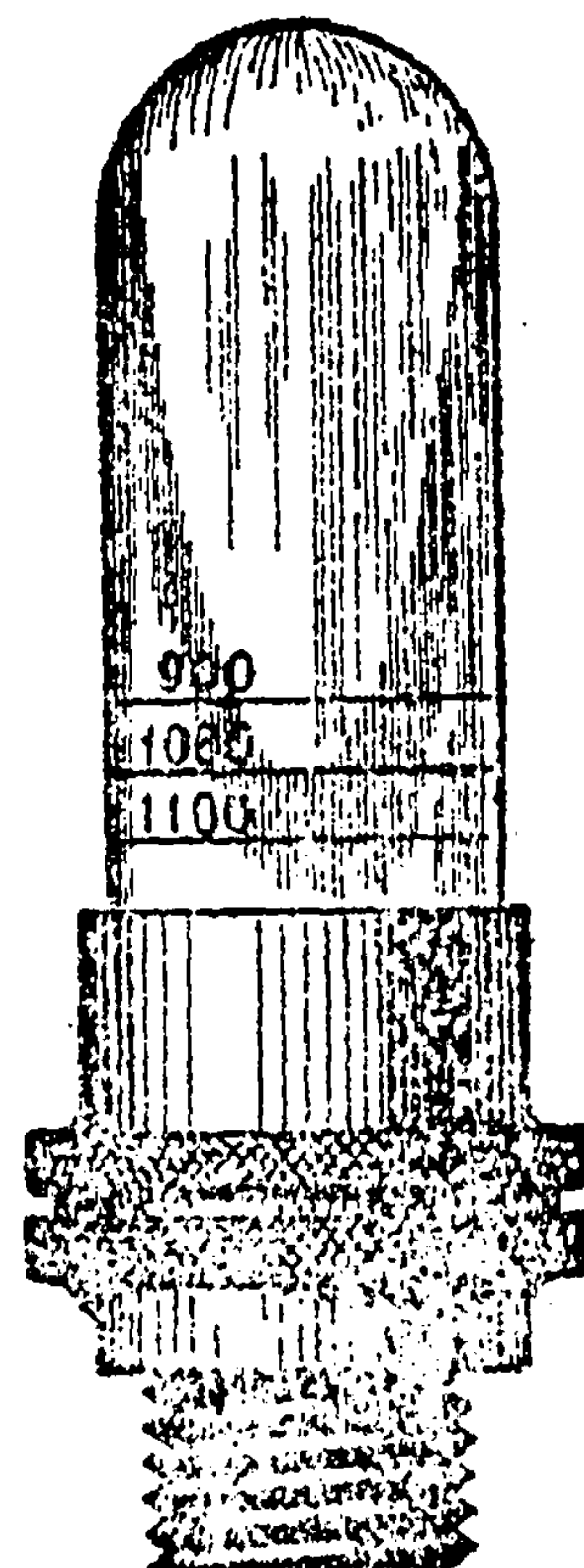
Равнодействующая этих сил однако не нуль, а направлена, как видно из чертежа в сторону жидкости. Уравновеситься эта сила может лишь *давлением* со стороны жидкости, но последнее всегда перпендикулярно к поверхности, т. е. в данном случае *направлено по нормам к кривой  $LOL$* . Этого результата достаточно для определения вида кривой. В самом деле, из подобия  $\Delta$ -ков  $NPM$  и  $MAC$ , обозначая *поднормаль*  $FN$  через  $n$ , имеем:

$$\frac{n}{R} = \frac{p}{u} = \frac{mg}{m\omega^2 R}, \text{ откуда } n = \frac{g}{\omega^2} = \text{пост.}!$$

А мы знаем, что постоянство поднормали есть характерное свойство параболы. Итак, кривая  $LOL$  есть *парабола*: а интересующая нас поверхность, получаемая вращением этой кривой вокруг оси, есть *параболоид вращения*. Положение вер-



Черт. 190.



Черт. 191.



шины  $O$  на оси сосуда, также зависящее от угловой скорости  $\omega$ , будет определено в главе XI [178, 3]. Очевидно, что с увеличением угловой скорости  $\omega$  точка  $O$  будет понижаться, а с уменьшением — повышаться.

На этом принципе основан простой прибор Брауна (черт. 191), служащий измерителем скорости вращения. Небольшой замкнутый сосуд наполнен частично жидкостью. На его наружной поверхности вытравлена шкала, причем особо отмечают линию, соответствующую нормальному числу оборотов. Нижним концом он ввинчивается в вертикально расположенный вал, скорость вращения которого требуется определить. (Если вал стоит горизонтально, то с помощью передачи все же заставляют прибор вращаться вокруг вертикальной оси). По положению нижней точки вогнутой поверхности жидкости и судят о скорости вращения вала, замечая, на сколько делений выше или ниже нормальной черты располагается эта точка.

На том же соображении построен и регулятор, состоящий из сосуда с тяжелой жидкостью (напр. ртутью), и применяющийся в центробежных машинах для сохранения оси вращения. Наконец, упомянем еще о *центробежном литье*, при котором вращается сосуд с расплавленным металлом, для отливки полых тел и труб.

**122. Проведение касательных к кривой, заданной неявным уравнением.** Часто бывает, что кривая задана неявным уравнением вида  $F(x, y) = 0$  и требуется к ней провести касательную, для чего необходимо определить угловой коэффициент  $y'_x$ . Мы разъясним на примере, как можно найти эту производную  $y'_x$ , не решая уравнения относительно  $y$ , т. е. не имея выражения  $y$  через  $x$ .

Так как зависимость  $y$  от  $x$  дается неявным уравнением, то  $y$  является *неявной функцией* от  $x$  [27]. В последующем, применительно к геометрической задаче о проведении касательной, дается, в сущности, прием для нахождения производной от неявной функции.

I. Пусть дан эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Из этого уравнения  $y$  определяется как (неявная) функция от  $x$ ; хотя мы этой функции и не вычисляем, но тем не менее ясно, что если подставить ее вместо  $y$  обратно в то уравнение, из которого она определена, то уравнение обратится в тождество, т. е. будет справедливо при всех возможных значениях  $x$ . (Рекомендуем читателю проверить это, выразив  $y$  через  $x$  и подставив в уравнение полученное выражение.) Итак, если под  $y$  разуметь упомянутую функцию от  $x$ , то сложная функция от  $x$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  будет тождественно равняться 1, так что ее производная будет 0. Вычислим эту производную (причем  $y^2$  дифференцируем как сложную функцию, иными словами, сначала берем производную от  $y^2$  по  $y$ , т. е.  $2y$ , а затем умножаем на производную  $y$  по  $x$ , т. е. на  $y'_x$ ) и приравняем ее нулю:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot y'_x = 0.$$

Отсюда легко находим:

$$y'_x = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Итак, производная  $y'_x$  найдена, хотя мы и не имели явного выражения  $y$  через  $x$ . Отметим, что выражение для  $y'_x$  содержит не только  $x$ ,



но и неизвестную нам функцию  $y$ ; впрочем для нашей цели это обстоятельство не играет роли, ибо  $x$  и  $y$  являются „равноправными“ координатами точки касания.

(Пусть читатель проверит полученный результат, выразив явно  $y$  через  $x$  и продифференцировав.)

Пользуясь найденной величиной углового коэффициента, напишем [по образцу (1)] уравнение касательной к эллипсу в взятой на нем точке  $(x, y)$ ;

$$Y - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y} (X - x).$$

Последовательно преобразуем его:

$$b^2 x (X - x) + a^2 y (Y - y) = 0, \quad b^2 x X + a^2 y Y = b^2 x^2 + a^2 y^2;$$

делим на  $a^2 b^2$ :

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Так как точка  $(x, y)$  взята на эллипсе, то правая часть этого уравнения равна 1, так что окончательно уравнение касательной к эллипсу в данной точке  $(x, y)$  имеет вид:

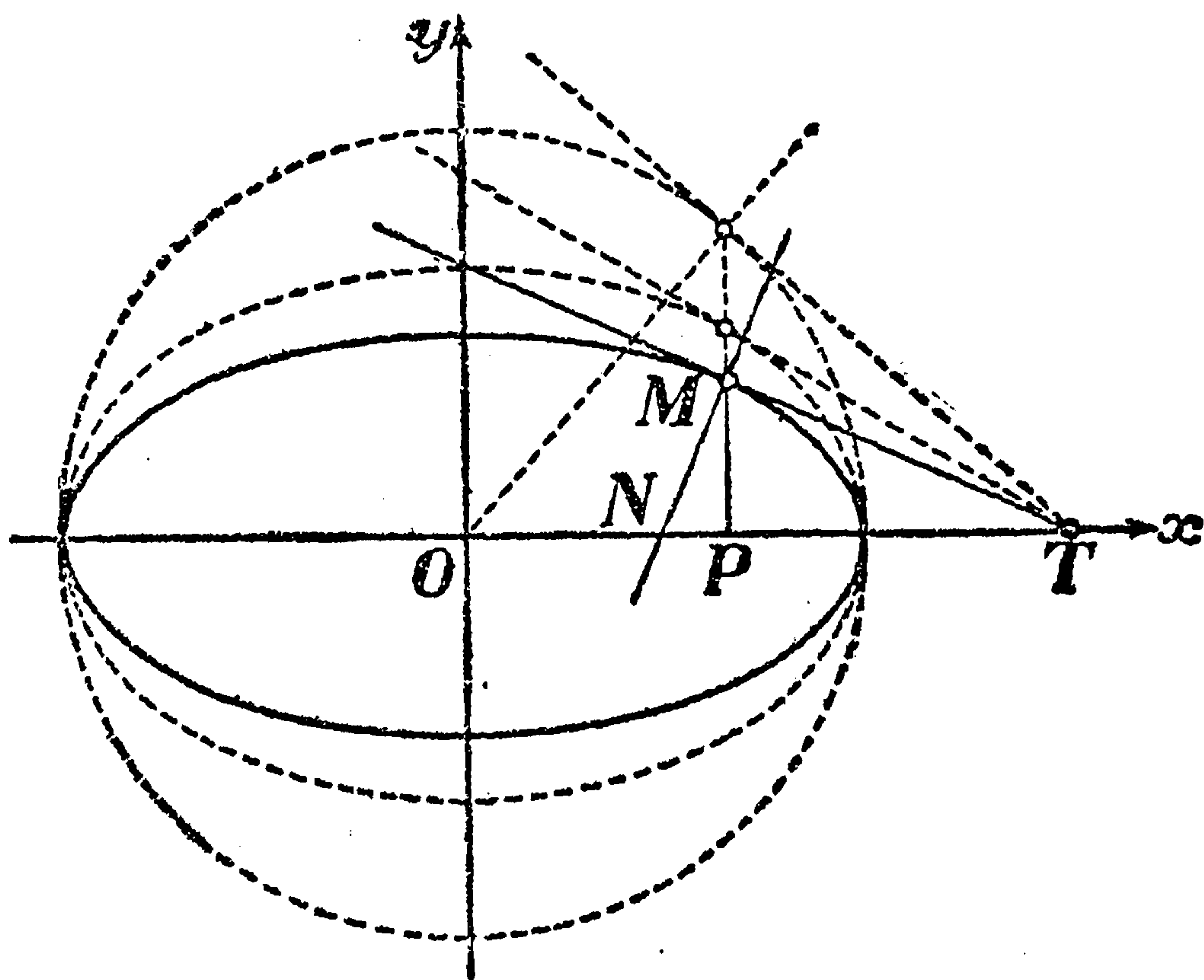
$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1. *$$

Еще раз напоминаем, что здесь  $x, y$  означают координаты данной точки, а  $X, Y$  — текущие координаты.

Полагая  $Y = 0$ , находим для абсциссы  $X$  точки  $T$  пересечения касательной с осью  $Ox$  значение:  $X = \frac{a^2}{x}$ , замечательное

тем, что оно не зависит ни от  $y$ , ни от  $b$ . Следовательно, если взять различные эллипсы, соответствующие различным  $b$ , то касательные к ним в их точках, имеющих абсциссу  $x$ , все

проходят через одну и ту же точку  $T$  на оси  $Ox$  (черт. 192). Так как при  $b = a$  получается окружность, для которой касательная строится просто (как перпендикуляр к радиусу), то названная общая точка пересечения касательных сразу определяется и это дает легкий способ построения касательной к эллипсу, ясный из чертежа. Заметим, что это свойство касательных к эллипсу непосредственно свя-



Черт. 192.

\* Если в качестве точки касания взять одну из вершин эллипса  $(\pm a, 0)$ , то уравнение касательной примет вид  $X = \pm a$ , т. е. касательная окажется параллельной оси  $Oy$ . Это можно было усмотреть и из выражения для углового коэффициента касательной, которое при  $y = 0$  обращается в  $\infty$ . Аналогичные замечания можно сделать и относительно гиперболы и параболы, рассматриваемых ниже.



зано с тем фактом, что эллипс может быть рассматриваем как ортогональная проекция описанного круга, если плоскость последнего повернуть вокруг оси  $Ox$  на надлежащий угол [99, черт. 139]; точка  $T$  пересечения касательной к кругу с осью  $Ox$  при этом вращении останется неизменной, так что касательная к эллипсу, которая, очевидно, будет проекцией касательной к кругу, также пройдет через точку  $T$ .

С проективным происхождением эллипса можно связать и другое свойство касательной к эллипсу: она параллельна диаметру, сопряженному с диаметром, проходящим через точку касания. В самом деле, из черт. 142 ясно, что касательная к кругу в точке  $N$  параллельна диаметру  $KL$ , и это соотношение не нарушается и при проектировании; таким образом, касательная к эллипсу в точке  $n$  параллельна диаметру  $kl$ , который сопряжен с диаметром  $mt$ .

Угловым коэффициентом нормали к эллипсу равен  $-\frac{1}{y'} = \frac{a^2 y}{b^2 x}$ , так что уравнение нормали имеет вид

$$Y - y = \frac{a^2 y}{b^2 x} (X - x).$$

Полагая здесь  $Y=0$  [или непосредственно по формуле (5)], найдем величину поднормали эллипса:

$$PN = X - x = -\frac{b^2}{a^2} x. \quad (8)$$

Из прямоугольного  $\triangle MPN$  можно вычислить и длину нормали:

$$MN = \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{a^2}. \quad (9)$$

Пусть, например, требуется провести касательную и нормаль к эллипсу

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$$

в его точке  $(-3, -2)$ ; касательная имеет уравнение

$$\frac{-3 \cdot X}{18} + \frac{-2 \cdot Y}{8} = 1, \text{ или } 2X + 3Y + 12 = 0.$$

(можно писать и  $2x + 3y + 12 = 0$ , считая  $x, y$  текущими координатами). Уравнение нормали будет таково

$$Y + 2 = \frac{3}{2} (X + 3), \text{ или } 3X - 2Y + 5 = 0.$$

Касательная пересекает ось  $Ox$  в точке  $X = -6$ , а нормаль — в точке  $X = -\frac{5}{3}$ .

Отсюда подкасательная  $TP = -3 - (-6) = 3$ , поднормаль  $PN = -\frac{5}{3} - (-3) = \frac{4}{3}$ . Наконец, отрезок касательной  $TM = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ , а отрезок нормали

$$NM = \sqrt{2^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{13}.$$

II. Повторяя для гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  те же рассуждения, что и для эллипса, придем к уравнениям касательной и нормали в аналогичной форме:

$$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1, \quad Y - y = -\frac{a^2 y}{b^2 x} (X - x);$$



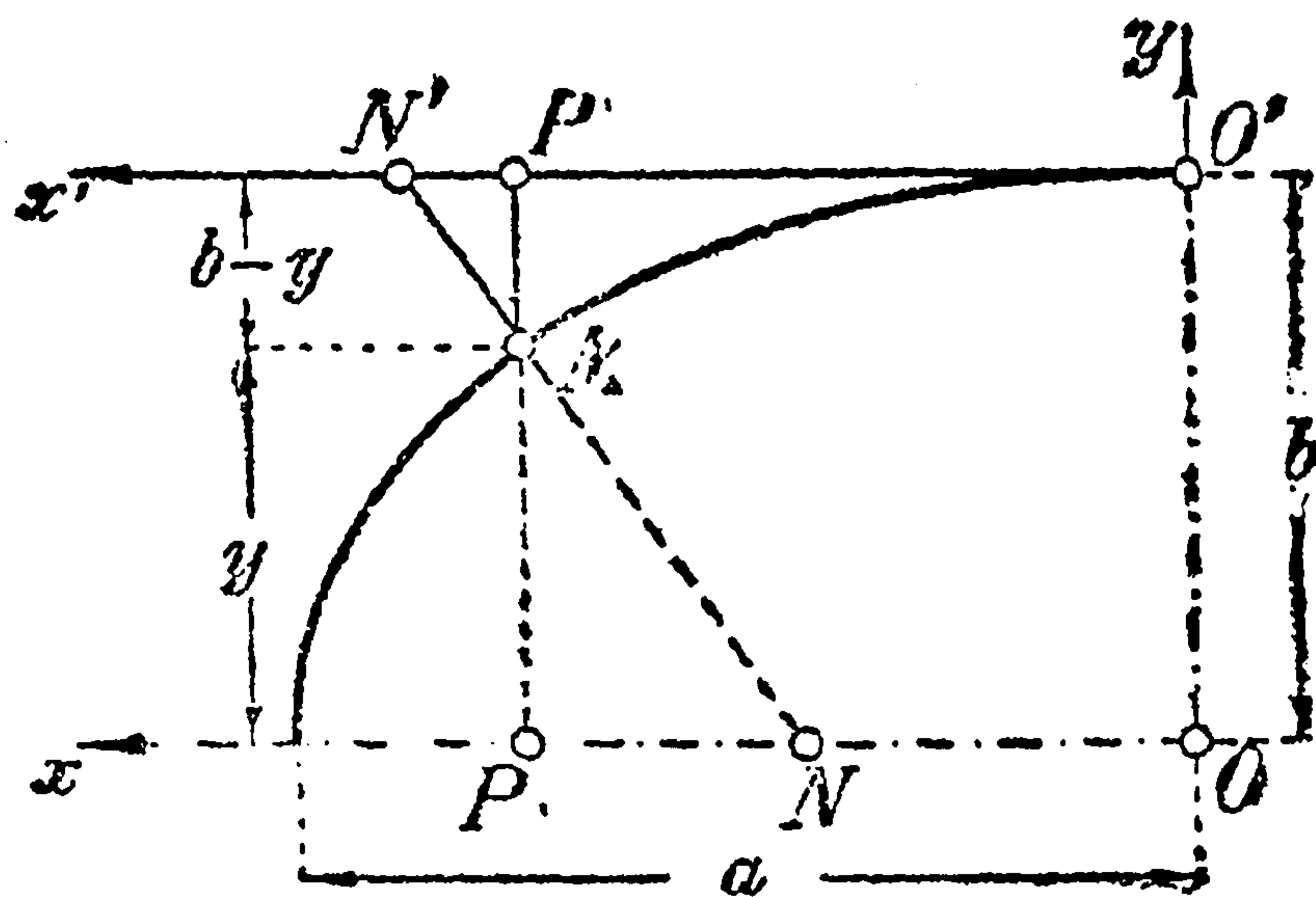
величина поднормали выразится так:

$$PN = \frac{b^2}{a^2} x,$$

а для нормали сохранится то же выражение (9), что и в случае эллипса.

III. Наконец, переходя к *параболе*  $y^2 = 2px$ , мы также можем продифференцировать обе части этого уравнения, считая  $y$  функцией от  $x$ , которая обращает это уравнение в тождество относительно  $x$ . Мы получим:  $2yy' = 2p$ , или  $yy' = p$ , откуда  $y' = \frac{p}{y}$ .

Пользуясь этим выражением для  $y'$ , мы можем по формулам (2) и (5) сразу получить, что подкасательная параболы равна  $\frac{y^2}{p} = 2x$ , т. е. удвоенной абсциссе, а поднормаль постоянна и равна полупараметру  $p$ . Эти результаты нами были уже получены выше другим путем [121, 5]. Напишем теперь уравнение касательной к параболе (в данной на ней точке  $x, y$ ) в виде:



Черт. 193.

$$Y - y = \frac{p}{y} (X - x), \text{ или } Yy - y^2 = p (X - x).$$

Так как, в силу уравнения параболы,  $y^2 = 2px$ , то, подставляя и упрощая, получим:

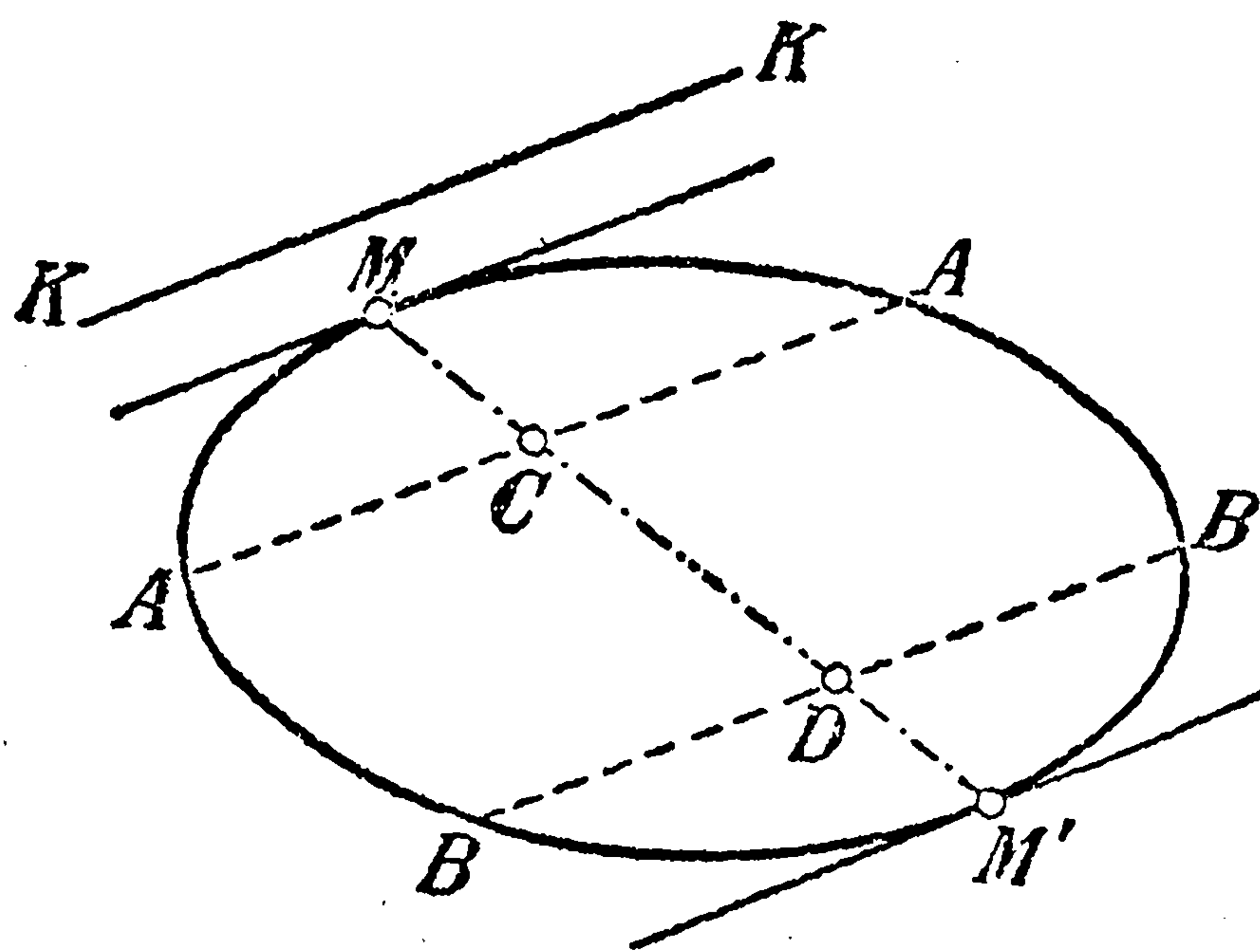
$$Yy = p (X + x).$$

Уравнение нормали, очевидно, будет:

$$Y - y = -\frac{y}{p} (X - x).$$

Пользуясь указанной выше величиной поднормали, легко найти и длину нормали:

$$MN = \sqrt{y^2 + p^2}. \quad (10)$$



Черт. 194.

123. Примеры и задачи. 1. При кладке сводов из штучных камней швы кладки располагаются по нормальям к кривой, ограничивающей свод. Предположим, что направляющая свода очерчена по эллипсу. Для построения упомянутых нормалей проще всего воспользоваться поднормальями, но не на оси  $Ox$  (черт. 193), а над эллипсом на оси  $O'x'$ . Найти величины этих поднормалей (пренебрегая знаками!)

Отв. Из подобия  $\Delta$ -ков  $PMN$  и  $P'MN'$ , имеем:

$$\frac{N'P'}{NP} = \frac{b-y}{y}, \text{ так что } N'P' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x(b-y)}{y}.$$

Ср. примеч. на стр. 323.

2. Дано очертание эллипса и некоторое направление  $KK$  (черт. 194); требуется провести касательную к эллипсу, параллельную данному направлению.



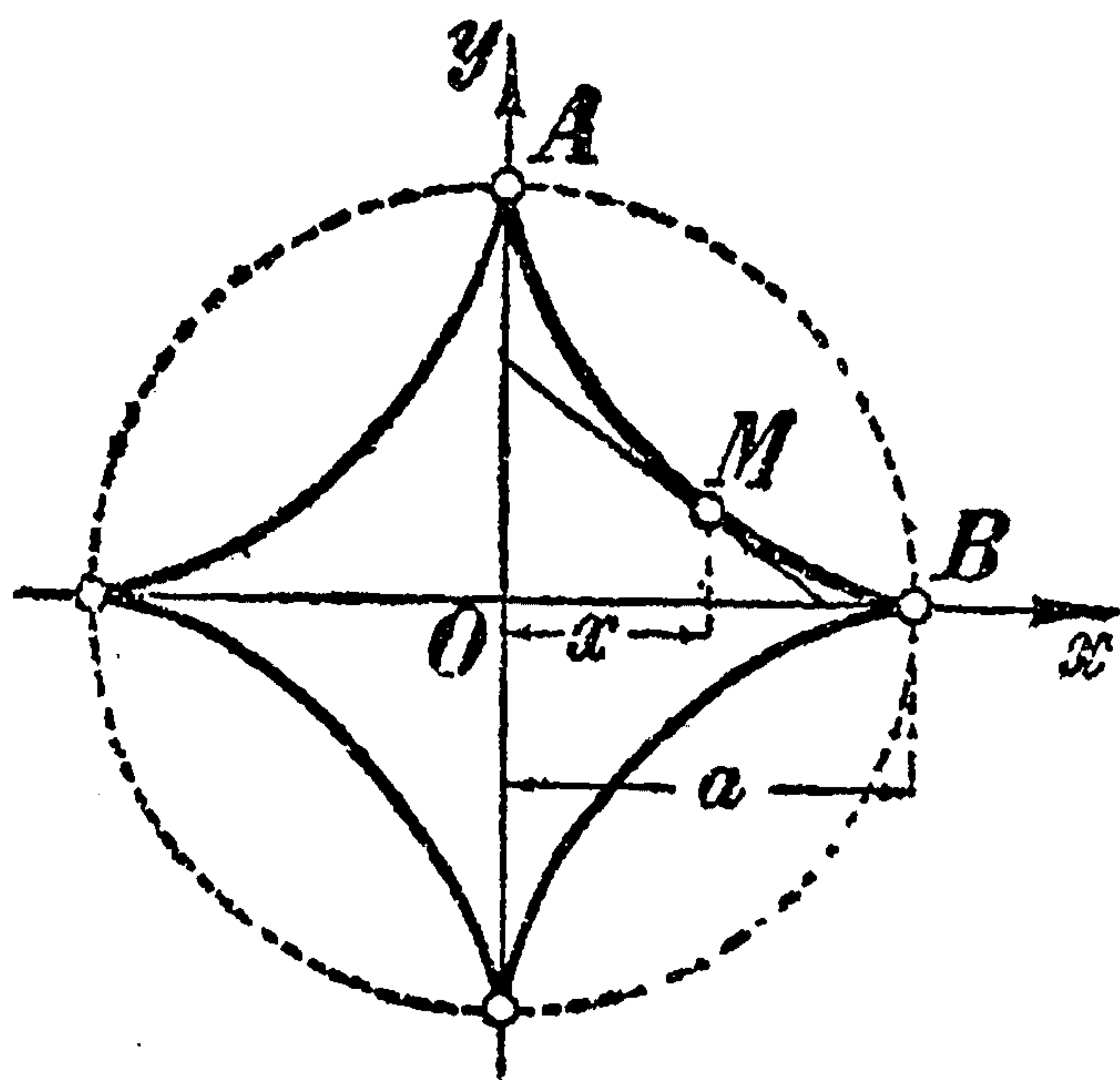
*Решение.* Проведем две хорды  $AA'$  и  $BB'$  в эллипсе, параллельные данному направлению, и соединим их середины  $C, D$  прямой (черт. 194). Точки  $M, M'$  пересечения этой прямой с эллипсом и будут точками касания для иско- мых касательных.

Доказательство (основанное на одном свойстве касательных к эллипсу, упо- мянутом в 122) предоставляем читателю.

3. Найти угловой коэффициент касательной к *астроиде*:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

[см. 114 (58), черт. 195]; убедиться в том, что в вершинах кривой  $(\pm a, 0), (0, \pm a)$  касательные совпадают с осями; вычислить отрезок касательной, заключенный между осями.



Черт. 195.

*Решение.* Дифференцируем уравнение ас- тройды, считая  $y$  функцией от  $x$ :

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \cdot y'_x = 0,$$

$$\text{откуда } y'_x = - \left( \frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ясно, что при  $y=0$  и  $y'_x=0$  (касательной служит ось  $Ox$ ), а при  $x=0$  имеем:  $y'_x=\infty$  (касательной служит ось  $Oy$ ).

Уравнение касательной к астроиде будет иметь вид [ср. (1)]:

$$Y - y = - \left( \frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot (X - x) \text{ или } \frac{X - x}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y - y}{y^{\frac{1}{3}}} = 0;$$

переносим члены, не содержащие текущих координат, направо и воспользовавшись уравнением самой астроиды, можно предыдущее уравнение переписать так:

$$\frac{X}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{y^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{ или, наконец, } \frac{X}{a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}} = 1.$$

Таким образом [92], касательная к астроиде отсекает на осях отрезки  $a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}$  и  $a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ ; в таком случае отрезок самой касательной, заключенный между осями, определится по теореме Пифагора:

$$\sqrt{\left( a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \right)^2 + \left( a^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \right)^2} = \sqrt{a^{\frac{4}{3}} \left( x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)} = a;$$

он оказывается постоянно равным  $a$ !

4. Найти уравнение касательной к окружности  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ ; убедиться в перпендикулярности этой касательной и радиуса, проведенного в точку касания.

*Решение.* Дифференцируем уравнение окружности по  $x$ , считая  $y$  функцией от  $x$ ; мы получим:  $2(x - \alpha) + 2(y - \beta) y'_x = 0$ , откуда угловой коэффициент касательной равен

$$y'_x = - \frac{x - \alpha}{y - \beta}.$$



Так как угловой коэффициент радиуса, очевидно [93], будет  $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$ , то условие перпендикулярности выполнено [95].

Уравнение касательной будет иметь вид:

$$Y - y = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}(X-x);$$

предоставляем читателю привести его к виду:

$$(x-\alpha)(X-\alpha) + (y-\beta)(Y-\beta) = r^2,$$

напоминающему уравнение окружности.

5. Написать уравнения касательных к следующим кривым: а)  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$  в точке  $(-2, 1)$ ; б)  $x^2 - y^2 = 8$  в точке  $(3, -1)$ ; в)  $y^2 = 12x$  в точке  $(3, -6)$ , д)  $xy = 2$  в точке  $(-1, -2)$ . *Отв.* а)  $x - 2y + 4 = 0$ ; б)  $3x + y - 8 = 0$ ; в)  $x + y + 3 = 0$ ; д)  $2x + y + 4 = 0$ .

6. Убедиться в том, что парабола (36), рассмотренная в 107, в точках  $A(a, 0)$  и  $B(0, a)$  касается соответственно осей  $Ox$  и  $Oy$  (так что обе параболы  $ACB$  и  $AED$  сопрягаются в точке  $A$  без излома; черт. 161).

*Решение.* Дифференцируя уравнение (36) по  $x$ , получим:

$$2(x-y)(1-y'_x) - 2a(1+y'_x) = 0,$$

откуда

$$y'_x = \frac{x-y-a}{x-y+a}.$$

При  $x=a$  и  $y=0$  имеем:  $y'_x = 0$ , а при  $x=0$ ,  $y=a$  оказывается:  $y'_x = \infty$ , так что, действительно, в первой точке касательной служит ось  $Ox$ , а во второй — ось  $Oy$ . Предоставляем читателю получить тот же результат, исходя из уравнения  $y'^2 = \sqrt{2}ax'$  параболы относительно новой системы координат.

7. Под каким углом прямая  $x - 7y + 3 = 0$  пересекает окружность  $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$ ? *Пояснение.* Под углом между двумя линиями разумеется угол между касательными к ним в точке пересечения.

*Решение.* Для того, чтобы определить точку пересечения данной прямой и окружности, нужно совместно решить их уравнения. Сделав это, найдем  $x = -3$ ,  $y = 0$  или  $x = 4$ ,  $y = 1$ . Угловой коэффициент касательной к окружности в точке  $(-3, 0)$  вычисляется по формуле (см. задачу 4)

$$-\frac{x-\alpha}{y-\beta} = -\frac{-3-1}{0-(-3)} = \frac{4}{3}.$$

Угловой коэффициент прямой есть  $\frac{1}{7}$ . Для угла  $\omega$  между этими прямыми имеем [95]

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{7}} = 1,$$

откуда  $\omega = 45^\circ$ . Тот же результат для другой точки пересечения.

8. Под каким углом пересекаются гиперболы  $x^2 - y^2 = 3$  и  $xy = 2$  (начертить!). *Отв.* Точки пересечения:  $(2, 1)$  и  $(-2, -1)$ . Угол  $\omega = 90^\circ$ .

124. Свойства касательных и нормалей к кривым второго порядка. I. Для расстояний  $r$  и  $r'$  точки  $M$  эллипса от его фокусов  $F$  и  $F'$  мы имели уже в 97 выражения (23). (Обозначения сохраняем те же, что и в указанном п<sup>0</sup>.) Кроме того, по определению эллипса:

$$r + r' = 2a. \quad (11)$$



Не трудно вычислить разность квадратов

$$r^2 - r'^2 = [(x + c)^2 + y^2] - [(x - c)^2 + y^2] = 4cx,$$

а разделяя это равенство на предшествующее, получим

$$r - r' = \frac{r^2 - r'^2}{r + r'} = \frac{4cx}{2a} = 2 \frac{c}{a} x = 2\varepsilon x, \quad (12)$$

где  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  есть эксцентриситет [98]. Из равенств (11) и (12), складывая их и вычитая, найдем

$$r = a + \varepsilon x, \quad r' = a - \varepsilon x. \quad (13)$$

В 122 для определения абсциссы  $X$  точки пересечения нормали к эллипсу (в точке  $M$ ) с осью  $Ox$  мы уже имели равенство (8) (где  $x$  — абсцисса точки  $M$ ), откуда

$$\begin{aligned} X &= x - \frac{b^2}{a^2} x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x = \\ &= \frac{c^2}{a^2} x = \varepsilon^2 x. \end{aligned}$$

Вычислим теперь отрезки  $FN$  и  $NF'$  [черт. 196 а); см. (13)]:

$$\begin{aligned} FN &= c + X = \varepsilon a + \varepsilon^3 x = \varepsilon (a + \varepsilon x) = \varepsilon r, \\ NF' &= c - X = \varepsilon a - \varepsilon^3 x = \varepsilon (a - \varepsilon x) = \varepsilon r', \end{aligned} \quad (14)$$

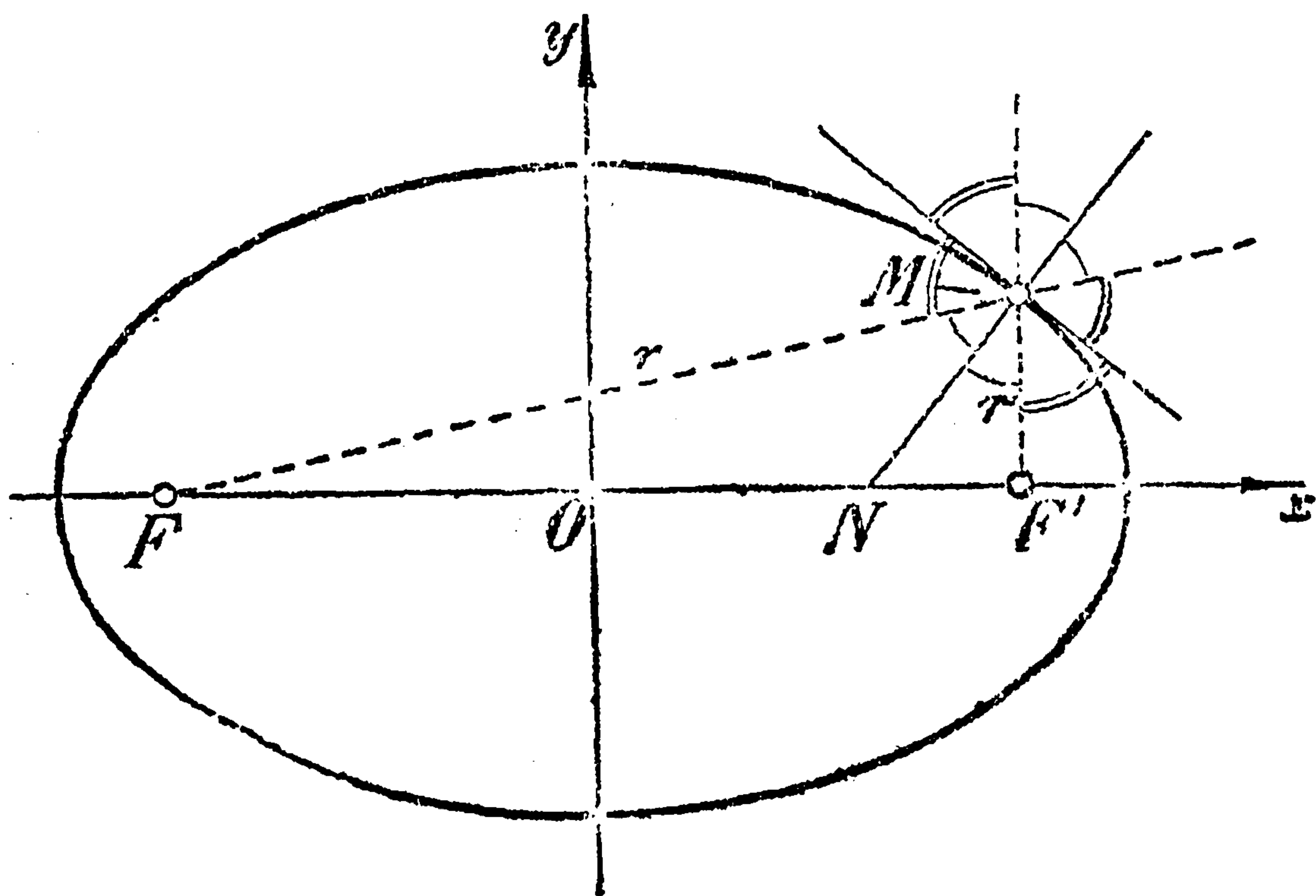
так что, очевидно, имеем пропорцию:

$$\frac{FN}{NF'} = \frac{r}{r'} = \frac{FM}{MF'}.$$

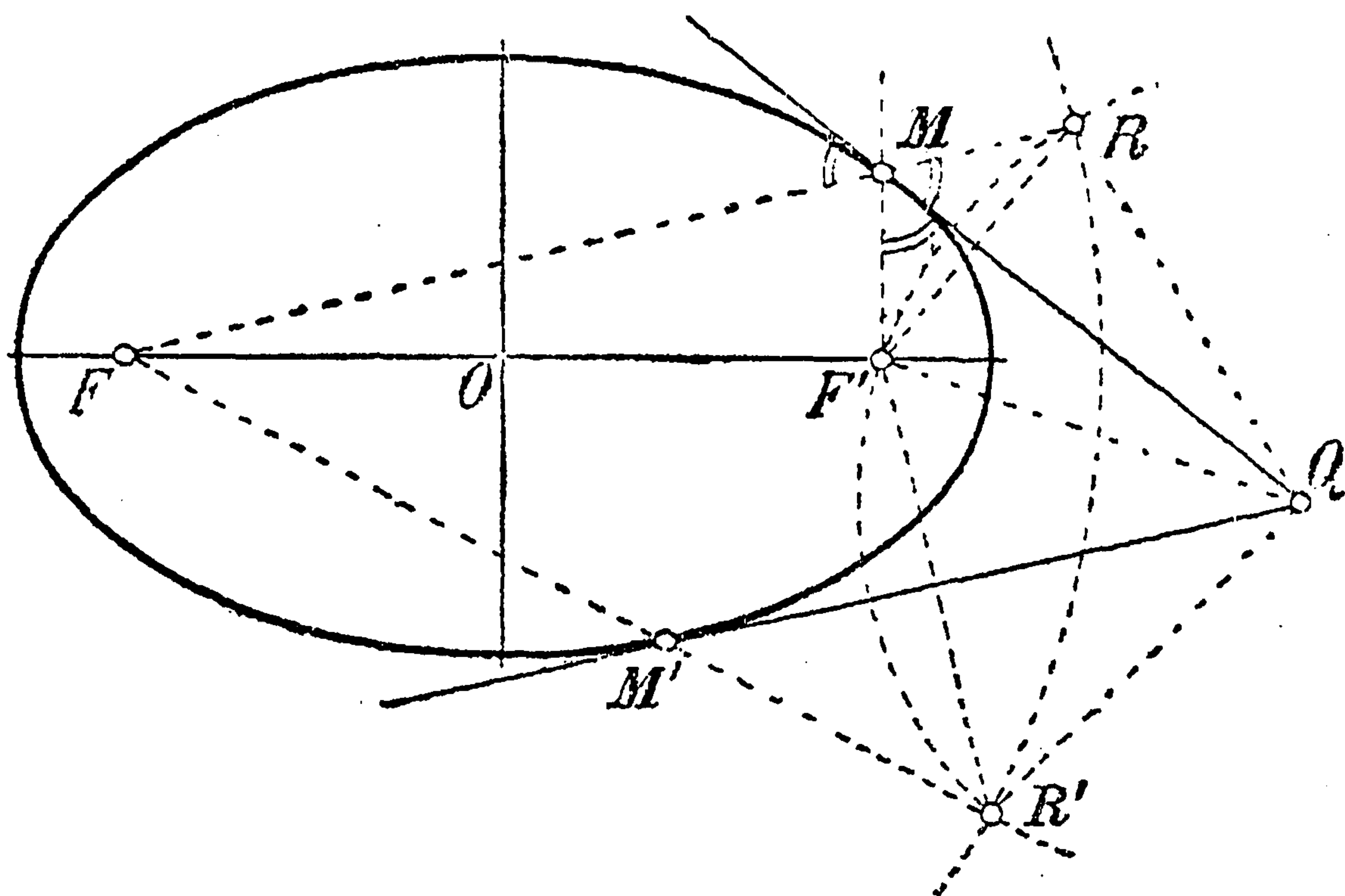
Эта пропорция (по известной теореме о биссектрисе угла треугольника) показывает, что нормаль  $MN$  к эллипсу в точке  $M$  делит пополам угол между прямыми  $MF$  и  $MF'$ , соединяющими точку  $M$  с фокусами  $F$  и  $F'$ . Отсюда ясно, что касательная делит пополам смежные углы.

Установленное замечательное свойство эллипса позволяет также с легкостью проводить к нему касательные. Это очевидно для случая, когда непосредственно дана точка касания  $M$ . Но возможны и другие задачи на проведение касательных.

Пусть, напр., дана точка  $Q$  вне эллипса и требуется через нее провести касательную к эллипсу (черт. 196 б). Предположим задачу решенной (как это обык-



Черт. 196 а).



Черт. 196 б).



новенно делают при решении задач на построение), и пусть  $M$  будет точкой касания, а  $MQ$  — искомой касательной. Если опустить из фокуса  $F'$  перпендикуляр на касательную и продолжить его до пересечения в точке  $R$  с продолжением отрезка  $FM$ , то в виду равенства отмеченных углов будут равны наклонные  $MF'$  и  $MR$ , а одновременно с ними и наклонные  $QF'$  и  $QR$ .

Так как отрезок

$$\begin{aligned} FR &= FM + MR = \\ &= FM + MF' = 2a, \end{aligned}$$

по самому определению эллипса [97], то положение точки  $R$  теперь может быть определено пересечением окружности, описанной из  $F$  радиусом  $2a$ , и окружности, описанной из  $Q$  радиусом  $QF'$ ; затем уже касательная  $QM$  строится как перпендикуляр из  $Q$  на  $F'R$ . Заметим, что упомянутые окружности пересекутся еще в одной точке  $R'$ , которая даст нам еще одну касательную  $QM'$ , исходящую из точки  $Q$ .

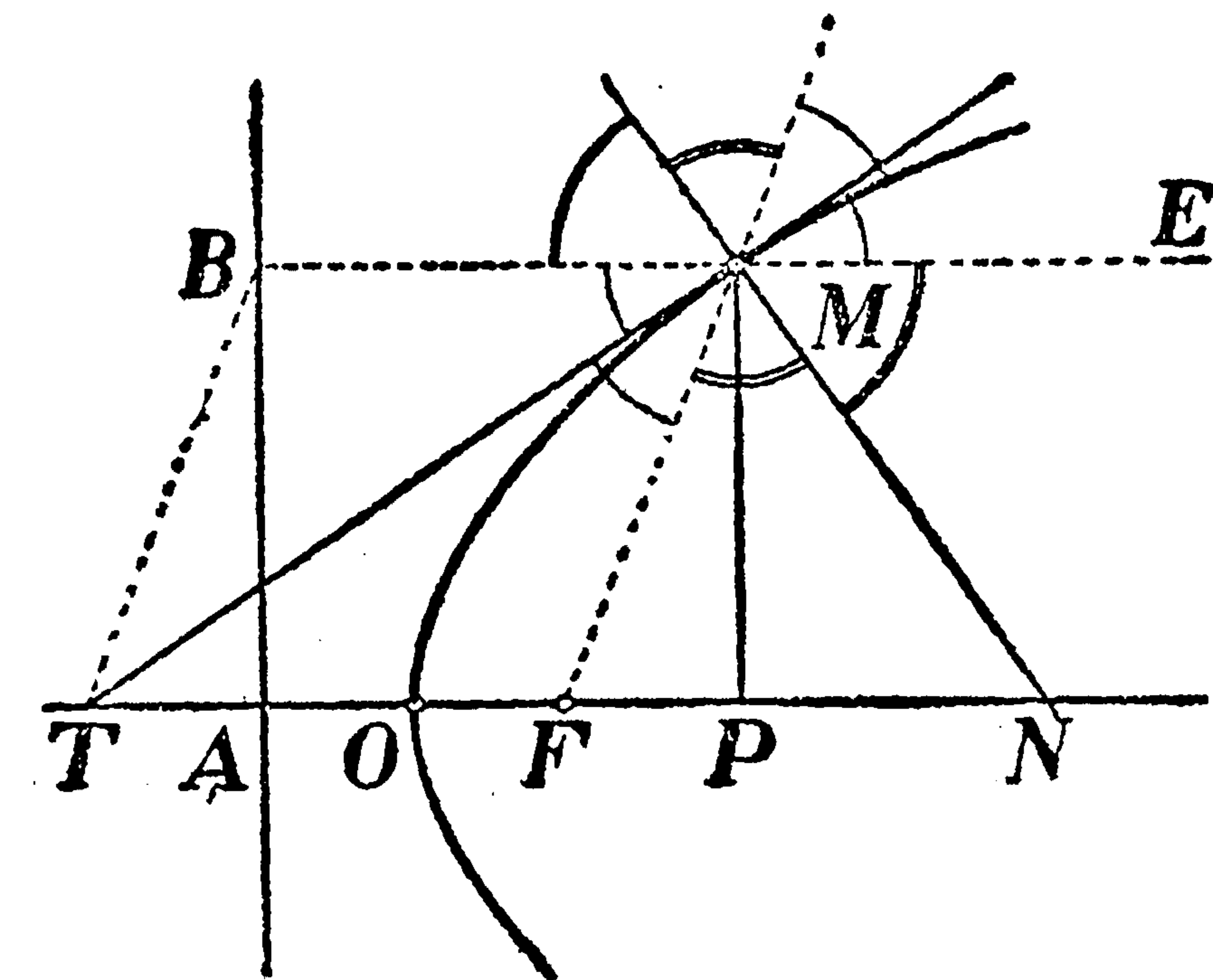
Для применимости этого приема нет надобности в том, чтобы был начерчен самый эллипс: достаточно, если даны его фокусы и большая ось. Сама точка касания  $M$  ( $M'$ ) получается в пересечении касательной с прямой  $FR$  ( $FR'$ ).

Аналогично может быть решена и задача на проведение касательной параллельно заданному направлению [ср. 123, 2]. Она всегда имеет два решения.

II. Для гиперболы (см. черт. 197) справедливо подобное же утверждение, но здесь касательная делит пополам угол между лучами, направленными к фокусам,

а нормаль — смежные углы. Это свойство также может быть использовано для построения касательных к гиперболе, на чем останавливаться не станем.

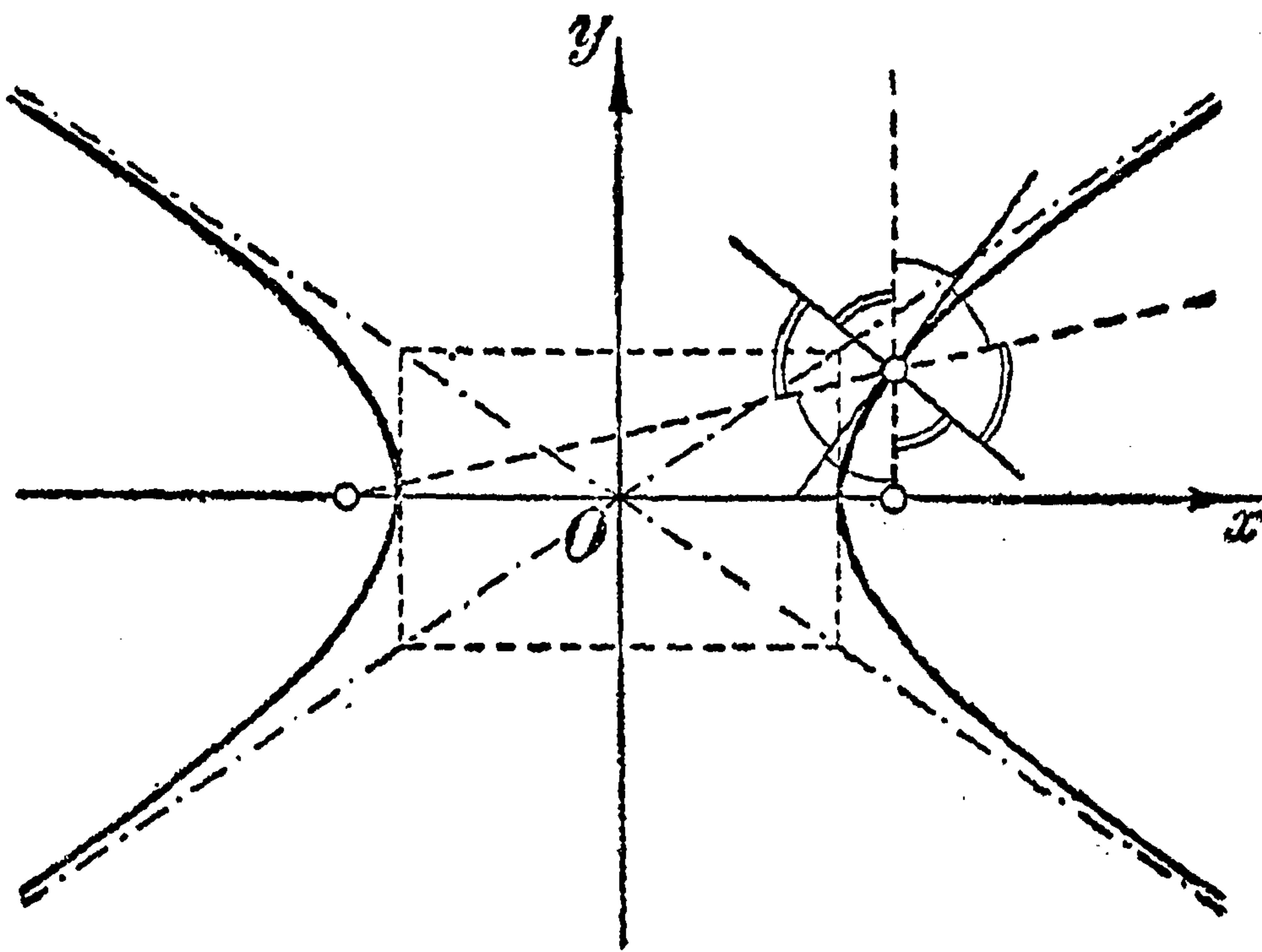
III. Перейдем к аналогичным свойствам параболы. Пусть  $AB$  — директриса параболы,  $F$  — ее фокус,  $MT$  — касательная в точке  $M$  параболы (черт. 198а). Мы уже знаем, что подкасательная  $TP$  вдвое больше абсциссы  $x = OP$ , так что  $TO = OP$ ; прибавляя к ним равные отрезки  $OF$  и  $AO$ , получим:  $TF = AP = BM$ . Таким образом,  $TF$  и  $BM$  равны и параллельны, поэтому фигура  $TBMF$  есть параллелограмм. Больше того, так как расстояния  $BM$  и  $MF$  равны (по определению параболы), то эта фигура представляет собою ромб, так что диагональ, т. е. касательная  $MT$  делит пополам угол между лучом  $MF$ , соединяющим точку  $M$  с фокусом, и лучом  $MB$ , параллельным оси параболы, но направленным в обратную сторону. Отсюда ясно, что нормаль  $MN$  делит пополам смежный угол между лучами  $MF$  и  $ME$ .\*



Черт. 198а).

касательная  $MT$  делит пополам угол между лучом  $MF$ , соединяющим точку  $M$  с фокусом, и лучом  $MB$ , параллельным оси параболы, но направленным в обратную сторону. Отсюда ясно, что нормаль  $MN$  делит пополам смежный угол между лучами  $MF$  и  $ME$ .\*

\* Если вспомнить, что параболу можно рассматривать как предельный образ для эллипса, когда второй фокус его удаляется в бесконечность [106], то аналогия этого свойства и указанного выше свойства эллипса станет полной: луч  $MF'$  эллипса в пределе делается параллельным оси!



Черт. 197.



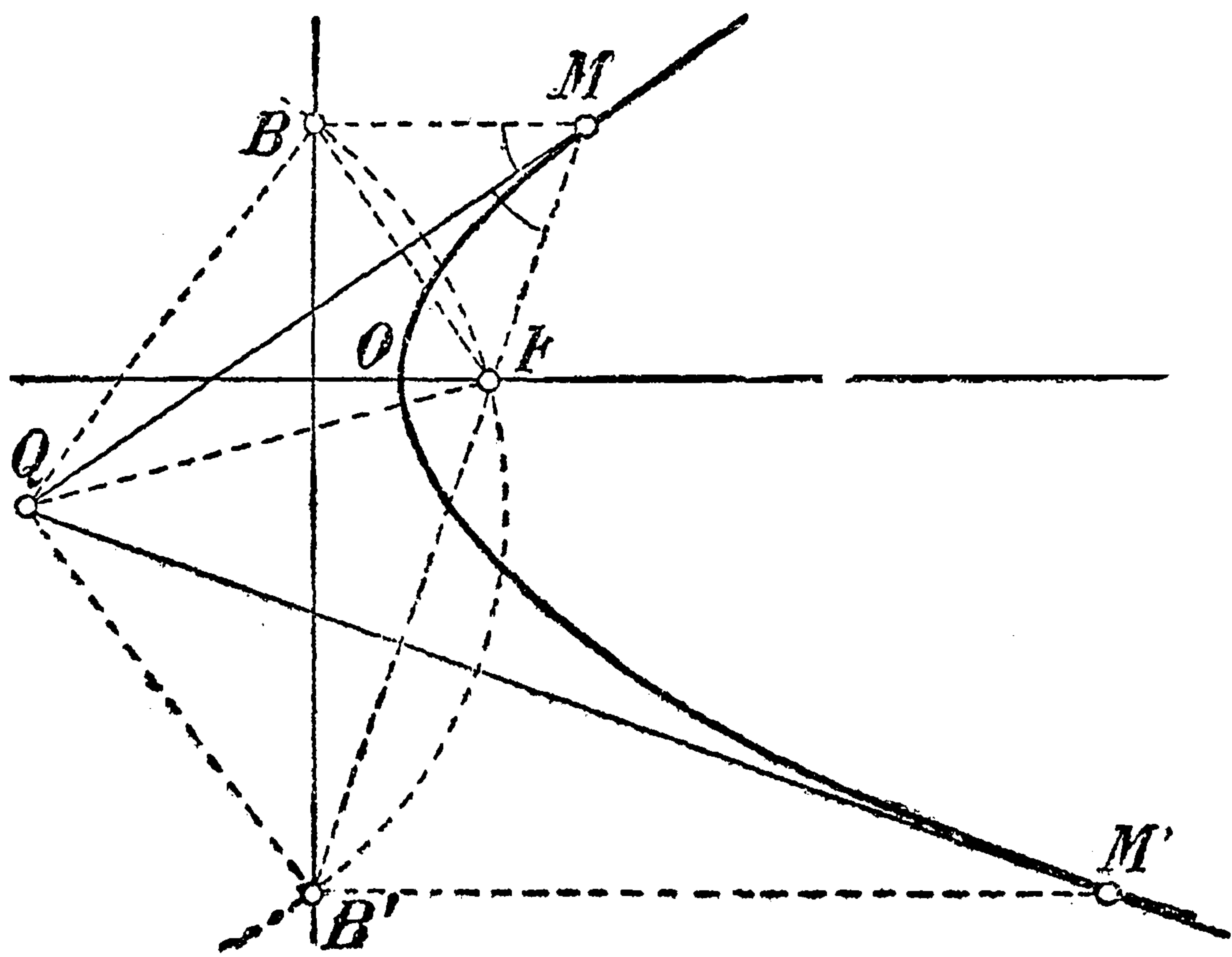
Указанное свойство касательных к параболе, как и в случае эллипса, может быть использовано при решении задач на построение касательных. Непосредственно ясно, как с его помощью строится касательная в данной на параболе точке  $M$ .

Пусть теперь дана точка  $Q$  вне параболы и требуется через нее привести касательную к параболе (черт. 198*b*). Предположив касательную уже построенной, опустим на нее из фокуса  $F$  перпендикуляр, который продолжим до пересечения в точке  $B$  с директрисой; тогда, очевидно,  $QB = QF$ . Это дает возможность, обратно, восстановить точку  $B$  как пересечение директрисы с окружностью, описанной из  $Q$  радиусом  $QF$ . Лишь только точка  $B$ , таким образом, построена, касательная  $QM$  определится как перпендикуляр из  $Q$  на  $BF$ . Вторая точка пересечения директрисы с упомянутой окружностью даст еще одну касательную. Построение выполнимо, даже если сама парабола не начерчена, лишь бы были даны ее фокус и директриса. Точка касания  $M$  определяется, напр., как пересечение

касательной с прямой  $BM$ , перпендикулярной к директрисе.

Столь же просто решается и задача о проведении касательной параллельно данному направлению (не параллельно оси!); она (в отличие от случая эллипса) имеет одно решение.

125. Примеры применения этих свойств. 1°. *Эллиптические колеса*. Изложенное в предыдущем п° свойство эллипса находит применение при конструировании эллиптических зубчатых колес.\* Представим себе два равных эллиптических колеса (с большой осью  $2a$  и фокусным расстоянием  $2c$ ) в



Черт. 198*b*).

положении, указанном на черт. 199*a*). Первое из них (ведущее колесо) неизменно связано с валом, проходящим через его фокус  $F$  перпендикулярно к плоскости чертежа, второе насажено аналогично на вал, проходящий через его фокус  $F_1$ ; при этом расстояние  $FF_1$  между осями валов равно большой оси обоих эллипсов. Первый вал равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  по часовой стрелке. Для того, чтобы это вращение при посредстве колес могло быть передано второму валу, нужно, чтобы эти эллипсы катились один по другому без скольжения; убедимся в возможности такого катания. Возьмем произвольную точку  $M$  первого эллипса; проведя параллель прямой  $FF_1$ , найдем на втором эллипсе такую точку  $M_1$ , что (на основании свойства симметрии)

$$\sphericalangle AM = \sphericalangle AM_1. \quad (15)$$

В то же время, в виду тождества обоих эллипсов, ясно, что [см. 97, определение эллипса]

$$FM + M_1F_1 = FM + MF' = 2a = FF_1. \quad (16)$$

Наконец, построим касательные  $MT$  и  $M_1T_1$  к рассматриваемым эллипсам в точ-

\* Следует заметить, что полуоси эллиптических колес обыкновенно мало различаются. На чертеже мы несколько преувеличили эту разницу, в целях большей ясности.



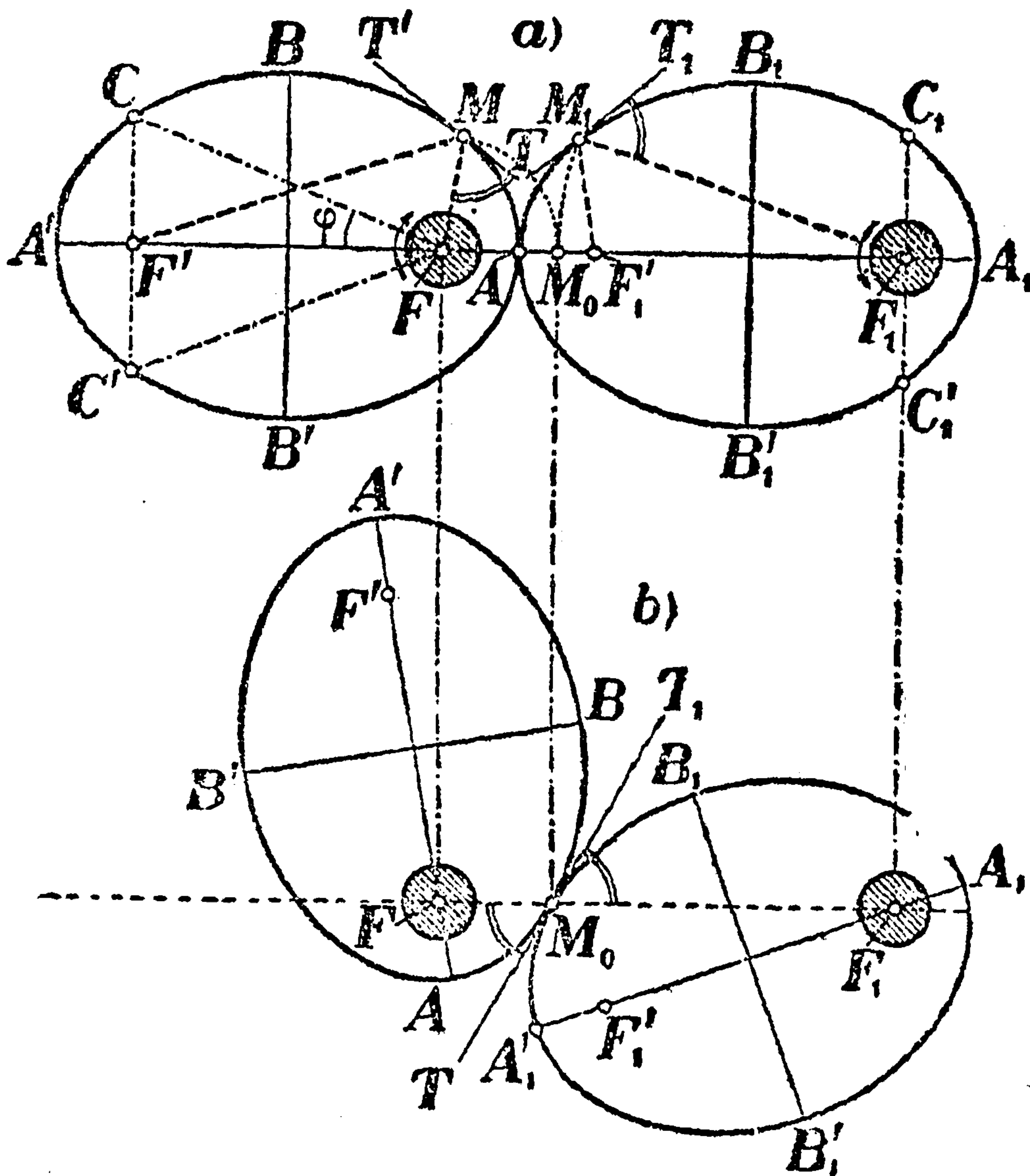
как  $M$  и  $M_1$ . Опираясь на тождество эллипсов и на симметрию их, находим, что

$$\sphericalangle F'MT' = \sphericalangle F_1M_1T_1,$$

а доказанное выше свойство касательных к эллипсу [124] позволяет заключить, что и

$$\sphericalangle FMT = \sphericalangle F_1M_1T_1. \quad (17)$$

Предположим теперь, что (при вращении эллипсов) обе точки  $M$  и  $M_1$ , описав соответственные дуги окружностей, придут одновременно на прямую  $FF_1$ . Из (16) ясно, что они совпадут в одной точке,  $M_0$ . Из (17) вытекает, что и касательные к эллипсам в их новом положении (черт. 199b) сольются, т. е., что эллипсы будут касаться в точке  $M_0$ . Так как точка  $M$  была взята произвольно, то из сказанного ясна возможность катания эллипсов. Что это катание будет происходить без скольжения, ясно из равенства дуг  $AM$  и  $AM_1$  [см. (15)], которые на каждом из эллипсов опишет точка касания. Фактическое осуществление катания одного эллипса по другому достигается с помощью зубчатой нарезки по их периферии (причем оси зубцов располагаются по нормальям к эллипсам). \*



Черт. 199.

Скорости точек обоих эллипсов, совпавших в  $M_0$ , очевидно, в этот момент равны. Так как однако они отстоят от своих центров вращения на (вообще) *неравные* расстояния  $FM_0$  и  $M_0F_1$ , то *угловые скорости*  $\omega$  и  $\omega_1$  вращений обоих эллипсов будут им обратно пропорциональны:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{FM_0}{M_0F_1}, \quad \text{откуда} \quad \omega_1 = \omega \cdot \frac{FM_0}{M_0F_1},$$

т. е., в виду того, что  $\omega = \text{пост.}$ , угловая скорость  $\omega_1$  второго эллипса отнюдь не постоянна, но *изменяется* пропорционально отношению  $\frac{FM_0}{M_0F_1}$ . От своего наи-

меньшего значения  $\omega_1' = \frac{a-c}{a+c} \omega$  (эта угловая скорость соответствует положению,

указанному на черт. 199a) она возрастает до наибольшего значения  $\omega_1'' = \frac{a+c}{a-c} \omega$ ,

затем снова убывает до  $\omega_1'$  и т. д. *Передающее число*  $\frac{\omega_1}{\omega}$  колеблется между значениями

$$\frac{a-c}{a+c} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{a+c}{a-c} > 1;$$

\* В сущности, мы здесь имеем дело с разновидностью антипараллельного кривошипа [ср. 103, 1° и примеч. на стр. 279], состоящего из четырех звеньев  $FF_1$ ,  $F'F_1'$  и  $FM_0$ ,  $F_1M_0$ , из которых закреплено длинное звено  $FF_1$  (см. черт. 199, b; прямая  $F_1F_1'$ , очевидно, проходит через точку  $M_0$  и отрезок  $F_1F_1'$  сохраняет постоянную величину  $2a$ ).



этим и обуславливается применение эллиптических колес, например, в малых строгальных станках. Со *вторым* валом  $F_1$  неизменно связан кривошип  $F_1L$  (черт. 200), который с помощью шатуна  $LP$  (скрепленного с ним шарниром в  $L$ ) приводит салазки (ползун)  $P$  в колебательное движение по прямой  $PQ$  направо и налево. Скрепление производится с таким расчетом, чтобы направо, т. е. при так называемом *рабочем ходе* (когда резец работает), салазки двигались медленнее, а налево (при *холостом ходе*) — быстрее.

Отношение  $\lambda = \frac{\omega_1''}{\omega_1'}$  наибольшей и наименьшей угловой скорости второго колеса вычисляется по формуле:

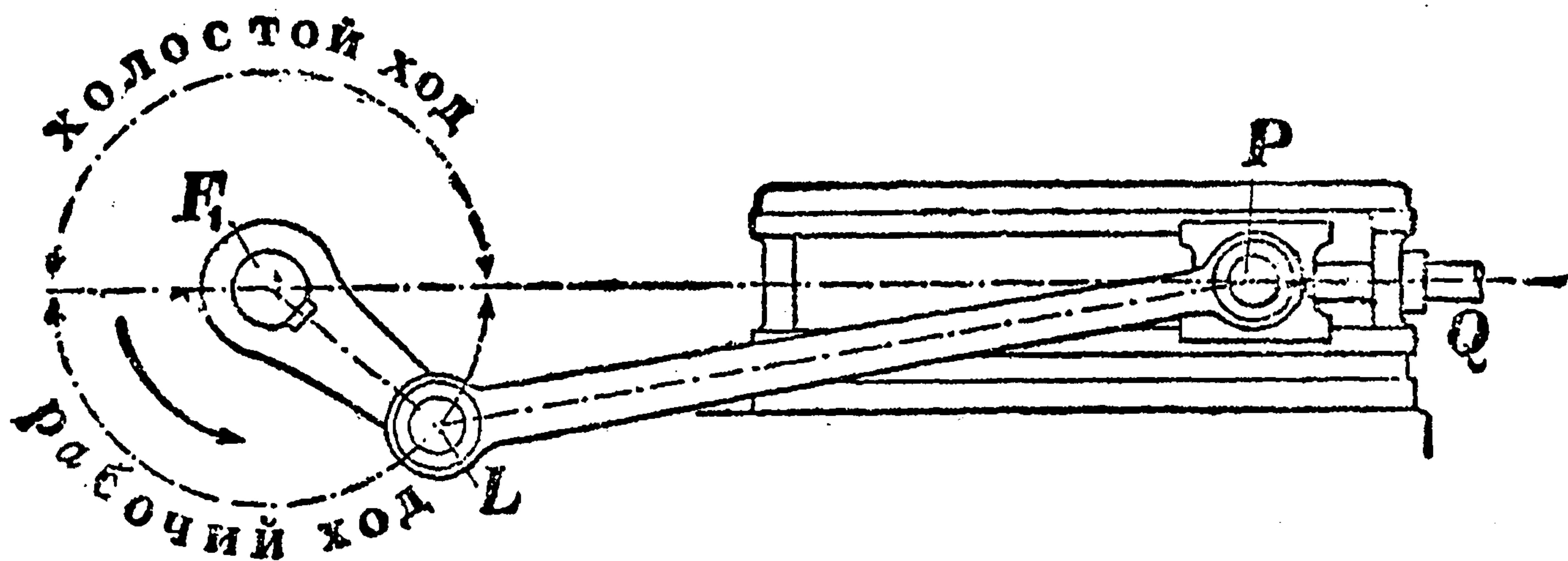
$$\lambda = \left( \frac{a+c}{a-c} \right)^2.$$

Наоборот, отсюда

$$\frac{a+c}{a-c} = \sqrt{\lambda}, \quad c = \frac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1} a,$$

так что малая полуось эллипса

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1} \right)^2} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}+1} a;$$



Черт. 200.

эти формулы позволяют, при наперед заданном отношении  $\lambda$  угловых скоростей  $\omega_1''$  и  $\omega_1'$ , найти отношение полуосей эллиптических колес. Например, если желательно, чтобы  $\omega_1''$  была в четыре раза больше  $\omega_1'$ , то имеем

$$c = \frac{\sqrt{4}-1}{\sqrt{4}+1} a = \frac{a}{3} \quad \text{и} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{9}} = a \frac{\sqrt{8}}{3} = 0,943 a.$$

Предположим, что движение салазок *направо* начинается за четверть полного оборота второго колеса *до* его положения на черт. 199*a*) (соответствующего наименьшей угловой скорости) и кончается через четверть оборота спустя *после* этого положения (так что на остальные пол-оборота приходится более быстрое движение салазок *налево*). В начале этого периода точкой касания на втором колесе является  $C_1'$ , на первом же  $C'$ ; в конце периода точкой касания на втором колесе будет  $C_1$ , а на первом  $C$ . Так как первое колесо вращается *равномерно*, то отношение  $\tau$  продолжительности холостого хода к продолжительности рабочего хода равно отношению углов  $\varphi = \sphericalangle F'FC$  и  $\pi - \varphi = \sphericalangle AFC$ . Из равенства

$$\tau = \frac{\varphi}{\pi - \varphi} \quad \text{получаем:} \quad \varphi = \frac{\pi\tau}{1 + \tau}. \quad (18)$$

Мы уже знаем, что полупараметр  $F'C = \frac{b^2}{a}$  [106]; с другой стороны, по опре-



делению эллипса,  $F'C + CF = 2a$ , поэтому

$$CF = 2a - \frac{b^2}{a} = \frac{2a^2 - b^2}{a} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{b^2}{2a^2 - b^2},$$

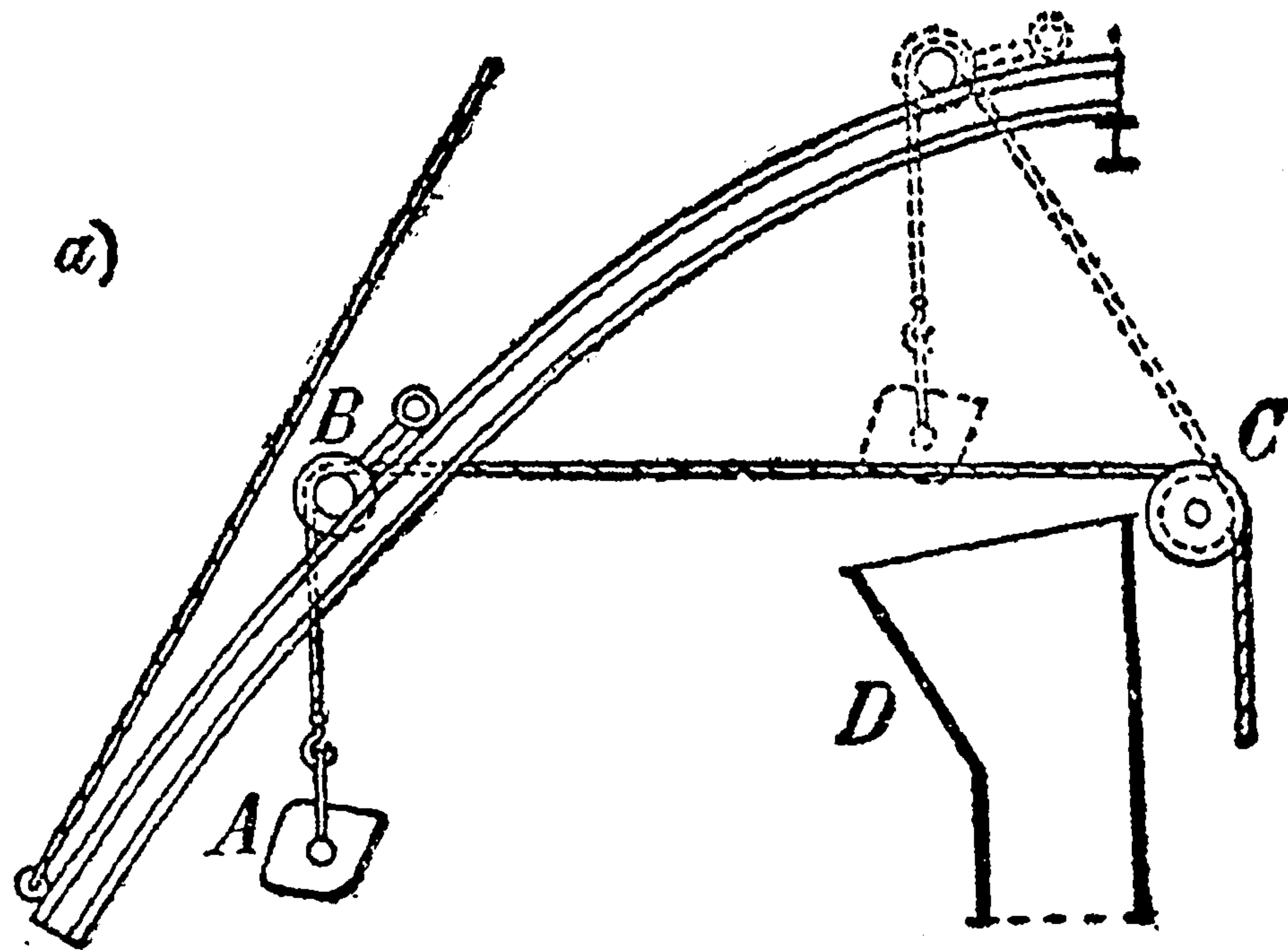
откуда

$$b = a \sqrt{\frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}}. \quad (19)$$

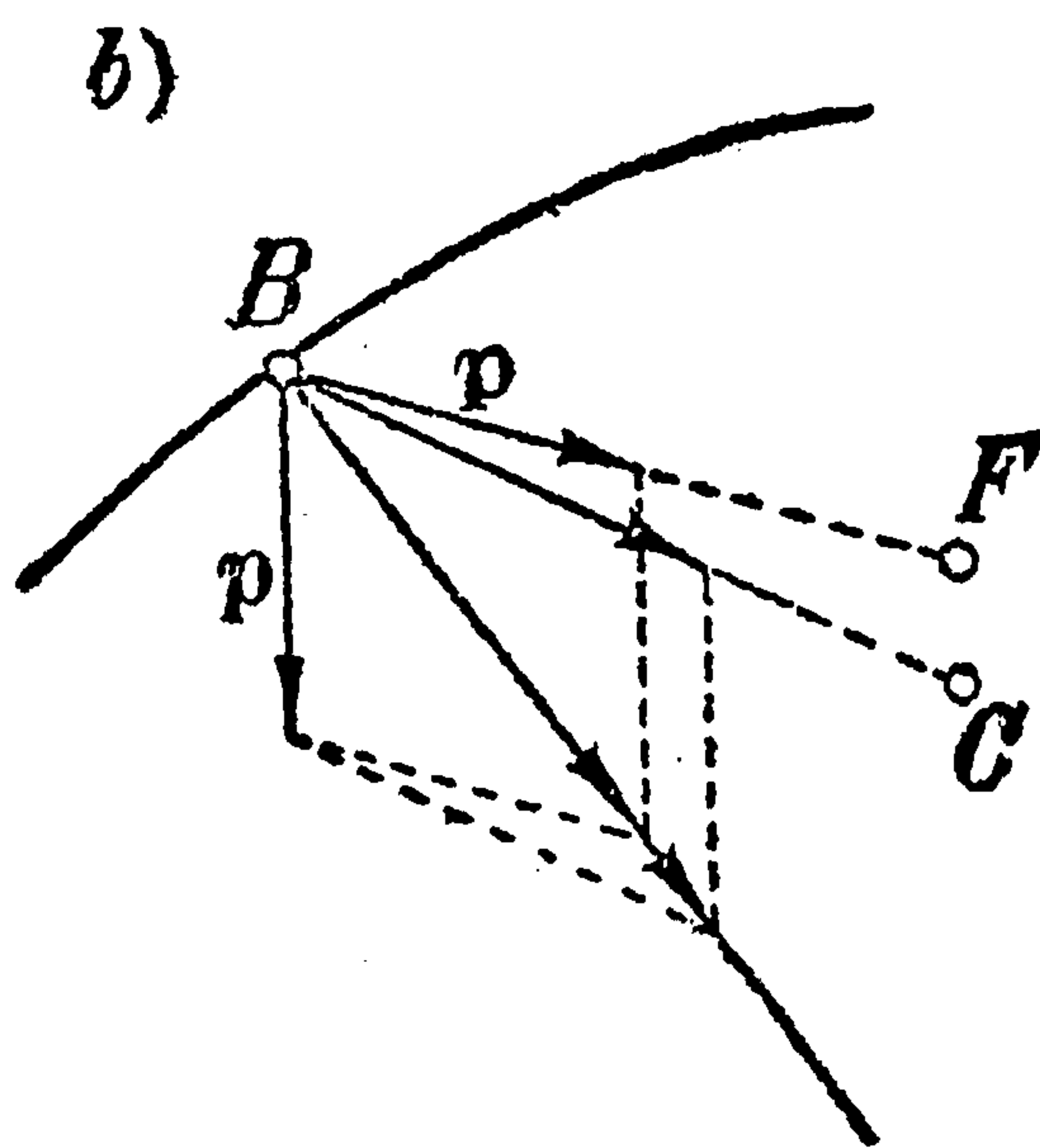
Формулы (18) и (19) позволяют по  $a$  и  $\tau$  определить  $b$ . Так, если  $\tau = \frac{1}{3}$ , то

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad b = a \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{2}}} = 0,910 a.$$

2°. *Прожектор.* Если зеркало отшлифовано по поверхности, которая получится от вращения параболы вокруг ее оси (*параболоид вращения*), то лучи, исходящие из источника света, помещенного в фокусе  $F$  (черт. 198  $a$ ), после отражения от зеркала, окажутся все параллельными оси. Действительно, по основному закону отражения, угол между лучом  $FM$  и нормалью  $MN$  к отражающей поверхности („угол падения“) должен быть равен углу между этой нормалью и отраженным лучом („углу отражения“), так что отраженный луч пойдет по направлению  $ME$ . Таким образом, расходящийся пучок лучей преобразуется в параллельный пучок. Этим иногда пользуются при устройстве прожекторов, посылающих сосредоточенные параллельные пучки на далекое расстояние.



Очевидно, что если на зеркало падает, наоборот, пучок лучей, параллельных оси (за параллельные лучи, например, можно приближенно принять лучи Солнца или другого отдаленного светила), то после отражения все они соберутся в  $F$ . С этим связано устройство астрономических рефлекторов.



3°. *Параболические поперечины (вылеты) подъемных кранов.* В некоторых системах перегрузочных платформ, применяемых для погрузки навалочных грузов (уголь, руда, зерно и т. п.), поперечине (вылету) придается параболическая форма (черт. 201  $a$ ). Бадья  $A$  должна

быть сначала подтянута к салазкам  $B$ , затем вместе с тележкой—поднята по параболическим рельсам, пока не остановится над воронкой  $D$ , куда и высыпается содержимое бадьи. Параболическая форма, прежде всего, позволяет несколько уменьшить высоту подъема бадьи над воронкой и тем уменьшить рассыпание груза. Обратимся теперь к рассмотрению сил, приложенных к салазкам  $B$ .

Во-первых, вес  $P$  бадьи создает равное ему по величине натяжение в отрезке  $AB$  троса; во-вторых, на салазки действует и натяжение той части троса, которая переброшена через барабан  $C$ . Если построить по „правилу параллело-

Черт. 201.



грамма\* равнодействующую этих сил (черт. 201 б), то она должна уравновеситься сопротивлением поперечины и, следовательно, направлена по нормали к параболе. Предположим, что барабан помещен как раз в фокусе  $F$  параболы; тогда, по доказанному в предыдущем  $n^{\circ}$  свойству нормали, равнодействующая делит пополам угол между обеими составляющими силами, параллелограмм оказывается ромбом, оба натяжения равны. На деле барабан помещают несколько ниже фокуса; в таком случае натяжение в отрезке  $BC$  троса оказывается больше  $p$ . Благодаря этому, при наворачивании троса мотором в нем сначала создается натяжение  $p$ —и бадья лишь подымается до салазок, а затем, при дальнейшем наматывании троса натяжение в нем повышается до пределов, нужных для передвижения салазок вместе с бадьей.

Параболу располагают так, чтобы уклон на том ее участке, который используется, был достаточен для самостоятельного скатывания салазок после опорожнения бадьи и ослабления троса. Нижнюю часть поперечины делают прямолинейной.

**126. Проведение касательных к кривой, заданной параметрически.** Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то производную  $y'_x$ , представляющую угловой коэффициент  $\operatorname{tg} \alpha$  касательной, можно найти и не имея выражения  $y$  через  $x$ . С этой целью станем рассматривать  $y$  как сложную функцию от  $t$ , через посредство  $x$ ; другими словами, будем рассматривать  $y$  как функцию от  $x$ :  $y = f(x)$  (хотя и неизвестную нам), в которую вместо  $x$  подставлена, в свою очередь, функция от  $t$ :  $\varphi(t)$ , так что

$$y = \psi(t) = f[\varphi(t)].$$

Дифференцируя теперь  $y$  как сложную функцию, будем иметь  $y'_t = y'_x \cdot x'_t$ , а отсюда и определяется искомая производная  $y'_x$  через известные (из параметрических уравнений кривой) производные  $x'_t$  и  $y'_t$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (20)$$

Формально проще можно получить тот же результат с помощью дифференциальных обозначений:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Применим этот результат к построению касательных к циклоиде, эпи- и гипоциклоиде, к эвольвенте круга.

I. В случае *циклоиды* (черт. 171), выражаемой уравнениями:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

имеем:

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a \sin t, \quad (21)$$



так что (обозначая через  $\alpha$  угол касательной с осью  $Ox$ )

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right),$$

откуда

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \quad * \quad (22)$$

Вспомним (черт. 171), что  $t = \sphericalangle MDN$ , так что  $\sphericalangle MEN = \frac{t}{2}$ ; если продолжить прямую  $EM$  до пересечения в  $T$  с осью  $Ox$ , то  $\sphericalangle ETx$  и будет равен  $\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ , т. е.  $\alpha$ . Следовательно, прямая  $ME$ , соединяющая точку циклоиды с высшей точкой катящегося круга (в соответствующем положении), и будет касательной. Так как  $\sphericalangle NME$  опирается на диаметр и поэтому прямой, то прямая  $MN$  будет нормалью.

Можно было бы получить тот же результат и исходя из кинематических соображений, без всяких выкладок. При катании круга, в тот момент, когда точкой касания служит  $N$ , все точки круга движутся так, как если бы они вращались вокруг центра  $N$  („мгновенный центр“). Поэтому направление движения точки  $M$ , например (а оно и указывается касательной), должно быть перпендикулярно к прямой  $MN$ , соединяющей  $M$  с мгновенным центром. Иными словами, мы пользуемся здесь таким, доказываемым в кинематике, общим положением: нормаль к траектории любой точки движущейся плоскости проходит через мгновенный центр.

Впоследствии нам полезно будет выражение для отрезка нормали, которое легко получить из прямоугольного  $\triangle MEN$ . Именно,

$$MN = 2a \sin \frac{t}{2}. \quad (23)$$

II. Для эпициклоиды (черт. 172).

$$x = a [(1+m) \cos mt - m \cos (1+m)t],$$

$$y = a [(1+m) \sin mt - m \sin (1+m)t]$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} x'_t &= am(1+m) [\sin (1+m)t - \sin mt] = \\ &= 2am(1+m) \sin \frac{t}{2} \cos \left( m + \frac{1}{2} \right) t, \\ y'_t &= 2am(1+m) \sin \frac{t}{2} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) t, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} \left( m + \frac{1}{2} \right) t,$$

\* При  $t=0$  или  $2\pi$ , т. е. в начальной и конечной точке ветви циклоиды  $y'_x = \infty$  и  $\theta = \frac{\pi}{2} \left( -\frac{\pi}{2} \right)$ , так что касательная вертикальна.



так что

$$\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right) t. \quad (25)$$

Если соединить точку  $D$  с  $M$ , то эта прямая составит с осью  $Ox$  как раз такой угол: действительно,  $\sphericalangle xTD$  (как внешний угол  $\triangle OTD$ ) равен сумме  $\sphericalangle DOT + \sphericalangle ODT = mt + \frac{t}{2}$  (вписанный угол  $\sphericalangle ODT$  равен половине центрального  $\sphericalangle BSM$ , опирающегося на ту же дугу  $BM$ ). Итак,  $DT$  есть касательная в точке  $M$ . Очевидно,  $MB$  будет нормалью.

И здесь мы видим, что нормаль проходит через точку касания, которая служит мгновенным центром.

III. Перейдем, наконец, к эвольвенте круга (черт. 175):

$$x = a (\cos t + t \sin t),$$

$$y = a (\sin t - t \cos t).$$

Здесь получается простой результат:

$$x'_t = at \cos t, \quad y'_t = at \sin t, \quad (26)$$

и

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} t, \quad \alpha = t,$$

так что касательная  $MT$  параллельна радиусу  $OB$  и  $BM$  есть нормаль к нашей кривой. Если рассматривать эвольвенту круга как кривую, полученную путем катания прямой по кругу [115], то точка  $B$  будет мгновенным центром, и мы снова находим подтверждение высказанному выше общему положению.

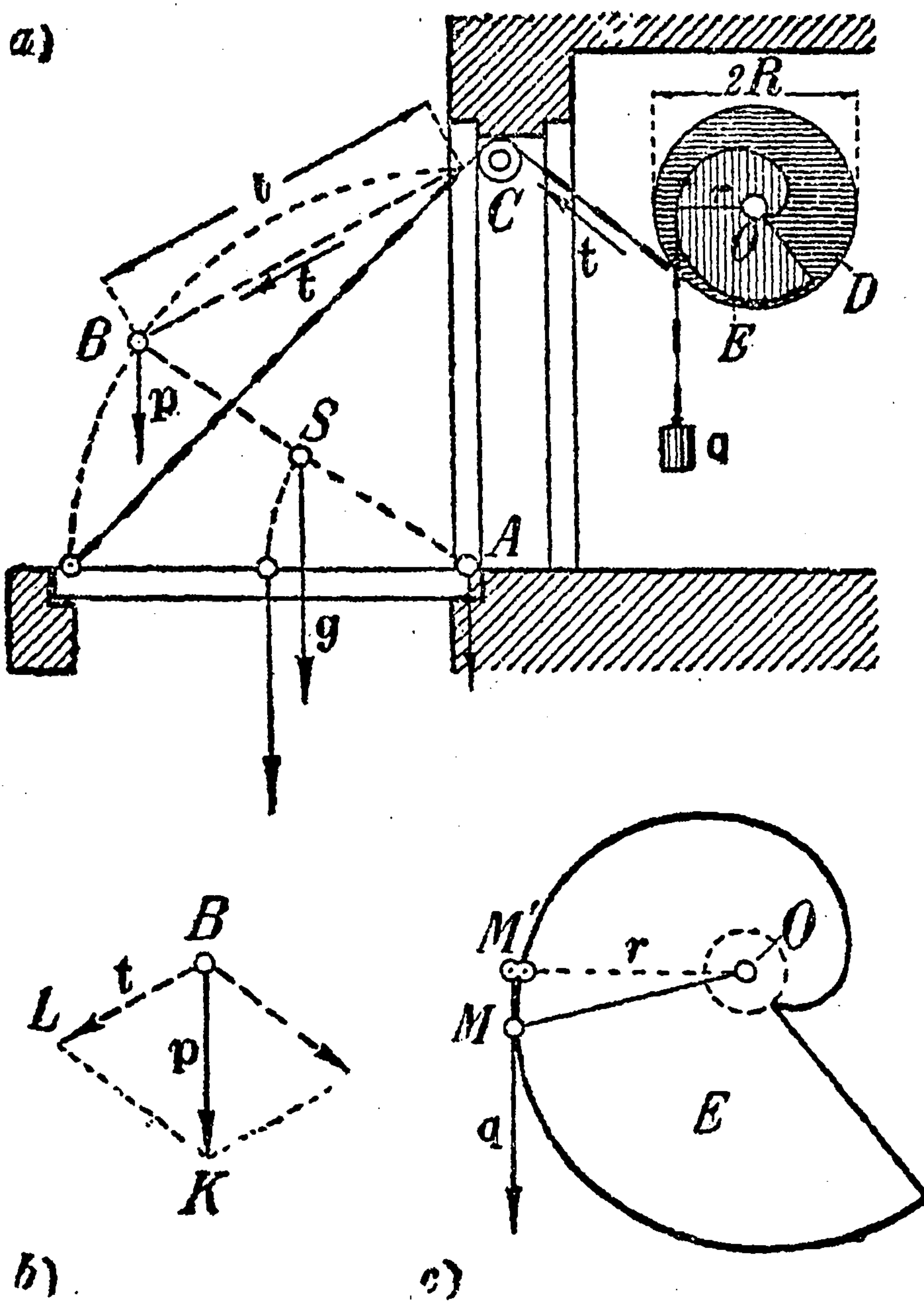
Опустим перпендикуляр из центра  $O$  на касательную (см. черт. 175). Для точки  $M'$  — основания этого перпендикуляра, полярными координатами служат, очевидно,

$$r = OM' = BM = at \quad \text{и} \quad \sphericalangle \theta = t - \frac{\pi}{2},$$

так что  $r = a \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ . Таким образом, полярный радиус-вектор  $r$  есть линейная функция от полярного угла  $\theta$  и, очевидно, геометрическое место точек  $M'$  (или, как говорят, *подёра* нашей кривой относительно полюса  $O$ ) есть не что иное, как *Архимедова спираль* [118, (65a)].

Мы сейчас приведем интересный пример, где как раз используется это обстоятельство.

Для уравновешения подъемного крыла разводного моста (черт. 202 a) применяется противовес. Натяжение  $t$ , которое создается в цепи  $B CD$ , будет изменяться с изменением наклона крыла  $AB$ . Задача уравновешения этого *переменного* натяжения может быть разрешена различными способами, один из них (принадлежащий Дерш é) состоит в следующем. Если перебросить цепь через круглый барабан  $D$  (радиуса  $R$ ), то момент вращающей барабан силы относительно его оси будет равен  $tR$  и следовательно также оказывается переменным. Для того чтобы с помощью *постоянного* противовеса  $q$  создать такой же *переменный*



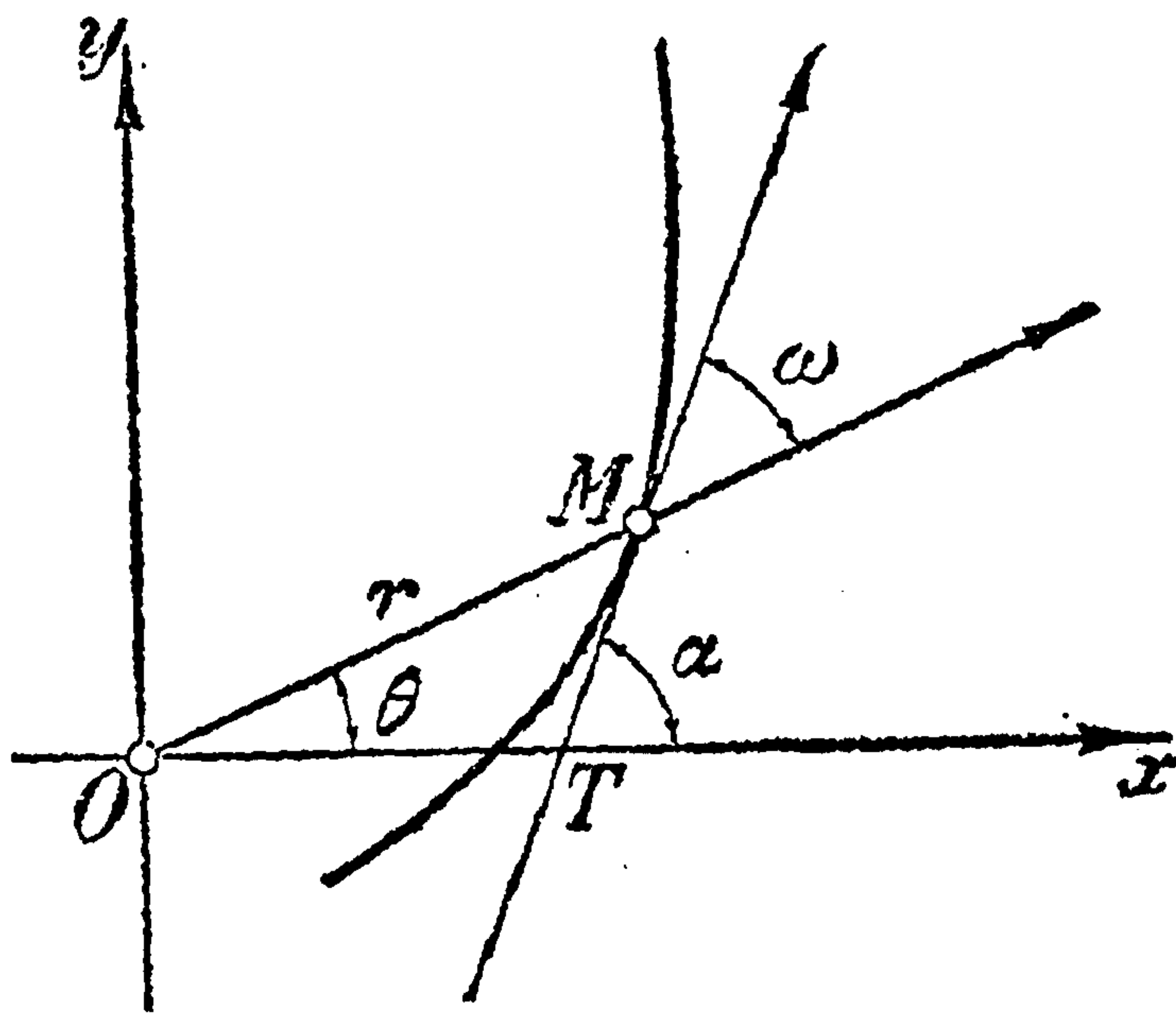
Черт. 202.



вращательный момент (но противоположного знака), нужно чтобы плечо  $r$  силы  $q$  постоянно удовлетворяло условию,

$$qr = tR, \text{ откуда } r = \frac{R}{q} t,$$

так что это плечо  $r$  не может быть постоянным и должно изменяться пропорционально  $t$ . Для осуществления этого противовес  $q$  подвешивают на цепи, которая навита не на барабан  $D$ , а на неизменно с ним скрепленную шайбу  $E$ , очерченную по спиральной кривой. Желая ближе установить форму этой спирали, допустим, во-первых, что след  $A$  оси вращения подъемного крыла, его центр тяжести  $S$  и точка  $B$  прикрепления цепи лежат на одной прямой и, во-вторых, что ось блока  $C$  и точка  $A$  находятся на одной вертикали. Разложим, прежде всего, вес  $g$  подъемного крыла на две силы, приложенные в  $A$  и в  $B$ . Силу  $p$ , приложенную в  $B$ , в свою очередь, разложим (по „правилу параллелограмма“) по направлению  $BA$  и по направлению, обратному  $BC$ ; это разложение произведено на черт. 202*b*). Ясно, что  $\triangle BKL \sim \triangle CAB$ , так что слагающая  $t$ , создающая равное ей натяжение в цепи, прямо пропорциональна длине  $l$  отрезка цепи  $BC$ , следовательно, и  $r$  должно быть пропорционально  $l$ . С другой стороны, если положение плеча  $r$  определять углом  $\theta$ , отсчитываемым от какой-либо исходящей из  $O$  оси, то увеличение длины  $l$  на  $\Delta l$  повлечет за собой сматывание с барабана  $D$  соответствующего куска цепи и поворот барабана  $D$  (а с ним и шайбы  $E$ ) на угол  $\Delta\theta = \frac{\Delta l}{R}$ . Мы ви-



Черт. 203.

дим, что изменение  $l$  пропорционально изменению  $\theta$ , и  $l$  является линейной функцией от  $\theta$  [33]; в виду пропорциональности  $r$  и  $l$ , и плечо  $r$  также должно быть линейной функцией от  $\theta$ . Таким образом, если через  $M'$  обозначить основание этого перпендикуляра  $r$  из  $O$  на направление силы  $q$  (касательное к очертанию шайбы  $E$ ), то геометрическим местом точек  $M'$  является Архимедова спираль [см. (65*a*)]. Как видно из черт. 202*c*, [ср. черт. 175], это геометрическое место еще не есть искомая кривая\*, для которой Архимедова спираль лишь является „подерой“ относительно полюса  $O$ , но по найденному результату, на основании сказанного выше, мы можем восстановить и контур шайбы  $E$ : она должна быть очерчена по эвольвенте круга!

127. Проведение касательных к кривой, заданной полярным уравнением. Пусть имеем кривую (черт. 203), заданную ее полярным уравнением [117]  $r = f(\theta)$ . Если ввести прямоугольные координаты, взяв (как обычно) полюс  $O$  за начало, а полярную ось за ось  $Ox$ , то формулы

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (27)$$

[см. (60), 116] в сущности дают *параметрическое представление* нашей кривой, причем роль параметра играет полярный угол  $\theta$ ! Действительно, если принять во внимание зависимость  $r$  от  $\theta$ , то правые части уравнений (27) оказываются функциями от  $\theta$ . Поэтому для определения угла  $\alpha$ , составленного кривой с полярной осью (осью  $Ox$ ), можно восполь-

\* В курсах разводных мостов однако обыкновенно не различают точки  $M$  от  $M'$  и приходят к заключению, что шайба  $E$  очерчена по Архимедовой спирали. Если только подъемное крыло не подымается до конца то погрешность от этого будет не слишком велика.



зоваться формулой (20), заменив лишь в ней  $t$  на  $\theta$ . Означая впредь через  $r'$  производную от  $r=f(\theta)$  именно по  $\theta$ , будем иметь, по правилу дифференцирования произведения,

$$x'_\theta = r' \cos \theta - r \sin \theta, \quad y'_\theta = r' \sin \theta + r \cos \theta, \quad (28)$$

так что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}.$$

Часто однако бывает удобнее определять положение касательной не углом  $\alpha$ , который она составляет с полярной осью, а углом  $\omega$ , который она образует с продолжением полярного радиуса-вектора. Из чертежа ясно, что  $\omega = \alpha - \theta$ , так как угол  $\alpha$  является внешним по отношению к  $\triangle OMT$ . Тогда, по известной формуле для тангенса разности,

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta};$$

подставляя сюда, вместо  $\operatorname{tg} \alpha$  его выражение и заменяя, для удобства  $\operatorname{tg} \theta$  через  $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ , будем иметь:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{r' \sin \theta + r \cos \theta}{r' \cos \theta - r \sin \theta}}.$$

Приводя здесь дроби в числителе и знаменателе к их общему знаменателю  $\cos \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta)$  и отбрасывая его, после упрощений получим следующую формулу, которой обычно и пользуются:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'}. \quad (29)$$

Применим ее, для примера, к логарифмической спирали [118]

$$r = ae^{m\theta};$$

очевидно,

$$r' = ma e^{m\theta}, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{ae^{m\theta}}{ma e^{m\theta}} = \frac{1}{m} = \text{пост.} \quad (30)$$

Таким образом, логарифмическая спираль обладает тем замечательным свойством, что угол между радиусом-вектором и касательной сохраняет постоянную величину, или иначе: *логарифмическая спираль пересекает все свои радиусы-векторы под постоянным углом* (черт. 204а), котангенс которого равен  $m$ . Этим свойством она напоминает окружность, которая также пересекает все радиусы-векторы, исходящие из центра, под постоянным (в данном случае — прямым) углом. Впрочем, окружность можно и



рассматривать как частный случай логарифмической спирали, отвечающий  $m = 0$ , ибо при этом предположении мы, действительно, получаем из уравнения логарифмической спирали:  $r = a$ .

*Примеры и задачи.* 1. Показать, что, по мере удаления точки Архимедовой спирали [118, 1] от полюса, кривая стремится сделаться нормальной к радиусу-вектору.

*Решение.* Имеем:  $r = a\theta$ ,  $r' = a$ ,  $\operatorname{tg}\omega = \theta$ , так что, при  $\theta \rightarrow \pm\infty$ ,  $\operatorname{tg}\omega \rightarrow \pm\infty$  и  $\omega \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

2. Определить угол  $\omega$  для лемнискаты [119, 2].

*Решение.* Дифференцируя уравнение лемнискаты:  $r^2 = 2a^2 \cdot \cos 2\theta$ , причем  $r$  считаем (неявной) функцией от  $\theta$ , получим:

$$2r \cdot r' = -4a^2 \cdot \sin 2\theta, \text{ откуда}$$

$$r' = -\frac{2a^2 \cdot \sin 2\theta}{r}.$$

По формуле (29), принимая во внимание снова уравнение лемнискаты, найдем:

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{r^2}{2a^2 \cdot \sin 2\theta} =$$

$$= -\operatorname{cotg} 2\theta = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + 2\theta \right),$$

так что  $\omega = \frac{\pi}{2} + 2\theta$ . При равномерном вращении радиуса-вектора и касательная равномерно же поворачивается вокруг точки касания.

3. Какие кривые обладают тем же свойством, что и логарифмические спирали, т. е. что  $\omega = \text{пост.}$ ?

*Решение.* Представив кривую полярным уравнением:  $r = f(\theta)$ , будем искать функцию  $f$ . Обозначим через  $m$  котангенс постоянного угла  $\omega$ ; тогда, по формуле (29), условие задачи запишется в виде дифференциального уравнения:

$$\frac{r'}{r} = m \text{ или } \frac{dr}{r} = m \cdot d\theta.$$

Интегрируя порознь обе части последнего равенства и вводя постоянную интегрирования под видом  $\log a$  (где  $a = \text{пост.}$ ), получим:

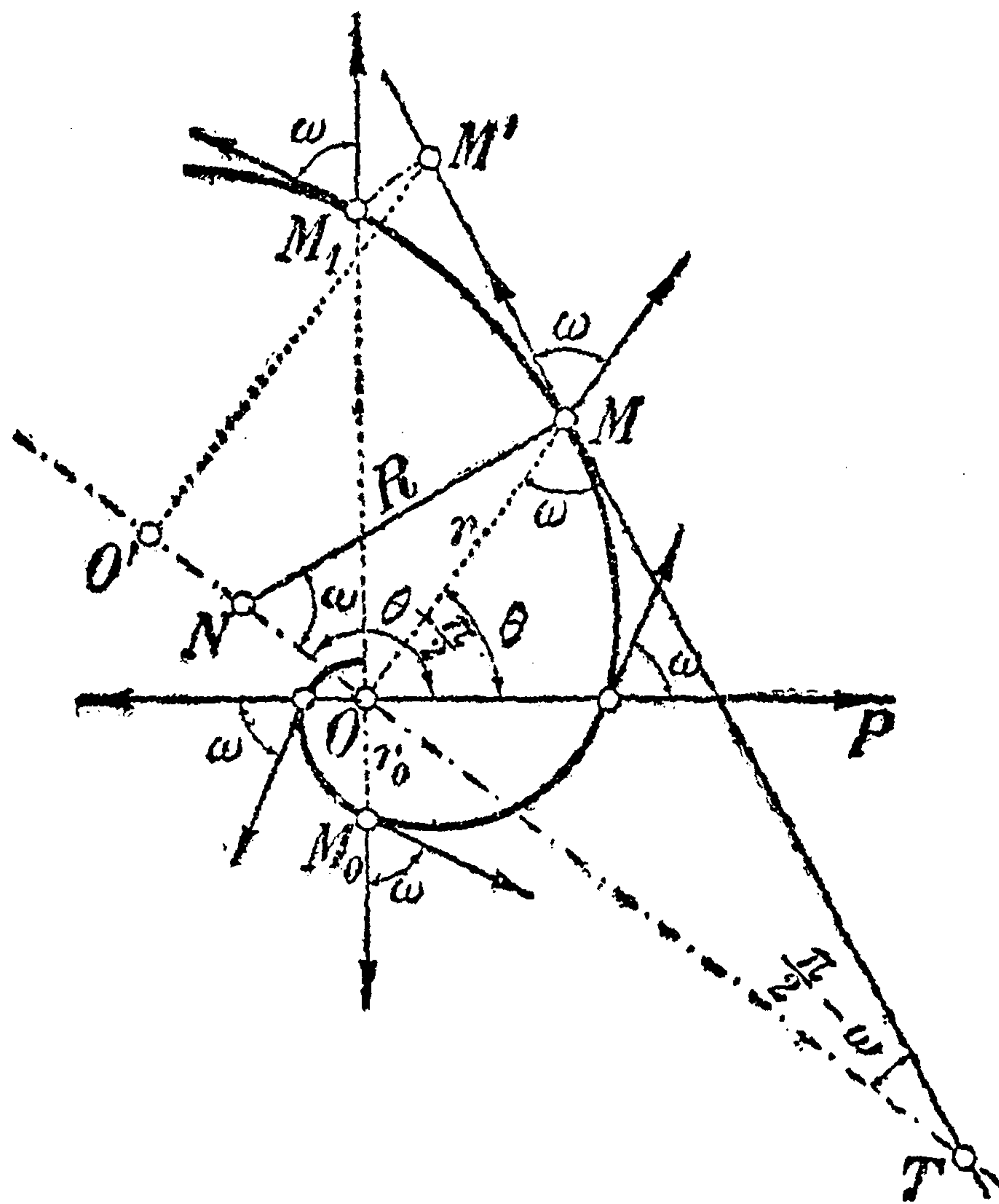
$$\log r = m\theta + \log a.$$

Потенцируя, найдем отсюда уравнение искомой кривой:

$$r = a \cdot e^{m\theta},$$

она оказалась тоже логарифмической спиралью. Таким образом, только логарифмические спирали обладают упомянутым замечательным свойством!

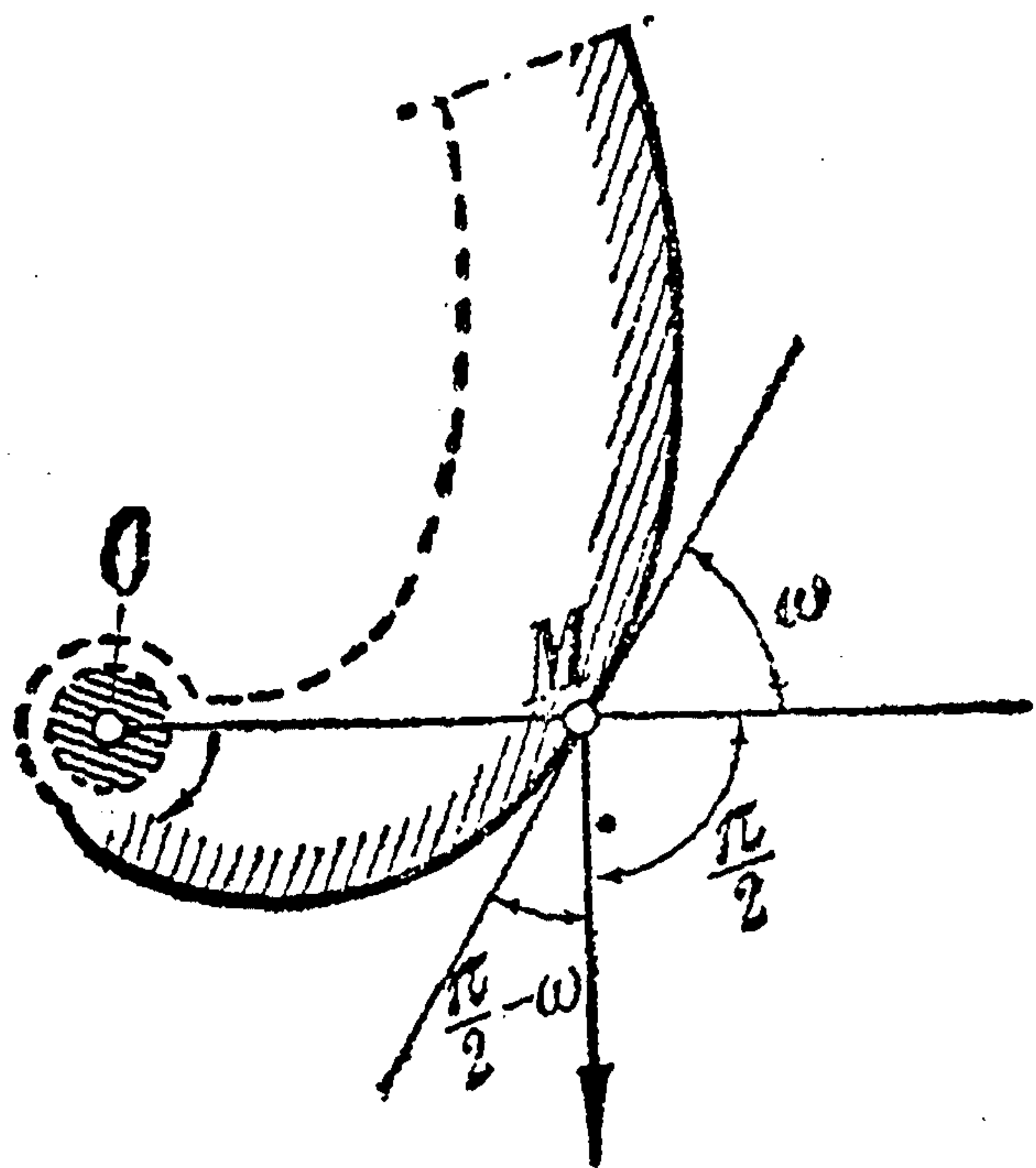
4. Отметим, что это свойство логарифмической спирали находит разнообразные применения. Напр., если по логарифмической спирали очертить *вращающийся нож* (в соломорезках и др. машинах), то „угол резания“, т. е. угол между



Черт. 204а).



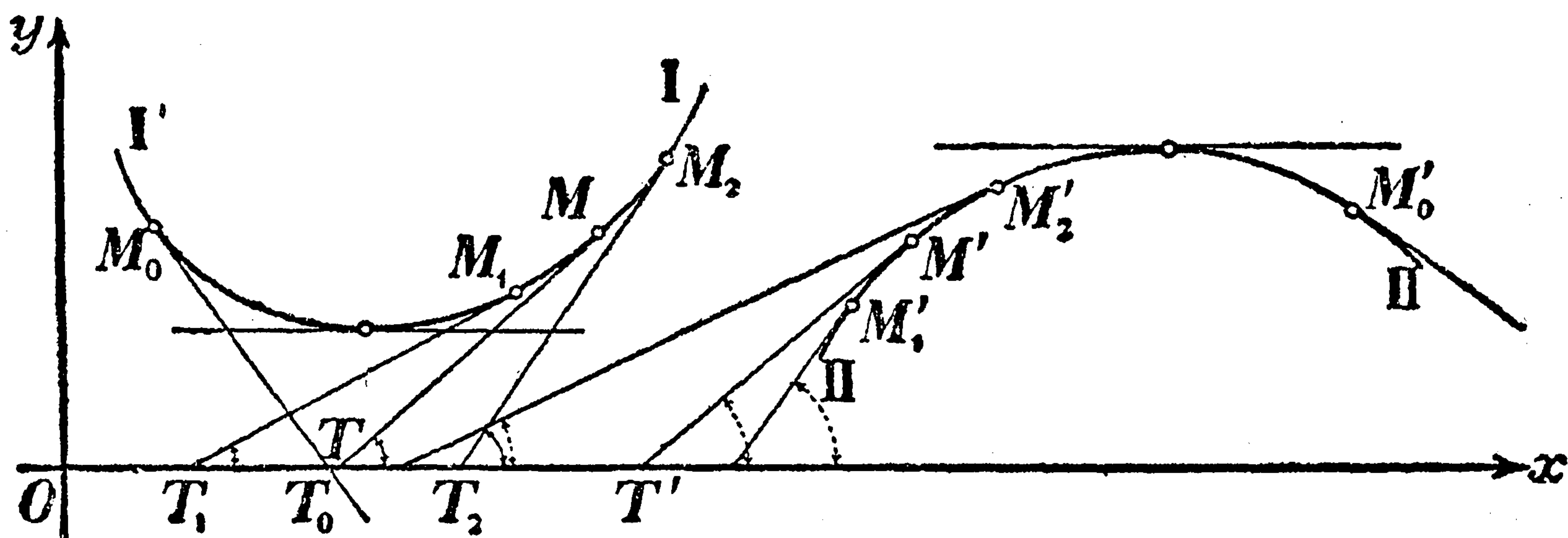
контуром ножа и направлением скорости будет постоянным (черт. 204b), причем — в зависимости от разрезаемого материала — можно этому углу придать любую величину. С аналогичной целью по дугам логарифмической спирали затачиваются и зубцы фрезы. Постоянство угла  $\omega$ , характерное для логарифмической спирали, лежит также и в основе теории спиральных подводов к гидравлическим турбинам, и т. п.



Черт. 204 b).

128. Выпуклость и вогнутость кривой. Рассмотрим теперь вопрос о том, в какую сторону (от касательной) кривая направлена своей вогнутостью (или выпуклостью). Из кривых, изображенных на черт. 205, для I кривой вогнутость направлена *вверх* от касательной (т. е. в сторону, указываемую *положительным* направлением оси  $Oy$ ), для II же кривой вогнутость направлена *вниз* (в сторону *отрицательного* направления оси  $Oy$ ). Постараемся теперь установить *аналитический* признак, по которому можно было бы судить о направлении вогнутости кривой в данной на ней точке  $M$ .

Если всмотреться в чертеж 205, то можно заметить, что для I кривой, при передвижении по ней точки  $M$  слева направо, угол касательной к кривой с осью  $Ox$  *увеличивается*; так, угол  $M_1T_1x$  больше угла  $M_2T_2x$  и угол  $M_2T_2x$  больше угла  $MTx$ . То же справедливо и для точек кривой I, лежащих левее ее наинизшей точки; в этом случае лишь следует рассматривать *отрицательные* углы между касательными и осью  $Ox$  и помнить, что отрицательная величина возрастает, если ее абсолютное



Черт. 205.

значение убывает. Для точек же II кривой, при передвижении по ней точки  $M'$  слева направо, наоборот, угол касательной к кривой с осью  $Ox$  *уменьшается*, как это видно из рассмотрения отмеченных углов; то же справедливо и для точек кривой II (вроде  $M'_0$ ) правее ее наивысшей гочки, если и для них иметь в виду сделанную выше оговорку.

Будем всегда под углом  $\alpha$  касательной с осью  $Ox$  разуметь *острый* угол, положительный или отрицательный. Тогда, в результате нашего исследования, можно сказать так:

*Кривая направлена вогнутостью вверх, если угол  $\alpha$  возрастает; она направлена вогнутостью вниз, если угол  $\alpha$  убывает* (в обоих слу-



чаях подразумевается, что  $x$  возрастает, т. е. точка передвигается по кривой слева направо).

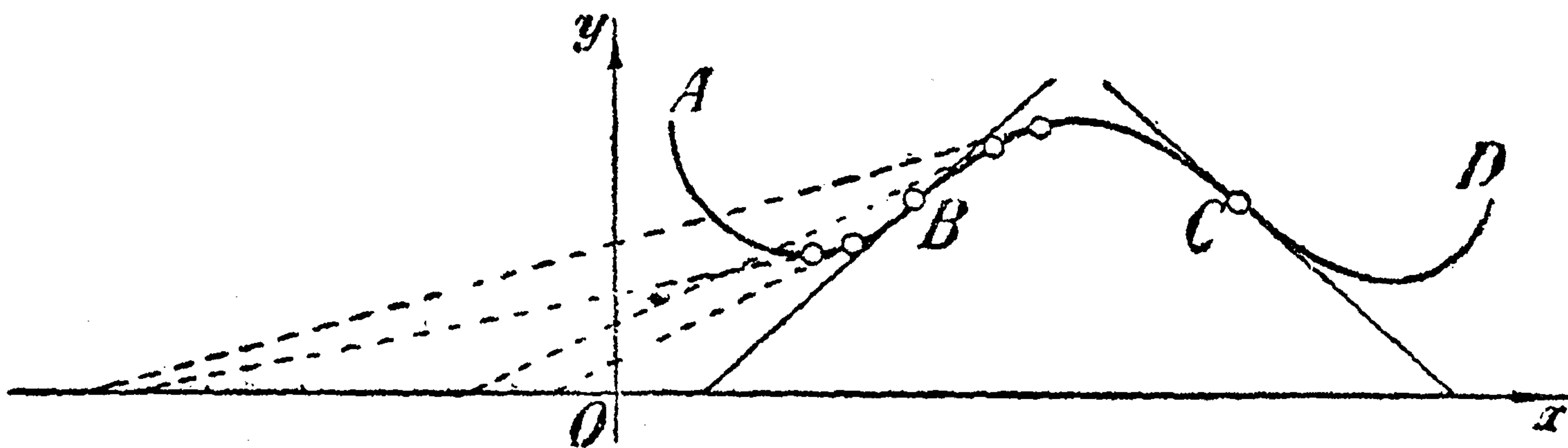
Так как  $\operatorname{tg} \alpha = y'_x$  возрастает или убывает одновременно с  $\alpha$ , то о возрастании или убывании  $\alpha$  можно судить по возрастанию или убыванию  $\operatorname{tg} \alpha$ , т. е.  $y'$ .

Таким образом, мы приходим к другой форме высказанного утверждения:

*Кривая направлена вогнутостью вверх, если производная  $y'$  возрастает; она направлена вогнутостью вниз, если  $y'$  убывает.*

Наконец, вспомним, что (при изменении  $x$ )  $y'$  является функцией от  $x$  и что для решения вопроса о возрастании или убывании функции  $y'$  удобнее всего обратиться к производной этой функции, т. е. ко второй производной  $y''$ ; если  $y'' > 0$ , то  $y'$  возрастает, если же  $y'' < 0$ , то  $y'$  убывает [ср. 76]. Это дает нам возможность представить выведенное правило, окончательно, в следующей форме, наиболее удобной на практике:

*Кривая направлена (вблизи данной точки) вогнутостью вверх, если (в этой точке)  $y'' > 0$ ; она направлена вогнутостью вниз, если  $y'' < 0$ .*



Черт. 206.

Все эти правила предполагают, что ось  $Oy$  сама направлена *вверх*, как обыкновенно и бывает. Однако все же иной раз приходится сталкиваться с случаями, когда ось  $Oy$  удобнее направить *вниз* (сохраняя, скажем, направление  $Ox$  направо). Тогда направление отсчета угла  $\alpha$  считают положительным в сторону вращения часовой стрелки, и все сказанное выше о направлении вогнутости останется в силе, если переставить слова „вверх“ и „вниз“. Можно сформулировать последнее правило в такой форме, чтобы оно годилось во всех случаях:

*Кривая направлена вогнутостью в сторону положительного направления оси  $Oy$ , если  $y'' > 0$ ; она направлена вогнутостью в сторону отрицательного направления оси  $Oy$ , если  $y'' < 0$ .*

**Задачи.** Определить (считая ось  $Oy$  идущей вверх) направление вогнутости для следующих кривых: 1.  $y = e^x$ . *Отв.* Вверх. 2.  $y = x^n$ , где  $n$  — целое число, отличное от 0 и 1. *Отв.* При  $n$  четном, всегда вверх, при  $n$  нечетном — вверх, если  $x > 0$ , вниз, если  $x < 0$ . 3.  $y = \log x$ . *Отв.* Вниз. 4.  $y = \sin x$ . *Отв.* Вниз, когда  $\sin x > 0$ ; вверх, когда  $\sin x < 0$ ; короче — всегда к оси  $Ox$ . 5.  $y = \operatorname{tg} x$ . *Отв.* Всегда от оси  $Ox$ . 6.  $y = \operatorname{ach} \frac{x}{a}$  — цепная линия. *Отв.* Вверх.

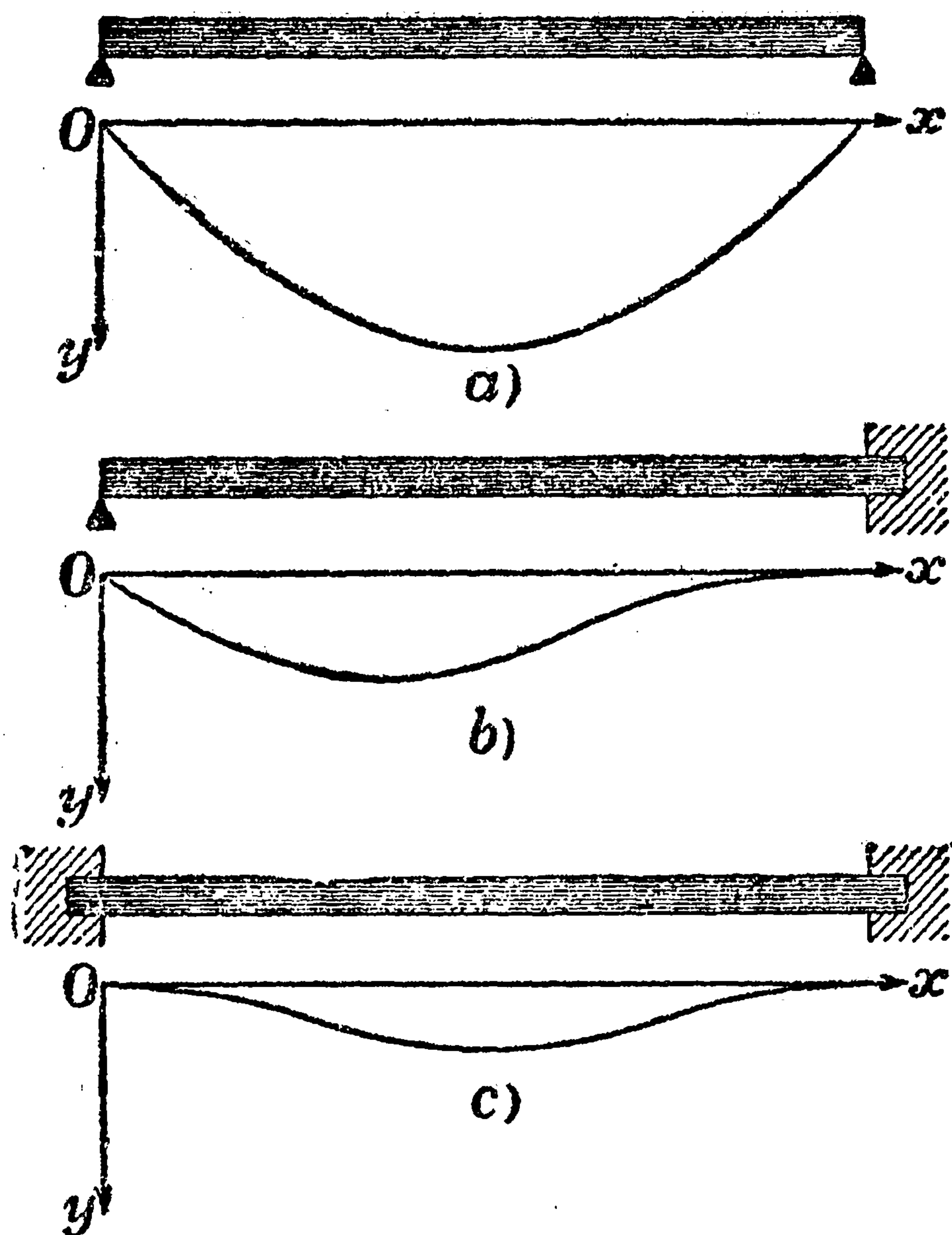
**129. Точки перегиба.** Может случиться, что кривая, выражаемая явным уравнением  $y = f(x)$ , в одних своих частях направлена вогнутостью в одну сторону, в других же частях — в другую. Так, кривая, изображенная на черт. 206, в первой части  $AB$  и в третьей части  $CD$  направлена вогнутостью вверх, а во второй части  $BC$  — вниз. У нас уже



был подобный случай [см. прим. 2, 4, 5 в 128] по отношению к кривым  $y = x^n$  (при  $n$  нечетном),  $y = \sin x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ . В точке, разделяющей две части кривой, в которых вогнутость направлена в разные стороны, кривая как бы переходит с одной стороны касательной на другую. Такое явление называется *перегибом* и сама точка носит название *точки перегиба*. [Мы уже встречались с точками перегиба в теории максимумов и минимумов, 78, но при том частном предположении, что касательная горизонтальна.]

Вспоминая зависимость между направлением вогнутости кривой и возрастанием или убыванием  $y'$  [см. 128], можно сказать, что в точке перегиба  $y'$  переходит от возрастания к убыванию, или обратно, т. е. *первая производная  $y'$  (но не сама функция  $y = f(x)$ !) имеет максимум или минимум.*

На черт. 206, напр., можно усмотреть, что, при приближении точки вдоль по кривой к точке  $B$  слева, угол касательной с осью  $Ox$  возрастает; при удалении же точки от точки  $B$  направо этот угол уже убывает. Здесь точка перегиба  $B$  отвечает максимуму углового коэффициента  $y'$ . Если читатель просмотрит чертежи (напр., 27, 67, 83, 92, 94  $a$  и  $b$ ), где на ряду с графиком функции представлен и график ее



Черт. 207.

производной, то заметит, что во всех случаях вершинам графика производной отвечают точки перегиба графика самой функции.

Ясно, что в точке перегиба *необходимо*  $y'' = (y')'$  равна нулю (наподобие того, как в точке, где  $y$  имеет максимум или минимум, всегда  $y' = 0$ ). Вместе с тем, это условие еще недостаточно: нужно чтобы  $y''$ , обращаясь в нуль в данной точке, *меняла при этом знак* [ср. с первым правилом 79]. Если, для примера, взять функцию  $y = x^n$  (где  $n$  — целое число  $> 2$ ), то видим, что  $y'' = n(n-1)x^{n-2}$  обращается в нуль при  $x = 0$ . Если  $n$  — нечетное число (а с ним и  $n-2$ ), то это выражение меняет знак вместе с  $x$ , следовательно, здесь будет точка перегиба. При  $n$  — четном (тогда и  $n-2$  четное), наоборот, для  $x \geq 0$  вторая производная сохраняет знак (+), следовательно, перегиба нет.

Короче говоря, так как разыскание точек перегиба сводится к разысканию точек, где производная  $y'$  имеет максимум или минимум, то здесь находит себе применение все, что было по этому поводу сказано в 79 и 80.

*Примеры.* 1. Рассмотрим вновь три случая изгиба балок, нагруженных равномерно по всей длине, при различных условиях закрепления их концов (черт. 207



$a, b, c$ ); как видим, в случае  $a$ ) концы балки подперты, в случае  $b$ ) один конец подперт, а другой наглухо заделан в стену, в случае же  $c$ ) оба конца наглухо заделаны. Если оси координат выбрать так, как указано на чертеже, то уравнения изогнутых осей балок будут, соответственно, таковы [мы с ними уже имели дело в 83, 3]:

$$a) y = c(l^3x - 2lx^2 + x^3), \quad b) y = \frac{1}{2}c(l^3x - 3lx^2 + 2x^3), \quad c) y = c(l^2x^2 - 2lx^3 + x^4),$$

где  $l$  — длина балки, а  $c$  — некоторая постоянная. Для вторых производных без труда получим следующие выражения:

$$a) y'' = c(-12lx + 12x^2) = 12cx(x - l);$$

$$b) y'' = \frac{1}{2}c(-18lx + 24x^2) = 12cx\left(x - \frac{3}{4}l\right);$$

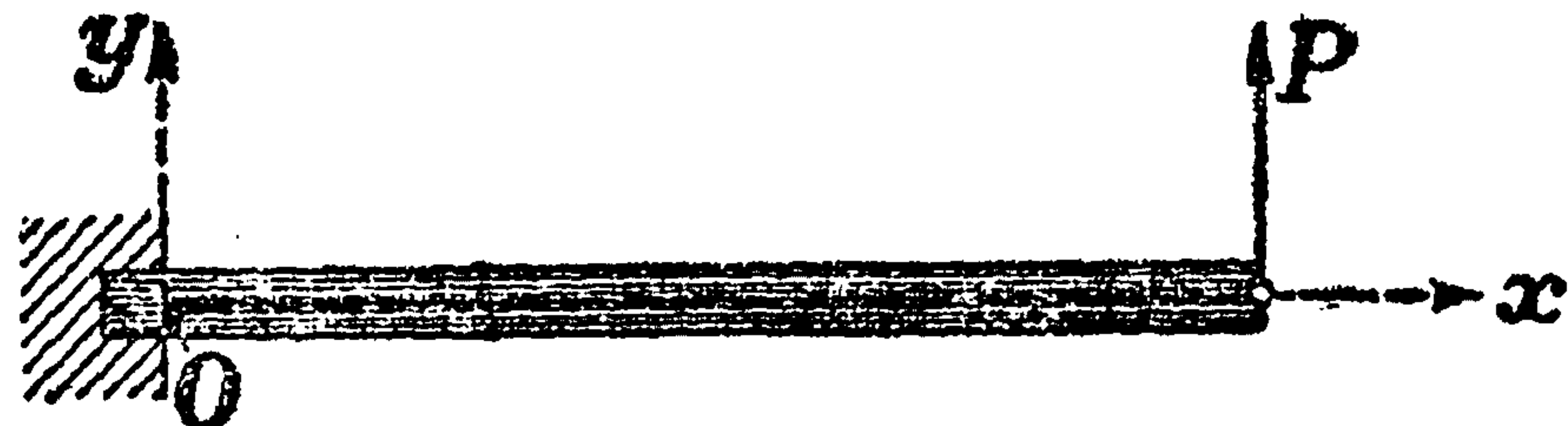
$$c) y'' = c(2l^2 - 12lx + 12x^2) = 12c\left(x^2 - lx + \frac{l^2}{6}\right).$$

Корнями их будут

$$a) x_1 = 0, \quad x_2 = l, \quad b) x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{4}l,$$

$$c) x_1 = \frac{l}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,211l, \quad x_2 = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0,789l.$$

Не трудно сообразить, что при переходе через эти значения вторые производные, действительно, меняют знак. Но в случае  $a$ ) оба корня приходятся на концы рассматриваемого промежутка и поэтому не представляют интереса; то же можно сказать и о первом корне в случае  $b$ ). Таким образом, в случае  $a$ ) вовсе нет перегибов, в случае  $b$ ) один перегиб, в случае  $c$ ) — два. Изображения изогнутых осей даны на том же чертеже (причем для оси  $Oy$  взят больший масштаб, чем для оси  $Ox$ ). Пусть читатель сопоставит их со своими собственными графиками, начерченными при решении зад. 19, 31. Знание истинного положения точек перегиба позволяет придать графику большую точность.



Черт. 208.

2. Пусть один конец балки заделан, а другой свободен (черт. 208), балка равномерно нагружена грузом  $Q$  и, кроме того, к свободному концу балки, приложена сосредоточенная сила  $P$ , направленная вверх. Уравнение изогнутой оси балки будет иметь вид:

$$y = \frac{Pl^3}{2EI}\left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{3l^3}\right) - \frac{Ql^3}{2EI}\left(\frac{x^2}{2l^2} - \frac{x^3}{3l^3} + \frac{x^4}{12l^4}\right)$$

определить ее точки перегиба; начертить изогнутую ось для случаев  $Q = 4P$ ,  $Q = 2P$ ,  $Q = 2,5P$ . Отв. Точка перегиба при  $x = l \frac{Q - 2P}{Q}$ , если  $Q > 2P$ ; в противном случае нет точек перегиба.

130. Дифференциал дуги кривой. Перейдем к вопросу об определении длины дуги кривой. Предварительно сформулируем следующее простое утверждение:

На кривой (черт. 209) взяты две точки  $M$  и  $M'$ . Если точка  $M'$ ,



передвигаясь вдоль по кривой, стремится к совпадению с точкой  $M$ , то предел отношения дуги  $MM'$  к хорде  $MM'$  будет 1.

Это утверждение аналогично утверждению о пределе отношения синуса дуги к дуге, доказанному в 22.

На случай, если оно не покажется читателю достаточно убедительным, мы приводим его доказательство. Рассмотрим точку  $M'$  в положении уже настолько близком к  $M$ , чтобы дуга  $MM'$  была направлена вогнутостью в определенную сторону (так что между  $M$  и  $M'$  нет точек перегиба), и проведем в точках  $M$ ,  $M'$  касательные, которые пересекутся в точке  $K$ . Очевидно, длина дуги  $MM'$  будет больше хорды  $MM'$ , но меньше суммы отрезков  $MK$  и  $KM'$  касательных:

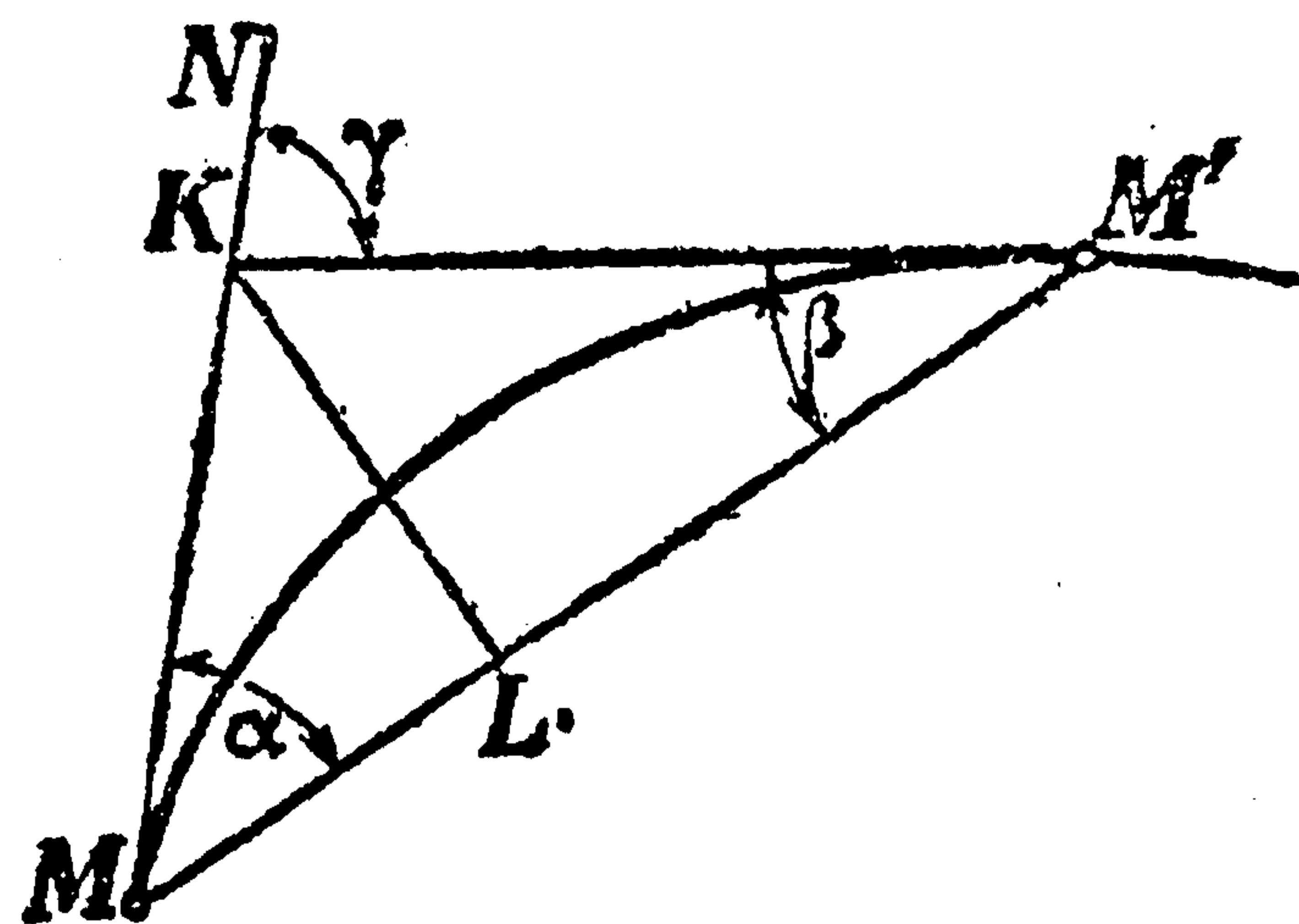
$$MM' < \overset{\smile}{MM'} < MK + KM'. \quad (31)$$

Если спроектировать отрезки  $MK$  и  $KM'$  на хорду, то получатся отрезки  $ML$  и  $LM'$ . При этом

$$MK = \frac{ML}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad KM' = \frac{LM'}{\cos \beta},$$

если через  $\alpha$  и  $\beta$  обозначить, соответственно,  $\sphericalangle KML$  и  $\sphericalangle KM'L$ . Но углы  $\alpha$  и  $\beta$   $\triangle$ -ка  $MKM'$  меньше (внешнего) угла  $\gamma = \sphericalangle M'KN$  между касательными, так что  $\cos \alpha > \cos \gamma$  и  $\cos \beta > \cos \gamma$ . Поэтому

$$MK < \frac{ML}{\cos \gamma} \quad \text{и} \quad KM' < \frac{LM'}{\cos \gamma},$$



Черт. 209.

ибо в выражениях для  $MK$  и  $KM'$  мы заменили знаменатели *меньшим* числом.

Подставляя в правую часть неравенств (31), вместо отрезков  $MK$  и  $KM'$ , эти (бóльшие их) дроби, после сложения дробей и замены  $ML + LM'$  через  $MM'$ , получим:

$$MM' < \overset{\smile}{MM'} < \frac{MM'}{\cos \gamma},$$

наконец, разделяя на  $MM'$ , мы заключим отношение  $\frac{\overset{\smile}{MM'}}{MM'}$  между двумя границами

$$1 < \frac{\overset{\smile}{MM'}}{MM'} < \frac{1}{\cos \gamma}.$$

Станем теперь приближать  $M'$  к  $M$ ; тогда касательная в точке  $M'$  будет стремиться совпасть с касательной в точке  $M$ , угол  $\gamma$  между ними будет безгранично убывать, а его косинус (а с ним и обратная величина:  $\frac{1}{\cos \gamma}$ ) будет стремиться

к 1. Отношение  $\frac{\overset{\smile}{MM'}}{MM'}$ , заключенное между единицей и *стремящейся к единице* дробью  $\frac{1}{\cos \gamma}$ , очевидно, также стремится к единице, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что дана некоторая кривая  $y = f(x)$ , и станем искать длину дуги этой кривой между какими-нибудь двумя ее точками  $A$  и  $B$  (черт. 210). Нам удобнее рассматривать сначала *переменную* дугу  $AM$ , начало которой  $A$  сохраняется неизменным, а конец  $M$  передвигается по кривой. Тогда длина  $s$  этой переменной дуги будет *функ-*



цией от абсциссы  $x$  точки  $M$ : каждому значению  $x$  (в установленных для него пределах) соответствует определенное положение точки  $M$  на кривой и, следовательно, определенное значение длины  $s$  дуги  $AM$ .

Предложим себе найти производную от этой переменной дуги  $s = \overset{\frown}{AM}$  по абсциссе  $x$ . С этой целью придадим выбранному значению  $x$  приращение  $\Delta x$ , вследствие чего точка  $M$  перейдет в положение  $M'$  и дуга  $s = \overset{\frown}{AM}$  получит приращение  $\Delta s = \overset{\frown}{MM'}$ . Как мы помним [54], производная  $s'_x$  есть предел отношения  $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ , при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Преобразуем это отношение:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\overset{\frown}{MM'}}{MM'} \cdot \frac{MM'}{\Delta x},$$

но, по теореме Пифагора,

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

так что

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\overset{\frown}{MM'}}{MM'} \cdot \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x} = \frac{\overset{\frown}{MM'}}{MM'} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$ , точка  $M'$  приближается к  $M$  и первый множитель справа, по упомянутой вначале лемме, стремится к 1; второй же стремится к  $\sqrt{1 + y_x'^2}$ , ибо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$$

Итак,

$$s'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + y_x'^2}. \quad (32)$$

Представляя производные  $s'_x$  и  $y'_x$  в виде  $\frac{ds}{dx}$  и  $\frac{dy}{dx}$  и возводя в

квадрат предыдущее равенство, легко придем к простому и легко

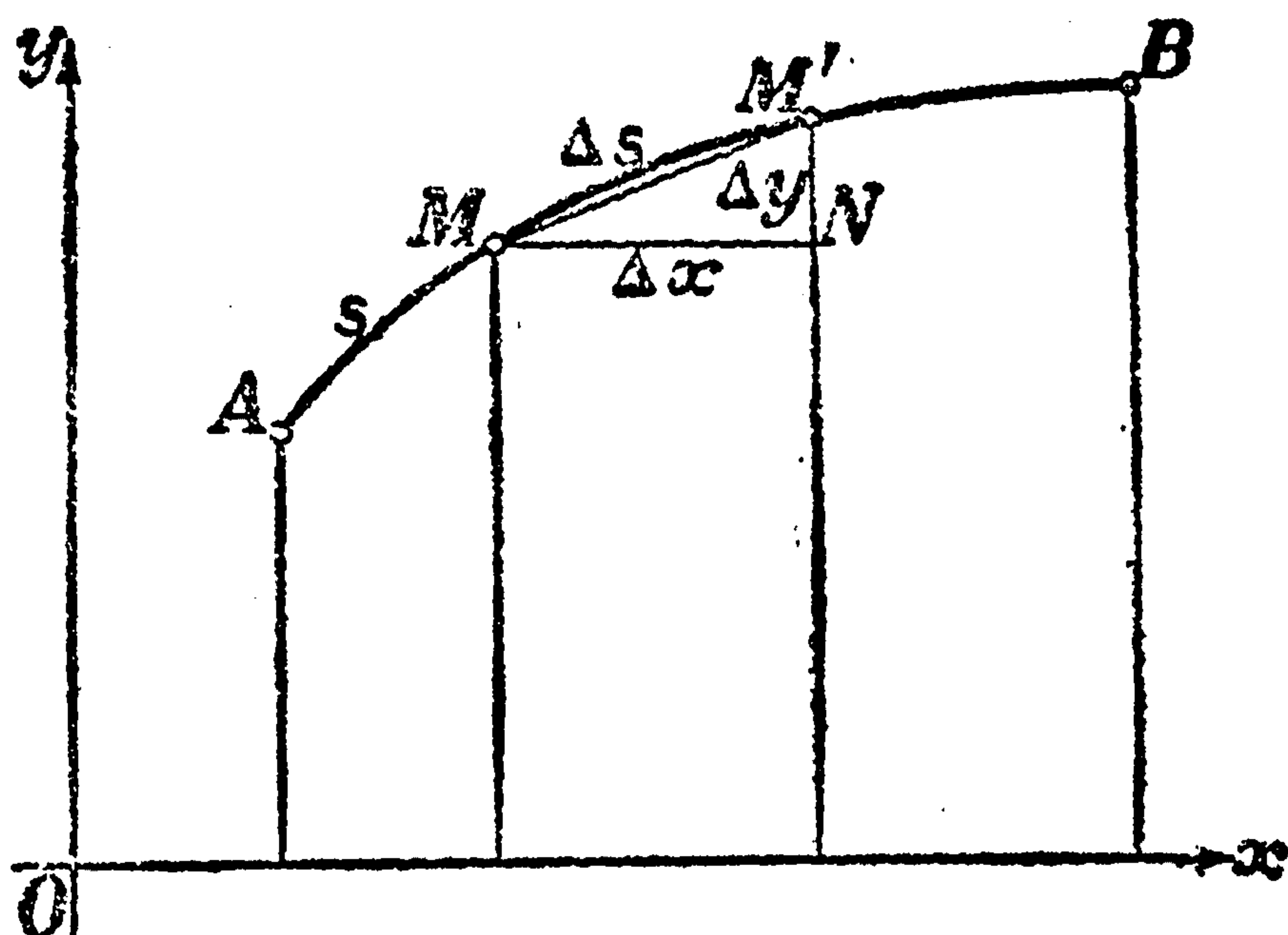
запоминаемому соотношению, выражающему квадрат дифференциала дуги

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (33)$$

Если приближенно заменить дифференциалы  $ds$  и  $dy$  функций  $s$  и  $y$  (от  $x$ ) их приращениями  $\Delta s$  и  $\Delta y$ , то эта формула примет вид:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2;$$

в свою очередь,  $\Delta s$  можно приближенно же заменить хордой  $MM'$ , а тогда последнее равенство непосредственно прочитывается из прямоугольного  $\triangle MM'N$  (черт. 210). В сущности, приведенное выше



Черт. 210.



рассуждение есть лишь строгое изложение простой мысли о переходе отсюда к соотношению (33).

**131. Вычисление длины дуги.** I. В предыдущем п<sup>o</sup> было найдено выражение для производной от длины дуги  $s$  по  $x$ ; сама длина дуги  $s$  отсюда, естественно, получается *интегрированием*. Для примера возьмем цепную линию (черт. 155);

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

и будем искать длину дуги  $s$  между самой низшей точкой ее  $L$  и произвольной точкой  $M$  (справа от  $L$ ). Мы имели уже в 120:

$$1 + y'^2 = \frac{1}{4} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a};$$

отсюда, по формуле (32),

$$s'_x = \sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad (34)$$

и, наконец,

$$s = \frac{1}{2} \int \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) + C$$

или — короче —

$$s = \int \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a} + C.$$

Постоянная интегрирования  $C$  определяется из следующих соображений. Так как за начало отсчета дуг мы выбрали точку  $L$ , абсцисса которой  $x=0$ , то выражение для дуги  $s$  должно обращаться в нуль при  $x=0$ , а это дает  $C=0$ . Итак, имеем окончательно:

$$s = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{a}. * \quad (35)$$

(Если бы за начало отсчета дуг мы выбрали другую точку, вместо  $L$ , то нам пришлось бы приписать постоянной  $C$  другое значение.)

Вспоминая выражение для  $y' = \operatorname{tg} \alpha$  ( $\alpha$  — угол касательной с осью  $Ox$ ), видим, что  $s = ay' = a \operatorname{tg} \alpha$ . Таким образом, в  $\triangle MPK$  [см. построение касательной к цепной линии в 120 и черт. 155] катет  $MK = a \operatorname{tg} \alpha$  в точности равен дуге  $s = \frown LM$ . Мы получили простой способ *спрямления дуги* цепной линии.

Заметим, что если точку  $M$  взять *слева* от  $L$ , то для вычисления длины  $\frown LM$  можно воспользоваться тем же выражением (35); но так

\* Этим выражением для дуги цепной линии мы уже пользовались при решении зад. 7, 51.



как с изменением знака  $x$  меняется и знак правой части равенства, мы получим длину дуги со знаком (—). Если считать дуги, откладываемые в одну сторону от  $L$  — положительными, а в другую — отрицательными, то величина дуги, включая сюда и знак, будет выражаться формулой (35) правильно, как для  $x > 0$ , так и для  $x < 0$ .

II. Рассмотрим теперь случай, когда кривая задана *параметрическими уравнениями*:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (36)$$

так что положение точки на кривой определяется значением параметра  $t$ . Выберем за начальную точку отсчета дуг точку  $A$ , отвечающую некоторому значению параметра  $t_0$ . Тогда дуга  $s$  от точки  $A$  до переменной точки  $M$ , определяемой любым значением  $t$ , будет, очевидно, функцией от  $t$ . Ее производная по  $t$  найдется проще всего из формулы (33), если разделить ее почленно на  $dt^2$ :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad \text{или} \quad (s'_t)^2 = (x'_t)^2 + (y'_t)^2,$$

откуда

$$s'_t = \pm \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}. \quad (37)$$

Извлекая корень, мы перед корнем поставили двойной знак. Выбор его прост: если дуга  $s$  возрастает с возрастанием  $t$  (что обыкновенно и предполагается), то  $s'_t$  должна быть  $> 0$ , и при корне берут знак (+); в противном случае — знак (—).

И здесь снова, зная производную от переменной дуги  $s$  по  $t$ , саму дугу находят интегрированием. В качестве примера возьмем циклоиду [черт. 171, 113]:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Мы уже имели выражения (21) [126] для  $x'_t$  и  $y'_t$ , откуда:

$$s'_t{}^2 = x'_t{}^2 + y'_t{}^2 = a^2 [(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t] = 2a^2 (1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Извлекая корень и принимая во внимание, что, при  $0 < t < 2\pi$ ,  $\sin \frac{t}{2} > 0$ , получим:

$$s'_t = 2a \sin \frac{t}{2}, \quad (38)$$

так что

$$s = 2a \int \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} + C.$$

Пока мы не выбрали начальную точку отсчета дуг, постоянная  $C$  остается неопределенной. Пусть начальная точка отвечает  $t=0$ , тогда выражение для  $s$  должно обратиться в 0 при  $t=0$ , откуда  $C=4a$ .



Итак, при сделанном выборе начальной точки,

$$s = 4a \left( 1 - \cos \frac{t}{2} \right).$$

Желая вычислить длину  $S$  целой арки циклоиды, положим здесь  $t = 2\pi$ , тогда  $S = 8a$ .

Формуле (37) можно дать и механическое истолкование. С этой целью, рассмотрим точку, которая движется по некоторой кривой так, что уравнения (36) являются ее *уравнениями движения*, определяющими положение точки в любой момент времени  $t$ . Как мы знаем [52, 54], ее скорость  $v$  выразится производной от дуги  $s$  по времени  $t$ ; пользуясь (37), теперь мы можем написать:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}. \quad (39)$$

Вернемся, например, к движению точки катящегося по прямой круга, описывающей циклоиду. Если предположить круг *равномерно* катящимся, так что угловая скорость  $\omega$  его вращения постоянна, то тот угол  $\sphericalangle MDC$  (черт. 171), который мы раньше выбирали за параметр и обозначали через  $t$ , теперь выразится произведением  $\omega$  на время  $t$ , протекшее от начала движения. Уравнения движения примут вид:

$$x = a(\omega t - \sin \omega t), \quad y = a(1 - \cos \omega t),$$

откуда нетрудно получить (как и выше), что

$$v = 2a\omega \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Начинается и кончается движение с нулевой скоростью ( $v = 0$  при  $\omega t = 0$  или  $2\pi$ ), наибольшей величины скорость достигает в наивысшем положении точки ( $v = 2a\omega$  при  $\omega t = \pi$ ).

Формула (39) становится особенно наглядной, если рассматривать точку как бы участвующей одновременно в двух движениях — в движении, параллельном оси  $Ox$ , со скоростью  $\frac{dx}{dt}$ , и в движении, парал-

лельном оси  $Oy$ , со скоростью  $\frac{dy}{dt}$ . По этим *слагающим* скорости по осям координат результирующая скорость, как известно, получается по „правилу параллелограмма“, и теорема Пифагора сразу дает для ее величины выражение (39).

III. Наконец, остановимся на предположении, что кривая задана *полярным уравнением*. Мы уже видели в 127, что тогда формулы (27) можно рассматривать как параметрические уравнения кривой, если параметром считать полярный угол  $\theta$ . Следовательно, к настоящему случаю



можно применить снова основную формулу (37) заменив лишь в ней  $t$  на  $\theta$ :

$$s'_\theta = \sqrt{x'_\theta{}^2 + y'_\theta{}^2}$$

[считая дугу возрастающей с возрастанием  $\theta$ , мы сохраняем перед корнем знак (+)]. Производные  $x'_\theta$  и  $y'_\theta$  уже были вычислены в 127 [см. (28)]; возводя их в квадрат и складывая, после очевидных упрощений, получим:

$$s'_\theta = \sqrt{r^2 + r'^2}. \quad (40)$$

Применим эту формулу, напр., к логарифмической спирали [118, черт. 204]:

$$r = ae^{m\theta}.$$

Очевидно,  $r' = mae^{m\theta} = mr$ , так что, наоборот,  $r = \frac{r'}{m}$ ; подставив это в (40), найдем:

$$s'_\theta = \sqrt{r'^2 + \frac{r'^2}{m^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \cdot r',$$

так что

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \cdot r'_\theta d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \cdot r + C.$$

Если вспомнить [127, (30)], что для логарифмической спирали  $\operatorname{tg} \omega = \frac{1}{m}$ , то можно будет переписать эту формулу так:

$$s = \frac{r}{\cos \omega} + C. \quad (41)$$

Постоянная интегрирования определится, если мы выберем начальную точку для отсчета дуг; взяв в качестве нее точку  $M_0$  (черт. 204 *a*), которой отвечает радиус-вектор  $r_0$ , мы должны при  $r = r_0$  по формуле (41) получить нуль. Отсюда  $C = -r_0/\cos \omega$  и, окончательно.

$$\curvearrowright M_0 M = s = \frac{r - r_0}{\cos \omega}. \quad (42)$$

Всего проще отсчитывать дугу от полюса, которому соответствуют  $r_0 = 0$  (хотя, собственно говоря, полюс и не принадлежит кривой, которая вокруг него бесконечное множество раз заворачивается, но его условно можно считать как бы последней, предельной ее точкой). Тогда предыдущая формула приобретает особенно простой вид:

$$\curvearrowright OM = s = \frac{r}{\cos \omega}. \quad (42a)$$

Если через полюс  $O$  (черт. 204 *a*) провести прямую, перпендикулярную



к радиусу-вектору, то отрезок  $MT$ , отсекаемый ею на касательной, будет иметь как раз такую же величину (что легко усмотреть из прямоугольного  $\triangle MOT$ ). Таким образом,

$$\frown OM = MT, \quad (43)$$

и мы получили весьма простой способ *спрямления* дуги логарифмической спирали!

132. Примеры и задачи. 1. Вычислить длину дуги полукубической параболы

$$y = \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}}$$

от вершины ее  $A$  с абсциссой 1 до любой точки  $M$  с абсциссой  $x > 1$ .

*Решение.* Имеем [по формуле (32)]:

$$y_{x'} = (x-1)^{\frac{1}{2}}, \quad s_{x'} = \sqrt{1 + (x-1)} = x^{\frac{1}{2}},$$

$$s = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C;$$

так как, при  $x = 1$ , должно быть:  $s = 0$ , то  $C = -\frac{2}{3}$ , и окончательно:

$$\frown AM = s = \frac{2}{3} \left( x^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

2. Вычислить длину астроида, пользуясь ее неявным уравнением (58), 114 (черт. 195).

*Решение.* В зад. 3, 123, мы уже имели выражение для производной:

$$y_{x'} = - \left( \frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{3}};$$

тогда формула (32) нам даст (если снова воспользоваться уравнением астроида):

$$s_{x'} = \sqrt{1 + \left( \frac{y}{x} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Возьмем за начальную точку — точку  $A$ , для которой  $x = 0$ , и вычислим длину дуги  $AM$  до любой точки на жирно начерченной части кривой. Имеем:

$$s = \int a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx + C = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} + C.$$

Постоянная  $C$ , во внимание к выбору начальной точки, очевидно, будет нулем. Так как точка  $B$  имеет абсциссу  $x = a$ , то дуга  $\frown AB$  будет иметь длину

$$\frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} a,$$

а вся астроида — э четверо большую длину  $S = 6a$ .



3. Найти длину одной арки эписцилоиды [114, черт. 172]:

$$x = a [(1 + m) \cos mt - m \cos (1 + m)t]$$

$$y = a [(1 + m) \sin mt - m \sin (1 + m)t]$$

от  $t = 0$  до  $t = 2\pi$ .

*Решение.* Мы уже имели в 126 выражения (24) для  $x'_t$  и  $y'_t$ , откуда:

$$s_t'^2 = x_t'^2 + y_t'^2 = 4 a^2 m^2 (1 + m)^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

и (если  $0 \leq t \leq 2\pi$ ),

$$s'_t = 2am(1 + m) \sin \frac{t}{2}, \quad (44)$$

наконец,

$$s = 2am(1 + m) \int \sin \frac{t}{2} dt = -4am(1 + m) \cos \frac{t}{2} + C.$$

Отсчитывая дуги от точки  $A$  (черт. 172), соответствующей  $t = 0$ , мы должны положить  $C = 4am(1 + m)$ , так что

$$s = 4am(1 + m) \left(1 - \cos \frac{t}{2}\right).$$

Для длины  $S$  целой арки кривой (полагая  $t = 2\pi$ ) будем иметь:

$$S = 8am(1 + m).$$

4. Вычислить длину дуги эвольвенты круга [115, черт. 175]

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

от точки  $A$ , для которой  $t = 0$ , до любой точки  $M$ .

*Отв.*  $s = \frac{at^2}{2}$ .

5. Определить длину кардиоиды, исходя из ее полярного уравнения [119, черт. 183с):

$$r = 2a(1 + \cos \theta).$$

*Решение.* Имеем:  $r' = -2a \sin \theta$  и [по формуле (40)]

$$s_\theta' = 2a \cdot \sqrt{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2} = 2a \cdot \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 4a \cdot \cos \frac{\theta}{2} \quad (45)$$

[чтобы не иметь дела с знаками, ограничиваемся верхней половиной кривой, для точек которой  $0 \leq \theta \leq \pi$ , так что  $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ ]; затем,

$$s = \int 4a \cdot \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \cdot \sin \frac{\theta}{2} + C.$$

Если за начало отсчета дуг взять точку, отвечающую  $\theta = 0$ , то и  $C = 0$ . Полагая  $\theta = \pi$ , найдем для верхней половины кривой длину  $8a$ , следовательно, длина всей кривой будет  $S = 16a$ .

(Если вспомнить, что кардиоиды является частным случаем эписцило-



иды, при  $m=1$ , то можно проверить полученный ответ по ответу на зад. 3, положив там  $m=1$ ).

Другие примеры на вычисление длин дуг будут предложены читателю в главе XI, после того как он ознакомится с интегрированием более сложных выражений [см. 180].

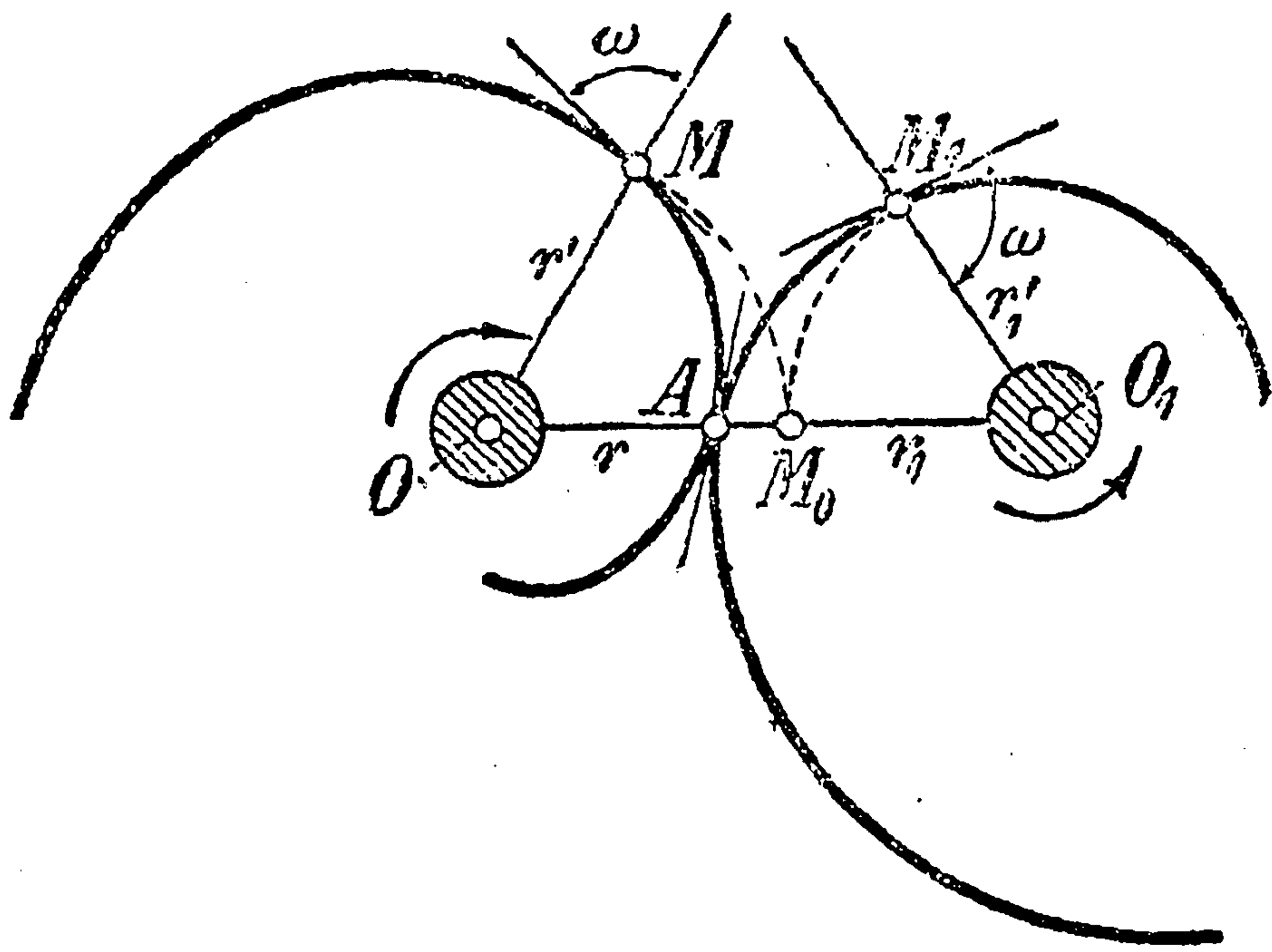
6. Доказать, что если логарифмическая спираль (черт. 204a) катится без скольжения по прямой  $TM$ , то полюс ее  $O$  (если считать его неизменно связанным с кривою) движется по некоторой прямой.

*Доказательство.* Пусть при катании спирали ее точка  $M_1$  перейдет в положение  $M'$  и станет новой точкой касания, вместо  $M$ . Так как катание происходит без скольжения, то

$$\sphericalangle MM_1 = MM'.$$

Мы знаем уже [131, (43)], что прямая  $OT \perp OM$  отсекает на касательной в точке  $M$  отрезок  $MT$ , равный  $\sphericalangle OM$ . В новом положении спирали аналогично построенная прямая должна на той же касательной отсечь, считая от  $M'$ , отрезок, равный  $\sphericalangle OM'$ . В виду предыдущего равенства, ясно, что это будет именно отрезок  $M'T$ , т. е. что положение точки  $T$  на неподвижной касательной остается неизменным. Через эту точку пройдет прямая, проведенная через новое положение полюса  $O'$  перпендикулярно к радиус-вектору  $O'M'$  (представляющему радиус-вектор  $OM_1$  в новом положении); но эта прямая  $O'T$  с неподвижной касательной должна составить тот же угол  $\frac{\pi}{2} - \omega$ , что и

прямая  $OT$  [ибо для логарифмической спирали угол  $\omega = \text{пост.}$ , 127], следовательно, обе прямые  $OT$  и  $O'T$  на деле сливаются, и новое положение полюса  $O'$  лежит на неизменной прямой  $OT$ , что и требовалось доказать.



Черт. 211a.

Изложенные в 127 и 131 свойства логарифмической спирали находят себе интересное кинематическое применение в зубчатых колесах, очерченных по дугам такой спирали. В основе теории этих колес лежит возможность катания логарифмической спирали по другой тождественной с ней спирали *без скольжения* при вращении обеих вокруг их полюсов [ср. теорию эллиптических колес 125, 1°, черт. 199]. Представим себе две *тождественных* спирали (211a) с полюсами в точках  $O$  и  $O_1$ , касающиеся в точке  $A$ ; пусть первая из них вращается вокруг полюса  $O$  по часовой стрелке, а вторая — вокруг своего полюса  $O_1$  против часовой стрелки. Возьмем произвольную точку  $M$  первой спирали; на второй же найдем такую точку  $M_1$ , чтобы (при обозначениях чертежа) было:

$$r' + r_1' = r + r_1. \quad (46)$$

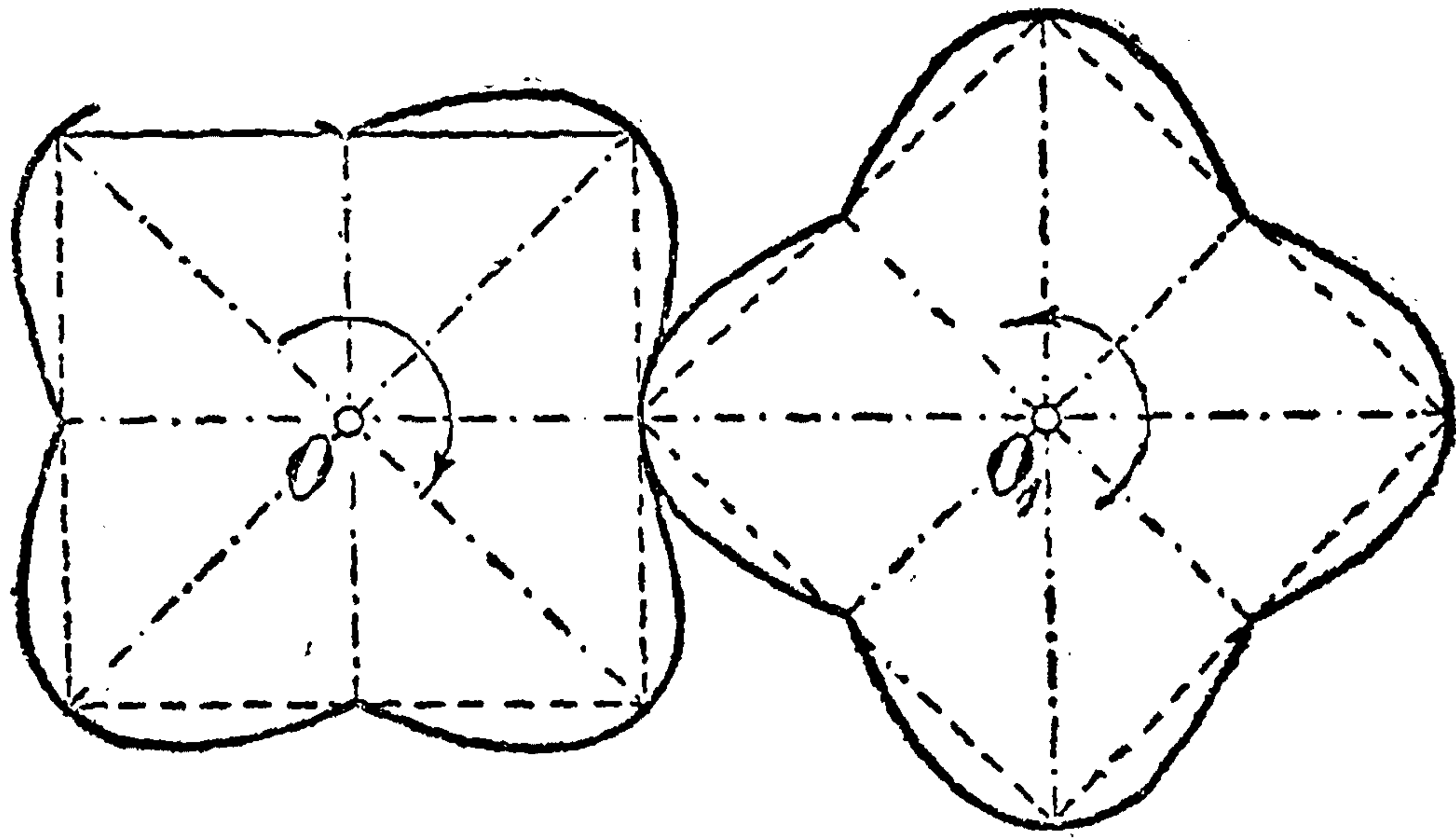
Тогда, если обе эти точки (при вращении спиралей) придут одновременно на прямую  $OO_1$ , они непременно совпадут в одной точке,  $M_0$ . Так как касательные в этой точке к обеим спиральям должны составлять с прямой  $OO_1$  один и тот же угол  $\omega$ , то эти касательные сольются, т. е. кривые в  $M_0$  будут касаться. При этом, в силу (42),

$$\sphericalangle AM = \frac{r' - r}{\cos \omega}, \quad \sphericalangle AM_1 = \frac{r_1 - r_1'}{\cos \omega};$$

но из соотношения (46) ясно, что  $r' - r = r_1 - r_1'$ , так что  $\sphericalangle AM = \sphericalangle AM_1$ . Этим и доказано, что вращающиеся спирали могут катиться одна по другой без скольжения. С помощью зубчатой нарезки это катание фактически осуществляется.

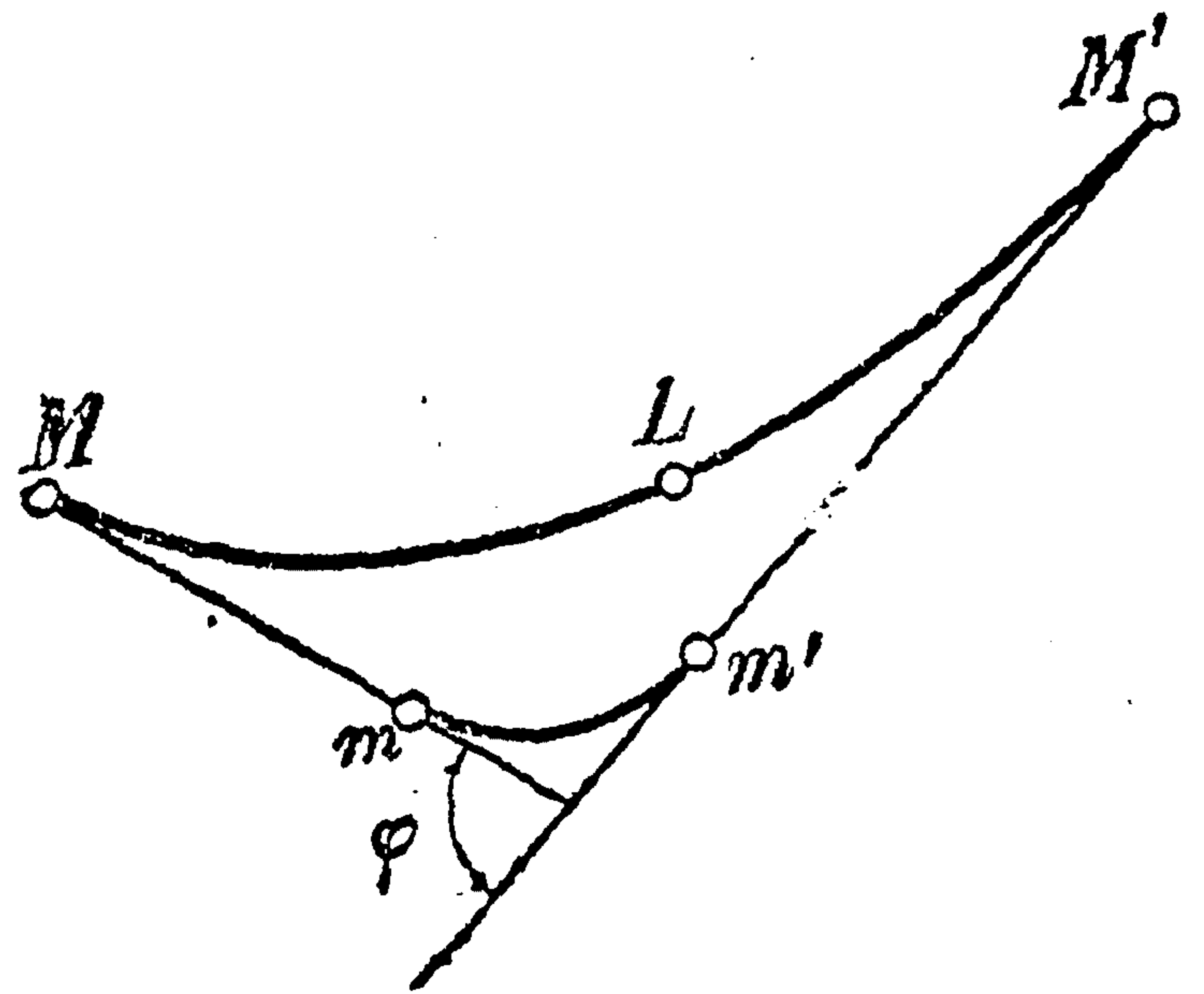


Так как логарифмическая спираль есть незамкнутая кривая, то для образования колес берут, напр., два равных квадрата и заменяют каждую сторону двумя дугами спирали (черт. 211б); возможны и иные конструкции. *Передаточное число*, т. е. отношение угловых скоростей обоих колес, *меняется*; в случае, изображенном на чертеже, оно четыре раза в течение одного оборота проходит через максимум ( $=\sqrt{2}$ ), и четыре раза — через минимум ( $=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ).



Черт. 211б.

**133. Кривизна кривой линии (средняя).** Если мы будем переходить от одной точки  $M$  кривой линии к другой  $M'$ , то *направление* кривой линии, определяемое направлением ее касательной, будет от точки к точке *меняться*. Это изменение направления и отличает кривую линию от прямой (которая во всех точках имеет одно и то же направление), характеризует ее *искривленность*, ее *кривизну*. Как, однако, определить *степень* или *меру кривизны* некоторой дуги  $MM'$  кривой линии (черт. 212), выразить ее кривизну *числом*? Очевидно, прежде всего, что здесь должен играть роль тот угол  $\varphi$ , на который успела повернуться касательная при переходе от  $M$  к  $M'$ , т. е. угол, на который изменилось направление кривой на этом участке. Однако, один этот угол не может дать представления о мере кривизны нашей дуги: стоит лишь взглянуть на черт. 212, чтобы увидеть, что для дуг  $MM'$  и  $mm'$  угол  $\varphi$  один и тот же, в то время как вторая дуга искривлена сильнее. Дело в том, что искривление на угол  $\varphi$



Черт. 212.

для первой кривой произошло на значительно большем расстоянии, чем для второй. Отсюда приходим к мысли рассчитать искривление на единицу длины дуги, т. е. характеризовать меру кривизны дуги  $MM'$  не углом  $\varphi$ , а отношением этого угла к дуге  $MM'$ :  $\frac{\varphi}{MM'}$  (при этом угол выражается в радиальной мере, а длина дуги в выбранных единицах длины). Для рассмотренных выше дуг (черт. 212), числитель этой дроби



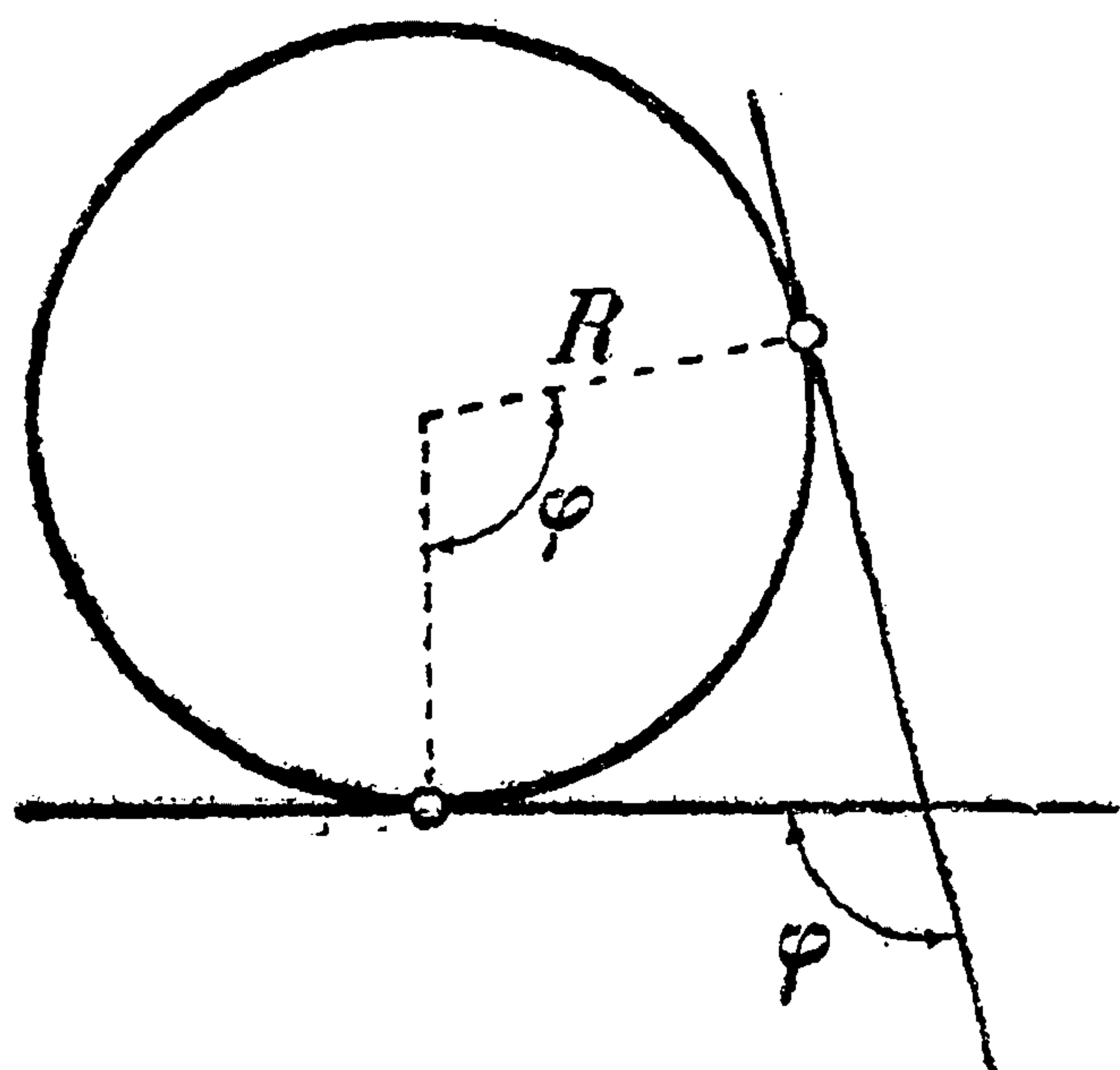
$\varphi$  один и тот же, а знаменатель в первом случае больше, чем во втором; отсюда кривизна первой дуги меньше, чем второй.

Если, для примера, взять окружность радиуса  $R$  (черт. 213), то для любой ее дуги угол  $\varphi$  между крайними касательными равен углу между радиусами, проведенными в точки касания. Но длина дуги равна  $\varphi R$ ; следовательно, *кривизна окружности во всех ее частях одна и та же и измеряется числом*

$$k = \frac{\varphi}{\varphi R} = \frac{1}{R}. \quad (47)$$

Вытекающий отсюда результат, что кривизна окружности обратно пропорциональна ее радиусу, так что чем больше радиус, тем кривизна меньше, — вполне отвечает нашему обычному представлению о кривизне.

Однако другие кривые не являются *одинаково искривленными* во всех частях, как окружность. Кривая  $MM'$  на черт. 212 явно искривлена в левой своей части  $ML$  больше, чем в правой  $LM'$ . Поэтому то отно-



Черт. 213.

шение, которое мы выше рассматривали как меру кривизны, следует назвать лишь *средней кривизной* взятого участка кривой. Это понятие совершенно аналогично средней скорости неравномерного движения: средняя кривизна характеризует среднюю скорость изменения направления кривой.

#### 134. Кривизна кривой линии в точке.

Если заменить дугу  $MM'$  ее частью — дугой  $ML$  (черт. 212), то средняя кривизна, вообще, изменится (в нашем случае увеличится). Что же считать мерой кривизны кривой  $MM'$  в *данной ее точке M*? Естественно за эту меру принять предел сред-

ней кривизны дуги  $MM'$ , когда  $M'$  стремится к  $M$ ; этот предел и называется *кривизной в точке M*. Процесс получения кривизны в точке из средней кривизны дуги аналогичен переходу от средней скорости к истинной скорости в точке.

Найдем теперь аналитическое выражение для кривизны. Пусть кривая задана явным уравнением  $y = f(x)$ . Рассмотрим на кривой некоторую точку  $M$ , определяемую значением  $x$  абсциссы; придадим абсциссе приращение  $\Delta x$ , измененному значению  $x + \Delta x$  будет соответствовать другая точка  $M'$  на кривой. Касательные в этих точках составляют с осью  $Ox$  углы  $\alpha$  и  $\alpha + \Delta\alpha$ ; тогда между собою (см. черт. 214) они, очевидно, составляют угол  $\Delta\alpha$  (взятый по абсолютному значению, конечно). Если отсчитывать от некоторой точки  $M_0$  дугу  $s$  кривой, то  $\widehat{MM'}$  будет ее приращением  $\Delta s$  (также по абсолютному значению), так что

средняя кривизна выразится отношением  $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ , а в пределе получим для кривизны  $k$  следующее выражение:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (48)$$



Вводя переменную  $x$ , можно написать также:

$$k = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\alpha'_x}{s'_x}.$$

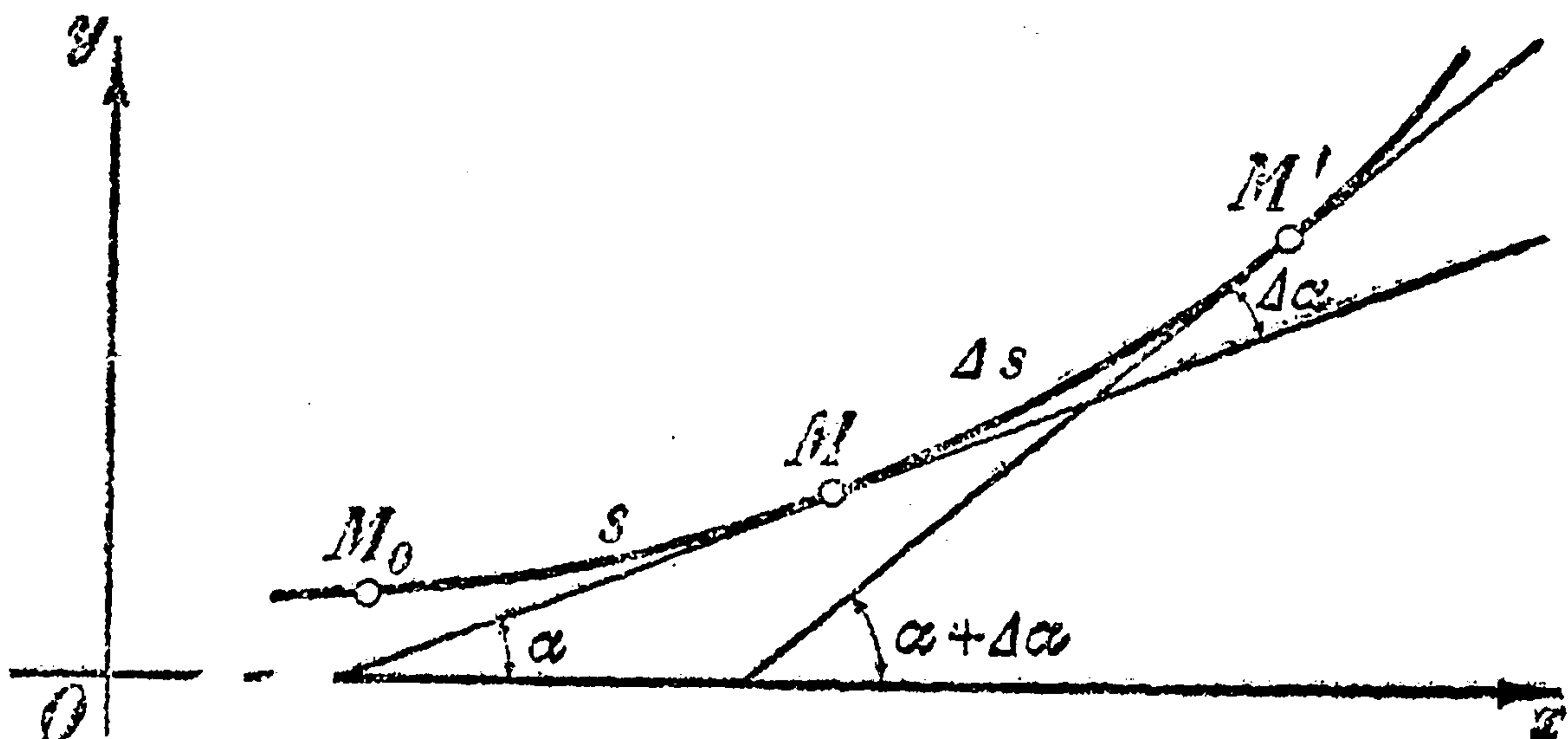
Здесь, как и везде дальше, выражение справа должно брать по абсолютному значению: кривизну мы считаем величиной, существенно положительной. Для  $s'_x$  мы имели уже в 130 выражении (32). Что же касается до  $\alpha'_x$ , то эту производную мы вычислим так. Мы знаем, что  $\operatorname{tg}\alpha = y'_x$ ; отсюда  $\alpha = \operatorname{arctg} y'_x$ . Дифференцируя эту сложную функцию по  $x$ , получим:

$$\alpha'_x = (\operatorname{arctg} y'_x)'_x = \frac{1}{1 + y'^2_x} \cdot (y'_x)'_x = \frac{y''_x}{1 + y'^2_x}.$$

Подставляя теперь, вместо  $\alpha'_x$  и  $s'_x$ , их выражения, находим:

$$k = \frac{y''_x}{(1 + y'^2_x)^{3/2}}. \quad (49)$$

Заметим, что для прямой  $y = ax + b$ , очевидно,  $y'' = 0$  и кривизна обращается в нуль, как и должно быть. Для других линий кривизна  $k$  может обращаться в нуль в отдельных точках, для которых  $y'' = 0$ . В них кривая как бы уподобляется прямой. Это наверное будет иметь место для точек перегиба [129], ибо там всегда  $y'' = 0$ . Достаточно взглянуть на кривую, имеющую точку перегиба (см., напр., черт. 206), чтобы заметить, что вблизи этой точки кривая, действительно, как бы выпрямляется.



Черт. 214.

Если кривая задана параметрическими уравнениями типа (36), то формулу (48) перепишем так:

$$k = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\alpha'_t}{s'_t}.$$

Для  $s'_t$  у нас есть выражение (37);  $\alpha'_t$  вычисляем, как и выше  $\alpha'_x$ , исходя из формулы (20). В результате получим формулу:

$$k = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}. \quad (50)$$



Она содержит в себе (49), как частный случай. В самом деле, если кривая задана явным уравнением, то роль параметра играет абсцисса  $x$ ; заменяя в предыдущей формуле  $t$  через  $x$  и вспоминая, что  $x'_x = 1$  и  $x''_x = 0$ , приходим к формуле (49).

Наконец, и случай, когда кривая задана *полярным уравнением*, также можно рассматривать как частный случай параметрического представления [ср. 127 и 131, III]. Заменяя в (50)  $t$  на  $\theta$ , и полагая [см. (28)]

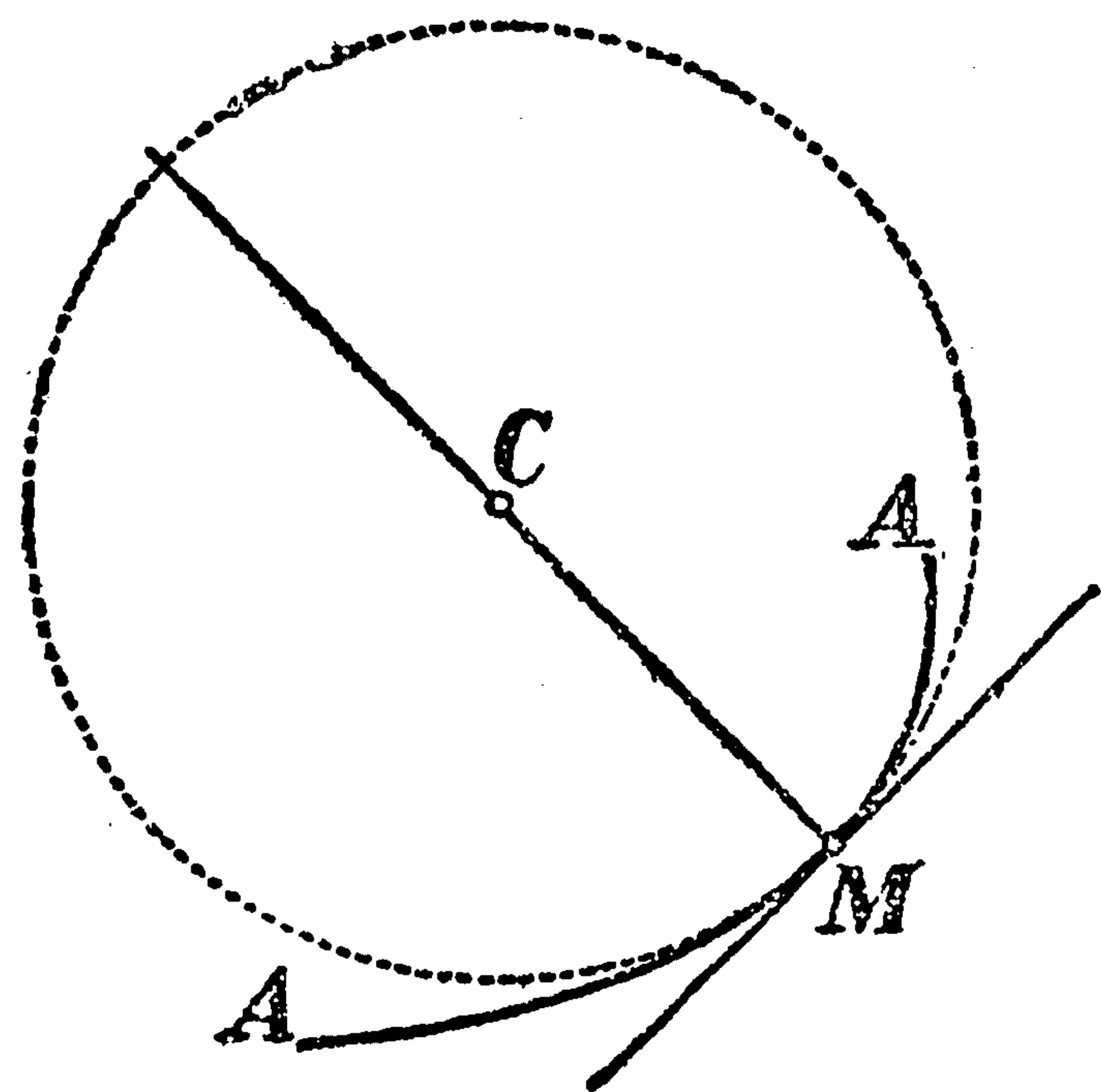
$$x'_\theta = r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta; \quad y'_\theta = r'_\theta \sin \theta + r \cos \theta;$$

$$x''_\theta = r''_\theta \cos \theta - 2r'_\theta \sin \theta - r \cos \theta; \quad y''_\theta = r''_\theta \sin \theta + 2r'_\theta \cos \theta - r \sin \theta,$$

после простых преобразований, приходим к формуле:

$$k = \frac{r^2 + 2r'^2_\theta - rr''_\theta}{(r^2 + r'^2_\theta)^{3/2}}. \quad (51)$$

**135. Радиус и центр кривизны.** Пусть дана некоторая кривая  $AA$  (ср. 215), имеющая в точке  $M$  кривизну  $k$ . Проведем касательную и нормаль к кривой в точке  $M$  и станем



Черт. 215.

рассматривать окружности, имеющие центры на этой нормали (со стороны вогнутости кривой) и проходящие через точку  $M$ . Все эти окружности касаются нашей кривой в точке  $M$  (т. е. имеют в этой точке общую с кривой касательную) и направлены своей вогнутостью в ту же сторону, что и кривая. Найдем среди них такую окружность, которая имела бы ту же кривизну  $k$ , что и кривая в точке  $M$ . Очевидно [133, (47)], радиус ее  $R$  должен равняться  $\frac{1}{k}$ .

Найденная окружность очень тесно (теснее всех других окружностей и прямых!) примыкает к кривой и, на небольшом участке, приближенно воспроизводит нашу кривую с большей степенью точности, нежели касательная (которой, как мы знаем, иногда уподобляют кривую; см. 67). Круг этот называется *кругом кривизны*, его радиус  $R$  — *радиусом кривизны*, а центр  $C$  — *центром кривизны* кривой в данной точке  $M$ . При изменении точки  $M$  будет меняться и круг кривизны, его центр и радиус. В формулах и вычислениях чаще встречается радиус кривизны  $R$ , нежели кривизна  $k$ . Так как  $R = \frac{1}{k}$ , то, исходя из выведенных выше выражений для кривизны  $k$ , мы получаем для  $R$ , прежде всего, следующие формулы:

$$R = \frac{ds}{da} \quad (52)$$

и

$$R = \frac{(1 + y'^2_x)^{3/2}}{y''_x}. \quad (53)$$



В тех точках, где кривизна  $k$  будет 0, радиус кривизны  $R$  обращается в  $\infty$ . Как указывалось, это всегда будет для точек перегиба. Для прямой линии, очевидно, следует считать, что всегда  $R = \infty$ .

Кроме этих формул, в тех случаях, когда кривая задана параметрическими уравнениями или полярным уравнением, применяют, соответственно, формулу:

$$R = \frac{(x_t'^2 + y_t'^2)^{3/2}}{x_t' y_t'' - x_t'' y_t'} \quad (54)$$

или

$$R = \frac{(r^2 + r'_\theta)^{3/2}}{r^2 + 2r'_\theta - r r''_\theta} \quad (55)$$

[см. (50) и (51)].

По всем этим формулам радиус кривизны может получиться как со знаком (+), так и со знаком (-). Обыкновенно, этот знак просто отбрасывают. Иной раз, однако, полезно дать себе отчет в том, с чем этот знак связан. Ограничиваясь, для простоты, случаем кривой, заданной явным уравнением:  $y = f(x)$ , и вспоминая, что знак  $y''$  указывает на направление вогнутости кривой [128], мы по формуле (53) сразу видим, что: если кривая направлена вогнутостью вверх (вниз), так что центр кривизны лежит над (под) соответствующей точкой кривой, то радиус кривизны положителен (отрицателен). Подобно этому, и в других случаях знак радиуса кривизны связан с тем, в какую именно сторону от кривой радиус направлен (считая его направление от точки кривой к центру кривизны).

**136. Примеры и задачи.** 1. Найдем радиус кривизны для цепной линии (черт. 155):  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ . Мы имели уже [131, (34)]:

$$\sqrt{1 + y'^2} = \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{y}{a};$$

точно также легко получить:

$$y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}.$$

Отсюда, по формуле (53):

$$R = \frac{\left(\frac{y}{a}\right)^3}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

Так как то же выражение мы получили [120, см. (6)] для длины отрезка нормали, а вогнутость кривой, как мы знаем [128, зад. 6], направлена вверх, то получаем очень простой способ построения центра  $C$  кривизны цепной линии: отрезок нормали, между точкой касания и осью  $Ox$ , нужно отложить по нормали же, но в обратную сторону (черт. 155). Наименьший радиус кривизны (наибольшая кривизна) будет в вершине  $L$  кривой:  $R = a$ . С удалением точки вдоль по кривой в бесконечность, радиус кривизны  $R$  безгранично возрастает, так что кривизна безгранично убывает.

2. В качестве второго примера рассмотрим циклоиду (черт. 171),



причем воспользуемся основной формулой (52), которую перепишем в виде:

$$R = \frac{\frac{ds}{dt}}{\frac{da}{dt}}.$$

Мы имели [131, (33) и 126, (22)]

$$\frac{ds}{dt} = 2a \sin \frac{t}{2} \text{ и } a = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}, \text{ так что } \frac{da}{dt} = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$R = (-) 4a \sin \frac{t}{2}.$$

[Знак  $(-)$  отбрасываем!]

Для отрезка нормали мы имели [126, (23)] выражение  $2a \sin \frac{t}{2}$ .

Отсюда снова простое правило построения центра кривизны  $C$  для циклоиды в любой ее точке  $M$ : продолжить нормаль  $MN$  на ее собственную длину. Радиус кривизны наибольшего значения  $4a$  достигает в точке  $H$  (черт. 171), при  $t = \pi$ . В точках же  $O$  и  $K$  (при  $t = 0$  и  $t = 2\pi$ ) радиус кривизны обращается в нуль, а кривизна — в бесконечность. Это обстоятельство связано с тем, что в точке, отделяющей две ветви кривой, образуется *остреч*.

[Предлагаем читателю наново вычислить радиус кривизны для циклоиды, исходя из ее параметрических уравнений и пользуясь формулой (54)].

3. Найти радиус кривизны для эпициклоиды (черт. 172).

*Указание.* Можно либо исходить из параметрических уравнений ее [114, (55) и (56)] и формулы (54) для  $R$ , либо же использовать формулу (53), опираясь на (44), 132 и (25), 126. *Отв.*

$$R = \frac{4am(1+m)}{1+2m} \sin \frac{t}{2}.$$

4. То же — для эвольвенты круга (черт. 175).

*Решение.* Мы знаем [126, III; 132, зад. 4], что  $a = t$  и  $s_t' = at$ , поэтому

$$R = \frac{ds}{d\theta} = s_t' = at = MB.$$

Таким образом, точка касания  $B$  (точка схода нити с круга) и будет центром кривизны для траектории конца  $M$  нити; круг же оказывается геометрическим местом центров кривизны для нашей кривой. [Заметим, что это имеет место вообще для всех кривых, получаемых с помощью разворачивания нити, предварительно накрутой на какую-нибудь кривую; ср. ниже 139]. С возрастанием  $t$  кривизна стремится к нулю.

5. То же — для логарифмической спирали (черт. 204a).

*Решение.* Мы уже видели [131, III], что  $r' = mr$ , отсюда  $r'' = m^2r$ . Подставляя эти выражения в формулу (55), найдем:

$$R = \frac{(r^2 + m^2r^2)^{3/2}}{r^2 + 2m^2r^2 - m^2r^2} = r\sqrt{1+m^2}.$$



Если вспомнить, что  $m = \operatorname{ctg} \omega$ , то выражение для  $R$  можно написать в виде:

$$R = \frac{r}{\sin \omega},$$

а тогда непосредственно из чертежа ясно, что отрезок  $MN$  как раз и будет равен  $R$ ; следовательно, центром кривизны будет точка  $N$ . Это дает легкий способ построения центра кривизны для логарифмической спирали.

б. То же — для равнобочной гиперболы:  $xy = a^2$ , отнесенной к асимптотам (черт. 216).

Решение. Имеем:

$$y = \frac{a^2}{x}, \quad y' = -\frac{a^2}{x^2}, \quad y'' = \frac{2a^2}{x^3};$$

подставляем в формулу (53):

$$R = \frac{(x^4 + a^4)^{3/2}}{2a^2 x^3}.$$

Можно упростить это выражение, заменяя  $a^4 = (a^2)^2$  в числителе через  $(xy)^2$  и полагая  $x^2 + y^2 = r^2$ ; после сокращений, получим:

$$R = \frac{r^3}{2a^2}.$$

Для того чтобы найти прием для построения центра кривизны, заметим сначала, что (снова заменяя  $a^2$  через  $xy$ ) выражение для углового коэффициента касательной можно переписать в виде:

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \theta,$$

где  $\theta$  — полярный угол. Отсюда:  $\alpha = \pi - \theta$  и получается простое построение для касательной (см. черт.). Затем, подставим и в найденное для  $R$  выражение, вместо  $a^2$ , на этот раз не  $xy$ , но (переходя к полярным координатам)  $r^2 \sin \theta \cos \theta$ ; в результате:

$$R = \frac{r}{\sin 2\theta}.$$

Если провести  $ON \perp OM$ , то  $\sphericalangle N$  равен (отмеченному)  $\sphericalangle M$ , т. е. дополняет  $2\theta$  до  $\pi$ , так что  $\sin \sphericalangle N = \sin 2\theta$ . Тогда из  $\triangle NOM$  ясно, что  $MN = R$ . Однако точка  $N$  не будет центром кривизны, так как вогнутостью кривая обращена в противоположную сторону. Центром кривизны будет точка  $C$ , симметричная с  $N$  относительно  $M$ .

Пусть читатель разберется, в чем сходство и в чем различие изложенного здесь построения с построением предыдущей задачи.

7. То же — для кардиоида, по ее полярному уравнению. [См. (55)].

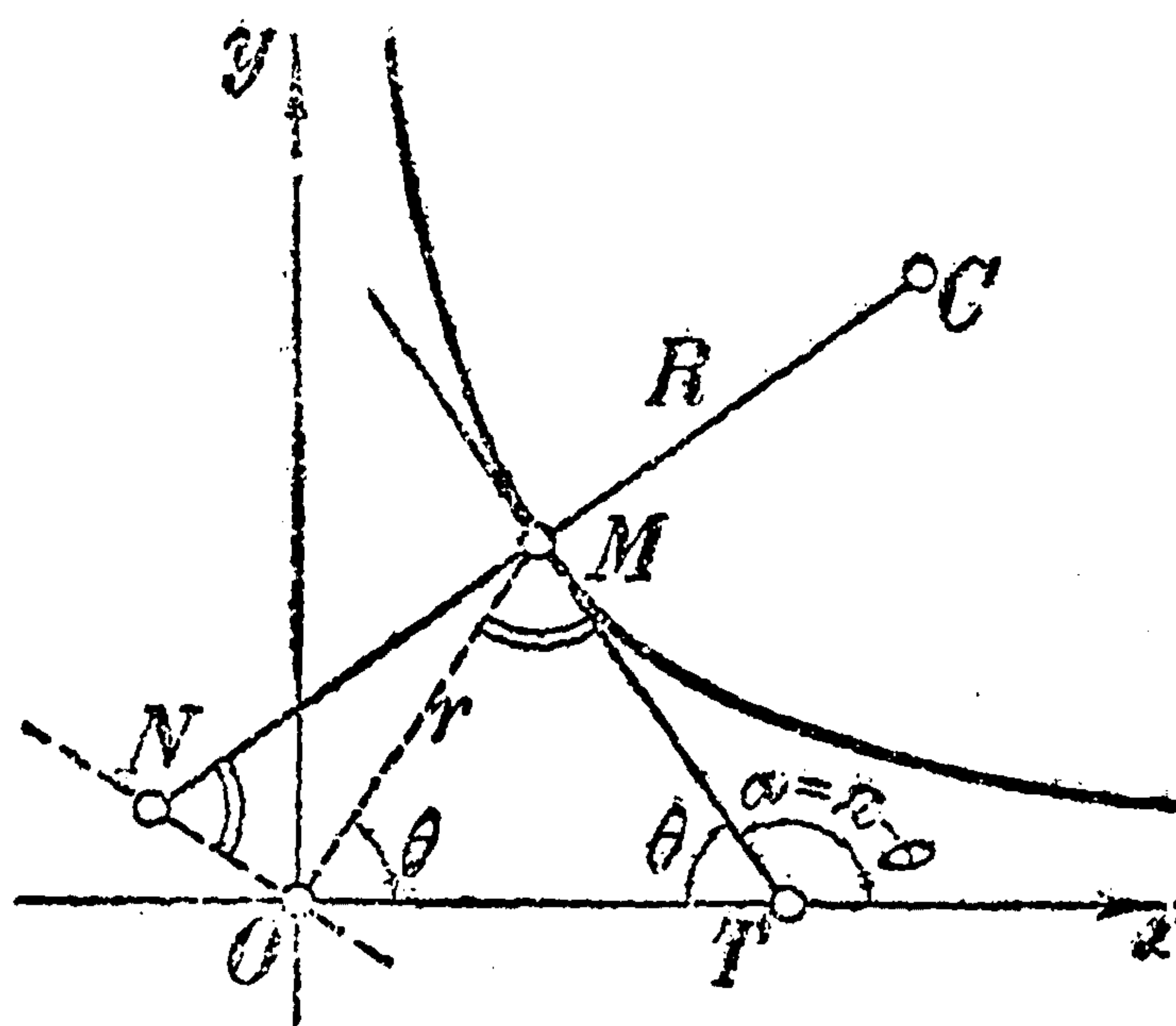
$$\text{Отв. } R = \frac{8}{3} a \cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{3} \sqrt{ar}.$$

8. То же — для кривой  $y = cx^n$ . [См. (53)].

$$\text{Отв. } R = \frac{(x^2 + n^2 y^2)^{3/2}}{n(n-1)xy}; \text{ положив здесь } n = -1, \text{ получить решение зад. 6.}$$

9. То же — для Архимедовой спирали:  $r = a\theta$ . [См. (55)]

$$\text{Отв. } R = \frac{(a^2 + r^2)^{3/2}}{2a^2 + r^2}.$$



Черт. 216.



10. В какой точке кривая  $y = \ln x$  имеет наибольшую кривизну (т. е. наименьший радиус кривизны)?

Отв.  $R = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{x}$ ,  $R_x' = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ ;  $R$  достигает наименьшего значения  $\frac{3}{2}\sqrt{3} = 2,598$ , при  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  и  $y = -\frac{1}{2}\ln 2$ .

11. Найти  $R$  для кривой  $y = \frac{x^3}{6q}$  и его наименьшее значение; обращается ли  $R$  в  $\infty$ ? [Эти вопросы имеют значение при разбивке железнодорожных закруглений; см. ниже 138].

Отв.  $R = \frac{q}{x} \left(1 + \frac{x^4}{4q^2}\right)^{3/2}$ , его наименьшее значение  $1,390\sqrt{q}$  достигается при  $x = \sqrt{q} \cdot \sqrt[4]{0,8} = 0,946\sqrt{q}$ ; радиус  $R$  обращается в  $\infty$  при  $x = 0$ .

12. Найти  $R$  для эллипса:  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ); в каких точках  $R$  достигает максимума или минимума?

Отв.  $R = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}$ ; на максимум и минимум достаточно исследовать выражение  $Z = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$ , имеем:  $Z' = (a^2 - b^2) \sin 2t$ . При  $t = 0$  или  $\pi$  (что отвечает концам большой оси) будет минимум, а при  $t = \frac{\pi}{2}$  или  $\frac{3\pi}{2}$  (на концах малой оси) — максимум для  $R$ . См. 138, II, и черт. 219.

13. Очертание осевой линии свода часто выполняется по кривой, которая получается из цепной линии [105, черт. 155] путем пропорционального уменьшения ее ординат. Она называется *катеноидой*; ее уравнение имеет вид:

$$y = \frac{c}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = c \operatorname{ch} \frac{x}{a}. *$$

Найти выражение для  $R$  и установить, где он имеет максимум или минимум. [Это представляет интерес при построении так называемых *коробовых кривых*, см. ниже 139.]

Решение. Имеем (пользуясь свойствами гиперболических функций):

$$y' = \frac{c}{a} \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad 1 + y'^2 = \frac{1}{a^2} \left[ a^2 + c^2 \left( \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} - 1 \right) \right] = \frac{a^2 - c^2 + y^2}{a^2},$$

$$y'' = \frac{c}{a^2} \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}, \quad R = \frac{(y^2 + a^2 - c^2)^{3/2}}{ay}.$$

Радиус кривизны оказался просто выражающимся через ординату  $y$ , которая изменяется от своего наименьшего значения  $c$  и до наибольшего значения, определяемого размерами свода. Можно  $R$  рассматривать как сложную функцию от  $x$ , через посредство  $y$ . Тогда

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 + a^2 - c^2}}{ay^2} (2y^2 - a^2 + c^2) \cdot \frac{c}{a} \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Эта производная обращается в нуль, прежде всего, при  $x = 0$  (в вершине кривой или в замке свода). Тут следует различать два случая: 1)  $3c^2 \geq a^2$  и 2)  $3c^2 < a^2$ . В случае 1) выражение в скобках (для  $x \geq 0$  и  $y > c$ ) сохраняет знак (+), и налицо минимум. В случае же 2) упомянутое выражение вблизи вершины  $(0, c)$  имеет знак (-), и  $R$  здесь достигает максимума. Выражение

\* При этом, конечно, ось  $Oy$  предполагается направленной вниз.



в скобках может обратиться в нуль (при  $y > c$ ) лишь в случае 2), именно, при  $y = \sqrt{(a^2 - c^2)/2}$ , чему отвечают два симметрично расположенных минимума (если только они не выходят за пределы свода). Итак, в случае 1) — единственный минимум в замке, в случае же 2) в замке — максимум и, кроме того, возможны два минимума.

12. Вместо того чтобы очерчивать арку по дуге круга:

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a, \quad a < r)$$

в целях некоторого ее искривления, от ее ординаты отнимается (скажем, для положительных  $x$ ) величина  $\eta = cx^m(a-x)^n$ . Доказать, что, если  $m$  и  $n > 2$ , новая кривая при  $x=0$  (в замке) и при  $x=a$  (в пяте) сохраняет ту же касательную и ту же кривизну, что и прежняя.

*Доказательство.* Имеем:

$$\eta' = cmx^{m-1}(a-x)^n - cnx^m(a-x)^{n-1},$$

$$\eta'' = cm(m-1)x^{m-2}(a-x)^n - 2cmnx^{m-1}(a-x)^{n-1} + cn(n-1)x^m(a-x)^{n-2}.$$

Оба выражения обращаются в нуль и при  $x=0$ , и при  $x=a$ , следовательно, отнимание от  $y$  величины  $\eta$  не отразится ни на первой, ни на второй производной (при  $x=0$  или  $x=a$ ), а от них только и зависят как угловой коэффициент касательной, так и кривизна; следовательно, эти величины, действительно, останутся неизменными!

13. Доказать, что, пользуясь приближенной формулой:  $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2$ , мы в сущности заменяем дугу кривой  $y = \cos x$  дугой параболы, с той же касательной и с той же кривизной в начале координат.

*Указание.* Достаточно убедиться в том, что обе функции  $\cos x$  и  $1 - \frac{1}{2}x^2$  имеют равные первые и вторые производные при  $x=0$ .

**137. Определение радиуса кривизны для кривой, заданной неявным уравнением.** Остановимся, для примера, на кривых второго порядка, которые и сами по себе представляют интерес.

I. *Парабола:*  $y^2 = 2px$ . Для определения углового коэффициента касательной  $y'$ , мы в 122, III, дифференцировали уже это равенство по  $x$ , рассматривая при этом  $y$  как неявную функцию от  $x$  же, и получили:

$$yy' = p. \quad (56)$$

Это равенство, если  $y$  и  $y'$  рассматривать как надлежащие функции от  $x$ , является тождеством, и его можно снова продифференцировать по  $x$ :  $y'^2 + yy'' = 0$ , откуда  $yy'' = -y'^2$ ,  $y^3y'' = -(yy')^2$ , или, в силу (56),

$$y^3y'' = -p^2. \quad (57)$$

[На этом примере, мы собственно, показали, как можно найти вторую производную неявной функции, не разрешая определяющего ее уравнения.]

Вычисляя теперь радиус кривизны параболы по формуле (53), получим последовательно, пользуясь (56) и (57),

$$\begin{aligned} \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} &= \frac{(1+y'^2)^3}{y''} = \frac{y^3(1+y'^2)^3}{y^3y''} = \frac{(y\sqrt{1+y'^2})^3}{y^3y''} = \\ &= \frac{(y^2 + (yy')^2)^{3/2}}{y^3y''} = \frac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{-p^2}, \end{aligned}$$



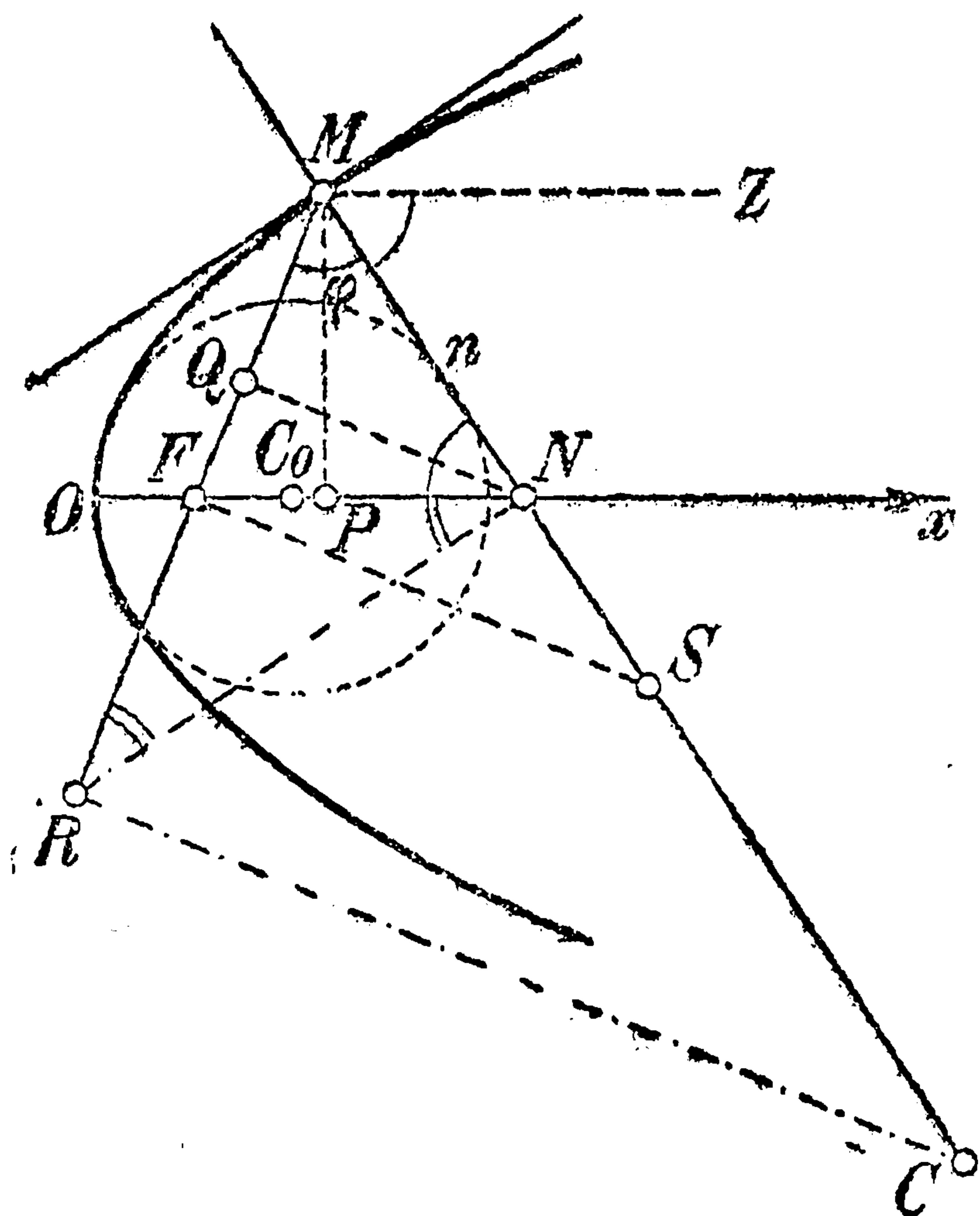
так что, отбрасывая знак,

$$R = \frac{1}{p^2} (y^2 + p^2)^{3/2}.$$

Так как длина  $n$  нормали к параболе (от точки касания до точки пересечения с осью) есть  $\sqrt{y^2 + p^2}$  [122, (10)], то

$$R = \frac{n^3}{p^2}, \quad (58)$$

т. е. радиус кривизны параболы пропорционален кубу нормали. В вершине кривой, при  $y = 0$ ,  $R$  получает наименьшее значение, равное  $p$ . При безграничном возрастании  $y$ , стремится к бесконечности и  $R$ .



Черт. 217.

Центр кривизны  $C_0$ , отвечающий вершине, строится без труда; соответствующий круг кривизны (на черт. 217 он изображен пунктиром) обыкновенно вычерчивают, чтобы с его помощью точнее вычертить параболу, с которой он вблизи вершины на чертеже сливается. Укажем теперь построение центра кривизны  $C$  для произвольной точки  $M$  параболы (черт. 217). Из равенства прямоугольных  $\Delta$ -ков  $MPN$  и  $MQN^*$  следует, что  $n \cos \varphi = QM = PN = p$  [121, зад. 5]. Подставляя в (58), вместо  $p$ , выражение  $n \cos \varphi$ , получим:

$$R = \frac{n}{\cos^2 \varphi}. \quad (59)$$

Теперь ясно, что если провести  $NR \perp MN$  и  $RC \perp MR$ , то  $C$  и будет искомым центром кривизны, ибо тогда  $MR = \frac{n}{\cos \varphi}$ , а  $MC = \frac{MR}{\cos \varphi}$ . [Так как из

равенства отмеченных углов следует, что

$\Delta$ -ки  $FMN$  и  $FRN$  равнобедренные, так что  $RF = FM$ , то можно упростить построение следующим образом: провести  $FS \perp MF$  и удвоить отрезок  $MS$ .]

II. Эллипс и гипербола:  $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Дифференцируем это уравнение

дважды (как мы это сделали с уравнением параболы), рассматривая и здесь  $y$  (а затем и  $y'$ ) как функции от  $x$ , обращающие дифференцируемые равенства в тождества. Мы последовательно получаем:

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{yy'}{b^2} = 0,$$

откуда

$$yy' = \mp \frac{b^2 x}{a^2}, \quad (60)$$

\*  $\sphericalangle FNM = \sphericalangle NMZ$ , как внутренние накрест лежащие при параллельных,  $\sphericalangle NMZ = \sphericalangle FMN$  — по свойству нормали к параболе [124, III].



затем:

$$yy'' = \mp \frac{b^2}{a^2} - y'^2;$$

умножая обе части последнего равенства на  $y^2$ , мы с помощью равенства (60) найдем:

$$y^3y'' = \mp \frac{b^2y^2}{a^2} - (yy')^2 = \mp \frac{b^2y^2}{a^2} - \frac{b^4x^2}{a^4} = - \frac{b^4}{a^2} \left( \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Так как точка  $(x, y)$  взята на кривой, то выражение в скобках  $= 1$ , и окончательно:

$$y^3y'' = - \frac{b^4}{a^2}. \quad (61)$$

Теперь, на основании (60) и (61), имеем:

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{[y^2 + (yy')^2]^{3/2}}{y^3y''} = \frac{\left(y^2 + \frac{b^4x^2}{a^4}\right)^{3/2}}{-\frac{b^4}{a^2}} = - \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4},$$

так что, отбрасывая знак, для радиуса кривизны получаем выражение

$$R = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}. \quad (62)$$

Мы уже имели [122, (9)] для отрезка  $n$  нормали, в случае эллипса и гиперболы, выражение

$$n = \frac{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}{a^2},$$

следовательно, и здесь радиус кривизны  $R$  пропорционален кубу нормали  $n$ :

$$R = \frac{a^2}{b^4} n^3.$$

Если вспомнить [106], что для эллипса и гиперболы полупараметр  $p$  выражается так:

$$p = \frac{b^2}{a},$$

то и в рассматриваемом случае для  $R$  получится то же окончательное выражение (58), что и для параболы.

Приведем построение центра кривизны для эллипса (черт 218). Прежде всего, попытаемся и здесь установить, что  $n \cos \varphi = p$ . Очевидно,

$$n \cos \varphi = QM = FM - FQ = r - FN \cdot \cos \vartheta;$$

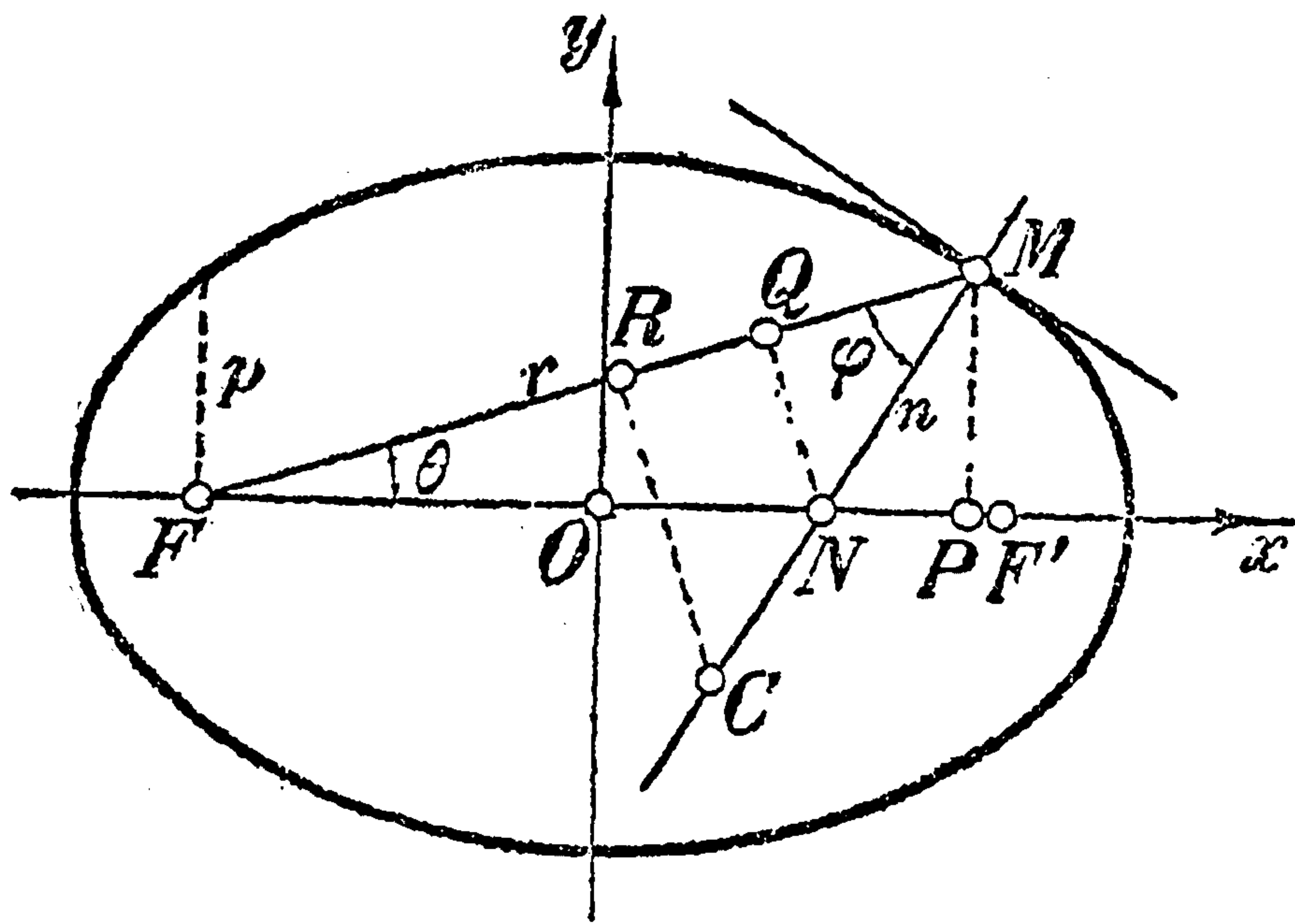


но [124, (14a)]  $FN = \epsilon r$ , затем [124, (14)]  $r = a + \epsilon x$  и  $r \cos \theta = c + x$  (мы сохраняем прежние обозначения), так что

$$n \cos \varphi = r - \epsilon \cdot r \cos \theta = a + \epsilon x - \epsilon (c + x) = a - \epsilon c = a - \frac{c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p.$$

В таком случае мы и здесь приходим к выражению (59); следовательно, можем применить то же построение.

Оно оказывается неприложимым только в вершинах эллипса, лежащих на большой его оси. Из (62) непосредственно ясно, что при  $y = 0$  (и  $x = \pm a$ ) радиус  $R = \frac{b^2}{a}$ , а при  $x = 0$  (и  $y = \pm b$ ) радиус  $R = \frac{a^2}{b}$ . Если из вершины  $C$  описанного около эллипса прямоугольника опустить перпендикуляр  $CD$  на  $AB$  (черт. 219), то его продолжение пересечет оси, соответственно, в центрах кривизны  $O_1$  и  $O_2$  для вершин  $A$  и  $B$ . Действительно, из подобия  $\Delta$ -ков  $ACO_1$ ,  $CBO_2$  и  $ABO$  легко усмотреть, что  $AO_1$  и  $BO_2$  имеют как раз требуемую величину. Аналогично строятся и центры  $O_1'$  и  $O_2'$  для других двух вершин. Эти четыре круга кривизны обыкновенно вычерчивают, чтобы с их помощью лучше воспроизвести очертание эллипса.



Черт. 218.

**Задачи.** 1. Вычислить радиус кривизны для астроида:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

**Решение.** Мы имели уже [123, зад. 3.], что

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{или} \quad x^{\frac{1}{3}} \cdot y' + y^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Если под  $y$  разуметь функцию от  $x$ , удовлетворяющую уравнению астроида, а под  $y'$  ее производную, то и последнее равенство есть тождество относительно  $x$ ; продифференцировав его по  $x$  еще раз, получим:

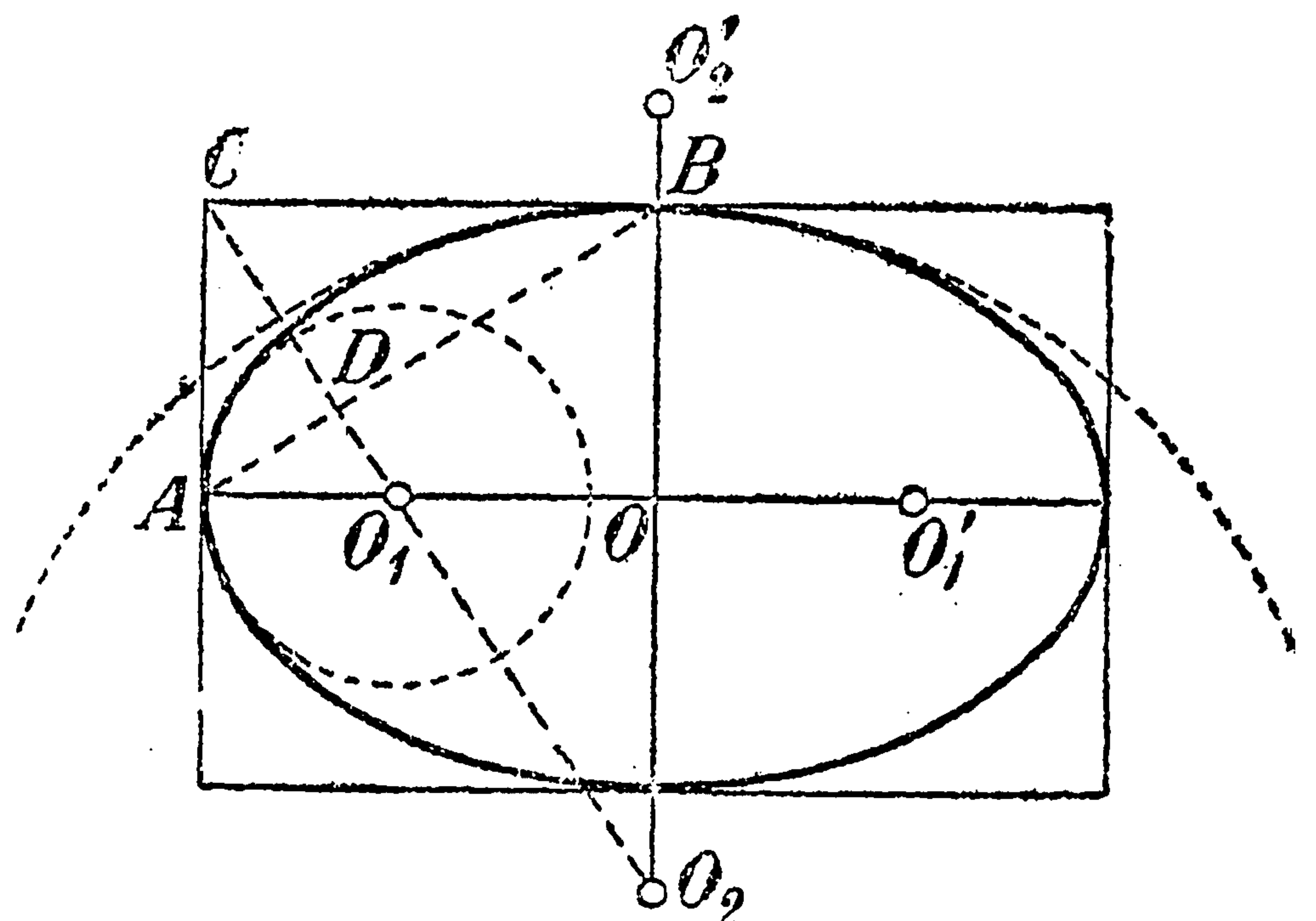
$$\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot y' + x^{\frac{1}{3}} \cdot y'' + \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} \cdot y' = 0,$$

откуда

$$y'' = -\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3xy^{\frac{2}{3}}} \cdot y' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}.$$

Подставляя в (53), вместо  $y'$  и  $y''$ , найденные выражения,

получим:  $R = 3 (axy)^{\frac{1}{3}}.$



Черт. 219.



2. То же — для лемнискаты:

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

*Решение.* Дифференцируем дважды это уравнение по  $\theta$ , считая  $r$  функцией от  $\theta$  [ср. 127, зад. 2]:

$$rr' = -2a^2 \sin 2\theta, \text{ так что } r' = -\frac{2a^2 \sin 2\theta}{r};$$

$$rr'' + r'^2 = -4a^2 \cos 2\theta = -2r^2, \text{ откуда } r'' = -2r^2 - r'^2.$$

Подставляя последнее выражение, вместо  $rr''$ , в формулу (55), найдем:

$$R = \frac{1}{3} \sqrt{r^2 + r'^2}.$$

Наконец, заменим  $r'$  полученным выше его выражением (воспользовавшись еще раз уравнением лемнискаты):

$$r^2 + r'^2 = r^2 + \frac{4a^4 \sin^2 2\theta}{r^2} = \frac{(r^2)^2 + 4a^4 \sin^2 2\theta}{r^2} = \frac{4a^4}{r^2},$$

так что

$$R = \frac{2a^2}{3r}.$$

Отметим, что в полюсе  $R$  обращается в  $\infty$ ; это согласуется с тем свойством лемнискаты, которое было упомянуто в конце 119.

138. Железнодорожные закругления. Переходные кривые. В качестве примера применения понятия о кривизне к техническому вопросу, остановимся на движении железнодорожного вагона на закруглениях пути.

Мы уже упоминали о том, что при движении точки по окружности радиуса  $R$  величина центробежной силы выражается формулой:

$$u = \frac{mv^2}{R}, \quad (63)$$

где  $m$  — масса точки, а  $v$  — ее скорость [121, (7)]. Если траекторией точки служит отличная от окружности кривая, то все же имеет место та же формула, но лишь под  $R$  нужно разуметь *радиус кривизны* этой кривой в данном месте (ведь на бесконечно малом участке можно уподобить кривую дуге ее круга кривизны!).

Центробежная сила, действующая на вагон при его движении на закруглении, сказывается в давлении на рельсы, способствуя быстрому их изнашиванию. Для того, чтобы знаменатель в дроби (63) не был слишком мал, на железных дорогах СССР установлено, чтобы  $R$  (в обыкновенных случаях) был не меньше 500 м.

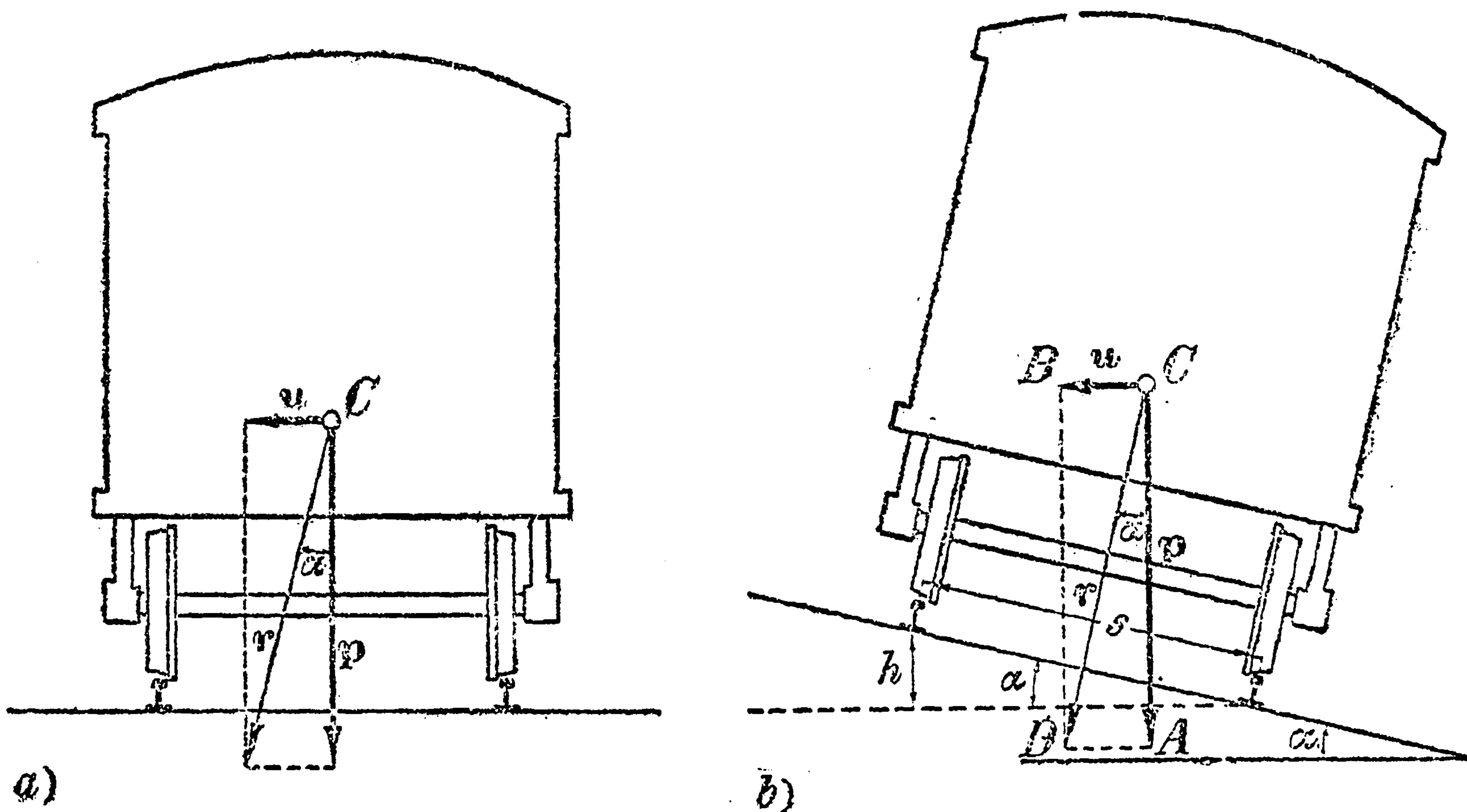
Рассмотрим, какие силы действуют на вагон в плоскости, проходящей через его центр тяжести и перпендикулярной к направлению его движения (черт. 220 а). Пусть вес вагона будет  $p = Mg$  (где  $M$  — его масса). Центробежную силу  $u$  можно также считать приложенной в центре тяжести  $C$ . Величина ее выразится формулой

$$u = \frac{Mv^2}{R} = \frac{pv^2}{gR}. \quad (63 a)$$

Таким образом, к силе тяжести  $p$  направленной вертикально вниз, присоединяется еще слагающая  $u$  направленная по горизонтали, в сторону, противоположную вогнутости пути. Равнодействующая  $r$  этих двух сил производит определенное давление на рельсы; однако, так как эта равнодействующая пересекает полотно ближе к наружному рельсу (черт. 220 а), то этот последний и испытывает большее давление, нежели внутренний рельс, что способствует большему его изнашиванию. Вместе с тем и с его стороны требуется большее сопротивление и — если рельс не в состоянии его оказать — тем создается угроза без-

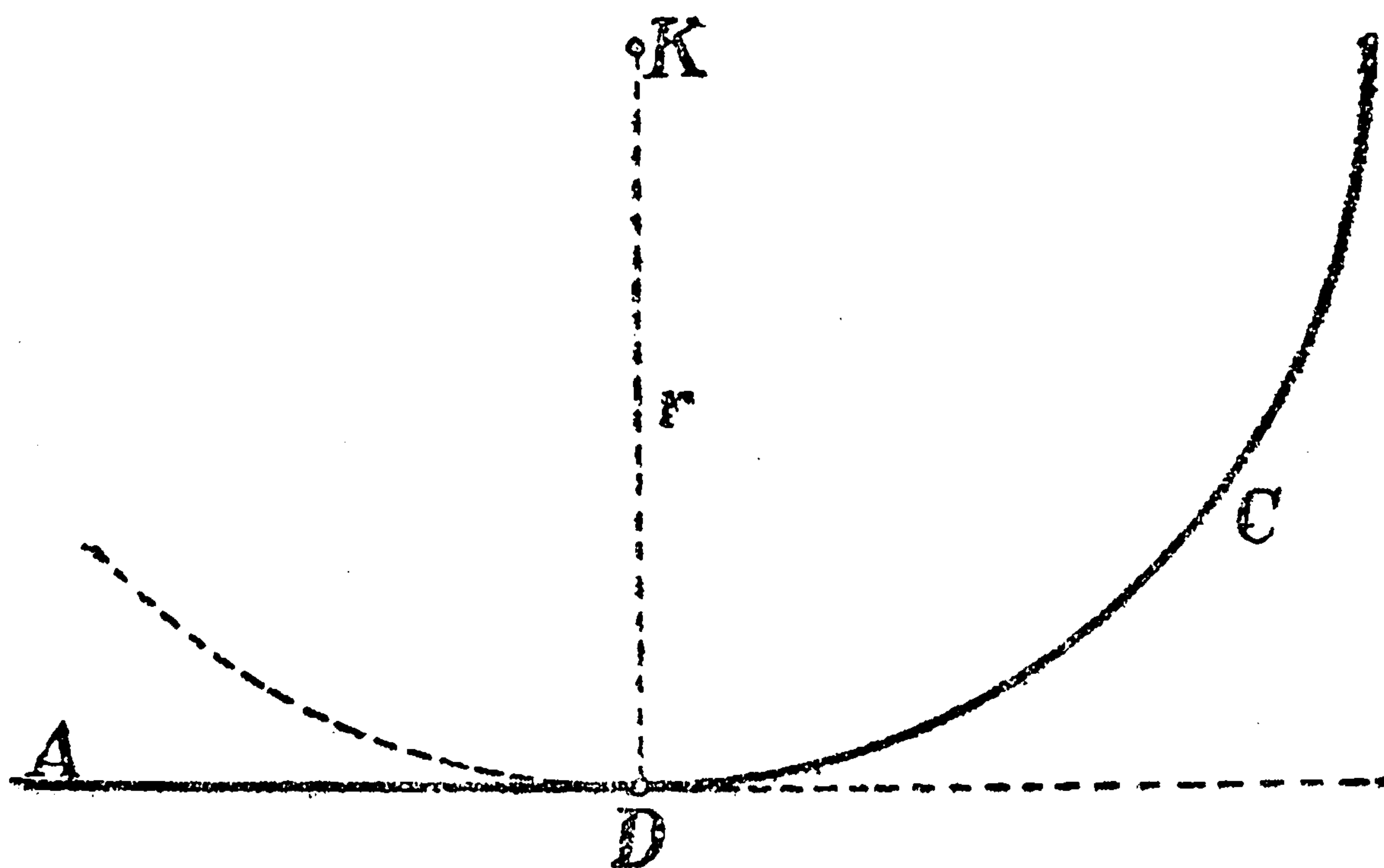


опасности движения. Для того чтобы избежать этого, железнодорожное полотно на закруглениях наклоняют к горизонту, подымая наружный рельс колеи. Если  $h$  — возвышение наружного рельса,  $s$  — ширина колеи,  $\alpha$  — угол наклона плоскости пути к горизонту (черт. 220 б), то, очевидно-



Черт. 220.

$h = s \sin \alpha$ , или — в виду малости  $\alpha$  — можно положить приближенно:  $h = s \operatorname{tg} \alpha$  [26, (1.)]. С другой стороны, коль скоро угол  $\alpha$  таков, что равнодействующая  $r$  пересекает плоскость пути на равных от рельсов расстояниях, т. е. перпендикулярна к этой плоскости, то, как видно из чертежа, для  $\operatorname{tg} \alpha$  из  $ACD$  с учетом формулы (63 а), получается выражение:



Черт. 221.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{s} = \frac{v^2}{gR},$$

Так что

$$h = \frac{sv^2}{gR}.$$

В таком виде эта формула имеет место, если все входящие в ее состав величины выражены в соответствующих единицах, напр.,  $h$ ,  $s$  и  $R$  в м,  $v$  — в м/сек,  $g$  — в м/сек<sup>2</sup>. Удобнее однако скорость поезда выражать в км/час, что равно  $1000/3600$  м/сек =  $0,278$  м/сек. Тогда, конечно, правую часть формулы надлежит еще умножить на квадрат этого отношения  $0,278$ .

Полагая еще  $g = 9,81$  м/сек<sup>2</sup> и  $s = 1,524$  м (такова ширина колеи на железных дорогах СССР), получим окончательно:

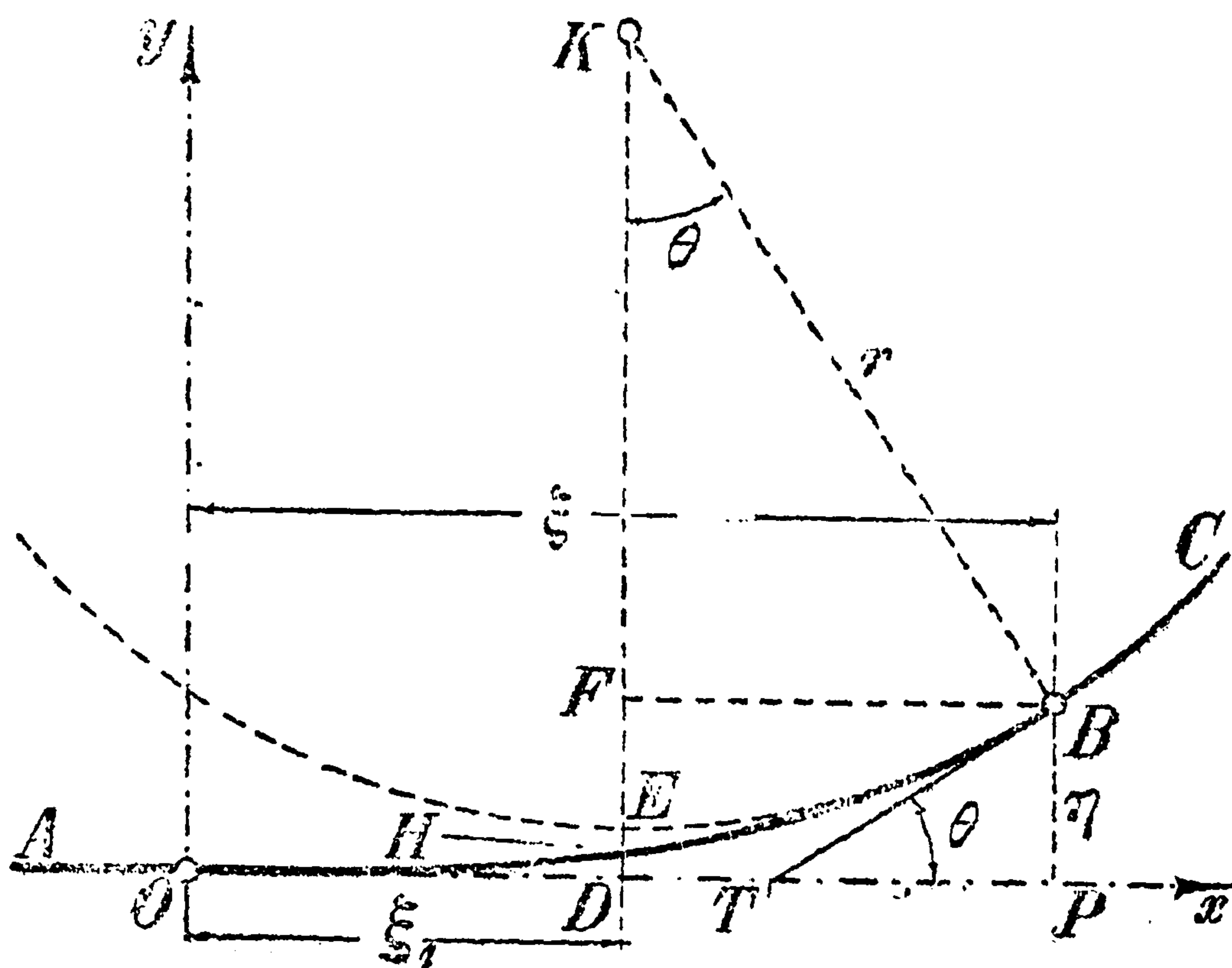
$$h = \frac{1,524 \cdot (0,278)^2}{9,81} \frac{v^2}{R} = 0,012 \frac{v^2}{R}. \quad (64)$$

По этой формуле и рассчитывают возвышение наружного рельса при закруглениях



на большей части железных дорог Союза, подставляя вместо  $v$  наибольшую скорость движения в этом месте пути.

Разбивать закругления всего проще, конечно, по дугам окружностей, которые выбираются так, чтобы они *касались* прямых, продолжениями которых служат (черт. 221). Этим однако не обеспечивается плавность движения, и *непосредственный* переход от прямолинейного пути  $AD$  к дуге  $DC$  окружности радиуса  $r$  имел бы следствием *мгновенное* появление центробежной силы и бокового давления со стороны рельсов, т. е. создал бы резкий и сильный толчок, вредный для верхнего строения пути, для подвижного состава и т. п. Поэтому (особенно, при  $r < 1000$  м) соединяют прямолинейный и круговой участки пути с помощью так назыв. *переходной кривой*; последняя не только *касается* прямой и дуги круга в точках соединения с ними, но и имеет в этих точках *одинаковую с ними кривизну*, так что радиус кривизны  $R$  вдоль переходной кривой *непрерывно* убывает от  $\infty$ , в точке соединения с прямой, до радиуса  $r$  круга, в той точке, где она примыкает к его дуге. Благодаря этому и центробежная сила (равно как и давление со стороны рельсов) при движении по переходной кривой [в силу (63 а)] *постепенно* нарастает от нуля — на прямой — до величины, соответствующей дуге круга. Применение переходной кривой разрешает еще и другое затруднение, состоящее в невозможности сразу повесить наружный рельс на высоту  $h$  [по формуле (64)], соответствующую радиусу дуги круга. Именно, вдоль переходной кривой это повышение производится постепенно, так сказать, разгоняется по всей длине переходной кривой.



Черт. 222.

Удобнее всего соединить переходной кривой прямую  $AD$  и дугу  $DC$  круга (черт. 221), если представляется возможным передвинуть прямую (на чертеже вниз) или круг (вверх), хотя бы на незначительное расстояние. Этот простой случай мы и рассмотрим подробнее. На черт. 222  $AO$  есть прямолинейный участок пути,  $OB$  — переходная кривая,  $BC$  — дуга круга радиуса  $r$  (с центром в  $K$ ). Отрезок  $ED$  измеряет произведенное передвижение. Разбивают переходную кривую по *кубической параболе* или по *лемнискате*; так как обыкновенно предпочитают первую кривую, то и мы остановимся на ней, взяв ее уравнение (при указанном на чертеже выборе осей) в виде:

$$y = \frac{x^3}{6q} \quad (q = \text{пост.}). \quad (65)$$

В этом случае, очевидно, имеем:

$$y' = \frac{x^2}{2q}, \quad y'' = \frac{x}{q},$$

так что для производной дуги  $s'$  и для радиуса кривизны  $R$  получаются выражения [(32); (53)]:

$$s' = \sqrt{1 + \frac{x^4}{4q^2}}, \quad R = \frac{q}{x} \left(1 + \frac{x^4}{4q^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

При  $x = 0$  имеем  $y' = 0$  и  $R = \infty$ , т. е. наша парабола (при любом  $q$ ) в на-



чале координат касается оси и имеет бесконечный радиус кривизны, так что при переходе с прямолинейного участка на переходную кривую плавность движения не нарушится.

Так как на практике длина переходной кривой редко превосходит 100 м, а постоянная  $q$  обыкновенно  $> 10\,000$ , то дробь  $\frac{x^3}{4q^2}$  оказывается очень малой, и ею пренебрегают, полагая

$$R = \frac{q}{x} \text{ и } s' = 1. \quad (66)$$

Отсюда  $s = x$ , если отсчитывать дугу от точки  $O$ , и

$$R = \frac{q}{s}. \quad (67)$$

Перепишав формулу (64), определяющую возвышение  $h$  наружного рельса в зависимости от кривизны пути, в виде

$$h = \frac{c}{R}, \quad (68)$$

где  $c = 0,012 v^2$  есть постоянный коэффициент, и подставляя сюда найденное выше выражение для  $R$ , получим:

$$h = \frac{c}{q} s, \quad (69)$$

так что  $h$  растет пропорционально расстоянию  $s$  точки от начала  $O$ , считая по дуге. Иными словами, возвышение наружного рельса равномерно разгоняется по длине переходной кривой, что чрезвычайно упрощает техническое его осуществление\*.

Радиус  $r$  круга мы считаем данным. Постоянный параметр  $q$  выбирается обыкновенно с таким расчетом, чтобы постоянный подъем или уклон  $\frac{c}{q}$  наружного рельса был равен 0,001. Подлежат определению отрезки  $OP = \xi$ ,  $OD = \xi_1$  и  $DE = m$ ; из них последний указывает, на какое расстояние должно быть произведено передвижение прямой или круга (о котором шла речь выше), а первые два устанавливают, в каких точках прямолинейной и круговой части пути к ним примыкает переходная кривая.

Прежде всего, так как в точке  $B$  (т. е. при  $x = \xi$ ) радиус кривизны переходной кривой должен равняться радиусу  $r$  круга, из формулы (66) для  $R$  имеем:

$$r = \frac{q}{\xi}, \text{ откуда } \xi = \frac{q}{r}. \quad (70)$$

Далее, из прямоугольного  $\triangle KFB$  для  $FB$  получается выражение:

$$FB = r \sin \theta. \quad (71)$$

В виду малости угла  $\theta$ , можем заменить здесь  $\sin \theta$  через  $\text{tg } \theta$ \*\*\*. Проведя в точке  $B$  общую касательную  $BT$  к параболе  $OB$  и кругу, имеем, очевидно,

$$\text{tg } \theta = \frac{\xi^2}{2q}.$$

\* Нужно заметить, что основное равенство (67) и вытекающее из него (69) имеют место для кубической параболы лишь приближенно (хотя и с достаточной для практических потребностей точностью). Существует кривая более сложной природы (ее иногда называют *радиодальной спиралью*), для которой эти равенства выполняются вполне точно [см. ниже, 205, 4].

\*\* Относительная погрешность от такой замены:  $\frac{\text{tg } \theta - \sin \theta}{\text{tg } \theta} = 1 - \cos \theta$  будет очень мала при малом  $\theta$  ( $\cos \theta$  близок к 1!).



$\theta = \angle FKB = \angle BTP$ ; поэтому  $\operatorname{tg} \theta$ , как угловой коэффициент касательной, определяется сразу дифференцированием:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\xi^2}{2q}.$$

Подставляя полученное выражение в (71), найдем, что

$$FB = r \cdot \frac{\xi^2}{2q} = \frac{q}{\xi} \cdot \frac{\xi^2}{2q} = \frac{1}{2} \xi.$$

В таком случае  $DP = \frac{\xi}{2}$ , следовательно, и  $\xi_1 = OD = \frac{\xi}{2}$ . Получается простое правило: переходная кривая распределяется на одинаковое расстояние  $\frac{\xi}{2} = \frac{q}{2r}$  по обе стороны от проекции  $D$  центра  $K$  круга на продолжение прямолинейного направления пути.

Наконец, для определения отрезка  $m = DE$  заметим следующее. Так как  $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ , то, подставляя сюда, вместо  $\sin \theta$ , полученное выше выражение для  $\operatorname{tg} \theta$ , будем иметь

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \frac{\xi^4}{4q^2}}.$$

В главе I было доказано [26, (32)], что при малых значениях  $x$  можно с точностью до высших степеней  $x$  положить

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x.$$

В данном случае  $x = -\frac{\xi^4}{4q^2}$  и мы можем, таким образом, окончательно, приближенно положить:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\xi^4}{8q^2} \text{ или } 1 - \cos \theta = \frac{\xi^4}{8q^2}.$$

Тогда из  $\triangle KFB$ :

$$FK = r \cos \theta,$$

так что [см. (70)]

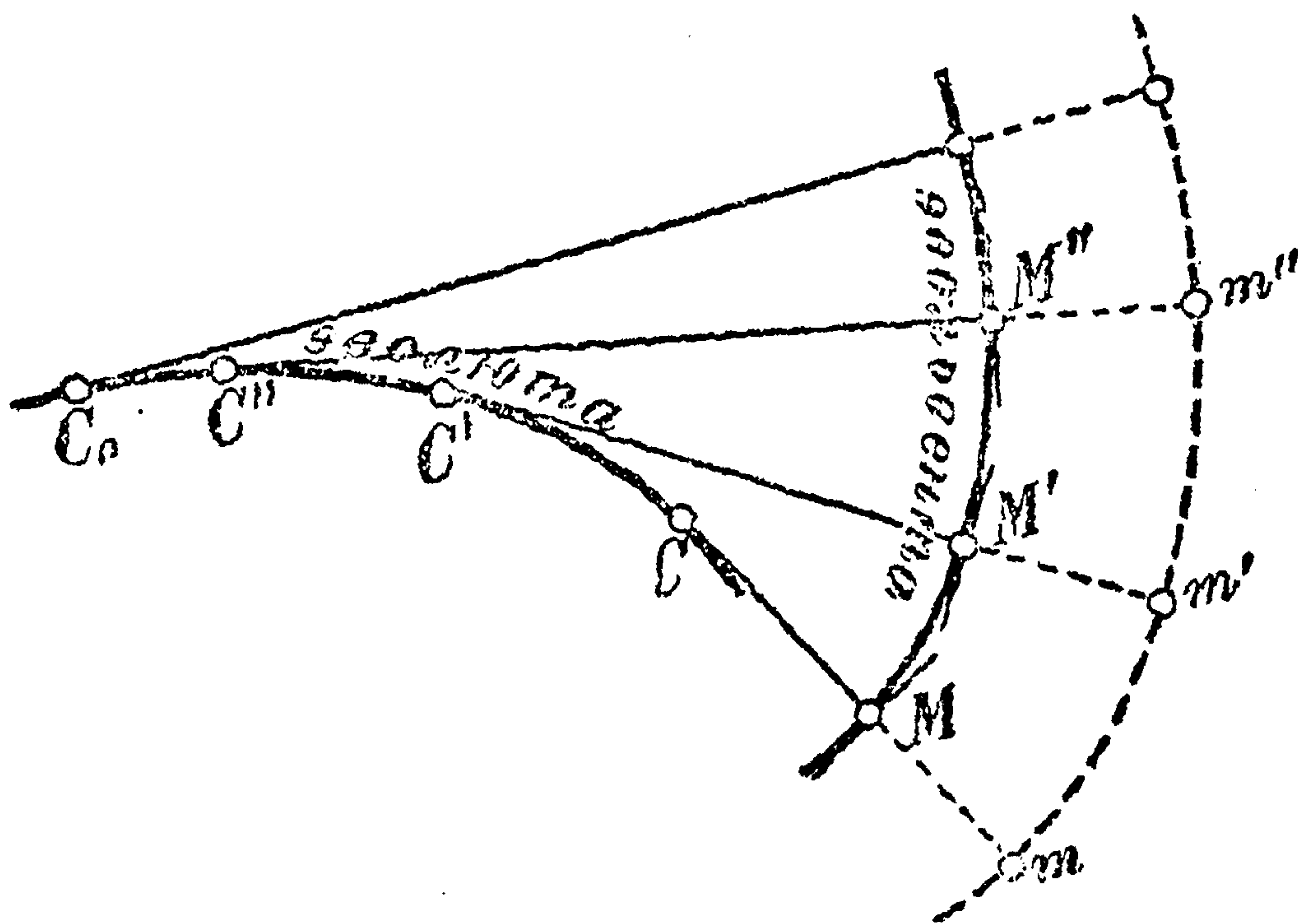
$$EF = r - r \cos \theta = r(1 - \cos \theta) = \frac{q}{\xi} \cdot \frac{\xi^4}{8q^2} = \frac{\xi^3}{8q}$$

и, наконец,

$$m = DE = DF - EF = PB - EF = \frac{\xi^3}{6q} - \frac{\xi^3}{8q} = \frac{\xi^3}{24q}. \quad (72)$$

Нетрудно видеть, что  $m$  составляет четверть величины  $\eta = \frac{\xi^3}{6q}$ ; так как, с другой стороны,  $\eta_1 = DH = \frac{\xi_1^3}{6q} = \frac{\xi^3}{48q}$  составляет восьмую часть  $\eta$ , т. е. половину  $m$ , то отсюда заключаем, что переходная кривая пересекает расстояние  $DE$  между (раздвинутыми) прямой и окружностью посередине.

Итак, все элементы, необходимые для действительной разбивки переходной кривой, установлены.



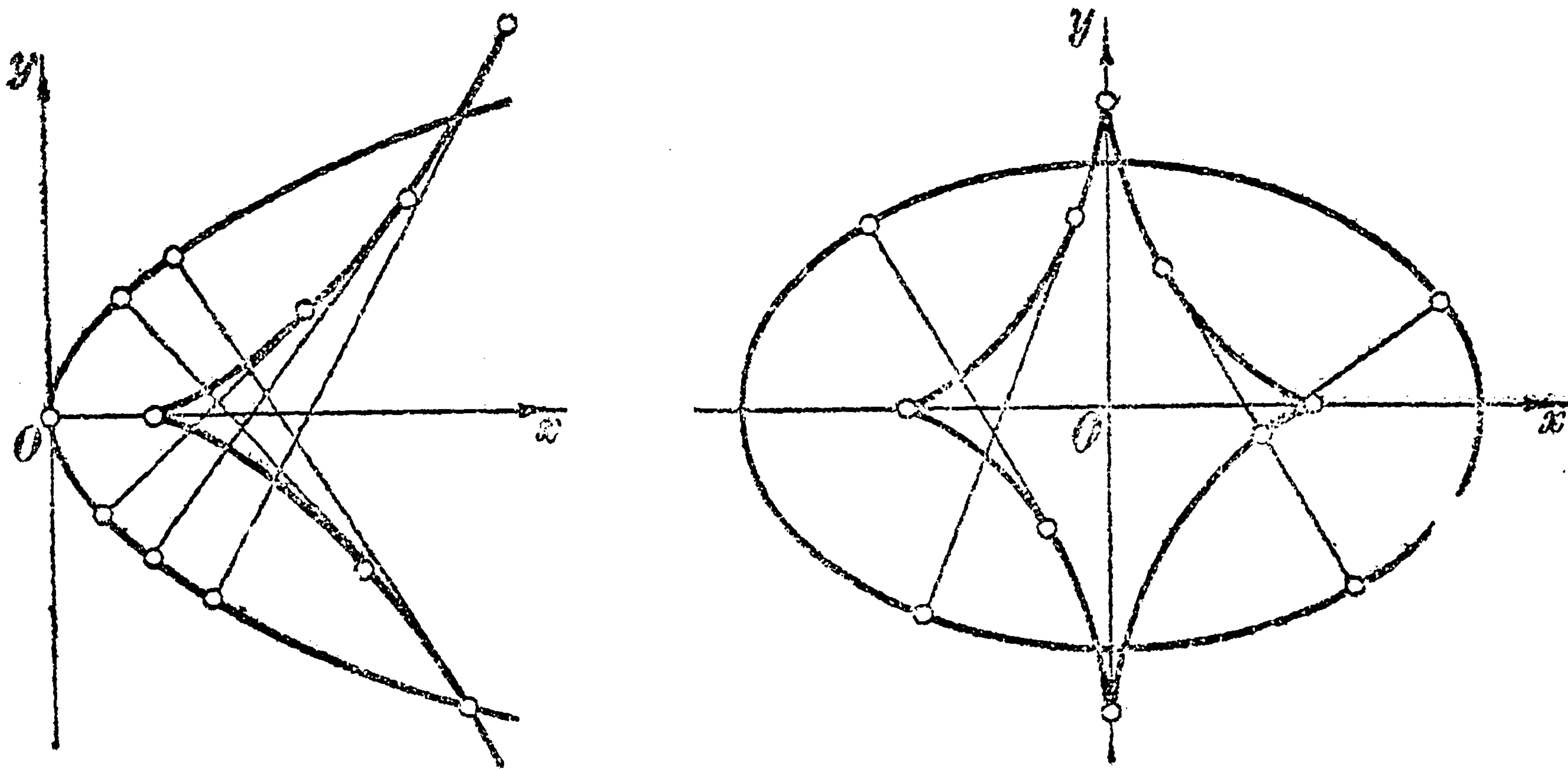
Черт. 223.



Поясним сказанное численным примером. Пусть радиус  $r$  круга будет 600 м, наибольшая скорость  $v$  на рассматриваемом участке 60 км/час; тогда коэффициент  $c$  в формуле (69) будет  $0,012v^2 = 43,2$ , а постоянный подъем наружного рельса выразится так:  $43,2/q$ . Из условия, чтобы он был равен 0,001, получим:  $q = 43\,200$ , или (округляя)  $q = 45\,000$ . Тогда, по формулам (70) и (72) сразу находим:  $\xi = 75$  м,  $m \doteq 0,39$  м.

В заключение, напомним, что согласно зад. 11, 137, радиус кривизны кубической параболы (65) имеет минимум; для нас, конечно, полезной может быть только та часть кривой, вдоль которой этот радиус постепенно убывает. Но в нашем случае, напр., минимум достигался бы при  $x \doteq 0,946 \sqrt{45\,000} \doteq 200$  м, в то время как наибольшее значение  $x$  есть  $\xi = 75$  м. Можно и в общем виде показать, что так это будет всегда, в пределах обычных значений для  $r$  и для  $q$ .

139. Понятие об эволютах и эвольвентах. Если переменная точка  $M$  передвигается по данной кривой (черт. 223), то соответствующий ей центр кривизны  $S$  также описывает некоторую линию. Это *геометрическое место центров кривизны* называется *эволютой* данной кривой; наоборот, данная кривая носит название *эвольвенты* той кривой, которая для нее служит эволютой.



Черт. 224 и 225.

*визны называется эволютой данной кривой; наоборот, данная кривая носит название эвольвенты той кривой, которая для нее служит эволютой.*

В п<sup>о</sup> 115 мы, напр., изучали кривую, которую называли эвольвентой круга (черт. 175); теперь это название оправдывается, так как мы уже убедились [136, зад. 4], что круг, действительно, является геометрическим местом центров кривизны для упомянутой кривой, короче — ее эволютой.

Этот пример для нас очень поучителен, так как на нем мы можем проследить важнейшие особенности, определяющие взаимоотношение эволют и эвольвент вообще. Прежде всего, мы знаем [126, III], что нормаль  $MB$  к эвольвенте круга (черт. 175) является касательной к самому кругу. Эта особенность имеет место всегда: *нормаль к эвольвенте, в некоторой ее точке  $M$ , служит касательной к эволюте, в соответствующей точке  $S$  (центре кривизны)*. Так, на черт. 223 нормали  $MS, M'S, M''S$  к эвольвенте в точках  $M, M', M''$ , очевидно, касаются эволюты, соответственно, в точках  $S, S', S''$ . Затем, может быть обобщено и самое получение эвольвенты с помощью разворачивания нити, предварительно накрученной на эволюту. Именно, *если представить себе гибкую и нерастяжимую нить  $C_0SM$  накрученной на эволюту и постепенно ее разворачивать, сохраняя ее натянутой (так что в точке схода с эволюты она все время будет иметь направление касательной), то точка  $M$  опишет эвольвенту  $MM'M''\dots$*  Можно было бы взять и другую точку, напр.,  $m$ , на нити, и тогда эта точка опишет другую эвольвенту  $mm'm''\dots$  (так сказать, „параллельную“ первой) для той же самой эволюты.

В некоторых конструкциях (напр., противовеса подвижной части разводного



моста) бывает необходимо удержать данную материальную точку на определенной кривой. Этого можно достигнуть, осуществив материально названную кривую в виде направляющей, но тогда при движении точки по ней пришлось бы преодолевать трение. Поэтому в иных случаях предпочитают подвесить точку на нити (канате, цепи), накрученной на эволюту кривой, чем и заставляют точку не сходить с эвольвенты при своем перемещении.

На черт. 224 и 225 изображены эволюты параболы и эллипса; по отношению к указанным осям уравнения изображенных кривых будут такие:

$$\begin{cases} \text{парабола: } y^2 = 2px, \\ \text{эволюта параболы: } y^2 = \frac{8}{27p} (x-p)^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{эллипс: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ \text{эволюта эллипса: } (ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}} + 8r (c^2 = a^2 - b^2). \end{cases}$$

Эволюта параболы есть не что иное, как полукубическая парабола [42], с вершиной в точке  $(p, 0)$ ; эволюта же эллипса похожа на астроиду [114; черт. 195] и получается из нее путем пропорционального увеличения ординат всех точек. Легко заметить, что тем точкам эвольвенты, где радиус кривизны достигает максимума или минимума, отвечают на эволюте острия (точки возврата). Сказанное выше о получении эвольвенты с помощью нити, накрученной на эволюту, относится к каждому участку эвольвенты между остриями в отдельности; так, верхняя часть параболы получается по нижней части ее эвольвенты, а нижняя — по верхней, но нельзя разворачиванием одной и той же нити получить и нижнюю, и верхнюю половины параболы.

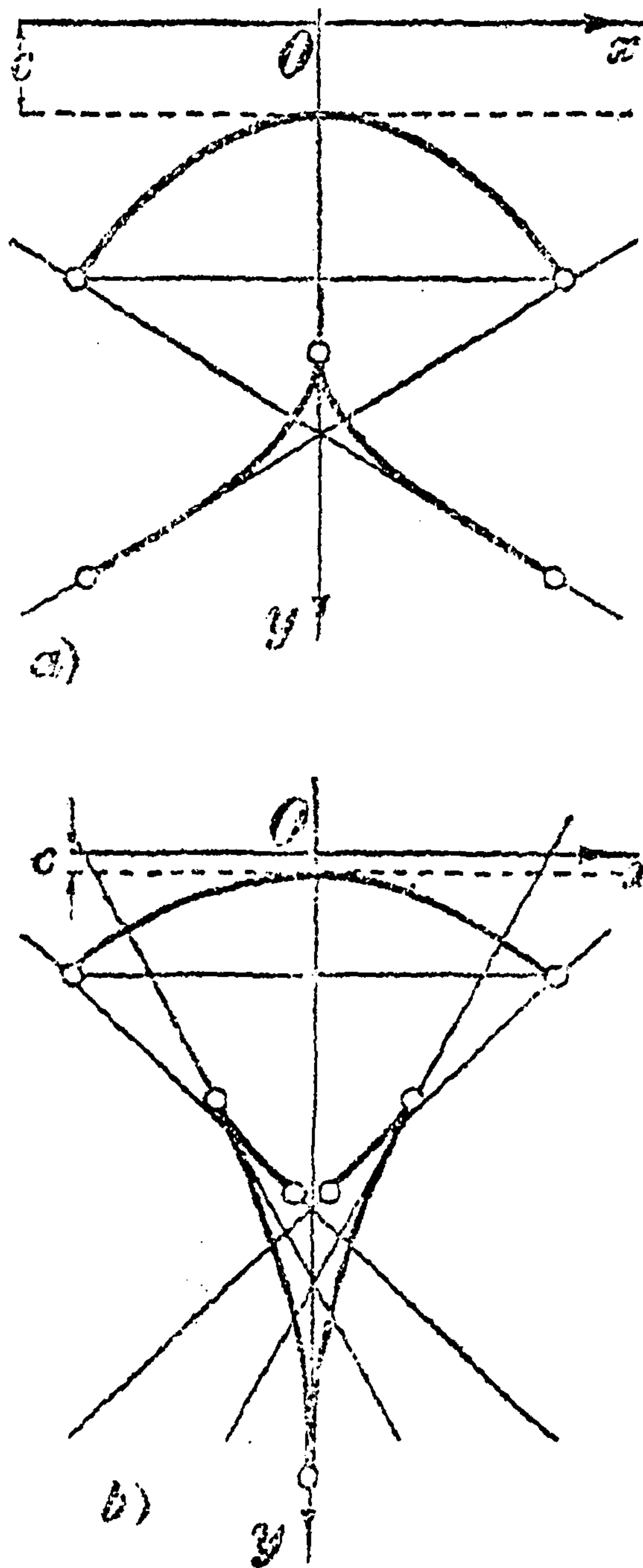
В строительном деле представляет интерес еще эволюта катеноиды [136, зад. 13]

$$y = c \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a};$$

она изображена на черт. 226, причем первый чертеж соответствует случаю 1), когда  $3c^2 \geq a^2$ , а второй — случаю 2), когда  $3c^2 < a^2$  [ср. сказанное в 136 о максимумах и минимумах радиуса кривизны катеноиды!] Уравнение эвольвенты катеноиды проще всего написать в параметрическом виде, взяв за параметр ординату  $y$  точки самой катеноиды (а текущие координаты обозначив через  $X, Y$ ):

$$X = x - \frac{(y^2 + a^2 - c^2) \sqrt{y^2 - c^2}}{ay},$$

$$Y = 2y + \frac{a^2 - c^2}{y}.$$



Черт. 226.

При вычерчивании осевой линии свода или его направляющих обыкновенно заменяют запроектированную линию так называемой *коробовой кривой*, состоящей из круговых дуг, примыкающих одна к другой и имеющих в граничной точке общую касательную. При этом важно, чтобы коробовая кривая возможно ближе



подходила к той „истинной“ кривой, которую она заменяет, а главное — возможно точнее воспроизводила характер изменения ее кривизны. Для этого, между прочим, нужно, чтобы в тех точках „истинной“ кривой, где радиус кривизны имеет максимум или минимум (это всегда будет в замковом сечении, но может быть и в других сечениях), коробовая кривая сохранила ту же касательную и ту же кривизну. Вообще же центры дуг, составляющих коробовую кривую, должны располагаться на кривой, уподобляющейся эволюте данной кривой.

Приведенный очерк свойств *эволют* и *эвольвент* имеет целью лишь познакомить читателя с этими понятиями; мы не имеем возможности глубже вдаваться в изучение связанных с ними вопросов.

---



## ГЛАВА IX.

### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ЦЕЛЫЕ ПОЛИНОМЫ.

140. Комплексные числа и действия над ними. Числа целые, дробные и несоизмеримые (иррациональные), как положительные, так и отрицательные, все вместе называются *вещественными* числами. Таковы, напр., числа

$$3, -5, 0, \frac{3}{7}, -\frac{41}{13}, \sqrt{2}, -\pi, e \text{ и т. д.}$$

Мы познакомимся теперь с более общим понятием о *комплексном* (составном) числе, частным случаем которого будет число вещественное. Комплексные числа играют весьма важную роль в электротехнике; но и в других отделах техники они иной раз оказываются полезными, чему примеры мы найдем особенно в главах XVI и XVII, посвященных дифференциальным уравнениям.

Уже в элементарной алгебре мы сталкивались с необходимостью расширения числовой области. Напр., извлечение корня четной степени из отрицательного числа представляет собою действие невозможное, если ограничиваться рассмотрением только вещественных чисел. В частности, не существует такого *вещественного* числа, квадрат которого равнялся бы  $-1$ , т. е. среди вещественных чисел нет корня  $\sqrt{-1}$ . Можно сказать, что этот корень представляет собою *особое* (не вещественное!) новое число; его обыкновенно обозначают буквой  $i$ . Таким образом,  $i = \sqrt{-1}$  и

$$i^2 = -1. \quad (1)$$

Станем рассматривать выражения вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — обыкновенные (вещественные) числа, а  $i$  только-что введенное число, которое называют *мнимой единицей*. Эти выражения, как напр.:

$$3 + 5i, \quad -\frac{2}{3} + \frac{3}{4}i, \quad 2,5 - 1,3i = 2,5 + (-1,3)i, \quad 5i = 0 + 5i, \text{ и т. п.}$$

и представляют собой *комплексные числа*. Комплексное число  $a + bi$ , если переписать его в виде  $a \cdot 1 + b \cdot i$ , как бы составляется из обыкновенной единицы  $1$  — с коэффициентом  $a$ , и мнимой единицы  $i$  — с коэффициентом  $b$ . Число  $a$  называют *вещественной частью* комплексного числа  $a + bi$ , а  $bi$  — его *мнимой частью*. При  $b = 0$  число  $a + bi = a + 0i = a$  сводится к вещественной части  $a$ , так что вещественное число на самом деле представляется частным случаем комплексного. В отличие от этого частного случая, комплексное число  $a + bi$ , для которого  $b \neq 0$ , будем называть *мнимым*.

Отметим еще одно полезное понятие: два числа вида  $a + bi$  и  $a - bi = a + (-b)i$ , различающиеся лишь знаком коэффициента в мнимой части, называются *сопряженными*; таковы, напр., будут:

$$3 - \sqrt{2}i \text{ и } 3 + \sqrt{2}i; \quad -0,5 + 3,2i \text{ и } -0,5 - 3,2i; \quad -\frac{7}{3}i \text{ и } \frac{7}{3}i.$$

Любое вещественное число оказывается сопряженным само с собою, ибо  $a + 0i = a - 0i$ ; очевидно, этим свойством обладают только вещественные числа.



Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел производятся, как и в случае обыкновенных алгебраических двучленов; лишь в результате, в силу (1), полагают  $i^2 = -1$ , и затем отделяют вещественную часть от мнимой. Таким образом, сложение и вычитание производится по формуле:

$$(a + bi) \pm (a' + b'i) = (a \pm a') + (b \pm b')i,$$

а умножение — по формуле;

$$(a + bi) \cdot (a' + b'i) = aa' + ba'i + ab'i + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + ba')i.$$

Напр.:

$$(2 - 3i) + (-1 + 5i) = (2 - 1) + (-3 + 5)i = 1 + 2i;$$

$$(2 - 2i) (-1 + 3i) = -2 + 2i + 6i - 6i^2 = 4 + 8i;$$

$$(4 + i)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4i + i^2 = 15 + 8i.$$

Последовательные степени мнимой единицы, очевидно, будут:

$$\left. \begin{aligned} i^2 = -1; i^3 = i^2 \cdot i = -i; i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1; i^5 = i^4 \cdot i = i; \\ i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = -1; i^7 = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i; i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1, i^9 = i^8 \cdot i = i, \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} (1a)$$

Легко заметить, что значения  $i, -1, -i, +1$  периодически воспроизводятся.

Если сложить или перемножить два сопряженных числа:  $a + bi$  и  $a - bi$ , то в обоих случаях получатся вещественные результаты:

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a; (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2. \quad (2)$$

Перейдем теперь к делению комплексных чисел. Пусть требуется найти частное двух чисел  $a + bi$  и  $a' + b'i$ , т. е. выразить значение дроби

$$\frac{a + bi}{a' + b'i}$$

комплексным числом. Умножив ее числитель и знаменатель на число  $a' - b'i$ , сопряженное со знаменателем, последовательно получим [принимая во внимание (2)]:

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{(aa' + bb') + (ba' - ab')i}{a'^2 + b'^2} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2} i,$$

и наша цель достигнута. Напр.,

$$\frac{3 - 7i}{-1 + 2i} = \frac{(3 - 7i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)} = \frac{-17 + i}{5} = -3,4 + 0,2i;$$

$$\frac{21 - i}{3 - 2i} = \frac{(21 - i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{65 + 39i}{13} = 5 + 3i.$$

Те же результаты, конечно, можно было бы получить и подставляя сразу в окончательную формулу, найденную выше, соответственно,  $a = 3, b = -7, a' = -1, b' = 2$  или  $a = 21, b = -1, a' = 3, b' = -2$ .

Таким образом, над комплексными числами можно производить арифметические действия, и в результате получаются также комплексные числа. Все обычные свойства действий здесь сохраняются; в связи с этим, сохраняют силу и все общеизвестные алгебраические тождества, напр., бином Ньютона, даже если входящие в их состав буквы означают комплексные числа.

Сделаем в заключение следующее важное замечание. Если в числах  $a + bi$  и  $a' + b'i$ , над которыми мы выше производили четыре арифметических операции, заменить  $i$  на  $-i$ , то и в результате операции  $i$  заменится на  $-i$  (что не



трудно проверить!). Иными словами, если данные для действия числа заменить им сопряженными, то и результат действия заменится ему сопряженным числом. Это утверждение, естественно, распространяется и на тот случай, когда мы производим последовательно ряд арифметических действий над несколькими данными числами. В частности, если результат действий оказывается вещественным, то он сохранится неизменным и после того, как все данные числа будут заменены им сопряженными (потому что, как упоминалось выше, вещественное число сопряжено само с собою).

**Задачи 1.** Произвести действия: 1)  $(-3+i) + (2-2i)$ ; 2)  $(-1-i) - (-3+i)$ ; 3)  $(5-2i)(-3+i)$ ; 4)  $(7+3i)(7-3i)$ , 5)  $(-2+3i)^2$ ; 6)  $(4-i)^2$ ; 7)  $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$ .

**Отв.** 1)  $-1-i$ ; 2)  $2-2i$ ; 3)  $-13+11i$ ; 4)  $58$ ; 5)  $-5-12i$ ; 6)  $52-47i$ ; 7)  $1$ .

2. Решить квадратное уравнение:  $x^2 - 4x + 13 = 0$  и проверить, удовлетворяет ли уравнению получаемое по обычной формуле комплексное число.

**Отв.**  $x = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\sqrt{-1} = 2 \pm 3i$ ;  $(2 \pm 3i)^2 - 4(2 \pm 3i) + 13 = 0$ .

3. Произвести деления:

$$1) \frac{-3+i}{5+2i}; \quad 2) \frac{1}{i}; \quad 3) \frac{8+14i}{1+3i}; \quad 4) \frac{8-25i}{-3-2i}.$$

**Отв.** 1)  $\frac{17}{29} + \frac{1}{29}i$ ; 2)  $-i$ ; 3)  $5-i$ ; 4)  $2+7i$ . Проверить, что умножение частного на делителя дает делимое!

4. Произвести указанные действия:

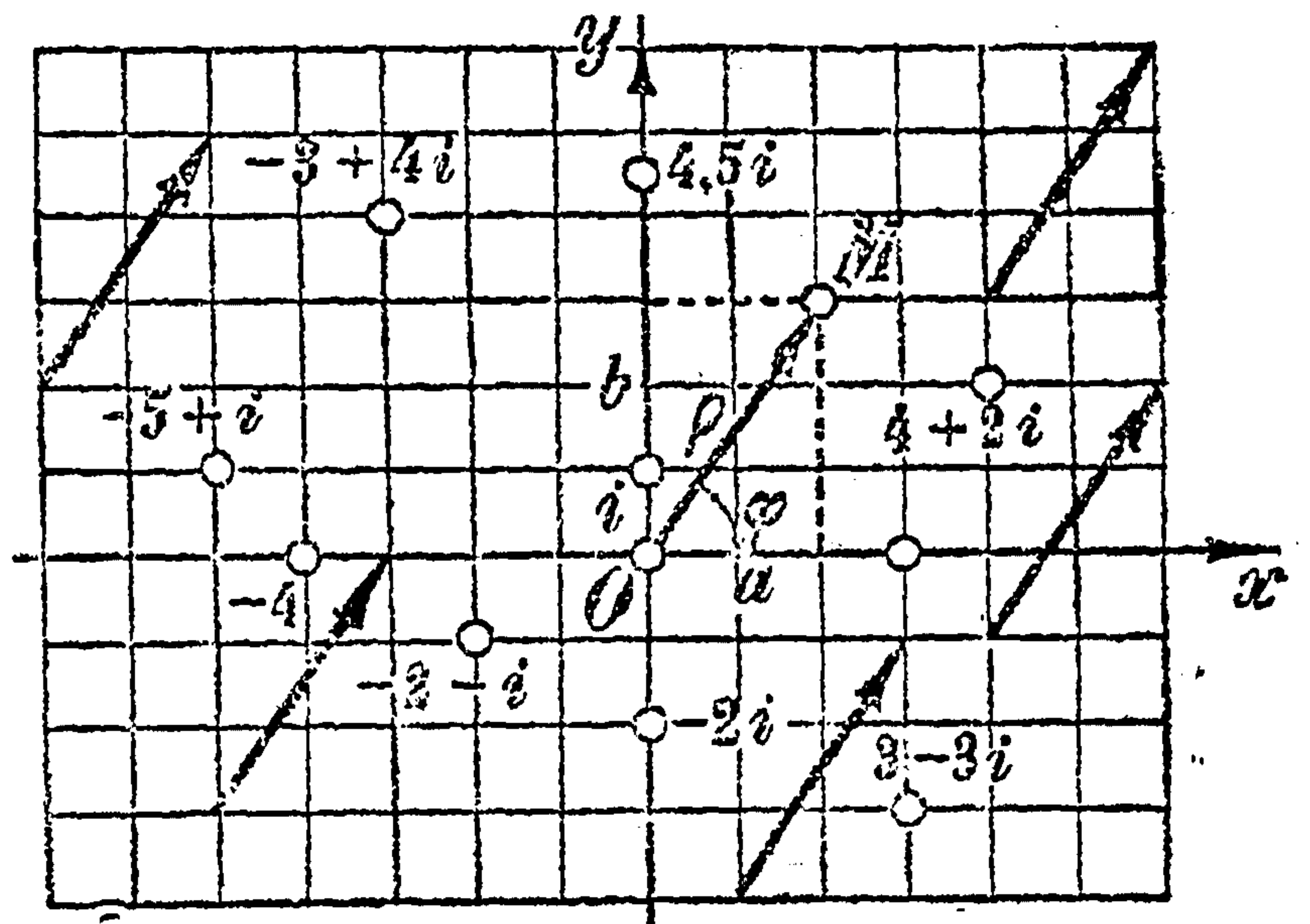
$$1) \frac{(2-3i)^2 + (5-i)(1+2i)}{(1-i)^2};$$

$$2) \frac{(2+3i)^2 + (5+i)(1-2i)}{(1+i)^2}.$$

**Отв.** 1)  $0,25 + 1,25i$ ; 2)  $0,25 - 1,25i$ . Можно ли было предвидеть, что получатся сопряженные результаты?

**141. Геометрическое истолкование комплексных чисел.** С вещественными числами мы уже связывали соответствием точки на прямой, так что каждому вещественному числу отвечала определенная точка на прямой, и обратно — каждой точке прямой отвечало определенное число. Аналогично можно геометрически проиллюстрировать и понятие о комплексном числе, но здесь уже придется привлечь все точки плоскости. Положим в основу некоторую систему прямоугольных координат (черт. 227) и отнесем каждому комплексному числу  $a+bi$  ту точку  $M$  плоскости, которая имеет координаты  $(a, b)$ , и обратно. Таким образом, все комплексные числа сопрягаются соответствием со всеми точками плоскости. При этом, очевидно, вещественным числам (для которых  $b=0$ ) окажутся отнесенными точки оси  $Ox$ , которую в связи с этим и называют *вещественной осью*; а так называемые *чисто мнимые* числа вида  $bi$  (для них  $a=0$ ) связываются соответствием с точками оси  $Oy$  — *мнимой осью*. В частности, числу  $i$  отвечает точка на мнимой оси, отстоящая от начала на расстояние 1 (в положительном направлении). Отметим еще, что двум сопряженным числам  $a+bi$  и  $a-bi$  соответствуют две точки, симметричные относительно оси  $Ox$ .

Отсюда легко перейти к другому геометрическому истолкованию, более важному в приложениях. Если соединить начало координат  $O$  с точкой  $M(a, b)$  отрезком  $OM$ , то можно именно этот отрезок, направленный от  $O$  к  $M$ , считать

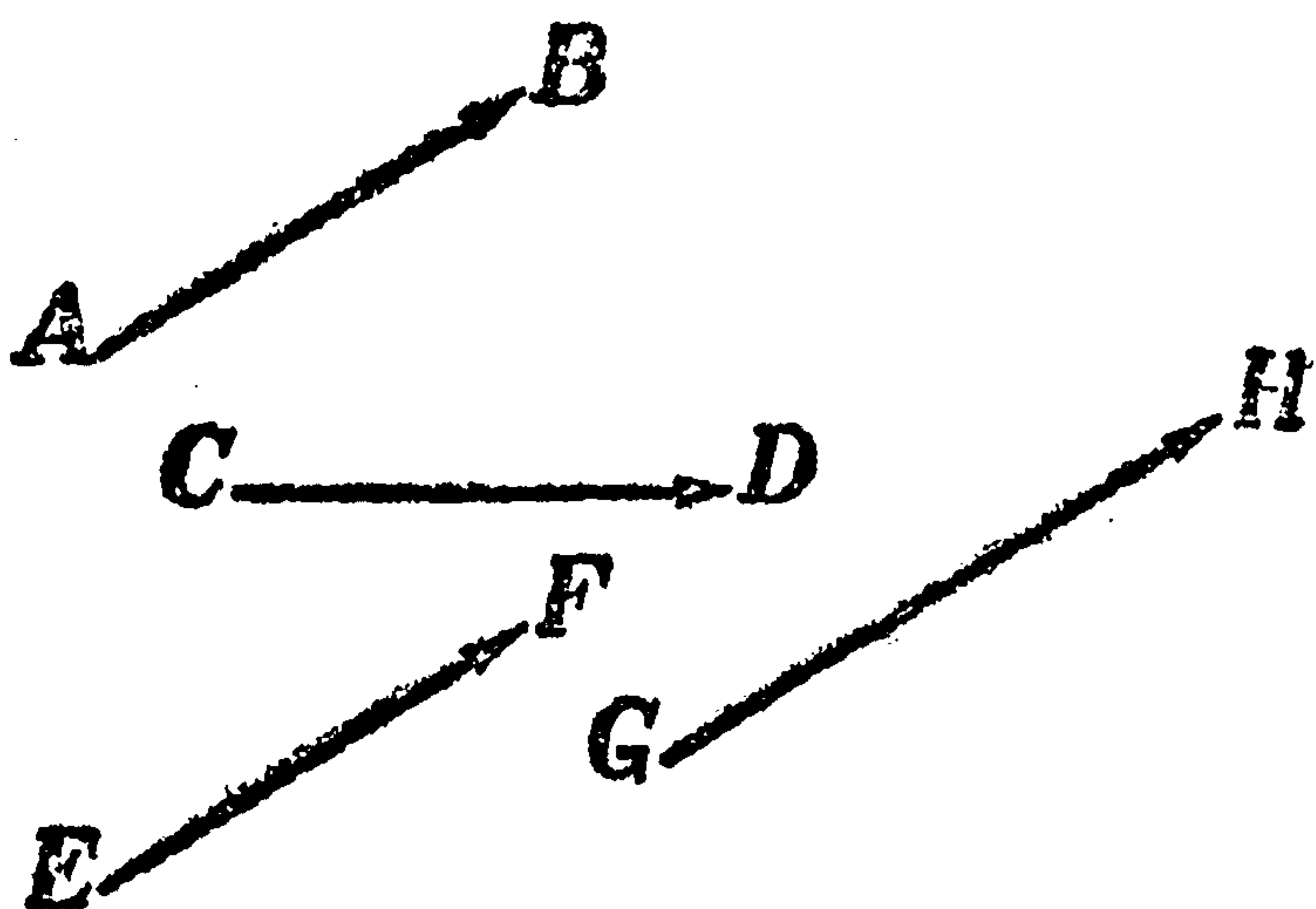


Черт. 227.



изображением комплексного числа  $a + bi$ . Проекции этого направленного отрезка (или, как говорят, вектора)  $OM$  на вещественную и мнимую оси, очевидно, будут равны соответственно  $a$  и  $b$  (с учетом их направлений и знаков).

Условились считать два вектора на плоскости (геометрически) равными, если они 1) имеют равные длины и 2) одинаково направлены (т. е. параллельны и направлены в одну сторону). Так, на черт. 228 векторы  $AB$  и  $EF$  геометрически равны, а векторы  $AB$  и  $CD$  или  $EF$  и  $GH$  геометрически не равны: первые два потому, что их направления не совпадают (хотя длины и равны!), а другие два (при совпадении направлений!) потому, что длины их разнятся. Векторы  $AB$  и  $BA$ , разумеется, не равны.



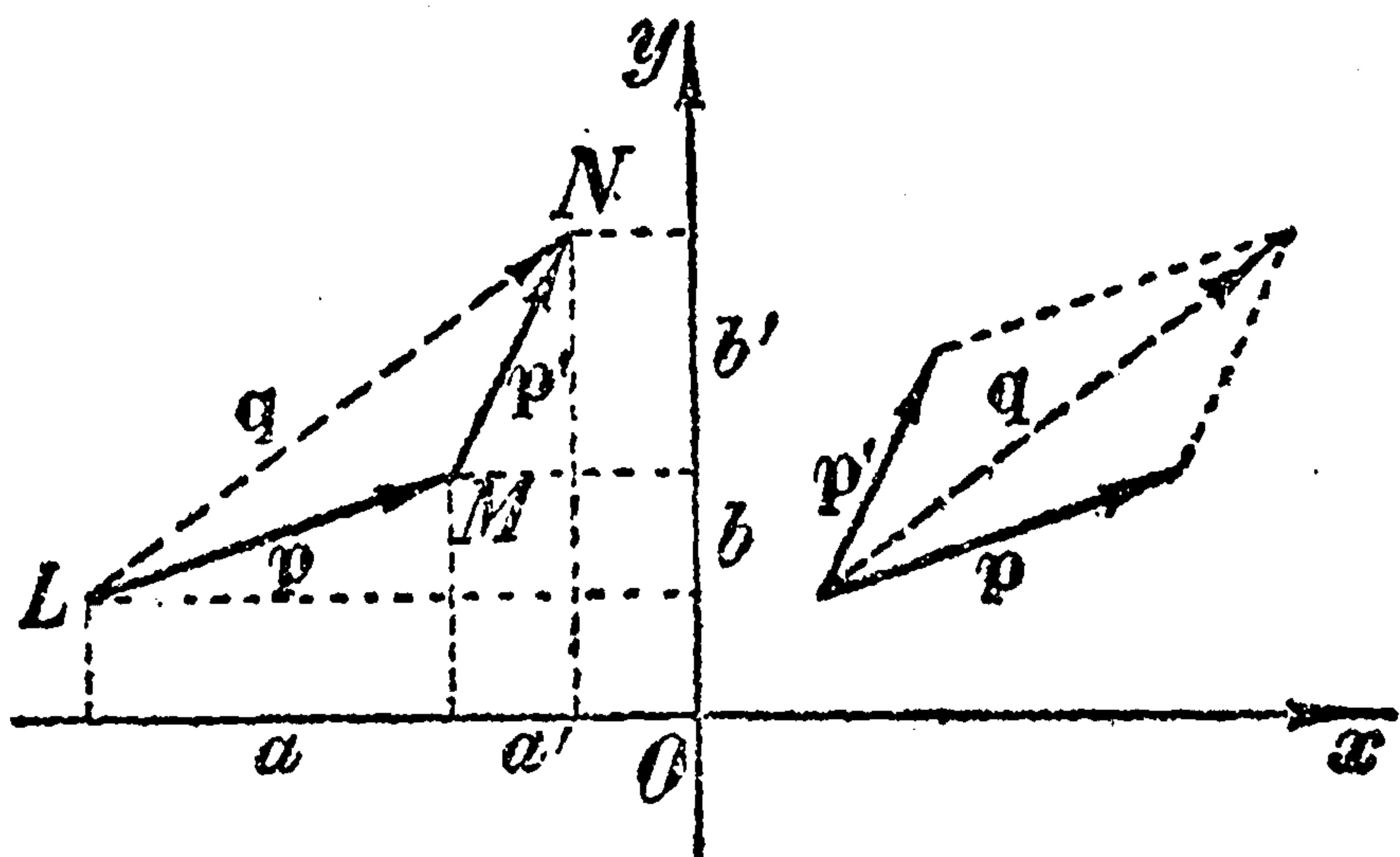
Черт. 228.

На ряду с вектором  $OM$  можно считать соответствующим комплексному числу  $a + bi$  и любой вектор на плоскости, геометрически равный  $OM$ ; очевидно, каждый такой вектор будет иметь те же проекции  $a$  и  $b$  на оси, что и вектор  $OM$ , и обратно, каждый вектор, имеющий эти проекции, необходимо будет равен вектору  $OM$  и может быть сопоставлен числу  $a + bi$ . В частности, числу  $i$  отвечают векторы длины 1, имеющие направление оси  $Oy$ .

Итак, на этот раз соответствие установлено между всеми комплексными числами и всевозможными векторами на плоскости!

Для того чтобы показать, насколько глубоко это соответствие, введем понятие о геометрической сумме векторов. Читатель знает из элементарной механики, что если векторы  $LM$  и  $MN$  (черт. 229) означают скорости или силы, приложенные к одной и той же точке, то „сумма“ их, по величине и направлению, выразится вектором  $LN$  — третьей стороной  $\triangle LMN$ . Иногда, впрочем, вместо этого „правила треугольника“, применяют „правило параллелограмма“, т. е. на складываемых векторах строят параллелограмм и тогда их „сумма“ выразится его диагональю; из черт. 229 ясна равносильность обоих правил. Эти правила распространяются и на векторы вообще, независимо от того, с чем они связываются: если даны два вектора  $p$  и  $p'$ , причем вектор  $p'$  началом приложен к концу вектора  $p$ , то (геометрической) суммой этих векторов называется вектор  $q$ , соединяющий начало  $p$  с концом  $p'$ . Конечно, здесь речь идет об особом роде сложении, которое — в отличие от обычного — мы будем называть геометрическим.\* Геометрическое вычитание определяется, как действие обратное геометрическому сложению.

Возвращаясь к комплексным числам, мы теперь легко установим, что сумме двух комплексных чисел  $a + bi$  и  $a' + b'i$  отвечает геометрическая сумма  $q$  изображающих эти числа векторов  $p$  и  $p'$ . Это ясно из того, что (черт. 229) проекции этой геометрической суммы на оси как раз равны  $a + a'$  и  $b + b'$ ; таковы же должны быть и проекции вектора, изображающего число  $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$ . То, что сказано о сложении, можно повторить и относительно вычитания.



Черт. 229.

\* Мы уже видели в 46, что синусоидальную величину  $y = A \sin(\omega t + \alpha)$  — при наперед заданной частоте  $\omega$  — представляют вектором длины  $A$ , проведенным под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ . То геометрическое построение, которое было приведено в 47 для определения суммы двух синусоидальных величин, теперь может быть выражено проще: для сложения двух синусоидальных величин достаточно геометрически сложить соответствующие им векторы.



142. Тригонометрическая форма комплексного числа. Вектор  $OM$ , изображающий комплексное число  $a + bi$  (черт. 227), определяется не только своими проекциями  $a$  и  $b$  на оси, но и, напр., его длиной  $\rho$  и углом  $\varphi$ , который он составляет с осью  $Ox$ . Эти величины ( $\rho$ ,  $\varphi$ ) очевидно, являются полярными координатами точки  $M$  и связаны с ее прямоугольными координатами  $(a, b)$  известными соотношениями [116, (60), (61a), (61b)]:

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi \quad (3)$$

или

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\rho}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\rho}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}. \quad (3a)$$

Положительное вещественное число  $\rho$  называется *модулем* (иногда *абсолютной величиной*) комплексного числа, а угол  $\varphi$  — его *аргументом*. Очевидно этот угол (подобно полярному углу) определяется с точностью до слагаемого вида  $2k\pi$ , где  $k$  — любое целое число. Легко проверить, что для вещественных чисел, как положительных, так и отрицательных, модуль совпадает с абсолютной величиной в обычном смысле. Аргумент же для положительных вещественных чисел равен 0 (или  $2k\pi$ ), а для отрицательных  $\pi$  (или  $2k + 1\pi$ ). Для числа  $i$  модуль равен 1, а аргумент  $\frac{\pi}{2}$  (или  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ).

Подставляя в запись комплексного числа  $z = a + bi$  (можно комплексное число обозначать и одной буквой  $z$ ) вместо  $a$  и  $b$  их выражения (3), мы приведем комплексное число к виду:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (4)$$

который называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Желая, напр., представить в тригонометрической форме число  $-1 + \sqrt{3}i$ , мы находим:

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = 2; \quad \cos \varphi = -\frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{так что } \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

и, окончательно,

$$-1 + \sqrt{3}i = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Аналогично:

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right),$$

$$1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$$

$$-1 = 1 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

Тригонометрическая форма комплексного числа, выявляющая его модуль и аргумент, иногда оказывается очень удобной. Рассмотрим, напр., умножение двух комплексных чисел, взятых в тригонометрической форме:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z' = \rho' (\cos \varphi' + i \sin \varphi').$$

Раскроем скобки и перемножим эти числа, как указано в 140; мы получим

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= \rho \cos \varphi \cdot \rho' \cos \varphi' + i \cdot \rho \cos \varphi \cdot \rho' \sin \varphi' + i \cdot \rho \sin \varphi \cdot \rho' \cos \varphi' + i^2 \cdot \rho \sin \varphi \cdot \rho' \sin \varphi' = \\ &= \rho \rho' [(\cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi') + i (\cos \varphi \sin \varphi' + \sin \varphi \cos \varphi')], \end{aligned}$$

или наконец, пользуясь известными формулами для косинуса и синуса суммы:

$$z \cdot z' = \rho \rho' [\cos (\varphi + \varphi') + i \sin (\varphi + \varphi')].$$

Таким образом, оказывается, что при перемножении двух комплексных чисел модули их перемножаются, а аргументы складываются.



Так как деление есть действие, обратное умножению, то отсюда легко получить:

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'} [\cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')],$$

т. е.: при делении двух комплексных чисел модули их делятся, а аргументы вычитаются.

Возвращаясь к изображению комплексных чисел векторами, можно сказать, что при умножении числа  $z$  на  $z'$  нужно вектор, изображающий  $z$ , умножить на модуль  $\rho'$  числа  $z'$ , а затем полученный вектор повернуть на угол  $\varphi'$ , равный аргументу  $z'$ . Отсюда, напр., легко видеть, что умножению на  $i$  отвечает просто поворот вектора на  $\frac{\pi}{2}$ .

Высказанное правило приводит к следующему геометрическому построению (черт. 230). Пусть  $OA$  — вектор длины 1, направленный по оси  $Ox$ , а  $OM$  и  $OM'$  — векторы, соответствующие множимому и множителю, так что

$$\text{дл. } OM = \rho, \text{ дл. } OM' = \rho', \angle AOM = \varphi, \angle AOM' = \varphi'.$$

На векторе  $OM$  строим треугольник  $OMN$ , подобный треугольнику  $OAM'$ : вектор  $ON$  и будет соответствовать искомому произведению. Действительно, из подобия упомянутых треугольников:

$$\frac{ON}{OM} = \frac{OM'}{OA}, \text{ или } ON = \frac{OM \cdot OM'}{OA} = \rho\rho',$$

а также

$$\angle AON = \angle AOM + \angle MON = \varphi + \varphi'.$$

Что до деления, то мы ограничимся замечанием, что отношение длин векторов, изображающих делимое и делитель, дает модуль частного, а угол между этими векторами равен аргументу частного.

143. Полином и его корни. Рассмотрим целый (относительно буквы  $x$ ) полином  $n$ -ой степени:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

где коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  суть постоянные вещественные или даже комплексные числа (при чем старший коэффициент  $a_0$  предполагается отличным от нуля). Точно также и под буквой  $x$  мы разумеем переменное комплексное число. Корнем этого полинома называется такое значение  $x = x_0$ , которое обращает этот полином в нуль:

$$P(x_0) = 0;$$

иными словами, корнем полинома  $P(x)$  называется корень алгебраического уравнения:  $P(x) = 0$ . Так, про число  $x = 2 + 3i$  одинаково можно сказать, что оно является корнем трехчлена  $x^2 - 4x + 13$  или корнем уравнения  $x^2 - 4x + 13 = 0$ .

Не трудно видеть, что если число  $a$  есть корень полинома  $P(x)$ , то этот полином должен нацело делиться на двучлен  $x - a$ , и обратно — если полином  $P(x)$  делится нацело на  $x - a$ , то  $a$  является его корнем.

Последнее утверждение очевидно: обозначив через  $Q(x)$  частное от деления  $P(x)$  на  $x - a$ , будем иметь такое алгебраическое тождество:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x),$$

и при  $x = a$  правая, а следовательно и левая часть этого тождества обращается в нуль. Пусть теперь нам известно, что  $a$  есть корень полинома  $P(x)$ . Для того чтобы установить, что в этом случае  $P(x)$  делится на  $x - a$  нацело, станем на



деле делить  $P(x)$  (расположив его по убывающим степеням  $x$ !) на  $x-a$ . Если бы при этом получился остаток  $R$ , представляющий собой не равное нулю *постоянное число*,\* то имели бы, по известному тождеству между делимым  $P(x)$ , делителем  $x-a$ , частным  $Q(x)$  и остатком  $R$ :

$$P(x) = (x-a) \cdot Q(x) + R.$$

При  $x=a$ ,  $P(x)$  обратилось бы в  $R$  и не было бы нулем! Следовательно, остатка при делении не должно получиться, и наше утверждение доказано полностью.

В *высшей алгебре* доказывается, что *каждый полином, степени не ниже первой, имеет корень*. Пусть  $x_1$  будет корнем рассматриваемого полинома  $P(x)$ ; тогда, по доказанному,  $P(x)$  делится нацело на  $x-x_1$ , т. е.

$$P(x) = (x-x_1) \cdot Q_1(x), \quad (5)$$

где через  $Q_1$  обозначен некоторый полином  $(n-1)$ -ой степени — частное от деления  $P$  на  $x-x_1$ . Если  $x_2$  есть корень этого полинома  $Q_1(x)$ , то аналогично:

$$Q_1(x) = (x-x_2) Q_2(x),$$

где  $Q_2$  — полином  $(n-2)$ -ой степени. Подставляя это выражение, вместо  $Q_1$ , в (5), получим:

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2) Q_2(x).$$

Если  $n > 2$ , то, обозначив через  $x_3$  корень полинома  $Q_2$ , аналогично найдем:

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) Q_3(x),$$

где степень  $Q_3$  равна  $n-3$ . Продолжая этот процесс, мы дойдем до  $n$ -го линейного множителя  $x-x_n$  и представим полином  $P(x)$  в виде:

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) Q_n(x),$$

где степень  $Q_n$  уже равна нулю, т. е.  $Q_n$  есть постоянное число. Если раскрыть скобки справа, то это постоянное число окажется *старшим коэффициентом*, т. е. коэффициентом при наивысшей,  $n$ -ой степени  $x$ ; следовательно, это число есть не что иное, как  $a_0$ , и мы получаем разложение:

$$P(x) = a_0 (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n). \quad (6)$$

Числа  $x_2, \dots, x_n$ , очевидно, все будут корнями полинома  $P(x)$  [про  $x_1$  мы это предположили наперед], ибо если подставить, напр.,  $x=x_2$ , то правая часть, а с нею и левая обратится в нуль. Итак, мы получаем чрезвычайно важное предложение: *каждый полином  $n$ -ой степени разлагается на  $n$  линейных множителей вида  $x-x_1, x-x_2, \dots, x-x_n$ , причем числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются его корнями.*\*\* Это предложение обобщает известное читателю из элементарного курса алгебры разложение квадратного трехчлена:

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = a_0 (x-x_1)(x-x_2),$$

где  $x_1, x_2$  — его корни.

Нельзя однако утверждать, что все корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , фигурирующие в разложении (6), между собой различны. Вообще говоря, между ними найдется, скажем,  $k$  корней, равных  $a$ , затем  $l$  корней, равных  $b$  ( $b \neq a$ ),  $m$  корней, равных  $c$  ( $c \neq a, c \neq b$ ), и т. д. Собирая в виде степени все равные между собой линейные множители, можно представить разложение (6) в виде:

$$P(x) = a_0 (x-a)^k (x-b)^l (x-c)^m \dots, \quad (6a)$$

\* Остаток уже не содержит  $x$ , ибо иначе деление можно было бы еще продолжать!

\*\* Легко видеть, что других корней, кроме этих, у него быть уже не может.



причем, очевидно, сумма показателей  $k + l + m + \dots$  равна  $n$ . Конечно, отдельные из показателей  $k, l, m, \dots$  (и даже все!) могут равняться и единице. Если  $k = 1$ , так что  $P(x)$  делится только на  $x - a$ , но не на высшую степень этого двучлена, то число  $a$  называют *простым корнем* (или *корнем первой кратности*) полинома  $P(x)$  [или соответствующего уравнения  $P(x) = 0$ ]. При  $k > 1$ ,  $a$  называют *кратным корнем* и именно  $k$ -ой кратности, если  $(x - a)^k$  есть наивысшая степень двучлена  $x - a$ , на которую  $P(x)$  делится нацело. Можно считать в этом случае, что в корне  $a$  как бы объединяются  $k$  равных между собою корней. Итак, налицо  $k + l + m + \dots = n$  корней: алгебраическое уравнение  $n$ -ой степени всегда имеет ровно  $n$  корней, если каждый корень считать по степени его кратности.

Положим для простоты  $a_0 = 1$  и, раскрыв скобки в правой части равенства (6), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях равенства. Так, при  $x^{n-1}$  справа в виде коэффициента получается выражение

$$-(x_1 + x_2 + \dots + x_n);$$

приравнивая его коэффициенту  $a_1$  слева, найдем:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1, \quad (7)$$

так что сумма всех корней равна коэффициенту при  $(n-1)$ -й степени  $x$  с обратным знаком. Далее, свободный член справа очевидно будет

$$(-x_1) \cdot (-x_2) \cdot \dots \cdot (-x_n) = (-1)^n x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n,$$

откуда

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n a_n. \quad (7a)$$

Приравнивая коэффициенты при других степенях  $x$ , можно получить еще ряд соотношений между коэффициентами полинома  $P(x)$  и его корнями. Для того случая, когда  $n = 2$ , т. е. когда мы имеем дело с трехчленом второй степени  $x^2 + a_1x + a_2$ , выведенные соотношения обращаются в тождества:

$$x_1 + x_2 = -a_1, \quad x_1 \cdot x_2 = a_2,$$

уже известные читателю из элементарной алгебры.

В заключение отметим, что утверждение о существовании корня, которым мы воспользовались, ничего не говорит об его вещественности: корень может быть и мнимым! И мы хорошо знаем из элементов алгебры, что если даже все коэффициенты, напр., квадратного уравнения суть вещественные числа, то корни его могут все же оказаться и мнимыми [см. напр., зад. 2, 140]. Таким образом, простое разложение (6) может иметь для нас то неудобство, что в правой части его фигурируют мнимые числа, несмотря на то, что все коэффициенты слева вещественны. К этому вопросу мы вернемся в п<sup>о</sup> 145.

*Примеры и задачи.* 1. Найти все корни уравнения  $x^3 - 1 = 0$ .

*Решение.* Уравнение 3-ей степени должно иметь 3 корня. Один из них непосредственно ясен:  $x_1 = 1$ . По доказанному, левая часть уравнения разделится нацело на  $x - 1$ , так что его можно представить в виде:  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ . Приравнивая нулю второй множитель, получаем квадратное уравнение, из которого легко находим еще два комплексных корня:

$$x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Легко проверить, что

$$x^3 - 1 = (x - 1) \left( x - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left( x - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

2. Три корня уравнения  $2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 2x - 4 = 0$  известны:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -1 + i$ ,  $x_3 = -1 - i$ ; найти четвертый,  $x_4$ .



*Решение.* Желая воспользоваться формулой (7), разделим предварительно уравнение на 2, чтобы свести старший коэффициент к 1; тогда при  $x^3$  будет коэффициент  $a_1 = \frac{7}{2}$ , и по формуле (7):  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{7}{2}$ . Так как  $x_1 + x_2 + x_3 = -4$ , то, очевидно,  $x_4 = -\frac{7}{2} - (-4) = \frac{1}{2}$ . Проверить, что

$$2x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 2x - 4 = 2(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1-i)(x+1+i).$$

3. Два корня уравнения  $35x^3 - 7x + 1 = 0$  известны:  $x_1 = \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$ . Найти третий корень, пользуясь как формулой (7), так и формулой (7a). *Отв.*  $x_3 = \frac{1}{6}$ .

4. Зная два корня  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$  уравнения  $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - 7x + 30 = 0$ , найти остальные два корня.

*Решение.* 1) Деля полином в левой части последовательно на  $x-2$  и  $x - \frac{5}{2}$  (или  $2x-5$ ), представим уравнение в виде:

$$2(x-2)\left(x - \frac{5}{2}\right)(x^2 + 2x + 3) = 0.$$

Недостающие корни получаются решением квадратного уравнения  $x^2 + 2x + 3 = 0$ . *Отв.*  $x_3 = -1 + i\sqrt{2}$ ,  $x_4 = -1 - i\sqrt{2}$ .

2) Можно также из формул (7) и (7a) определить сумму и произведение корней  $x_3, x_4$ , что приведет нас к тому же квадратному уравнению.

5. Зная корень  $x_1 = -1$  уравнения  $x^5 + x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 13x + 5 = 0$ , найти остальные его корни.

*Решение.* Желая установить степень кратности корня  $(-1)$ , делим полином на  $(x+1)$ , частное — снова на  $(x+1)$  и то же в третий раз, пока не получится в частном трехчлен  $x^2 - 2x + 5$ , уже не делящийся на  $x+1$ . Полином  $= (x+1)^3(x^2 - 2x + 5)$ . Корни:  $x_1 = x_2 = x_3 = -1$ ,  $x_4 = 1 + i\sqrt{2}$ ,  $x_5 = 1 - i\sqrt{2}$ .

144. Формула Тэйлора. Возьмем полином, расположенный по возрастающим степеням буквы  $x$ :

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n \quad (8)$$

(обращаем внимание читателя на то, что мы теперь иначе обозначаем и нумеруем коэффициенты!) и станем его последовательно дифференцировать:\*

$$P'(x) = A_1 + 2 \cdot A_2x + 3 \cdot A_3x^2 + \dots + n \cdot A_nx^{n-1},$$

$$P''(x) = 1 \cdot 2 \cdot A_2 + 2 \cdot 3 \cdot A_3x + \dots + (n-1) \cdot n \cdot A_nx^{n-2},$$

$$P'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot A_3 + \dots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot A_nx^{n-3},$$

.....

$$F^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot A_n.$$

Производная  $n$ -го порядка приводится уже к постоянной (а следующие про-

\* Хотя все числа:  $x, A_1, \dots, A_n$  здесь могут быть и мнимыми, но мы без оговорок переносим и на этот случай правила дифференцирования полиномов, выведенные в главе V для вещественной переменной и вещественных коэффициентов.



изводные все нули). Положим в этих равенствах  $x=0$ ; тогда все члены, содержащие  $x$ , исчезнут, и мы получим:

$$P(0)=A_0, P'(0)=A_1, P''(0)=1 \cdot 2 \cdot A_2, P'''(0)=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot A_3, \dots, P^{(n)}(0)=1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot A_n,$$

откуда, наоборот:

$$A_0 = P(0), A_1 = \frac{P'(0)}{1}, A_2 = \frac{P''(0)}{1 \cdot 2}, A_3 = \frac{P'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots, A_n = \frac{P^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Если подставить эти выражения коэффициентов полинома (8) через значения его же и его последовательных производных при  $x=0$ , то получится формула:

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1}x + \frac{P''(0)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{P'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \dots n}x^n, \quad (9)$$

которую обычно связывают с именем Маклорена (Maclaurin). Она отличается от обычного разложения полинома (8) именно формой записи коэффициентов. Выведем теперь более общую формулу, именно, поставим себе задачу: полином (8), расположенный по степеням  $x$ , разложить по степеням двучлена  $x-a$ , где  $a$  — произвольное постоянное число. Начнем с частного примера: пусть полином  $P(x) = 10 + 5x - 2x^2 - x^3$  требуется разложить по степеням  $x-a$ . Полагая  $x-a=h$  и  $x=a+h$ , подставим это выражение, вместо  $x$ , в наш полином; после раскрытия скобок и приведения подобных членов мы получим:

$$10 + 5(a+h) - 2(a+h)^2 - (a+h)^3 = (10 + 5a - 2a^2 - a^3) + (5 - 4a - 3a^2)h + (-2 - 3a)h^2 - h^3.$$

Остается только обратно подставить  $x-a$ , вместо  $h$ , чтобы прийти к требуемому разложению:

$$P(x) = (10 + 5a - 2a^2 - a^3) + (5 - 4a - 3a^2) \cdot (x-a) + (-2 - 3a) \cdot (x-a)^2 - (x-a)^3. \quad (10)$$

Что касается состава коэффициентов этого нового разложения, то относительно первого ясно, что он представляет собою не что иное, как  $P(a)$ ; о законе составления других коэффициентов по виду их пока сказать что-либо трудно. Вернемся теперь к общему случаю и представим себе полином (8) разложенным по степеням  $x-a$ ; коэффициенты этого разложения, как мы видели на примере, будут уже другие; обозначим их через  $B_0, B_1, \dots, B_n$ . Итак, имеем:

$$P(x) = B_0 + B_1 \cdot (x-a) + B_2 \cdot (x-a)^2 + B_3 \cdot (x-a)^3 + \dots + B_n \cdot (x-a)^n. \quad (11)$$

Продифференцируем и это равенство последовательно  $n$  раз:

$$P'(x) = B_1 + 2 \cdot B_2 \cdot (x-a) + 3 \cdot B_3 \cdot (x-a)^2 + \dots + n \cdot B_n \cdot (x-a)^{n-1},$$

$$P''(x) = 1 \cdot 2 \cdot B_2 + 2 \cdot 3 \cdot B_3 \cdot (x-a) + \dots + (n-1) \cdot n \cdot B_n \cdot (x-a)^{n-2},$$

$$P'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot B_3 + \dots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot B_n \cdot (x-a)^{n-3},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$P^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \dots n \cdot B_n.$$

Если теперь здесь положить  $x=a$ , то исчезнут все члены, содержащие  $x-a$ , и мы получим, как и выше,

$$P(a) = B_0, P'(a) = B_1, P''(a) = 1 \cdot 2 \cdot B_2, P'''(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot B_3, \dots, P^{(n)}(a) = 1 \cdot 2 \dots n \cdot B_n,$$

откуда, в свою очередь, коэффициенты  $B_0, B_1, \dots, B_n$  разложения (11) выразятся через значения самого полинома  $P(x)$  и его производных при  $x=a$ :

$$B_0 = P(a), B_1 = \frac{P'(a)}{1}, B_2 = \frac{P''(a)}{1 \cdot 2}, B_3 = \frac{P'''(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots, B_n = \frac{P^{(n)}(a)}{1 \cdot 2 \dots n}.$$



С этими значениями коэффициентов, разложение (11) переписывается так:

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1} \cdot (x-a) + \frac{P''(a)}{1 \cdot 2} \cdot (x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (x-a)^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{P^{(n)}(a)}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot (x-a)^n. \quad (12)$$

Это и есть знаменитая *формула Тэйлора* (Taylor), из которой ранее выведенная формула (9) получается, как частный случай, при  $a=0$ .

Проверим на примере многочлена  $P(x) = 10 + 5x - 2x^2 - x^3$ , для которого разложение по степеням  $x-a$  мы нашли непосредственно, справедливость полученных выражений для коэффициентов:

$$P(a) = 10 + 5a - 2a^2 - a^3 = B_0,$$

$$\begin{array}{l|l} P'(a) = 5 - 4a - 3a^2, & \frac{P'(a)}{1} = 5 - 4a - 3a^2 = B_1, \\ P''(a) = -4 - 6a, & \frac{P''(a)}{1 \cdot 2} = -2 - 3a = B_2, \\ P'''(a) = -6, & \frac{P'''(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -1 = B_3, \end{array}$$

полное согласие с разложением (10)!

Если снова положить  $x-a=h$  и  $x=a+h$ , то формула (12) представится в виде:

$$P(a+h) = P(a) + \frac{P'(a)}{1} \cdot h + \frac{P''(a)}{1 \cdot 2} \cdot h^2 + \frac{P'''(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot h^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot h^n. \quad (13)$$

Можно считать, что „первоначальное значение“  $x$  было  $a$ , а затем ему было придано „приращение“  $h$ , так что предыдущая формула [если перенести  $P(a)$  налево] дает разложение соответствующего приращения самого полинома по степеням  $h$ .

Применим ее, для примера, к функции  $P(x) = x^n$ . Так как в этом случае

$$P(x) = x^n, \quad P'(x) = nx^{n-1}, \quad P''(x) = n(n-1)x^{n-2},$$

$$P'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \dots, \quad P^{(n)}(x) = n(n-1)\dots 2 \cdot 1,$$

то, по формуле (13), имеем

$$(a+h)^n = a^n + \frac{na^{n-1}}{1} h + \frac{n(n-1)a^{n-2}}{1 \cdot 2} h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)n} h^n,$$

или

$$(a+h)^n = a^n + na^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}h^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}h^3 + \dots + h^n. \quad (14)$$

Эта замечательная формула, позволяющая разлагать  $n$ -ю степень *любого* двучлена ( $a$  и  $h$  — произвольны!), носит название *бинома Ньютона* (Newton). Если читателю не приходилось с нею встречаться, то для него будет очень полезно применить ее к примерам, приведенным ниже [зад. 1].



*Примеры и задачи.* 1. Применить формулу Ньютона (14) к следующим биномам:

1)  $(a+h)^5$ . *Отв.*  $a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5$ .

2)  $(a-h)^4$ . *Отв.*  $a^4 - 4a^3h + 6a^2h^2 - 4ah^3 + h^4$ .

3)  $(x+a)^6$ . *Отв.*  $x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6$ .

4)  $(a+2)^4$ . *Отв.*  $a^4 + 8a^3 + 24a^2 + 32a + 16$ .

5)  $(x-3)^5$ . *Отв.*  $x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$ .

6)  $(x+i)^7$ . *Отв.*  $x^7 + 7ix^6 - 21x^5 - 35ix^4 + 35x^3 + 21ix^2 - 7x - i$ .

2. Убедиться в том, что уравнению  $x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 2 = 0$  удовлетворяют числа  $-1 \pm i$  (пользуясь при возведении этих чисел в степени формулой Ньютона).

3. Применить формулу Тэйлора (13) к следующим многочленам:

1)  $P(x) = 3 - 2x + x^2 + 3x^3$ . *Отв.*  $P(a+h) = (3 - 2a + a^2 + 3a^3) + (-2 + 2a + 9a^2)h + (1 + 9a)h^2 + 3h^3$ .

2)  $P(x) = 5 - x^3 + x^5$ . *Отв.*  $P(a+h) = (5 - a^3 + a^5) + (-3a^2 + 5a^4)h + (-3a + 10a^3)h^2 + (-1 + 10a^2)h^3 + 5ah^4 + h^5$ .

4. Разложить, пользуясь формулой Тэйлора (12), полином  $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 5$ , во-первых, по степеням  $x-1$  и, во-вторых, по степеням  $x+2$ .

*Отв.*  $P(x) = 2(x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 12(x-1)^2 + 11(x-1) - 1 =$   
 $= 2(x+2)^4 - 17(x+2)^3 + 57(x+2)^2 - 88(x+2) + 47$ .

5. То же — для полинома  $P(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$ , во-первых, по степеням  $x+1$ , во-вторых, по степеням  $x-i$ .

*Отв.*  $P(x) = (x+1)^5 - 2(x+1)^4 + 2(x+1)^3 =$   
 $= (x-i)^5 + (3+5i)(x-i)^4 - 6(1-2i)(x-i)^3 - 2(7-i)(x-i)^2 - 4(1+i)(x-i)$ .

**145. Признаки кратности корней.** Разложение полинома на вещественные множители. Дадим теперь, в виде примера приложения формулы Тэйлора, признак, по которому можно судить о степени кратности данного корня  $a$  рассматриваемого полинома  $P(x)$ . Итак, в нашем случае  $P(a) = 0$ , так что формула (12) будет иметь вид:

$$P(x) = \frac{P'(a)}{1} \cdot (x-a) + \frac{P''(a)}{1 \cdot 2} \cdot (x-a)^2 + \dots$$

Так как все члены справа делятся на  $x-a$ , то отсюда между прочим сразу ясно, что и  $P(x)$  делится на  $x-a$  (что выше было показано непосредственно). Теперь, если  $P'(a) \neq 0$ , то  $P(x)$  на высшую степень двучлена  $x-a$  уже не разделится; действительно, на  $(x-a)^2$  делятся все члены справа, кроме первого, что мешает и делимости всего полинома. В этом случае полином в своем разложении содержит лишь первую степень двучлена  $x-a$ , так что  $a$  будет простым корнем. Если же  $P'(a)$  тоже  $= 0$ , то наша формула напишется так:

$$P(x) = \frac{P''(a)}{1 \cdot 2} \cdot (x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (x-a)^3 + \dots,$$

$P(x)$  явно делится на  $(x-a)^2$  и  $a$  будет кратным корнем. Если  $P''(a) \neq 0$ , то  $(x-a)^2$  есть наивысшая степень  $x-a$ , на которую делится полином  $P(x)$ , так что  $a$  в этом случае будет корнем именно второй кратности. При  $P''(a) = 0$ , но  $P'''(a) \neq 0$ , корень  $a$  будет третьей кратности, и т. д. Таким путем мы приходим к общему признаку: если сам полином  $P$  и его последовательные



производные до  $(k-1)$ -й включительно обращаются в нуль при  $x=a$ , в то время как  $k$ -я производная при этом значении  $x$  отлична от нуля:

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = \dots = P^{(k-1)}(a) = 0, P^{(k)}(a) \neq 0, \quad (15)$$

то число „ $a$ “ будет корнем полинома  $P$  именно  $k$ -й кратности

Напр., для полинома  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 16$  последовательные производные будут:

$$P'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16, P''(x) = 12x^2 - 24x, P'''(x) = 24x - 24$$

и, подставляя  $x=2$  и  $x=-2$ , получим:

$$P(2) = 0, P'(2) = 0, P''(2) = 0, P'''(2) = 24;$$

$$P(-2) = 0, P'(-2) = -64.$$

Таким образом, 2 должно быть корнем третьей кратности, а  $-2$  — простым корнем; и, действительно, разложение нашего полинома будет такое:

$$P(x) = (x-2)^3(x+2) = (x-2)^3 \cdot [x - (-2)].$$

Заметим, что наши рассуждения относились не только к случаю вещественных корней, но и к каким-угодно вообще комплексным корням. Напр., для полинома

$$P(x) = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 2 \quad (16)$$

имеем:

$$P'(x) = 6x^5 + 10x^4 + 16x^3 + 12x^2 + 10x + 2, P''(x) = 30x^4 + 40x^3 + 48x^2 + 24x + 10,$$

подставляя сюда  $x=i$ , найдем [140, (1a)]:

$$P(i) = -1 + 2i + 4 - 4i - 5 + 2i + 2 = 0, P'(i) = 0, P''(i) = -8 - 16i,$$

следовательно,  $i$  будет корнем второй кратности; тот же результат и для  $-i$ . Аналогично [144, зад. 2]:

$$P(-1 \pm i) = 0, P'(-1 \pm i) = 80 \mp 66i,$$

так что  $-1 \pm i$  будут простыми корнями. На самом деле, имеет место разложение (проверить!)

$$P(x) = (x-i)^2(x+i)^2(x+1-i)(x+1+i). \quad (17)$$

Последний пример приводит нас снова к тому вопросу, которым мы закончили п<sup>о</sup> 143. Полином (16) с вещественными коэффициентами может быть разложен на линейные множители [см. (17)], в состав которых однако входят и мнимые числа! Комбинируя попарно сопряженные множители, найдем:

$$(x-i)(x+i) = x^2 + 1, (x+1-i)(x+1+i) = (x+1)^2 - i^2 = x^2 + 2x + 2;$$

а тогда разложение (17) может быть заменено таким:

$$P(x) = (x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2).$$

Здесь мы имеем, правда, квадратичные множители, вместо линейных, но зато все коэффициенты вещественные! Для того чтобы показать, что этого всегда можно добиться, рассмотрим любой полином  $F(x)$  с вещественными коэффициентами и предположим, что он имеет мнимый корень  $\alpha + \beta i$ , скажем,  $r$ -й кратности, так что в разложение (6a) входит и множитель:

$$(x - \alpha - \beta i)^r. \quad (18)$$



На основании установленного выше признака это означает, что

$$P(\alpha + \beta i) = P'(\alpha + \beta i) = \dots = P^{(r-1)}(\alpha + \beta i) = 0, \quad P^{(r)}(\alpha + \beta i) \neq 0.$$

Если в полином  $P(x)$  вставить теперь, вместо  $\alpha + \beta i$ , сопряженное с ним число  $\alpha - \beta i$ , то (так как коэффициенты вещественны и, следовательно, сами с собой сопряжены) и результат должен получиться сопряженный с прежним [на основании замечания в п<sup>о</sup> 140], т. е. нуль. Аналогично устанавливаются и остальные из нижеследующих соотношений:

$$P(\alpha - \beta i) = P'(\alpha - \beta i) = \dots = P^{(r-1)}(\alpha - \beta i) = 0, \quad P^{(r)}(\alpha - \beta i) \neq 0,$$

которые показывают, что, одновременно с  $\alpha + \beta i$ , и сопряженное с ним число  $\alpha - \beta i$  будет корнем полинома  $P(x)$  (с вещественными коэффициентами!), и притом той же  $r$ -ой кратности. Таким образом, в разложение (6 а) войдет и множитель

$$(x - \alpha + \beta i)^r. \quad (18a)$$

Оба множителя (18) и (18а) можно объединить так:

$$[(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i)]^r = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^r = (x^2 + px + q)^r,$$

где  $p = -2\alpha$  и  $q = \alpha^2 + \beta^2$  уже вещественные числа; квадратный трехчлен  $x^2 + px + q$ , очевидно, имеет сопряженные мнимые корни  $\alpha \pm \beta i$ .

Итак, если среди корней полинома  $P(x)$  с вещественными коэффициентами есть комплексные корни, то они разбиваются на пары взаимно сопряженных и одной кратности. Если с каждой парой поступить так, как указано только-что, то разложение (6 а) заменится другим, которое схематически может быть записано так:

$$P(x) = a_0 (x - a)^k \dots (x^2 + px + q)^r \dots \quad (19)$$

Здесь множитель вида  $x - a$  отвечает вещественному корню  $a$ , а квадратичный множитель  $x^2 + px + q$  — паре сопряженных комплексных корней; все числа  $a_0, a, k, \dots, p, q, r, \dots$ , входящие в состав этого разложения, уже вещественны! *Каждый полином с вещественными коэффициентами разлагается на линейные или квадратичные множители с вещественными же коэффициентами.*

Примеры: 1.  $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ .

2.  $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ ; корни  $\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ .

3.  $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) =$

$$= (x - 1) \left( x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1 \right) \left( x^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1 \right).$$

146. Интерполирование с помощью полиномов. Мы видели в 94, что линейная функция

$$y = ax + b$$

определяется по двум ее значениям. Поставим аналогичный вопрос относительно квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c; \quad (20)$$

так как здесь три неизвестных коэффициента, то естественно нужно больше данных. Пусть будут даны три пары соответственных значений  $x$  и  $y$ :  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , совместно удовлетворяющих уравнению (20), так что

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c, \\ y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c, \\ y_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$



Эти равенства можно рассматривать как уравнения относительно неизвестных коэффициентов  $a, b, c$ , которые отсюда, вообще говоря, и определяются. Можно однако и сразу написать общую формулу для квадратичной функции  $y$  от  $x$ , которая при значениях  $x = x_1, x_2, x_3$  принимает, соответственно, значения  $y_1, y_2, y_3$ ; вот эта формула:

$$y = y_1 \cdot \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + y_3 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}. \quad (22)$$

Справа имеем квадратичную функцию от  $x$  ( $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$  — данные числа!). Легко видеть, что, при подстановке  $x_1$  вместо  $x$ , вторая и третья дроби исчезают (ибо содержат в числителе множитель  $x - x_1$ !), а первая дробь обращается в единицу, так что все выражение справа принимает значение  $y_1$ ; аналогично убеждаемся в том, что при  $x = x_2$  или  $x_3$  правая часть действительно обращается в  $y_2$  или  $y_3$ . Уравнение (22), очевидно, выражает (обыкновенную) параболу, имеющую ось, параллельную оси  $Oy$ , и проходящую через три наперед заданных точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ . В этом смысле оно вполне аналогично уравнению прямой, проходящей через две заданных точки [93, (17)], которое может быть даже написано в виде:

$$y = y_1 \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (23)$$

совершенно сходном с (22).

Обычно формула (22) используется в тех случаях, когда желают установить квадратичную зависимость вида (20) между двумя переменными  $x$  и  $y$ , имея в своем распоряжении ряд найденных наблюдением пар соответственных значений этих переменных:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n). \quad (24)$$

По этому поводу может быть повторено то, что было сказано в п<sup>о</sup> 94 относительно устанавливания эмпирической линейной зависимости. Нанеся точки (24) на чертеж, сначала соединяют их кривой от руки, а затем выбирают на ней три точки (не обязательно из числа данных!), по которым и строят квадратичную параболу, пользуясь формулой (22) [или, если угодно, составляя систему (21)].

Пусть, напр., при калибровании термоэлектрической пары получены следующие значения температуры  $T$  (°C) и электродвижущей силы  $E$  (в милливольтгах):

$T$	490	840	1003	1283
$E$	3,152	5,036	5,773	6,382

и требуется установить между ними зависимость вида:

$$E = aT^2 + bT + c. \quad (25)$$

Поступая, как указано выше, мы выберем для проведения параболы три точки с более простыми координатами: (500, 3,2), (1000, 5,7) и (1300, 6,4). Тогда, по формуле (22):

$$E = 3,2 \cdot \frac{(T - 1000)(T - 1300)}{(500 - 1000)(500 - 1300)} + 5,7 \cdot \frac{(T - 1300)(T - 500)}{(1000 - 1300)(1000 - 500)} +$$

$$+ 6,4 \cdot \frac{(T - 500)(T - 1000)}{(1300 - 500)(1300 - 1000)}$$

или

$$E = -0,0000033 T^2 + 0,01 T - 0,97. \quad (26)$$

Можно было бы, для разыскания коэффициентов  $a, b, c$  в равенстве (25), просто



подставить в него, вместо  $(T, E)$ , упомянутые три пары чисел; мы получили бы систему из трех уравнений первой степени с тремя неизвестными  $a, b, c$ :

$$250\,000 a + 500 b + c = 3,2,$$

$$1\,000\,000 a + 1000 b + c = 5,7,$$

$$1\,690\,000 a + 1300 b + c = 6,4,$$

которые легко приводят (решите их!) к тем же значениям коэффициентов, что и выше.

Формула (26) служит для *интерполирования*. Так как таково обычное назначение получаемых указанным путем формул, то и формула (22) — служащая их прообразом — носит название *интерполяционной формулы*.

Можно поставить и более общую задачу: определить  $n$  коэффициентов полинома  $(n-1)$ -ой степени:

$$y = Q(x) = \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \alpha_2 x^{n-3} + \dots + \alpha_{n-2} x + \alpha_{n-1}, \quad (27)$$

зная его  $n$  значений:  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , которые он принимает (соответственно) при  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Иными словами: требуется провести параболу  $(n-1)$ -го порядка через  $n$  наперед заданных точек (24).

Здесь также можно было, подставляя координаты этих точек в (27), составить систему из  $n$  линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Но проще воспользоваться готовой формулой для искомого полинома, которая в настоящем случае имеет вид:

$$y = y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} + \\ + y_2 \cdot \frac{(x-x_3)(x-x_4)\dots(x-x_n)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)\dots(x_2-x_n)(x_2-x_1)} + \text{и т. д.} \quad (28)$$

Хотя эта формула и несколько громоздка, но строение ее ясно. Числитель каждой дроби (а с ними — и все выражение справа!) есть полином  $(n-1)$ -й степени; при  $x = x_1$  все дроби, кроме первой, обращаются в нуль, а первая — в единицу, и в результате получается  $y_1$ ; при  $x = x_2$ ,  $y$  обращается в  $y_2$ , и т. д. Формула (28), содержащая в себе (22) и (23) как частные случаи, носит название *интерполяционной формулы Лагранжа*. Ею приходится пользоваться, при  $n > 3$ , если желают — хотя бы ценою повышения порядка параболы — провести эту параболу через большее число точек и тем повысить точность получаемой интерполяционной кривой.

Отметим в заключение, что (как легко доказать) существует *только один* полином  $(n-1)$ -й степени, принимающий данные  $n$  значений  $y_1, \dots, y_n$  при данных значениях  $x = x_1, \dots, x_n$ , так что формула (28) и дает этот *единственный* полином. Поэтому, какой бы полином (27)  $(n-1)$ -й степени ни взять, он может быть написан в форме

$$Q(x) = Q(x_1) \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} + \\ + Q(x_2) \cdot \frac{(x-x_3)\dots(x-x_n)(x-x_1)}{(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)(x_2-x_1)} + \text{и т. д.} \quad (29)$$

которая получается из (28), если в качестве  $y_1, y_2, \dots$  взять как раз значения  $Q(x_1), Q(x_2), \dots$  нашего полинома. Формула (29), таким образом, дает общее выражение полинома  $(n-1)$ -ой степени через те значения, которые он принимает в каких-либо  $n$  точках.

*Примеры и задачи:* 1. Опыты над сопротивлением, которое оказывает воздух движущемуся автомобилю, дали следующие результаты, где  $A$  есть площадь испы-



тывающей сопротивление воздуха поверхности (в кв. футах), а  $V$  — скорость (в милях в час):

$A$	42	38	34	32	28	24	22	18	16	12
$V$	47,9	52,9	54	55,5	57,6	62,5	64,2	70,3	75	79

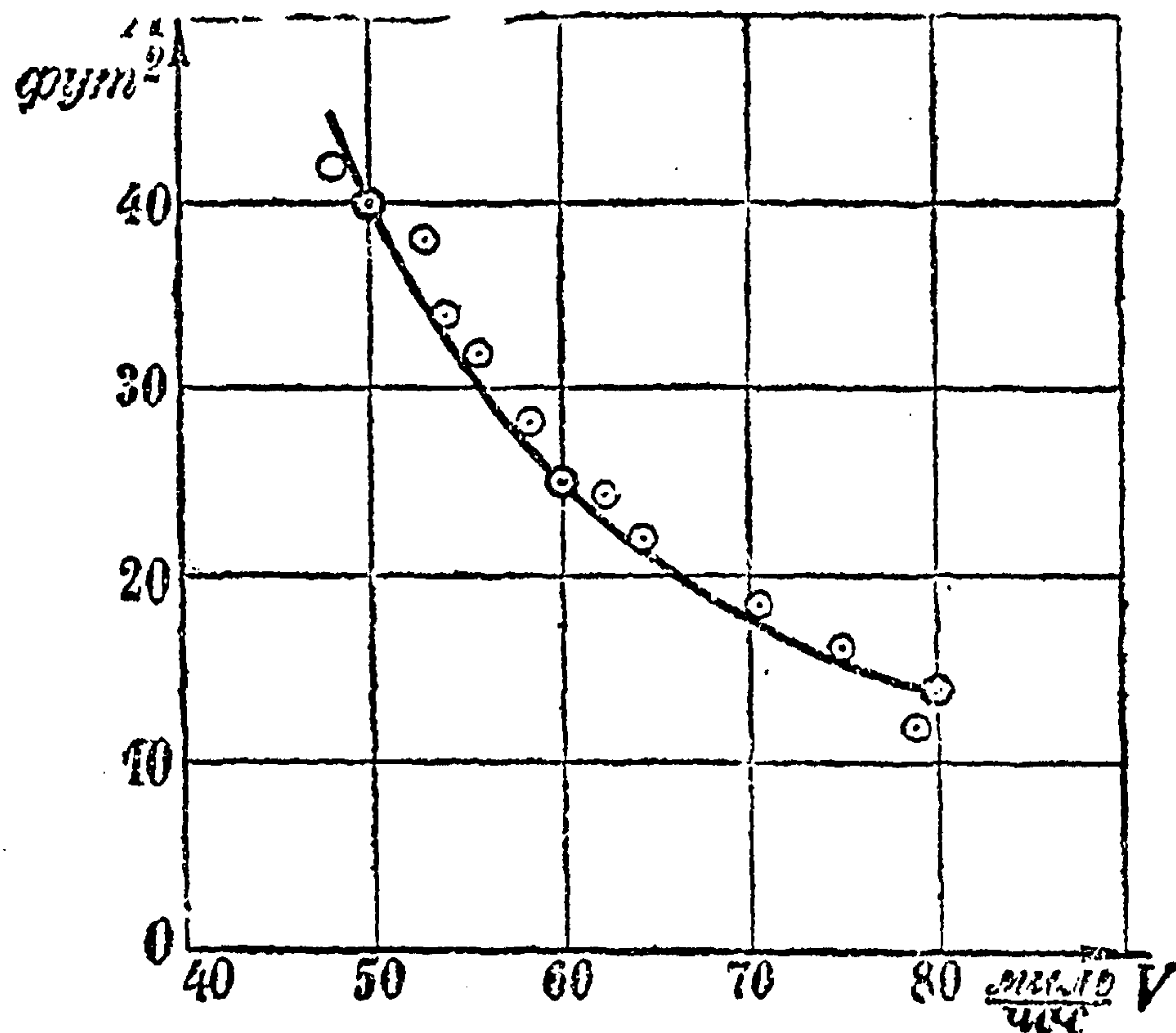
Установить между этими величинами зависимость вида:

$$A = aV^2 + bV + c.$$

*Отв.* Если параболу построить по точкам (50, 40), (60, 25) и (80, 14) (см. черт. 231), то получим:

$$A = 210 - 4,983 V + 0,0317 V^2.$$

2. Измерение скорости реки на различных глубинах дало следующую таблицу зависимости скорости  $V$  (м/сек) от относительной глубины  $D$  рассматриваемого слоя под поверхностью реки:



Черт. 231.

$D$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$V$	0,957	0,969	0,976	0,978	0,975	0,968	0,954	0,939	0,918	0,894

Установить параболический закон зависимости  $V$  от  $D$ .

*Отв.* Если за опорные точки взять первую, четвертую и восьмую из данных, то найдем:

$$V = 0,957 + 0,141 D - 0,24 D^2.$$

Произвести вычисление коэффициентов обоими указанными способами.

3. Вычислив значения полинома

$$Q(x) = 2x^3 - 3x + 1 \text{ при } x = 0; 2; 3; -1,$$

написать выражение нашего полинома по форме (29) и проверить решение, раскрыв последнее выражение. *Отв.*

$$\begin{aligned}
 2x^3 - 3x + 1 &= 1 \frac{(x-2)(x-3)(x+1)}{(-2) \cdot (-3) \cdot 1} + 11 \cdot \frac{(x-3)(x+1)x}{(-1) \cdot 3 \cdot 2} + 46 \frac{(x+1)x(x-2)}{4 \cdot 3 \cdot 1} + \\
 &+ 2 \cdot \frac{x(x-2)(x-3)}{(-1) \cdot (-3) \cdot (-4)} = \frac{1}{6} (x-2)(x-3)(x+1) - \frac{11}{6} (x-3)(x+1)x + \\
 &+ \frac{23}{6} (x+1)x(x-2) - \frac{1}{6} x(x-2)(x-3). \quad (30)
 \end{aligned}$$

147. Рациональные дроби. Разложение на простые дроби. Рассмотрим частное двух целых полиномов (рациональную дробь)

$$\frac{Q(x)}{P(x)}. \quad (31)$$



Если степень полинома  $Q(x)$  ниже степени полинома  $P(x)$ , как напр. в дроби:

$$\frac{10x^2 - 17x + 25}{x^3 + 1},$$

то дробь (по аналогии с арифметическими дробями) называется *правильной*; в противном же случае — *неправильной*.

В *интегральном исчислении*, которому будет посвящена ближайшая глава, представляет интерес возможность разложить правильную дробь на возможно более простые (правильные же) дроби. Такой *простой дробью* прежде всего является дробь вида

$$\frac{A}{x - a}, \quad (32)$$

у которой числитель — постоянная, а знаменатель — линейная функция. Пусть же имеем правильную дробь (31), причем знаменатель степени  $n$ , а числитель — низшей степени, скажем,  $(n - 1)$ -ой\*. Мы знаем [143], что знаменатель  $P(x)$  имеет  $n$  корней:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и разлагается на линейные множители, как указано в (6). Мы имеем право даже предположить, что  $a_0 = 1$ , ибо можно было предварительно разделить на старший коэффициент и числитель, и знаменатель. Таким образом просто:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n). \quad (33)$$

*Предположим же теперь, что все эти корни различны*, т. е. что знаменатель нашей дроби не имеет кратных корней. Для этого случая мы покажем, что *дробь (31) разлагается на сумму  $n$  простых дробей вида (32)*.

Прежде чем провести общее доказательство высказанного утверждения, выполним это для частного примера. Пусть дана правильная дробь

$$\frac{Q}{P} = \frac{2x^3 - 3x + 1}{x(x - 2)(x - 3)(x + 1)},$$

причем знаменатель уже дан в разложенном на множители виде (его корни: 0, 2, 3 и  $-1$ ). Вспоминаем, что числитель  $Q(x) = 2x^3 - 3x + 1$  [см. зад. 3, 146] был уже (с использованием интерполяционной формулы Лагранжа) представлен в форме (30). Взяв его именно в этой форме и разделив каждый член в отдельности на  $P(x) = x(x - 2)(x - 3)(x + 1)$ , по сокращении, сразу получим желаемое разложение:

$$\frac{2x^3 - 3x + 1}{x(x - 2)(x - 3)(x + 1)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} - \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{x - 2} + \frac{23}{6} \cdot \frac{1}{x - 3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x + 1}.$$

В общем случае, мы будем исходить из формулы (29), написав ее для числителя  $Q(x)$  нашей дроби (31); при этом в качестве значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (которые в этой формуле берутся *произвольно!*) выберем именно все эти корни знаменателя  $P(x)$ . Разделив теперь  $Q(x)$  — в форме (29) — на  $P(x)$  — в форме (33), так же непосредственно, как и в частном примере, найдем искомое разложение:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{Q(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} \cdot \frac{1}{x - x_1} +$$

$$+ \frac{Q(x_2)}{(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)(x_2 - x_1)} \cdot \frac{1}{x - x_2} + \dots,$$

\* Если он еще более низкой степени, то его все же можно рассматривать как полином степени  $n - 1$ , с нулевыми старшими коэффициентами; напр., полином  $x^2 - 1$  можно рассматривать (если это удобно!) как полином четвертой степени;  $0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + x^2 - 1$ .



которое, если для сокращения положить:

$$A_1 = \frac{Q(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)}, A_2 = \frac{Q(x_2)}{(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)(x_2 - x_1)}, \dots, \quad (34)$$

можно представить в более сжатой форме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}. \quad (35)$$

Для того чтобы упростить выражения (34), продифференцируем выражение (33), рассматривая его, как произведение двух множителей:  $(x - x_1)$  и  $(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$ ; мы получим:

$$P'(x) = (x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) + \\ + (x - x_1) \cdot [(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)]'.$$

Полагая же здесь  $x = x_1$ , уничтожим второе слагаемое, так что:

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n) = P'(x_1).$$

Аналогично покажем, что второй знаменатель:

$$(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)(x_2 - x_1) = P'(x_2),$$

и т. д. Пользуясь этим, можно так переписать выражения (34) для постоянных коэффициентов  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :

$$A_1 = \frac{Q(x_1)}{P'(x_1)}, A_2 = \frac{Q(x_2)}{P'(x_2)}, \dots, A_n = \frac{Q(x_n)}{P'(x_n)}. \quad (36)$$

Итак, наше утверждение доказано полностью: для дроби (31) имеем разложение (35) на простые дроби, причем постоянные, в них фигурирующие, определяются формулами (34) или (36).

Пусть, напр., требуется разложить на простые дроби следующую правильную дробь:

$$\frac{-2x^3 + 26x^2 + 42x - 96}{x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24} = \frac{-2x^3 + 26x^2 + 42x - 96}{(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4)}.$$

Имеем:  $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -4$ , затем:

$$Q(1) = -30, Q(-2) = -60, Q(3) = 210, Q(-4) = 280$$

и

$$P'(1) = -30, P'(-2) = 30, P'(3) = 70, P'(-4) = -70,$$

так что, в силу (36),  $A_1 = 1, A_2 = -2, A_3 = 3, A_4 = -4$  и разложение данной дроби будет такое:

$$\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x + 2} + \frac{3}{x - 3} - \frac{4}{x + 4}.$$

Предположим теперь (и впредь будем предполагать), что коэффициенты полиномов  $P(x)$  и  $Q(x)$  — все вещественные. Тем не менее, разумеется, если среди корней полинома  $P(x)$  попадаются мнимые, то и соответствующие им коэффициенты  $A$  будут, вообще говоря, мнимыми же. Так, для дроби:

$$\frac{x + 3}{x^4 - 1} = \frac{x + 3}{(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)} \quad (37)$$



по указанному способу получим разложение:

$$\frac{x+3}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{-1+3i}{4} \cdot \frac{1}{x-i} + \frac{-1-3i}{4} \cdot \frac{1}{x+i}.$$

Но, если сложить две последние дроби, отвечающие двум сопряженным корням знаменателя, то получится дробь с вещественными коэффициентами, и все разложение примет вид:

$$\frac{x+3}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x+3}{x^2+1}.$$

Правда, последняя дробь уже не имеет формы (31); но мы отнесем к числу *простых дробей* и дробь вида:

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad (38)$$

где  $M, N, p, q$  — вещественные числа, если квадратный трехчлен в знаменателе имеет мнимые корни.

Обращаясь к общему случаю, предположим, что корень  $x_1$  будет мнимым, так что  $x_1 = \alpha + \beta i$ . Так как, по предположению, коэффициенты полинома  $P(x)$  все вещественные, то [145] среди корней его найдется и сопряженное с  $x_1$ , число:  $x_2 = \alpha - \beta i$ . Если в рациональную дробь

$$\frac{Q(x)}{P(x)}$$

с вещественными коэффициентами подставить, для вычисления коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$  по формулам (36), вместо  $x$  сопряженные мнимые числа  $x_1 = \alpha + \beta i$  и  $x_2 = \alpha - \beta i$ , то и результаты получатся сопряженные [см. замечание в конце 140]:  $A_1 = \lambda + \mu i$ ,  $A_2 = \lambda - \mu i$ . Сложив теперь обе простые дроби

$$\frac{A_1}{x-x_1} = \frac{\lambda + \mu i}{x - (\alpha + \beta i)} \quad \text{и} \quad \frac{A_2}{x-x_2} = \frac{\lambda - \mu i}{x - (\alpha - \beta i)},$$

получим дробь

$$\frac{(\lambda + \mu i)(x - \alpha + \beta i) + (\lambda - \mu i)(x - \alpha - \beta i)}{(x - \alpha - \beta i)(x - \alpha + \beta i)} = 2 \frac{\lambda x - (\lambda \alpha + \mu \beta)}{x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)}$$

вида (38)!

Таким образом, окончательно, дробь (31) разлагается на простые дроби двух типов — (32) и (38); каждому линейному множителю  $x - a$  в разложении знаменателя отвечает дробь первого типа, каждому же квадратичному множителю  $x^2 + px + q$  [объединяющему два сопряженных линейных множителя, 145] — дробь второго типа.

Все сказанное выше относится, как мы помним, лишь к тому случаю, когда знаменатель  $P(x)$  правильной дроби (31) имеет исключительно простые корни (вещественные или мнимые). Если же какой-нибудь из его корней, скажем,  $a$  оказывается кратным, именно,  $k$ -й кратности, то ему в разложении дроби (31) отвечает уже не одна, а ровно  $k$  дробей вида:

$$\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x-a)^k}; \quad (39)$$

наконец, если имеются два сопряженных мнимых корня  $\alpha \pm \beta i$   $r$ -й кратности, то точно так же, вместо одной дроби (38) — знаменатель которой имеет как раз эти два корня —, появляется  $r$  дробей:

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q}, \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2}, \dots, \frac{M_r x + N_r}{(x^2 + px + q)^r}. \quad (40)$$



Все эти дроби также причисляют к простым. Не останавливаясь на рассмотрении этих случаев, мы отсылаем читателя к следующей главе, где [160] будет указан практически прием для разложения правильной дроби на простые, пригодный во всех случаях.

**148. Исследование кубического уравнения.** Обращаясь теперь к вопросу о корнях целых полиномов или — что то же — о корнях алгебраических уравнений, мы остановимся подробнее на *кубическом уравнении*, которое — после квадратного — наиболее часто встречается в технической практике. В настоящем п<sup>о</sup> мы займемся *исследованием* кубического уравнения, т. е. установлением признаков, по которым можно судить о числе и знаках его *вещественных* корней (которые преимущественно и интересны для инженера). Эти признаки без доказательства уже были сообщены в 15.

Итак, пусть имеем уравнение

$$x^3 + px + q = 0; \quad (41)$$

к этому виду, как мы знаем, может быть легко приведено и полное кубическое уравнение [15].

Рассмотрим трехчлен

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

Вынося  $x^3$  за скобки, представим его в виде:

$$f(x) = x^3 \left( 1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3} \right).$$

Пусть теперь  $x \rightarrow \infty$  или  $x \rightarrow -\infty$ . Так как выражение в скобках в обоих случаях стремится к 1, а  $x^3$  стремится к  $+\infty$  или  $-\infty$  одновременно с  $x$ , то, очевидно:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty,$$

или — короче:  $f(-\infty) = -\infty$ ,  $f(+\infty) = +\infty$ . Таким образом, при переходе  $x$  от  $-\infty$  к  $+\infty$ , функция  $f(x)$  сама переходит от отрицательных значений к положительным; ее график, который при больших по абсолютной величине отрицательных значениях  $x$  находится под осью  $Ox$ , в нижней полуплоскости, оказывается при больших положительных значениях  $x$  уже над осью  $Ox$ , в верхней полуплоскости. Ясно, что этот график пересечет ось  $Ox$ , в соответствующей точке  $f(x)$  обратится в нуль, наше *уравнение наверно будет иметь вещественный корень*.\* Весь вопрос в том, сколько раз график функции  $f(x)$  пересечет ось абсцисс, т. е. сколько (вещественных) корней будет иметь рассматриваемое уравнение. Это, разумеется, зависит от хода изменения функции (см. черт. 232), который мы теперь ближе исследуем.

I. Сначала рассмотрим случай:  $p > 0$ . Производная  $f'(x) = 3x^2 + p$ , как сумма двух положительных чисел, сохраняет всегда знак (+); отсюда заключаем [76], что функция  $f(x)$  постоянно возрастает, график ее идет все вверх и, очевидно, только один раз пересечет ось  $Ox$ : уравнение в этом случае имеет один корень. Знак этого корня зависит от  $q$ ; ведь  $f(0) = q$ , так что смотря по тому, будет ли  $q > 0$ ,  $= 0$  или  $< 0$ , график пересечет ось  $Oy$  выше начала  $O$ , в самом начале или ниже его. Из черт. 232, I, ясно, что в первом предположении график пересекает ось  $Ox$  левее начала, и корень отрицателен, при втором предположении он равен нулю, при третьем — положителен.

II. Остановимся теперь на случае:  $p < 0$ . На этот раз производная  $f'(x) = 3x^2 + p$  дважды обращается в нуль, при

$$x = x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{и} \quad x = x_2 = +\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

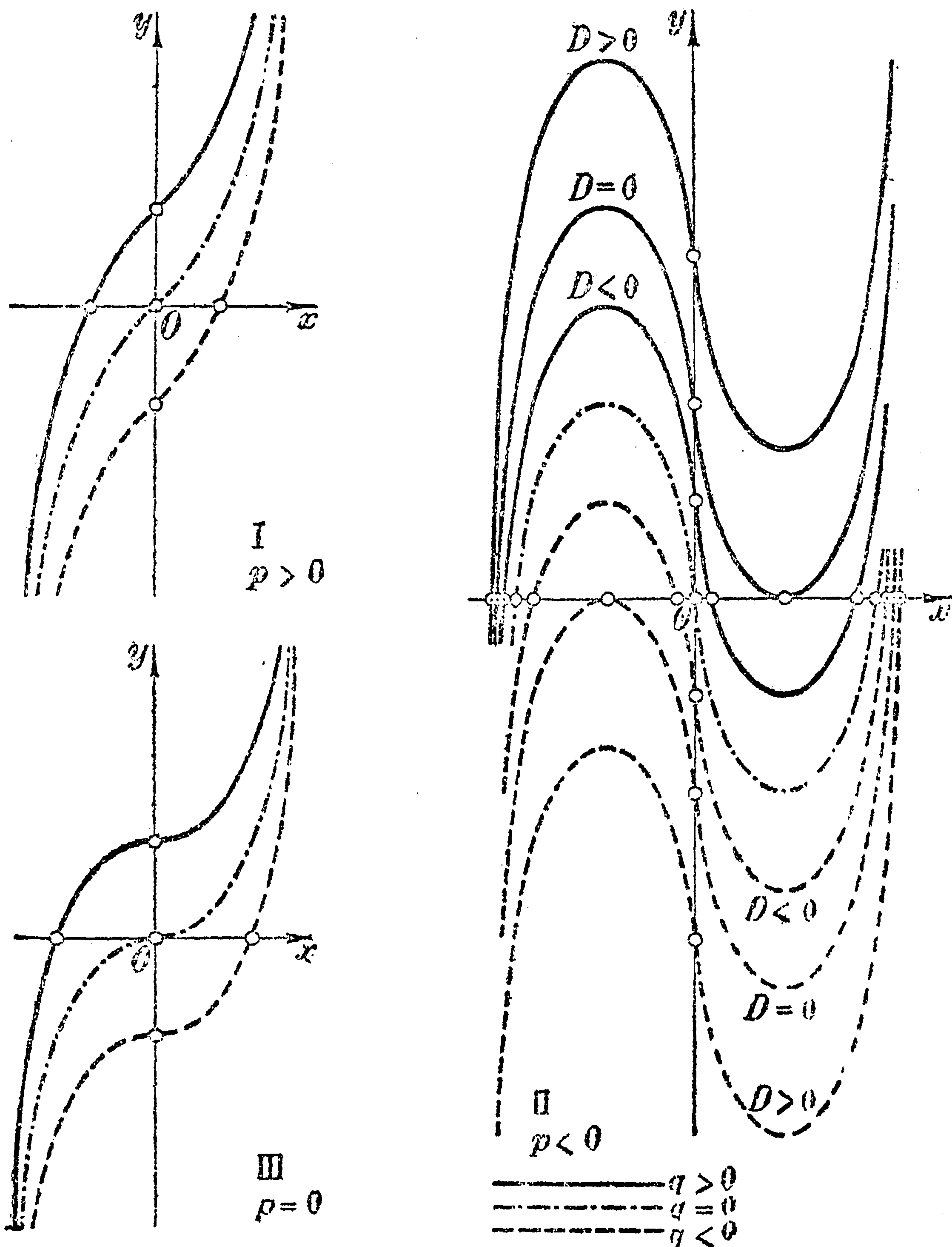
\* То же справедливо и относительно любого алгебраического уравнения  $f(x) = 0$  нечетной степени (с вещественными коэффициентами), ибо и в этом случае  $f(-\infty)$  и  $f(+\infty)$  будут разных знаков. Доказательство — такое же, как в тексте.



Так как вторая производная  $f''(x) = 6x$  имеет знак  $(-)$  при  $x = x_1$  и знак  $(+)$  при  $x = x_2$ , то первое значение доставляет нашей функции максимум, а второе — минимум [80]. Сами максимальное и минимальное значения будут, очевидно,

$$f(x_1) = -\frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3} + q}, \quad f(x_2) = \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3} + q}.$$

Предположим, для определенности, что  $q > 0$ . Тогда максимум  $f(x_1)$ , очевидно будет положительным (помнить, что  $p < 0!$ ); что же касается минимума  $f(x_2)$



Черт. 232.

то в зависимости от обстоятельств он может оказаться и положительным, и отрицательным, и нулем. В первом случае (черт. 232, II) уравнение будет иметь лишь один отрицательный корень: график пересекает ось  $Ox$  левее начала, ибо ось  $Oy$  он пересекает выше начала,  $f(0) = q > 0!$  Во втором случае кроме одного отрицательного, уравнение будет иметь еще два положительных корня. Наконец, в третьем случае наряду с одним отрицатель-



ным корнем, очевидно корнем будет и положительное значение  $x = x_2$ , доставляющее функции  $f(x)$  минимум; но так как одновременно и  $f(x_2) = 0$ , и  $f'(x_2) = 0$  [в то время как  $f''(x_2) = 6x_2$  отлично от 0], то  $x_2$  является [145] корнем второй кратности. В этом случае график *касается* оси  $Ox$  в точке  $x = x_2$ , и геометрически очевидно, что в этом корне как бы сливаются два корня!

Посмотрим теперь, каковы же аналитические признаки всех этих возможностей. Первая из них отвечает предположению, что  $f(x_2) > 0$ . Это условие последовательно преобразуется так:

$$q > -\frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}}, \text{ или } q^2 > -\frac{4}{27} p^3,$$

или, наконец,

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0.$$

Выражение, стоящее слева, обозначим впредь через  $D$ ; оно играет такую же роль в исследовании кубического уравнения (41), какую при исследовании квадратного уравнения играет подкоренное выражение в общей формуле для его корней. Итак, первая из упомянутых возможностей обусловлена неравенством  $D > 0$ . Аналогично, вторая возможность осуществляется при  $D < 0$ , а третья — при  $D = 0$ .

Если предположить  $q < 0$ , то получаются такие же результаты — разница лишь в знаках корней; наконец, при  $q = 0$  (тогда необходимо  $D < 0$ !) имеется один положительный корень, один отрицательный и один, равный нулю.

Отметим, что в случае I, когда, как мы установили, уравнение имеет один корень, выражение  $D > 0$ .

III. Случай:  $p = 0$ , если только при этом  $q$  отлично от нуля, исчерпывается аналогично случаю I. Если же одновременно и  $p = 0$ , и  $q = 0$ , так что уравнение имеет вид:  $x^3 = 0$ , то, очевидно, существует лишь один корень:  $x = 0$  третьей кратности; в этом случае  $D = 0$  (см. черт. 232, III).

Результаты нашего исследования сведем в табличку:

	$D > 0$ один корень	$D < 0$ три корня	$D = 0$ три корня
$q > 0$	1 отриц. к.	1 отриц. к. 2 полож. к.	1 отриц. к. 2 равных полож. к.
$q < 0$	1 полож. к.	2 отриц. к. 1 полож. к.	2 равных отриц. к. 1 полож. к.
$q = 0$	1 нулевой к.	1 отриц. к. 1 нулевой к. 1 полож. к.	3 разных нулевых к.

Напоминаем, что здесь речь идет только о вещественных корнях; при  $D > 0$  будут, очевидно, еще два сопряженных мнимых корня.

Легко видеть, что полученные результаты оправдывают сказанное в п<sup>о</sup> 15; сле



дует лишь иметь в виду, что там для удобства решения знаки коэффициентов  $p$  и  $q$  были выделены явно, так что  $p_1$  и  $q_1$  обозначали лишь их абсолютные величины и  $p = \pm p_1$ ,  $q = \pm q_1$ .

149. Вычисление корней кубического уравнения. Теперь перейдем к вычислению (вещественных) корней уравнения (41). Мы уже дали для этой цели два способа: во-первых, с помощью логарифмической линейки [15], и во-вторых, с помощью графика функции  $y = x^3$  и проведения прямых [51]. Этих приемов, в большинстве случаев, достаточно. Однако иной раз требуется определить корни кубического уравнения с большей точностью, чем та, которую могут дать упомянутые приемы, и тогда приходится пользоваться другими методами. Нужно сказать, что для корней кубического уравнения существуют и общие алгебраические формулы, как и для корней квадратного уравнения, но гораздо более сложные. Именно в виду сложности их, на практике ими не пользуются. Мы изложим ниже один метод, построенный на пользовании тригонометрическими функциями. Он особенно удобен для случая, когда  $D < 0$ , и несколько громоздок — в случае  $D > 0$ ; в этом последнем случае тригонометрические функции было бы естественнее и удобнее заменить гиперболическими, но мы от этого воздержались в виду того, что таблиц логарифмов гиперболических функций (с достаточным числом знаков) обыкновенно под рукой у инженера нет.

1°. Итак, пусть  $D < 0$ . В этом случае, как мы знаем, уравнение (41) имеет три различных корня  $x_1, x_2, x_3$ . Заметим еще, что необходимо  $p < 0$  (ибо иначе  $D$  было бы  $> 0$ !).

Положим в (41):

$$x = \lambda \cdot \cos \theta \quad (42)$$

где  $\lambda$  и  $\theta$  — пока неопределенные величины; тогда наше уравнение примет вид:

$$\lambda^3 \cdot \cos^3 \theta + p\lambda \cdot \cos \theta + q = 0$$

или

$$\cos^3 \theta + \frac{p}{\lambda^2} \cos \theta + \frac{q}{\lambda^3} = 0, \quad (41a)$$

и достаточно подобрать  $\lambda$  и  $\theta$ , удовлетворяющие этому уравнению, чтобы выражение (42) было корнем уравнения (41). Мы уже вспоминали формулу для косинуса тройного угла (см., напр., примечание на стр. 306):

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta,$$

которую можно переписать и так:

$$\cos^3 \theta - \frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta = 0.$$

Сопоставляя это равенство с (41a), мы легко замечаем, что они отождествляются, если  $\lambda$  и  $\theta$  взяты так, что

$$\frac{p}{\lambda^2} = -\frac{3}{4}, \quad \frac{q}{\lambda^3} = -\frac{1}{4} \cos 3\theta.$$

Отсюда нетрудно на самом деле найти  $\lambda$  и  $\theta$ ; именно, сначала из первого условия определится  $\lambda$ :

$$\lambda = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad (43)$$

а затем, зная  $\lambda$ , из второго получим:

$$\cos 3\theta = -\frac{4q}{\lambda^3} = -\frac{q}{2 \sqrt{-\frac{p^3}{27}}},$$



откуда определим  $3\theta$  и, наконец, самый угол  $\theta$ . Удобнее ввести угол  $\varphi = 3\theta$ , так что  $\theta = \frac{\varphi}{3}$ . Окончательно, выкладкам придают такую последовательность: сначала определяют вспомогательный угол  $\varphi$  из условия:

$$\cos \varphi = -\frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}}, \quad (44)$$

а затем неизвестную  $x$  — по формуле [получающейся из (42) и (43)]:

$$x = 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi}{3}. \quad (45)$$

Если через  $\varphi_1$  обозначить наименьший положительный угол, удовлетворяющий уравнению (44), то и углы  $\varphi_2 = \varphi_1 + 360^\circ$  и  $\varphi_3 = \varphi_1 + 720^\circ$  также ему удовлетворяют. Подставляя в (45) вместо  $\varphi$  поочередно эти три угла, получим все три иско- мые значения  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\varphi_1}{3}, & x_2 &= 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left( \frac{\varphi_1}{3} + 120^\circ \right), \\ x_3 &= 2 \sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \left( \frac{\varphi_1}{3} + 240^\circ \right). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Для того чтобы убедиться в фактической выполнимости указанных операций прежде всего отметим, что  $p < 0$ , так что выражение  $-\frac{p}{3}$ , фигурирующее под знаком квадратного корня, положительно. Затем, из неравенства

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

следует, что

$$\left( \frac{q}{2} \right)^2 < -\frac{p^3}{27}, \quad \frac{|q|}{2} < \sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

или

$$\left| \frac{q}{2} \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right| < 1,$$

т. е. правая часть уравнения (44), по абсолютной величине, меньше 1, а в таком случае всегда можно найти угол  $\varphi$ , косинус которого ей равен.

Пусть, напр., дано уравнение:

$$x^3 - 4x - 1 = 0;$$

здесь  $p = -4$ ,  $q = -1$ ,  $D < 0$ . Имеем, по формуле (44),

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{27}{64}}.$$

$\log \cos \varphi = \bar{1},51156$ ,  $\varphi_1 = 71^\circ 2' 57''$ ; затем, в силу (46):

$$x_1 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos 23^\circ 40' 59''; \quad x_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos 143^\circ 40' 59'' = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cos 36^\circ 19' 1'';$$

$$x_3 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos 263^\circ 40' 59'' = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cos 83^\circ 40' 59'',$$



так что

$$\log x_1 = 0,32 529; \log(-x_2) = 0,26 969; \log(-x_3) = \bar{1},40 499,$$

и, наконец

$$x_1 = 2,1149; x_2 = -1,8608; x_3 = -0,2541.$$

Для проверки сложим найденные значения и получим:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , как и должно быть — на основании формулы (7) [143], так как в уравнении (41) члена с  $x^2$  нет! Можно было, конечно, и не вычислять  $x_3$  по формуле (46), а сразу положить:  $x_3 = -(x_1 + x_2)$ .

2°. Если  $D > 0$  (один корень!), то, как мы упоминали, выкладки несколько усложняются: именно, вместо одного приходится вводить два вспомогательных угла. При этом следует различать два случая:  $p > 0$  и  $p < 0$ .

Вот схема вычислений для случая, когда  $p > 0$ :

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{2}{q} \sqrt{\frac{p^3}{27}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}, \quad x = -2 \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \operatorname{ctg} 2 \varphi. \quad (47)$$

Таким образом, *последовательно* вычисляют сначала угол  $\omega$  по первой из этих формул, делят его пополам и находят  $\varphi$  по второй формуле, наконец, удваивают  $\varphi$  и определяют искомый корень по третьей формуле.

В случае же, когда  $p < 0$ , схема выкладок такова:

$$\sin \omega = \frac{2}{q} \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}, \quad x = -\frac{2 \sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2 \varphi}. \quad (48)$$

Вместо *вывода*, мы на этот раз ограничимся *проверкой* указанного решения, напр., в первом случае. Отметим очевидное тождество:

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-2}{\operatorname{tg} 2 \alpha} = -2 \operatorname{ctg} 2 \alpha. \quad (49)$$

Тогда третью из формул (47) можно переписать так:

$$x = \sqrt{\frac{p}{3}} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi).$$

Возводим в куб:

$$x^3 = \sqrt{\frac{p^3}{27}} [\operatorname{tg}^3 \varphi - \operatorname{ctg}^3 \varphi - 3(\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi)].$$

Так как очевидно,

$$px = 3 \sqrt{\frac{p^3}{27}} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi),$$

то

$$x^3 + px = \sqrt{\frac{p^3}{27}} (\operatorname{tg}^3 \varphi - \operatorname{ctg}^3 \varphi).$$

По второй из формул (47) преобразуем это выражение:

$$x^3 + px = \sqrt{\frac{p^3}{27}} \left( \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} \right)$$

что, на основании тождества (49), перепишем в виде:

$$x^3 + px = -2 \sqrt{\frac{p^3}{27}} \operatorname{ctg} \omega = -2 \frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\operatorname{tg} \omega}.$$



Последнее же выражение, в виду первой из формул (47), приводится к  $-q$ , и мы убеждаемся в том, что вычисленное по схеме (47) значение  $x$ , действительно, удовлетворяет уравнению (41). Аналогично проверяется и схема (48); нужно лишь еще дополнительно убедиться, что первая из ее формул дает для синуса значение, по абсолютной величине меньшее 1, что не трудно сделать, исходя из условия:  $D > 0$ .

Приведем пример: пусть дано уравнение

$$x^3 + 1,35x - 5,782 = 0.$$

Здесь  $D > 0$ ,  $p > 0$ . По схеме (47) имеем последовательно:

$$\operatorname{tg} \omega = -\frac{\sqrt{0,45^3}}{2,891}, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \omega) = +\frac{\sqrt{0,45^3}}{2,891}, \quad \operatorname{lg} \operatorname{tg}(180^\circ - \omega) = 1,01876,$$

$$180^\circ - \omega = 5^\circ 57' 39'', \quad \omega = 174^\circ 2' 21'';$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 87^\circ 1' 10''}, \quad \operatorname{lg} \operatorname{tg} \varphi = 0,42781, \quad \varphi = 69^\circ 31' 25'';$$

$$x = -2 \sqrt{0,45} \operatorname{ctg} 139^\circ 2' 50'' = 2 \sqrt{0,45} \operatorname{ctg} 40^\circ 57' 10'', \quad \operatorname{lg} x = 0,18919, \\ x = 1,5159.$$

Отметим в заключение, что приведенные выше для различных случаев формулы выражают корни кубического уравнения *совершенно точно*. Лишь пользование логарифмическими таблицами во время дальнейших выкладок вносит некоторые погрешности, и корни получаются с приближением. Выбирая таблицы с тем или иным числом знаков, мы можем влиять на точность окончательных результатов. Наши вычисления все сделаны по обычным, пятизначным таблицам.

*Примеры и задачи.* 1.  $y^3 - 9y^2 + 20y - 11 = 0$ .

*Решение.* Полагая  $y = x + 3$  [15], приводим уравнение к виду:

$$x^3 - 7x - 5 = 0,$$

$D < 0$  три корня. По формулам (44), (46), имеем:

$$\cos \varphi = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{27}{313}}, \quad \log \cos \varphi = \bar{1},84597, \quad \varphi_1 = 45^\circ 27' 37'';$$

$$x_1 = 2 \sqrt{\frac{7}{3}} \cos 15^\circ 9' 12'', \quad \log x_1 = 0,46965, \quad x_1 = 2,9489;$$

$$x_2 = 2 \sqrt{\frac{7}{3}} \cos 135^\circ 9' 12'' = -2 \sqrt{\frac{7}{3}} \cos 44^\circ 50' 48'', \quad \log(-x_2) = 0,33566,$$

$$x_3 = -2,1660;$$

$$x_3 = 2 \sqrt{\frac{7}{3}} \cos 255^\circ 9' 12'' = -2 \sqrt{\frac{7}{3}} \cos 75^\circ 9' 12'', \quad \log(-x_3) = \bar{1},89365,$$

$$x_3 = -0,7828.$$

Проверка:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0,0001 \doteq 0$ . Наконец,  $y_1 = x_1 + 3 = 5,9489$ ,  $y_2 = 0,8340$ ,  $y_3 = 2,2172$ .

2.  $x^3 - 2x - 5 = 0$ .



Решение.  $D > 0$ , один корень,  $p < 0$ . По схеме (48):

$$\sin \omega = -\frac{2}{5} \sqrt{\frac{8}{27}}, \quad \sin(\omega - 180^\circ) = -\sin(180^\circ - \omega) = -\sin \omega = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{8}{27}},$$

$$\lg \sin(\omega - 180^\circ) = \bar{1},33792, \quad \omega - 180^\circ = 12^\circ 34' 33'', \quad \omega = 192^\circ 34' 33'';$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 96^\circ 17' 16''} = -\sqrt[3]{\operatorname{tg} 83^\circ 42' 44''}, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 83^\circ 42' 44''},$$

$$\lg \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = 0,31929, \quad 180^\circ - \varphi = 64^\circ 23' 11'', \quad \varphi = 115^\circ 36' 49'';$$

$$x = -\frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sin 231^\circ 13' 38''} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{\sin 51^\circ 13' 38''}, \quad \log x = 0,32109,$$

$$x = 2,09455.$$

3.  $x^3 - 3x^2 - 7x + 4 = 0$ . Отв.  $x_1 = 4,3875$ ;  $x_2 = 0,4864$ ;  $x_3 = -1,8741$ .

4.  $x^3 + 3x^2 + 5x - 27 = 0$ . Отв.  $x = 1,8931$ .

5.  $x^3 + 3,38x - 1,54 = 0$ . Отв.  $x = 0,4318$ .

6. В виде упражнения предлагается читателю наново решить те кубические уравнения, которые были приведены в 15, уточняя полученные там решения.

150. Вычисление корней произвольного уравнения. После того как мы научились вычислять с требуемой точностью корни кубического уравнения, мы дадим теперь некоторые общие методы для приближенного вычисления корней алгебраического уравнения любой степени. Эти методы, впрочем, с равным успехом могут быть применены и к не алгебраическим (т. е. к так называемым трансцендентным) уравнениям.

Итак, пусть имеем уравнение

$$f(x) = 0,$$

где  $f(x)$  — полином или какая-нибудь другая из известных нам функций. Если начертить даже грубый график функции  $y = f(x)$ , то сразу можно дать себе отчет в том, в каких (приблизительно) точках он пересекает ось  $Ox$  [ср. 51]. Займемся одной из этих точек, ей отвечает один из корней нашего уравнения,  $x_0$ ; по чертежу нетрудно установить такой промежуток  $(a, b)$ , чтобы внутри него содержался искомый корень  $x_0$  и не содержалось больше других корней. Заклучая корень  $x_0$  в такой промежуток, мы будем говорить, что корень  $x_0$  отделен (от других корней); это выражение применяется и в том случае, когда уравнение вообще других корней, кроме  $x_0$ , не имеет. Так, по черт. 28 видим, что (единственный) корень уравнения

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 7 = 0 \quad (50)$$

„отделен“, напр., промежутком  $(-4; -3)$ .\*

Конечно, для отделения корней данного уравнения  $f(x) = 0$  можно также перенести некоторые его члены в правую часть уравнения и строить графики отдельно для каждой из частей уравнения, как это разъяснено в 51. Напр., из черт. 86 б) ясно, что наименьший положительный корень уравнения  $\operatorname{tg} x = x$  от-

делен промежутком  $(4, 5)$  или промежутком  $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ , и т. п.

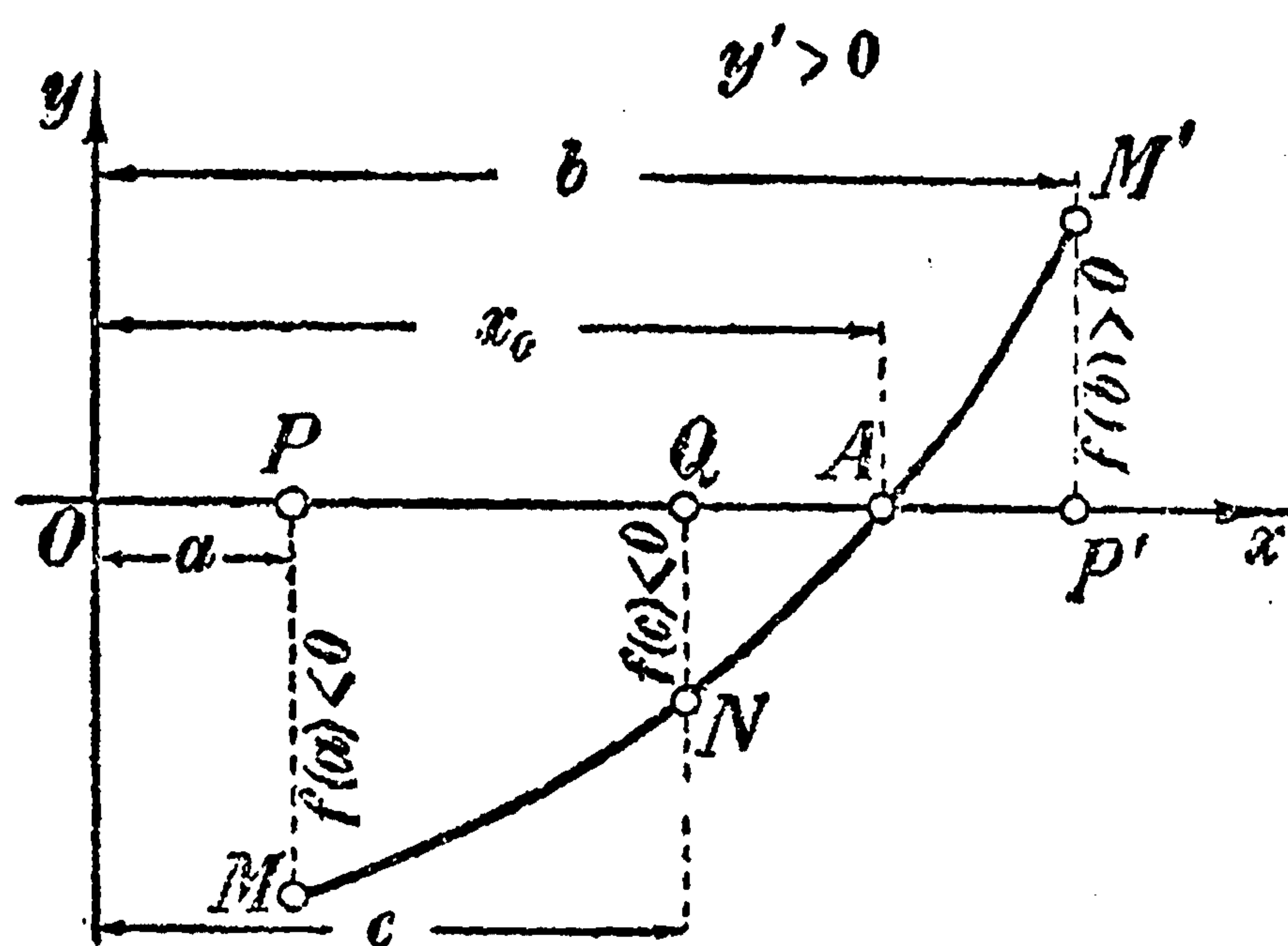
\* Тщательно сделанный график на черт. 28 может, конечно, дать и более точные границы корня; но мы здесь вообще имеем в виду грубый график, т. е. набросок, черчение которого не должно отнимать много времени.



[Заметим, что — если к необходимости решить уравнение привел технический вопрос — инженер из самих условий вопроса обыкновенно наперед знает, между какими границами следует искать корень.]

Мы будем впредь предполагать, что в промежутке  $(a, b)$  производная  $y' = f'(x)$  сохраняет постоянный знак, так что график функции  $y = f(x)$  все время идет в одном направлении [76]: в верх, если  $y' > 0$  (черт. 233), и вниз, если  $y' < 0$ , пересекая горизонтальную ось в точке  $A$ , отвечающей искомому корню  $x_0$ . Значения функции  $f(x)$  на концах рассматриваемого промежутка, т. е. ординаты  $PM = f(a)$  и  $P'M' = f(b)$ , будут, очевидно, разных знаков; если, для определенности, предположить, напр.,  $a < b$  и  $y' > 0$ , то  $f(a) < 0$  и  $f(b) > 0$  (см. чертеж). Возвращаясь к функции (50), видим, что она возрастает в промежутке  $(-4, -3)$ , причем  $f(-4) = -9 < 0$ , в то время как  $f(-3) = +10 > 0$ .

Каждое из чисел  $a$  и  $b$  можно рассматривать как грубое приближение к искомому корню  $x_0$ . Как улучшить это приближение? Простейший прием для этого состоит в следующем. Возьмем любое число  $c$  внутри промежутка  $(a, b)$ ,  $a < c < b$  (черт. 233), и вычислим соответствующее значение функции, т. е. соответствующую ординату  $QN = f(c)$ ; если исключить тот мало вероятный случай, когда сразу окажется  $f(c) = 0$  (тогда  $c$  и было бы искомым корнем!), то  $f(c)$  будет либо  $< 0$ , либо  $> 0$ . В первом случае, очевидно, точка  $Q(c, 0)$  лежит на оси  $Ox$  левее точки пересечения  $A$  графика с этой осью (черт. 233), а во втором — правее. Таким образом, вместо промежутка  $(a, b)$ , корень оказался заключенным в более узкий промежуток  $(c, b)$  — как на чертеже — или  $(a, c)$ , смотря по случаю. Если, напр., разделить промежуток  $(a, b)$  пополам и в качестве  $c$  взять полусумму  $\frac{a+b}{2}$ , то мы ука-



Черт. 233.

занным способом вдвое уменьшим длину промежутка, содержащего корень. Вычисляя для функции (50) ее значение  $f(-3,5)$ , мы получим  $+2,625 > 0$ , откуда заключаем, что корень уравнения (50) содержится между  $-4$  и  $-3,5$ . Вставляя новые числа между этими границами, можно как угодно сблизить их и найти таким путем значение корня с любой степенью точности. Вставим, напр., число  $-3,7$ , найдем:  $f(-3,7) = -1,473 < 0$ , так что  $-3,7 < x_0 < -3,5$ ; далее,  $f(-3,6) = +0,664$ , и поэтому  $-3,6 < x_0 < -3,5$ . Каждое из чисел  $-3,5$ ;  $-3,6$  является уже приближенным значением корня с точностью до  $0,1$ ; и т. д.

Указанный прием однако требует зачастую большого числа вычислений если, промежуточные точки „ $c$ “ берутся неудачно. Поэтому обыкновенно прибегают к другим приемам, не оставляющим никакого произвола в выборе точек „ $c$ “; из них на первом месте стоит *метод Ньютона*, иначе называемый также *методом касательных*, к изложению которого и переходим.

**151. Метод Ньютона (метод касательных).** Вспомним, что приращение функции может быть приближенно заменено ее дифференциалом [см. 68, (51)]

$$f(x + \Delta x) - f(x) \doteq f'(x) \cdot \Delta x, \quad (51)$$

причем равенство это имеет тем большую точность, чем меньше  $\Delta x$ . Положим здесь  $x = a$ , а  $x + \Delta x = x_0$ , так что  $\Delta x = x_0 - a$ ; так как  $a$  близко к  $x_0$ , то  $\Delta x$  будет малой величиной, и мы имеем основание воспользоваться формулой (51). Мы получим:

$$f(x_0) - f(a) \doteq f'(a) \cdot (x_0 - a).$$

Но  $f(x_0) = 0$ , ибо под  $x_0$  мы разумеем именно корень уравнения  $f(x) = 0$ ; отбросив этот член, мы можем определить отсюда  $x_0$ :

$$x_0 \doteq a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a_1. \quad (52)$$



Хотя это значение  $a_1$ , полученное в результате применения приближенного равенства (51), будет также лишь приближенным, но при некоторых общих условиях, о которых речь будет ниже, оно лучше воспроизводит корень  $x_0$ , чем  $a$ . Таким образом, формула (52) позволяет улучшить имеющееся налицо приближенное значение.

Этот прием имеет очень наглядное геометрическое истолкование. Мы уже отмечали в п<sup>о</sup> 67, что замена приращения функции ее дифференциалом геометрически означает замену кривой — касательной к ней.

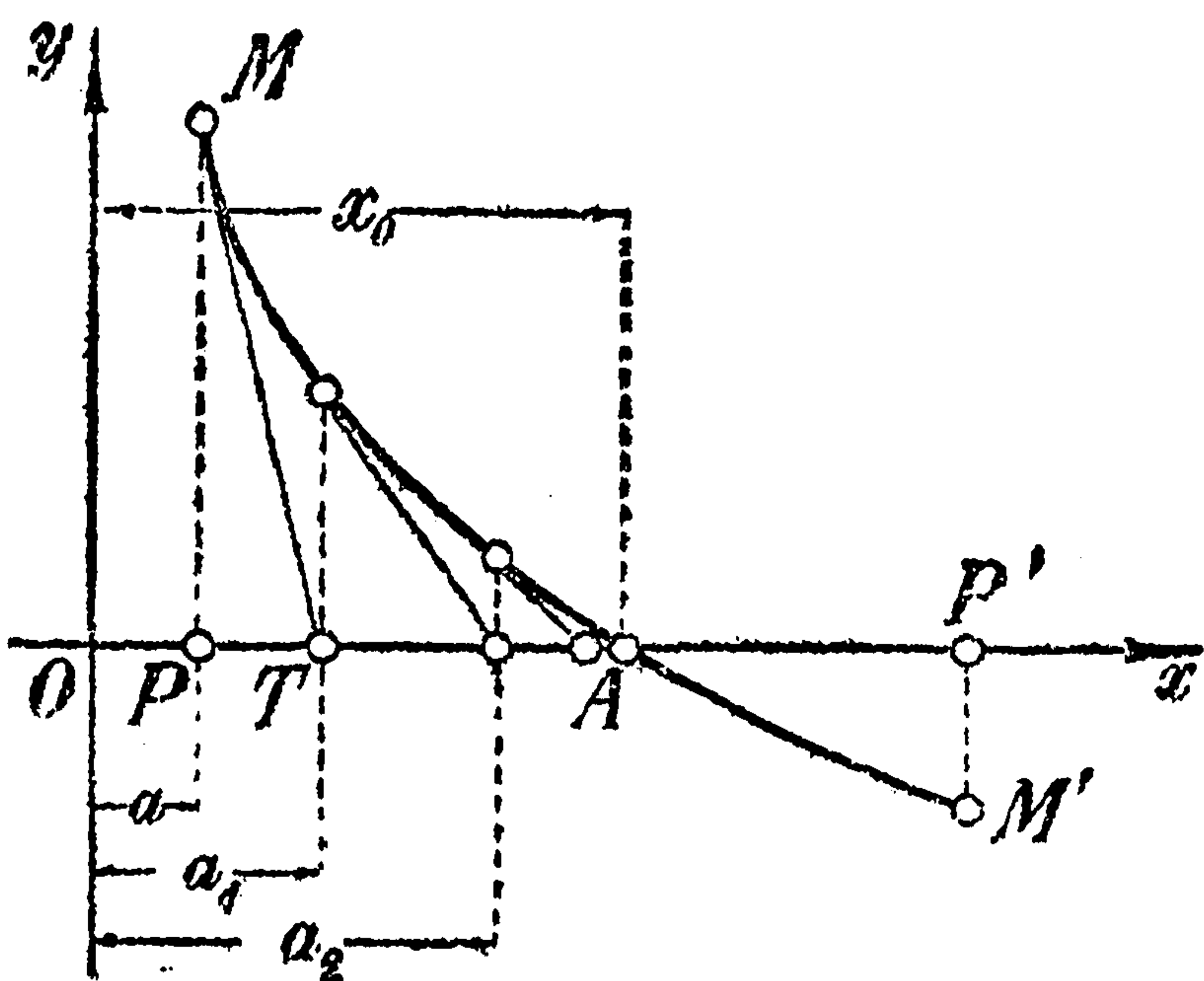
Попробуем заменить кривую  $MA$  (черт. 234) касательной  $MT$  к ней в точке  $M$ , тогда точка  $A$  приблизительно заменится точкой  $T$ ; вычислим же ее абсциссу. С этой целью положим  $y=0$  в уравнении касательной  $MT$ :

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a);$$

мы получим для  $x$  выражение

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

совпадающее с  $a_1$  [см. (52)]! Итак, сущность метода Ньютона как раз и заключается в том, что, имея на оси абсцисс точку  $P$ , близкую к  $A$ , мы проводим в



Черт. 234.

соответствующей точке  $M$  кривой касательную и заменяем  $P$  точкой  $T$  пересечения этой касательной с осью абсцисс.

Такая замена, разумеется, выгодна лишь в том случае, если  $T$  ближе к  $A$ , чем  $P$ . Геометрически легко уяснить, когда это будет именно так. Будем предполагать отныне, что на рассматриваемом участке кривая вогнутостью направлена везде в одну сторону; это равносильно предположению, что *вторая производная  $f''(x)$  в промежутке  $(a, b)$  сохраняет постоянный знак* [128]. Всего возможны четыре комбинации знаков первой и второй производной, которые иллюстрируются чертежами 235, I—IV.

В каждом из этих случаев мы видим, что касательная, проведенная к кривой в одной из конечных точек рассматриваемой ее дуги (именно, в  $M$ ), действительно, пересекает ось  $Ox$  ближе к  $A$ , причем точка пересечения остается с той же стороны от  $A$ , с которой лежит и  $P$ ; наоборот, касательная, проведенная в другой конечной точке ( $M'$ ), пересекает ось по другую сторону от  $A$ , по сравнению с  $P'$ , и — возможно — даже дальше от  $A$ . Мы будем впредь через  $a$  обозначать именно абсциссу первой

из этих конечных точек ( $M$ ), а через  $b$  — абсциссу второй ( $M'$ ), так что у нас может оказаться и  $a > b$ . Сопоставляя изображенные на черт. 235 случаи, можно сказать, что за „ $a$ “ выбирается тот конец промежутка, которому отвечает ордината  $f(a)$  того же знака, что и  $f''(x)$ . Так, в случае I, напр.,  $f''(x)$  положительна и положительной оказывается правая из двух конечных ординат, поэтому именно правый конец промежутка играет роль „ $a$ “, и т. д.

Итак, при соблюдении указанной предосторожности, значение  $a_1$ , выражаемое формулой (52), будет ближе к  $x_0$ , чем  $a$ . Так как  $f(a_1)$  того же знака, что и  $f(a)$ , то можно и к  $a_1$  применить ту же формулу, что приведет нас к еще более точному значению

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

	I	II	III	IV
$f'(x)$	+	—	+	—
$f''(x)$	+	+	—	—

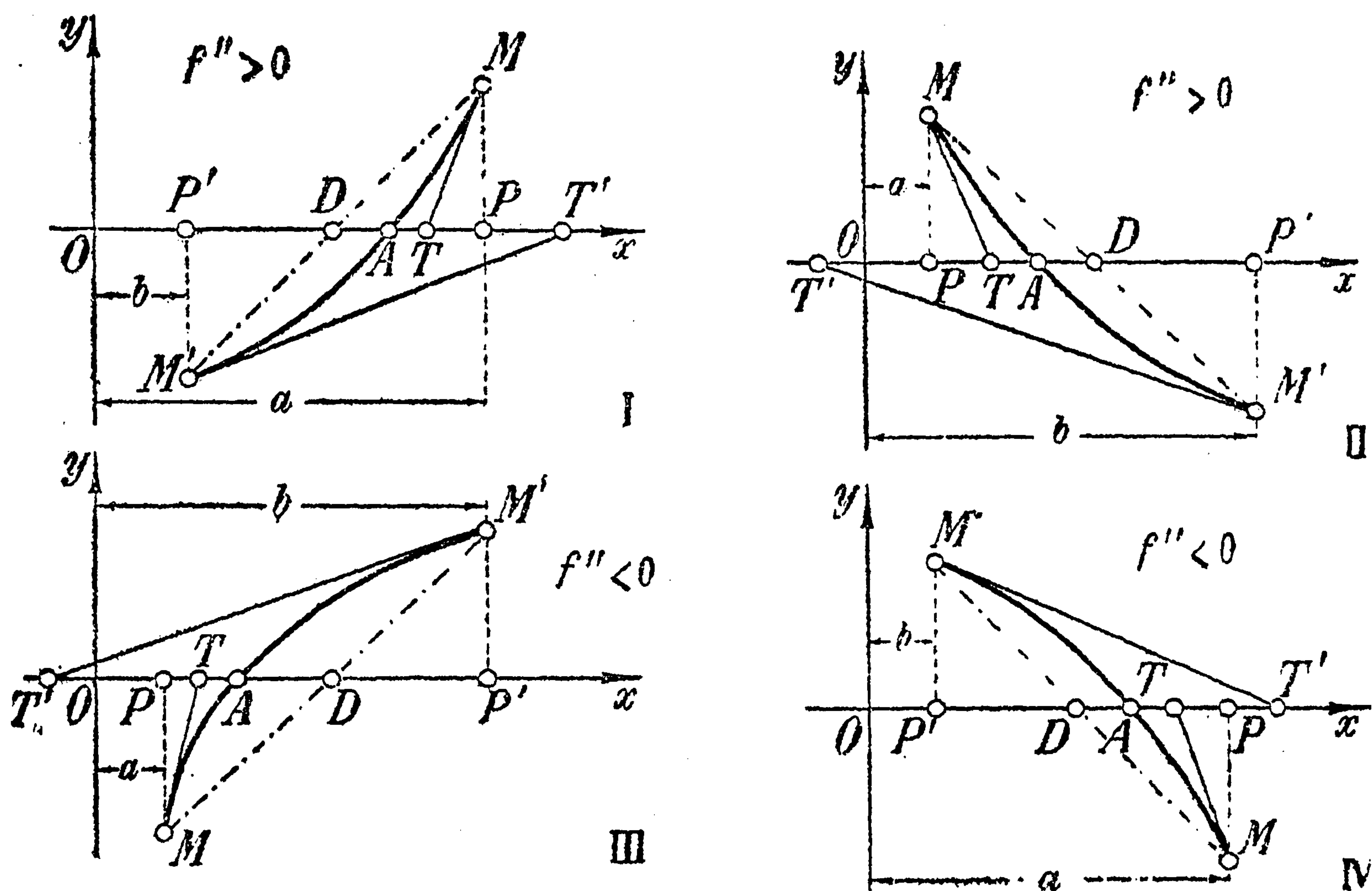


и т. д. Обыкновенно, после двух — трех шагов уже достигается требуемая близость к искомому корню. Еще раз напоминаем, что геометрически все сводится к последовательному проведению касательных (см. черт. 234).

Рассмотрим примеры. Для уравнения (50) мы имели:  $-4 < x_0 < -3$ ; в этом промежутке  $f'(x)$  сохраняет знак (+), а  $f''(x)$  — знак (-) (случай III). Так как  $f(-4) = -9$ , то полагаем именно  $a = -4$ . Вычисляем еще  $f'(-4) = 28$ , и находим, по формуле (52):

$$a_1 = -4 - \frac{(-9)}{28} \doteq -4 + 0,3 = -3,7.$$

Если бы точно следовать этой формуле, то следовало бы положить  $a_1 = -3,6785\dots$ , но это лишь усложнило бы последующие выкладки, не дав значительного выигрыша



Черт. 235.

в точности; в подобных случаях всегда округляют получающиеся по методу Ньютона последовательные приближения. Вычисляем дальше:

$$f(-3,7) = -1,473, \quad f'(-3,7) = 22,27,$$

$$a_2 = -3,7 - \frac{(-1,473)}{22,27} \doteq -3,7 + 0,066 = -3,634.$$

Это значение уже отличается от истинного значения корня меньше, чем на 0,003; действительно, имеем:

$$f(-3,634) \doteq -0,042, \quad f(-3,631) \doteq +0,02,$$

так что  $-3,634 < x_0 < -3,631$ . Таким образом, после двух шагов мы уже получаем, напр., приближенное значение  $x_0 = -3,63$  с тремя верными знаками!

При вычислениях здесь и в последующем, разумеется, надлежит пользоваться всеми вспомогательными средствами, какие имеются под рукою: таблицами квадратов и кубов, таблицами умножения, таблицами логарифмов или логарифмической линейкой, арифмометром, и т. п.

Иногда удобнее рассматривать разность  $a_1 - a$ , как поправку  $\Delta$ , которую надлежит прибавить к уже имеющемуся значению  $x = a$ , чтобы получить сле-



дующее значение  $x = a_1 = a + \Delta$ ; заменяя  $f(a)$  и  $f'(a)$  для краткости, через  $y$  и  $y'$ , можно формулу (52) переписать и так:

$$\Delta = -\frac{y}{y'}.$$

В этом случае результаты выкладок располагают в виде приводимой ниже для примера схемы, которая относится к уравнению:

$$y = f(x) = x \log x - 1 = 0. \quad (53)$$

Представив его в виде:

$$\log x = \frac{1}{x},$$

мы сделаем грубый чертеж, который покажет нам сразу, что кривые  $y = \log x$  и  $y = \frac{1}{x}$  пересекаются один раз, и точка пересечения имеет абсциссу, заключенную между 2 и 3. Обе производные  $y' = \log x + \log e$  и  $y'' = (\log e)/x$  сохраняют здесь знак (+) (случай I). За исходное значение  $x$  („ $a$ “) принимаем 3, тогда будем иметь последовательно:

$x$	$y$	$y'$	$\Delta$
3	0,431...	0,911...	-0,47
2,53	0,0199...	0,837...	-0,0237
2,5063	0,00008		

В последнем приближении четыре верных знака, ибо для  $x = 2,506$  функция  $y$  имеет уже отрицательное значение:  $y = -0,00016$ . Итак,  $x_0 \doteq 2,506$ .

Дальнейшие примеры читатель найдет в 153.

**152. Метод хорд и комбинированный метод.** Вместо того, чтобы приближенно заменять кривую касательной, столь же естественно попробовать заменить кривую хордой. Так, на черт. 236 кривая  $MM'$  (являющаяся графиком рассматриваемой функции) заменена хордой  $MM'$ , которая пересекла ось  $Ox$  в точке  $D$ . Так как эта точка лежит между  $P$  и  $P'$ , то ею можно заменить одну из крайних точек (для случая, изображенного на черт., точку  $P'$ ), и тем сузить промежуток, содержащий точку  $A$ . Вычислим абсциссу  $b_1$  точки  $D$ ; с этой целью, в уравнении хорды  $MM'$  [см. 93, (18)]:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

положим  $y = 0$ . Мы найдем таким образом:

$$x = b = a - \frac{(b-a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}. \quad (54)$$

и (в рассматриваемом случае)  $a < x_0 < b_1$ . Повторяя этот прием (см. чертеж), можно как угодно приблизиться к корню. Однако на практике этим *методом хорд* в таком виде редко пользуются, обыкновенно же его комбинируют с методом касательных.

Дело в том, что применение в чистом виде одного из этих методов создает (как, быть может, читатель и сам заметил на разобранных примерах) своеобразное затруднение: неизвестно, когда можно остановиться, т. е. когда уже оказывается достигнутой требуемая, наперед указанная, степень точности. С этой точки зрения, представляется выгодным одновременное приближение к искомому корню с обеих сторон, ибо тогда разность между его избыточным и недостаточным приближенными значениями может служить и для оценки погрешности каждого из них. Если для промежутка  $(a, b)$ , отделяющего наш корень  $x_0$ , выполняются все сделанные в предыдущих пп<sup>0</sup> предположения ( $f'$  и  $f''$  сохраняют



знаки), причем конец „ $a$ “ выбран в согласии с высказанным выше правилом, то — как видно из черт. 235, I—IV — касательная в точке  $M$  и хорда  $MM'$  пересекут ось  $Ox$  соответственно в точках  $T$  и  $D$ , лежащих по разные стороны от  $A$ . Таким образом, заменяя этими точками прежние точки  $P$  и  $P'$ , мы с обеих сторон приближаемся к точке  $A$ . С точками  $T$  и  $D$  можно поступить так же и еще ближе подойти к  $A$ , и т. д. Переходя к вычислительной стороне дела, мы видим, что первый шаг заключается в том, что числа  $a$  и  $b$ , между которыми содержится корень  $x_0$ , заменяется числами [см. (52) и (51)]:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} = b - \frac{(b-a)f(b)}{f(b) - f(a)},$$

затем переходят таким же образом к числам:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}, \quad b_2 = b_1 - \frac{(b_1 - a_1)f(b_1)}{f(b_1) - f(a_1)},$$

и т. д. Границы  $a_n, b_n$  корня между собой сближаются, и процесс прекращается в тот момент, когда разность их становится меньше наперед указанной максимальной погрешности.

Пусть, напр., для уравнения (50) требуется вычислить корень с точностью до 0,01. Мы имели уже

$$a = -4, \quad b = -3, \quad f(-4) = -9,$$

$$f(-3) = 10, \quad a_1 = -3,7;$$

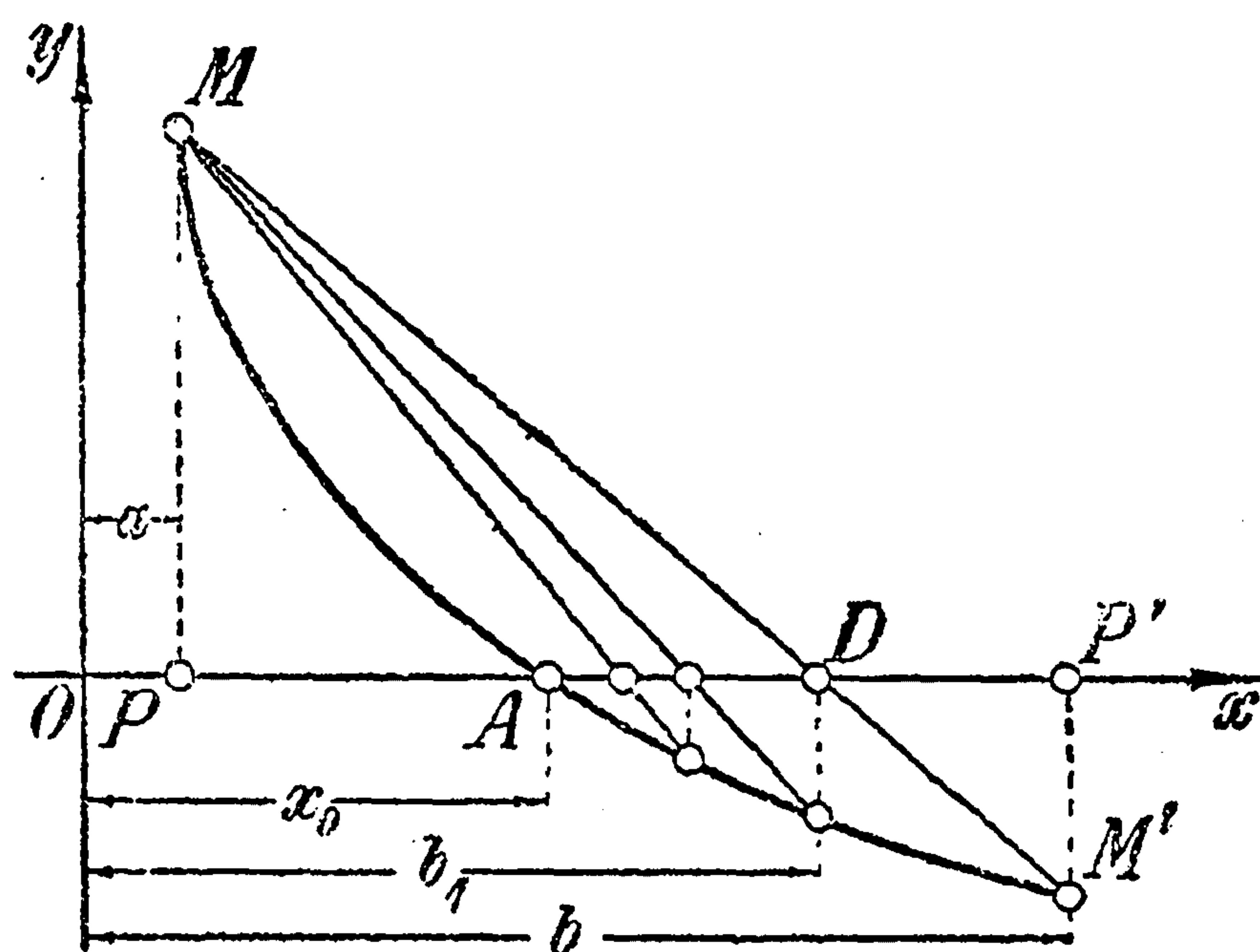
тогда

$$b_1 = -3 - \frac{10}{19} = -3,5;$$

затем,  $f(-3,7) = -1,473$ ,  $f(-3,5) = 2,625$ ,  $a_2 = -3,634$  и

$$b_2 = -3,5 - \frac{0,2 \cdot 2,625}{2,625 + 1,473} =$$

$$= -3,5 - 0,128 = -3,628.$$



Черт. 236.

Так как  $b_2 - a_2 = 0,006$  уже меньше 0,01, то каждое из чисел  $a_2, b_2$  может служить приближенным значением корня с точностью до 0,01; то же справедливо и о заключенном между ними числе — 3,63.

Обращаясь к уравнению (53), поставим задачей найти его корень с точностью до 0,0001. Имеем последовательно:

$$a = 3, \quad b = 2, \quad f(3) = 0,431, \quad f(2) = -0,398,$$

$$a_1 = 2,53, \quad b_1 = 2 + \frac{0,398}{0,398 + 0,431} = 2,48,$$

$$f(2,53) = 0,0199, \quad f(2,48) = -0,0218,$$

$$a_2 = 2,5063, \quad b_2 = 2,48 + \frac{0,5 \cdot 0,0218}{0,0218 + 0,0199} = 2,48 + 0,0261 = 2,5061.$$

Хотя полученные значения разнятся друг от друга на две десятитысячных, но их среднее арифметическое 2,5062, очевидно, будет разниться от корня меньше, чем на одну десятитысячную; итак,  $x_0 = 2,5062$ , причем все знаки здесь верны.

153. Примеры и задачи. 1. Найти корни уравнения

$$x \log x = 4,7772$$

с точностью до 0,001 по методу Ньютона.



*Решение.* См. решение уравнения (53) в п<sup>о</sup> 151. По графику устанавливаем, что корень один и притом очень близок к 6. Поэтому, не проверяя знаков  $f'$ ,  $f''$ , полагаем  $a=6$  и применяем метод Ньютона:  $f(6) = 6 \log 6 - 4,7772 = -0,1083$ ,  $f'(6) = \log 6 + \log e = 1,212$ , так что  $a_1 = 6,089$ , и уже в этом приближенном значении все четыре знака верны, ибо

$$f(6,089) \doteq -0,0001, \quad f(6,090) \doteq +0,001$$

и  $6,089 < x_0 < 6,090$ . Такая удача, конечно, объясняется случайной близостью искомого корня к числу 6; здесь не помешало и то, что  $f(6)$  и  $f'(6)$  разнятся знаками!

2. Найти близкий к  $a=0,3$  корень уравнения

$$x^3 - 10x + 3,1463 = 0$$

по методу Ньютона.

*Отв.*  $x_0 \doteq a_1 = 0,3178$ . Проверить, вычислив  $f(0,3178)$  и  $f(0,3179)$ .

3. Уравнение

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 75x - 10\,000 = 0$$

имеет два вещественных корня разных знаков; вычислить по методу Ньютона отрицательный корень с пятью верными знаками.

*Решение.* Подставляя в  $f(x)$  вместо  $x$  ряд отрицательных чисел:  $-1000$ ,  $-100$  получаем все положительные результаты, в то время, как  $f(0) = -10\,000$  отрицательно, значит, искомый корень  $x_1$  содержится между  $-100$  и  $0$ . Но  $f(-10) = -1050$  уже отрицательно, так что  $-100 < x_1 < -10$ . Небольшое, сравнительно, значение функции при  $x = -10$  позволяет думать, что  $x_1$  близко к  $-10$ ; вычисляя поэтому  $f(-11)$ , находим, действительно, опять положительное значение 3,53. Итак,  $-11 < x_1 < -10$ . В этом промежутке  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$ ; отправляясь от  $x = -11$ , вычисляем последовательно по схеме:

$x$	$y$	$y'$	$\Delta$
-11	3453	-5183	0,7
-10,3	134,3	-4234	0,03
-10,27	37,8	-4196	0,009
-10,261	0,2		

Попутно проверяем, что значения  $f(-10,299)$ ,  $f(-10,269)$  оказываются также положительными, следовательно, искомый корень разнится от  $-10,3$  и  $-10,27$  больше, чем на 0,001; наоборот,  $f(-10,260) \doteq -4$ , так что

$$-10,261 < x_1 < -10,260$$

и любое из этих чисел дает искомое приближение.

4. Найти наименьший положительный корень  $x_1$  уравнения

$$\operatorname{tg} x = x$$

с точностью до 0,0001 по методу Ньютона.

*Решение.* По черт. 86b, легко установить, напр., что  $\pi < x_1 < \frac{3\pi}{2}$ . Переписав (для более удобного вычисления производных) уравнение в виде:

$$f(x) = \sin x - x \cos x = 0,$$



видим, что в этом промежутке

$$f'(x) = x \sin x \text{ и } f''(x) = \sin x + x \cos x$$

обе сохраняют знак (—). Так как  $f \frac{3\pi}{2} = -1$ , то именно  $\frac{3\pi}{2}$  ( $270^\circ$ ) выбираем за исходное приближение. При выкладках мы пользуемся как таблицами логарифмов тригонометрических величин, так и таблицами натуральных тригонометрических величин и наконец таблицами для перевода градусов, минут и секунд в радианы и обратно. В виду устройства тригонометрических таблиц, приближенные значения корня (и поправки к ним) мы округляем в градусах, минутах и секундах, а не в долях радиана. Теперь понятна схема вычислений:

$x$	$y$	$y'$	$\Delta$
( $270^\circ$ ) 4,71239	— 1	— 4,712	— 0,212 ( $\doteq$ — $12^\circ 10'$ )
( $257^\circ 50'$ ) 4,50004	— 0,0291	— 4,399	— 0,0066 ( $\doteq$ — $22' 44''$ )
( $257^\circ 27' 18''$ ) 4,49343	— 0,00003		
( $257^\circ 27' 12''$ ) 4,49341	+ 0,00002		

Таким образом,  $4,49341 < x_1 < 4,49343$ , и можно положить  $x_1 \doteq 4,4934$ , со всеми верными знаками (даже в узком смысле!).

Б. Найти три вещественных корня уравнения

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$$

с точностью до 0,001, по комбинированному методу.

*Решение.* Для отделения корней либо воспользуемся графиком этой функции, либо же станем вычислять ее значения, при различных значениях  $x$ , и отмечать их знаки, напр.:

$x =$	$-\infty$	0	—10	—5	—2	—1	$+\infty$	+10	+5	+2	+1
знак $f(x)$	—	+	—	—	—	+	+	+	+	+	—

Убедившись, что при  $-\infty$  и при 0 функция имеет разные знаки, мы стараемся сузить этот промежуток, внутри которого наверное есть корень функции; оказывается, что  $f(-1) > 0$ , следовательно:  $-2 < x_1 < -1$ . Так как сумма корней равна  $+0,5$  [в чем убеждаемся по формуле (7), 143, предварительно разделив уравнение на 2, чтобы привести старший коэффициент к 1], то должны быть и положительные корни. Найдя значение  $x=1$ , при котором  $f(1) < 0$ , убеждаемся, что слева и справа от этого значения лежит по корню:  $0 < x_2 < 1$ ,  $1 < x_3 < 2$ . Корни отделены, обращаемся к их вычислению.

1) В промежутке  $(-2, -1)$  производные

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 7, \quad f''(x) = 12x - 2$$

сохраняют знаки, первая (+), а вторая (—). Так как  $f(-2) = -1$ ,  $f(-1) = +9$ , то полагаем  $a = -2$ ,  $b = -1$ . Вычисляя по формулам (52) и (54), получаем:

$$a_1 = -2 - \frac{(-1)}{21} = -1,952\dots, \quad b_1 = -1 - \frac{9}{9 - (-1)} = -1,9.$$



Конечно, значение  $a_1$  нужно округлить; но в какую сторону? Если в сторону уменьшения, т. е. взять значение  $-1,96$ , то оно наверное будет  $< x_1$ , так что  $f(-1,96)$  должно быть  $< 0$ ; если же взять  $-1,95$ , то мы рискуем перескочить через корень. Однако в этом не было бы никакой беды; и на самом деле  $f(-1,95) = +0,01775$ , так что  $x_1 < -1,95$ , и мы можем отбросить найденное значение  $b_1$ , положив:

$$a_1 = -1,96; \quad b_1 = -1,95,$$

так как  $x_1$  содержится между этими числами. Итак, *оказывается выгодным округлять „в сторону корня“*, ибо это может привести лишь к сужению промежутка, в котором содержится корень. Далее, имеем:

$$f(-1,96) = -0,180672, \quad f'(-1,96) = 19,9696,$$

$$a_2 = -1,96 + \frac{0,180672}{19,9696} = -1,96 + 0,00904\dots = -1,95095\dots$$

$$b_2 = -1,95 - \frac{0,01 \cdot 0,01775}{0,01775 + 0,180672} = -1,95 - 0,00089\dots = -1,95089\dots$$

Поскольку  $x_1$  должно быть заключено между этими границами, ясно, что можно положить:  $x_1 = -1,9509$  (причем верных знаков оказывается даже больше, чем требовалось).

2) В промежутке  $(0, 1)$  первая производная  $f'(x)$  сохраняет знак, но вторая производная меняет знак, обращаясь в нуль при  $x = \frac{1}{6}$ . Это обстоятельство заставляет предварительно еще сузить промежуток. Испытываем  $x = 0,5$ , получаем:  $f'(0,5) = +1,5$ ; так как  $f(1) = -1$ , то  $x_2$  содержится в промежутке  $(0,5, 1)$ , в котором  $f''(x)$  сохраняет знак  $(+)$ . Имеем:  $a = 0,5$ ,  $b = 1$ , затем:

$$a_1 = 0,5 + \frac{1,5}{6,5} = 0,7307 \doteq 0,74, \quad b_1 = 1 - \frac{0,5}{2,5} = 0,80.$$

Округление  $a_1$  в сторону корня не привело к перескакиванию через корень, ибо  $f(0,74) = +0,082848$ , но все же сузило границы корня. Наконец,

$$a_2 = 0,74 + \frac{0,082848}{5,1944} = 0,755\dots$$

$$b_2 = 0,80 - \frac{0,01296}{0,298848} = 0,756\dots,$$

так что  $0,755 < x_2 < 0,757$ , и можно положить  $x_2 \doteq 0,756$ , причем погрешность будет меньше  $0,001$ .

3) В промежутке  $(1, 2)$  вторая производная сохраняет знак  $(+)$ , но первая производная меняет знак, обращаясь в нуль при

$$x = \frac{1 + \sqrt{43}}{6} \doteq 1,26;$$

испытываем  $1,5$ :  $f(1,5) = -1$ , в то время как  $f(2) = 3$ , так что  $1,5 < x_2 < 2$ . Полагаем  $a = 2$ ,  $b = 1,5$ ; затем:

$$a_1 = 2 - \frac{3}{13} \doteq 1,7; \quad b_1 = 1,5 + \frac{1}{3} \doteq 1,6.$$

Через корень и здесь не перескочили, ибо  $f(1,7) = 0,036$ . Наконец,

$$a_2 = 1,7 - \frac{0,036}{6,94} = 1,6948\dots;$$



1,694 наверное  $< x_3$ , если же округлить в сторону корня, то получим:  $f(1,695) \doteq +0,0015$ , так что  $1,695 > x_3$ . В вычислении  $b_2$  уже нет надобности; в сущности вообще нижние границы корня в последнем случае оказались бесполезными.

[Мы воспользовались этим простым примером, чтобы сделать практические указания относительно некоторых деталей процесса вычисления корней. Однако для кубического уравнения этот путь слишком длинен, методы п<sup>о</sup> 149 приводят к цели быстрее!]

6. Вычислить, по комбинированному методу, положительный корень  $x_2$  уравнения, рассмотренного в зад. 3, с пятью верными знаками.

*Решение.*  $a = 10$ ,  $b = 9$ ;  $a_1 = 9,88 \dots > x_2$ ; если округлить до 9,88, то окажется:  $f(9,88) = -23,4$  и  $9,88 < x_2$ ; окончательно полагаем:  $a_1 = 9,88$ ;  $b_1 = 9,89$ ; затем:

$$a_2 = 9,8860 \dots \text{ и } b_2 = 9,8860 \dots,$$

так что  $x_2 \doteq 9,8860$ .

### 7. Уравнение

$$x^4 + 6x^3 + 14x^2 - 50 = 0$$

имеет два вещественных корня; вычислить их, по комбинированному методу, с точностью до 0,001.

*Решение.*  $-4 < x_1 < -3$ ;  $1 < x_2 < 2$ .

1)  $a = -4$ ,  $b = -3$ ;  $a_1 = -3,42 \dots \doteq -3,4$ ,  $b_1 = -3,09 \doteq -3,1$ ;  $a_2 = -3,182 \dots \doteq -3,18$ ,  $b_2 = -3,148 \doteq -3,15$ ; наконец,  $a_3 = -3,1550 \dots$ ,  $b_3 = -3,1546 \dots$ , так что  $x_1 \doteq -3,155$ .

2)  $a = 2$ ,  $b = 1$ ;  $a_1 = 1,56 \dots \doteq 1,5$ ,  $b_1 = 1,29 \dots \doteq 1,3$ ;  $a_2 = 1,429 \dots \doteq 1,43$ ,  $b_2 = 1,420 \dots \doteq 1,42$ ;  $a_3 = 1,42598 \dots$ ,  $b_3 = 1,42595 \dots$ ,  $x_2 \doteq 1,4259$ .

### 8. Наименьший из корней уравнения

$$f(x) = x \sin x - 0,5 = 0$$

вычислить с четырьмя верными знаками, пользуясь комбинированным методом.

*Решение.* Начертив синусоиду:  $y = \sin x$  и гиперболу:  $y = \frac{0,5}{x}$ , сразу видим, что корней бесчисленное множество, и наименьший из них близок к 0,7. Подставляя в функцию значения  $x = 0,6981 \dots (40^\circ)$  и  $x = 0,7854 \dots (45^\circ)$ , получим, соответственно,  $-0,0513 \dots$  и  $+0,0554 \dots$ , так что  $x_1$  содержится между этими значениями  $x$ .

Имеем последовательно:  $a = 0,7854 \dots (45^\circ)$ ,  $b = 0,6981 \dots (40^\circ)$ ;  $a_1 - a \doteq -0,0438 (-2^\circ 30')$ ,  $a_1 = 0,7417 \dots (42^\circ 30')$ ,  $b_1 - b = 0,0419 \dots (2^\circ 24')$ ,  $b_1 = 0,7400 \dots (42^\circ 24')$ ;  $a_2 = 0,740840 \dots$ ,  $b_2 = 0,740840 \dots$ , так что и  $x_1 \doteq 0,740840 (42^\circ 26' 49'')$ .

9. В качестве упражнения предлагается читателю вычислить корни уравнений, приведенных в п<sup>о</sup> 51, с большей точностью, чем это было возможно графическими методами.



## ГЛАВА X.

### ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ (НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ).

154. Простейшие правила и формулы. В конце главы V мы ввели понятие о *первообразной функции* или *неопределенном интеграле*:

$$F(x) = \int f(x) dx \quad (1)$$

для данной функции  $f(x)$  [или для данного дифференциального выражения  $f(x)dx$ ]; именно, как мы установили, запись (1) означает не что иное, как то, что

$$F'(x) = f(x) \text{ [или } dF(x) = f(x)dx\text{].}$$

Мы знаем также, что при интегрировании первообразная функция получается с точностью до произвольного постоянного слагаемого  $C$ , и мы видели на примерах не только в указанной главе, но и в других местах, какую роль играет эта „постоянная интегрирования“, и как она определяется из условий конкретных задач. В последующем изложении нам встретится много вопросов (в большинстве — связанных с техникой), где интегрирование будет играть решающую роль. Настоящая глава имеет целью расширить и углубить навыки в производстве этой важной и трудной операции.

Для удобства читателя мы здесь воспроизведем ту часть таблицы п<sup>о</sup> 75, которая относится к интегральному исчислению (изменяя лишь нумерацию формул и правил):

I.  $\int c u dx = c \int u dx$ :

II.  $\int (u + v - w + \dots) dx = \int u dx + \int v dx - \int w dx + \dots$ ;

III. Если  $\int f(u) du = F(u) + C$ , то  $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$ .

1.  $\int 0 \cdot dx = C$ ,

4.  $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ ,

2.  $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C$ ,

5.  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} =$   
 $= \operatorname{arctg} x + C$ ,

3.  $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ,

6.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$   
 $= \operatorname{arcsin} x + C$ ,

( $n \neq -1$ ),



7.  $\int e^x dx = e^x + C,$

8.  $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C,$

9.  $\int \sin x dx = -\cos x + C,$

10.  $\int \cos x dx = \sin x + C,$

11.  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$   
 $= -\operatorname{ctg} x + C,$

12.  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$   
 $= \operatorname{tg} x + C,$

13.  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$

14.  $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$

15.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,$

16.  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x + C.$

По поводу формулы 4 необходимо сделать *важное пояснение*. До сих пор молчаливо предполагалось, что  $x > 0$  (иначе  $\ln x$  не имел бы смысла). Однако иной раз приходится иметь дело с интегралом от дроби  $\frac{1}{x}$  при  $x < 0$ . Тогда интеграл будет равен  $\ln(-x)$ , в чем нетрудно убедиться непосредственно дифференцированием:

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}.$$

Можно было бы объединить оба случая  $x \leq 0$ , написав формулу 4 в виде:

$$4a. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Обыкновенно этот знак абсолютной величины в аргументе логарифма не пишут, но его всегда нужно иметь в виду. Иными словами, если в результате применения формулы 4 под знаком логарифма получится выражение, принимающее значения со знаком  $(-)$ , то этот знак нужно попросту отбросить.

Начнем мы с упражнений в применении приведенных простейших правил I, II, III. При этом для приложимости их часто бывает необходимо предварительно преобразовать подынтегральное выражение к виду суммы. Ссылки на предшествующие формулы помещены в скобках [ ].

155. Интегрирование с помощью простейших приемов. Примеры и задачи.

$$1. \int (2x^2 + 1)^3 dx = \int (8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1) dx = \int 8x^6 dx + \int 12x^4 dx +$$
  
 $+ \int 6x^2 dx + \int dx = \frac{8}{7} x^7 + \frac{12}{5} x^5 + 2x^3 + x + C. \quad [\text{II}, \text{I}, 3, 2]$

$$2. \int 4x^2(x-3) dx = x^4 - 4x^3 + C. \quad [\text{II}, \text{I}, 3]$$

$$3. \int (1 + \sqrt{x})^3 dx = \int (1 + 3x^{\frac{1}{2}} + 3x + x^{\frac{3}{2}}) dx = x + 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^2 +$$
  
 $+ \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C. \quad [\text{II}, \text{I}, 3, 2]$







$$13. \int \frac{x^3 - x^2 + x}{x^2 + 1} dx = \int \left( x - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \int x dx - \int dx + \int \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} x^2 - x + \operatorname{arctg} x + C. \quad [\text{II}, 3, 2, 5]$$

Интегрирование дроби со сложным знаменателем часто облегчается разложением ее на сумму дробей с более простыми знаменателями. Напр.

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x + a)(x - a)} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right),$$

поэтому:

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left( \int \frac{dx}{x - a} - \int \frac{dx}{x + a} \right) = \frac{1}{2a} [\ln(x - a) - \ln(x + a)] + C = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + C. \quad [\text{I}, \text{II}, 4, \text{III}]$$

Для дроби более общего вида

$$\frac{1}{(x + a)(x + b)}$$

можно указать, напр., такой прием. Очевидно,  $(x + a) - (x + b) = a - b$ ; умножим же числитель и знаменатель нашей дроби на это выражение, взяв его в числителе в первой форме, а в знаменателе — во второй. Мы получим:

$$\frac{1}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \cdot \frac{(x + a) - (x + b)}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \left( \frac{1}{x + b} - \frac{1}{x + a} \right).$$

Таким образом:

$$16. \int \frac{dx}{(x + a)(x + b)} = \frac{1}{a - b} \ln \frac{x + b}{x + a} + C.$$

Вычислить по этой формуле:

$$16. \int \frac{dx}{(x + 1)(x + 3)} \quad \left( \text{Отв. } \frac{1}{2} \ln \frac{x + 3}{x + 1} + C \right).$$

$$17. \int \frac{dx}{(x - 2)(x + 1)} \quad \left( \text{Отв. } \frac{1}{3} \ln \frac{x + 1}{x - 2} + C \right).$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

Найдя корни знаменателя: 2 и 3, представим его в виде:  $(x - 3)(x - 2)$ .

$$\text{Отв. } \ln \frac{x - 2}{x - 3}.$$

$$19. \int \frac{dx}{4x^2 + 4x - 3} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{8} \ln \frac{2x + 3}{2x - 1} +$$

Некоторые тригонометрические выражения после тех или иных элементарных



преобразований интегрируются также при помощи простейших методов:

$$20. \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \int \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C. \quad [\text{III, I, 10, III}]$$

$$21. \int \sin^2 x \, dx. \quad \left( \text{Отв. } \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \right). \quad [\text{то же}]$$

$$22. \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx = \\ = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) \, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad [\text{то же}]$$

В трех последних примерах нам нужно было брать интегралы от квадрата тригонометрической функции и от произведения двух квадратов. К решению задачи мы пришли, выразив подынтегральную функцию через первую степень косинуса. Подобный прием позволяет интегрировать весьма многие тригонометрические выражения. Вспомним следующие формулы для приведения тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

В тригонометрии пользуются этими формулами для представления суммы или разности двух тригонометрических функций в виде произведения двух функций. Здесь мы будем ими пользоваться в обратном направлении; соответственно этому придадим этим формулам иной вид. Положим в этих формулах:

$$\frac{a+b}{2} = mx, \quad \frac{a-b}{2} = nx,$$

откуда

$$a = (m+n)x, \quad b = (m-n)x.$$

Напишем наши формулы справа налево, деля при этом обе части равенства в первых двух формулах на 2, а в третьей на  $-2$ .

Будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2} \sin(m+n)x + \frac{1}{2} \sin(m-n)x, \\ \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2} \cos(m+n)x + \frac{1}{2} \cos(m-n)x, \\ \sin mx \sin nx &= -\frac{1}{2} \cos(m+n)x + \frac{1}{2} \cos(m-n)x; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

предполагая, что ни  $m+n$ , ни  $m-n$  не равно нулю, отсюда получаем следующие формулы для интегрирования:

$$23. \int \sin mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(m+n)x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin(m-n)x \, dx = \\ = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C,$$



$$24. \int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int \cos (m+n)x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos (m-n)x \, dx = \\ = \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + C,$$

$$25. \int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{1}{2} \int \cos (m+n)x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos (m-n)x \, dx = \\ = -\frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Полагая же во второй и третьей из формул (2)  $m=n$ , будем иметь:

$$20a. \int \cos^2 mx \, dx = \int \left( \frac{1}{2} \cos 2mx + \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{\sin 2mx}{4m} + \frac{1}{2}x + C$$

$$21a. \int \sin^2 mx \, dx = \int \left( -\frac{1}{2} \cos 2mx + \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{\sin 2mx}{4m} + \frac{1}{2}x + C.$$

Пусть, напр., требуется вычислить:

$$26. \int \sin 5x \cos x \, dx; \text{ полагая в формуле (23): } m=5, n=1, \text{ получим для инте-} \\ \text{грала следующее значение: } -\frac{\cos 6x}{12} - \frac{\cos 4x}{8} + C.$$

Взять следующие интегралы:

$$27. \int \sin 3x \sin 6x \, dx \quad \left( \text{Отв. } -\frac{1}{18} \sin 9x + \frac{1}{6} \sin 3x + C \right).$$

$$28. \int \cos x \cos 2x \, dx \quad \left( \text{Отв. } \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin x + C \right).$$

**156. Интегрирование путем замены переменной (подстановки).** Правила I, II и III позволяют расширить таблицу основных интегралов; но с их помощью можно интегрировать все же ограниченный класс функций. Обратимся теперь к новым общим приемам интегрирования; их два — интегрирование посредством замены переменной (или подстановки) и интегрирование по частям. В настоящем п<sup>0</sup> мы остановимся на первом из них.

Этот прием состоит в том, что при вычислении интеграла  $\int f(x) \, dx$  вместо переменной  $x$  вводится новая переменная  $t$ , связанная с  $x$  определенной зависимостью, с таким расчетом, чтобы достигнуть упрощения подынтегрального выражения. Пусть, например, требуется вычислить интеграл  $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ . Попробуем положить  $x = a \sin t$ , где  $t$  есть новая переменная. Тогда подкоренное выражение преобразуется так:  $a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 t = a^2 (1 - \sin^2 t) = a^2 \cos^2 t$ , так что  $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$ . Но это не все: в подынтегральном выражении остался еще  $dx$ , который также нужно преобразовать к новой переменной. Вспоминая определение дифференциала [см. 69, (53)]; в нашем случае  $t$  играет роль независимой переменной, а  $x$  — функции], получим:  $dx = (a \sin t)'_t dt = a \cos t dt$



Таким образом, при переходе к новой переменной  $t$ , подынтегральное выражение значительно упрощается:  $\sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \cos^2 t dt$ . Возьмем теперь интегралы:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

В то время как первый интеграл нам был неизвестен, второй мы уже знаем (см. задачу 20 предыдущего п<sup>0</sup>):

$$a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C.$$

Этому же выражению равен и искомый интеграл, но такой ответ нас не удовлетворяет, так как мы желали бы иметь первообразную функцию выраженной через прежнюю независимую переменную  $x$ . Из равенства  $x = a \sin t$ , или  $\sin t = \frac{x}{a}$ , находим:  $t = \arcsin \frac{x}{a}$ . Далее, представим  $\frac{1}{2} \sin 2t$  в виде  $\frac{1}{2} \cdot 2 \sin t \cos t = \sin t \cos t$ ; так как мы уже имели:  $\sin t = \frac{x}{a} \cdot \cos t = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ , то второе слагаемое в скобках приведет к выражению  $\frac{1}{a^2} x \sqrt{a^2 - x^2}$ . Собирая все эти результаты, окончательно получим:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C. \quad (3)$$

(Предлагаем читателю непосредственным дифференцированием убедиться в правильности этого результата, т. е. в том, что производная сложного выражения в правой части действительно равна подынтегральной функции  $\sqrt{a^2 - x^2}$ .)

В качестве второго примера возьмем интеграл:  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}$ .

Положим здесь  $x = t^6$ , так что  $\sqrt{x} = t^3$ ,  $\sqrt[3]{x} = t^2$ , наконец,  $dx = (t^6)' dt = 6t^5 \cdot dt$ . Благодаря произведенной подстановке, подынтегральное выражение преобразуется в такое:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} = \frac{6t^5 \cdot dt}{t^3 \cdot (1 + t^2)} = 6 \frac{t^2}{1 + t^2} dt.$$

Снова значительное упрощение! Предложенный интеграл заменяется теперь интегралом [I]

$$6 \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt,$$



который вычисляется легко:

$$6 \int \frac{(t^2 + 1) - 1}{t^2 + 1} dt = 6 \int dt - 6 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C \text{ [II, 2, 5].}$$

Остается лишь вернуться к переменной  $x$ , подставив в результате  $t = \sqrt[6]{x}$ . Окончательно, искомый интеграл равен  $6(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x}) + C$ . (Проверить дифференцированием!)

Вообще, если для вычисления интеграла  $\int f(x) dx$  мы желаем сделать подстановку  $x = \varphi(t)$ , то надлежит не только в функции  $f(x)$  заменить  $x$  через  $\varphi(t)$ , но и  $dx$  выразить через переменную  $t$  и ее дифференциал, т. е. положить  $dx = \varphi'(t) dt$ . Ведь задача состоит в нахождении функции  $y$  по ее дифференциалу:  $dy = f(x) dx$ . Переходя к новой независимой переменной  $t$ , с которой  $x$  связана соотношением  $x = \varphi(t)$ , мы можем исходить из того же выражения дифференциала, но должны заменить и в  $f(x)$ , и в  $dx$  переменную  $x$  на  $\varphi(t)$  [69, (56)]:

$$dy = f(\varphi(t)) d\varphi(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Итак,

$$y = \int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt. \quad (4)$$

Найдя выражение искомой первообразной функции через  $t$ , следует затем, воспользовавшись зависимостью между  $x$  и  $t$ , вернуться к  $x$ .

*Выбор подстановки*, т. е. выбор функции  $\varphi(t)$  может быть подсказан весьма разнообразными соображениями. Так, в первом из рассмотренных примеров, разность квадратов под корнем (с постоянным первым членом) напомнила соотношение:  $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$  или  $a^2 - a^2 \sin^2 t = a^2 \cos^2 t$  и естественно привела к мысли, что подстановка  $x = a \sin t$  внесет упрощение (корень „извлечется“!). Во втором примере, корни  $\sqrt{x}$  и  $\sqrt[3]{x}$ , фигурирующие в подынтегральном выражении, также наталкивают на мысль — подставить вместо  $x$  такую степень  $t$ , чтобы оба корня „извлеклись“.

Нужно заметить однако, что в изложенной форме, когда вместо  $x$  прямо подставляется некоторая функция  $\varphi(t)$  от новой переменной  $t$ , метод подстановки применяется сравнительно редко, именно в виду трудности угадать такую функцию  $\varphi(t)$ , которая привела бы к упрощению вопроса. Обычно поступают наоборот, вводя новую переменную  $t$ , как некоторую функцию от старой:  $t = \psi(x)$ .

Начнем и здесь с примера. Пусть требуется найти  $\int \sin^2 x \cos x dx$ ; сделаем подстановку  $\sin x = t$ . Тогда  $\sin^2 x = t^2$ ; с другой стороны, дифференцируя взятое соотношение  $\sin x = t$ , при чем на этот раз  $x$  — независимая переменная, а  $t$  — функция, найдем:  $\cos x dx = dt$ . Отсюда  $\sin^2 x \cos x dx = t^2 dt$ , так что  $\int \sin^2 x \cos x dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C$ . Подставляя обратно  $\sin x$  вместо  $t$ , получим следующий окончательный результат:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$



В общем виде дело обстоит так. Если искомый интеграл  $\int f(x) dx$  подстановкой  $t = \psi(x)$  приводится к интегралу с переменной  $t$ :  $\int g(t) dt$ , то, и обратно, этот последний должен свестись к первому, если вместо  $t$  в подынтегральное выражение подставить функцию  $\psi(x)$  (подобно тому, как мы это делали выше, только переменяв роли  $x$  и  $t$ ). Выполнив подстановку, получим выражение  $g(\psi(x)) \cdot d\psi(x)$ , которое и должно быть тождественно с данным подынтегральным выражением  $f(x)dx$ :

$$g(\psi(x)) \cdot d\psi(x) = g(\psi(x))\psi'(x) dx = f(x)dx. \quad (5)$$

Обратно, отсюда вытекает, что

$$\int g(t) dt = \int g(\psi(x)) d\psi(x) = \int f(x) dx.$$

Итак, в силу (5), для применимости подстановки  $t = \psi(x)$ , подынтегральная функция  $f(x)$  должна распадаться на два множителя: один множитель  $\psi'(x)$ , умноженный на  $dx$ , дает как раз дифференциал той функции  $\psi(x)$ , которая в качестве новой переменной  $t$  вводится взамен  $x$ , а остающийся множитель  $g(\psi(x))$  дает функцию  $g(t)$  от этой новой переменной, причем подстановка имеет смысл лишь в том случае, если эта функция  $g(t)$  достаточно проста [или, по крайней мере, проще, чем  $f(x)$ ], ибо ее и придется непосредственно интегрировать.

В разобранный выше примере подынтегральное выражение естественно распадается на два множителя: *квадрат*  $\sin x$  и *дифференциал* этого же синуса:  $\cos x dx = d \sin x$ . Подставляя вместо  $\sin x$  новую переменную  $t$ , мы и свели подынтегральное выражение к виду:  $t^2 \cdot dt$ . Можно было бы, конечно, и иначе разбить подынтегральное выражение на множители, напр., так:  $\sin x \cos x$  и  $\sin x \cdot dx$ . Если  $\sin x \cdot dx$  принять за дифференциал новой переменной, скажем,  $u$ , так что  $du = \sin x dx$ , то  $u = -\cos x$ , и тогда остающийся за выделением дифференциала множитель  $\sin x \cdot \cos x$  нужно выразить через это  $u$ :  $\sin x \cdot \cos x = -u \sqrt{1-u^2}$ , так что интеграл приводится к следующему:  $-\int u \sqrt{1-u^2} du$ . Здесь подынтегральная функция довольно сложна, так что подстановка менее удачна, чем раньше указанная. Иной раз удачную подстановку находят лишь после ряда попыток. К сожалению, нельзя дать общие правила, по которым следует выбирать ту или иную подстановку применительно к заданному интегралу. Умение пользоваться подстановками приобретается только на практике. Однако ниже будут сделаны (попутно с решением задач) отдельные указания, касающиеся определенных типов подынтегральных функций.

[Теперь ясно, что правило III, которым мы уже пользовались, по существу сводится к *линейной подстановке*  $u = ax + b$  в интеграле  $\int f(ax + b) dx$ . Пользуясь тем, что  $d(ax + b) = a \cdot dx$ , можно этот интеграл (вводя  $a$  множителем и делителем, чтобы не изменить его вели-



чины) переписать в виде:

$$\frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b),$$

так что при указанной подстановке он, действительно, приводится к интегралу

$$\frac{1}{a} \int f(u) du = \frac{1}{a} F(u) + C,$$

куда лишь, после вычисления, нужно обратно подставить  $ax + b$  вместо  $u$ .]

157. Примеры и задачи на замену переменных. 1.  $\int e^{x^2} \cdot x dx$  можно переписать:  $\int \frac{1}{2} e^{x^2} \cdot 2x dx$ ; очевидно  $2x dx$  и будет дифференциалом новой переменной  $t$ ,  $t = x^2$ ,  $\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$ .

2.  $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^6} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{1 + (x^3)^2}$ . Подстановка  $x^3 = t$  дает:  $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^6} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + C$ .

Вообще, если подынтегральное выражение имеет форму  $g(x^2) \cdot x dx$ ,  $g(x^3) \cdot x^2 dx$  и т. п., где  $g$  — удобная для интегрирования функция, то следует применить подстановку  $x^2 = t$ ,  $x^3 = t$ , ...

3.  $\int \frac{\ln x}{x} dx$ . Множитель  $\frac{dx}{x}$  принимаем за дифференциал новой переменной так что  $t = \ln x$  и  $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$ .

Эта подстановка, очевидно, полезна при подынтегральных выражениях вида:  $g(\ln x) \cdot \frac{dx}{x}$ , если функция  $g$  проста.

4.  $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$ . Подстановка  $\cos x = t$ ,  $-\sin x dx = dt$  приводит наш интеграл к виду  $-\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C$ .

5.  $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$ . Подстановка  $\sin x = t$ ,  $\cos x dx = dt$  дает  $\int \frac{dt}{t} = \ln t + C$ , так что окончательно получим  $\ln \sin x + C$ .

Сопоставляя эти примеры 4 и 5 с последним примером, разобранным в предыдущем п<sup>0</sup>, видим, что подстановки  $\sin x = t$  и  $\cos x = t$  следует использовать соответственно, при интегралах вида  $\int g(\sin x) \cos x dx$  и  $\int g(\cos x) \sin x dx$ . Мы обращаем внимание читателя на то, что если, например, подынтегральная функция зависит только от  $\cos x$  и не содержит множителем еще  $\sin x$ , то подстановка  $\cos x = t$  была бы бесполезна! Непремено должен быть множитель, который вместе с  $dx$  дал бы дифференциал новой переменной. Напр.:

6.  $\int \cos^3 x dx$ . Согласно замечанию, не следует полагать  $\cos x = t$ .



Преобразуем:  $\int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx$ . Теперь ясно, что

подстановка  $\sin x = t$ ,  $\cos x dx = dt$ , приведет к цели:

$$\int \cos^3 x dx = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

7.  $\int \frac{(2x+4) dx}{x^2+4x+1}$ . Замечаем, что числитель подынтегрального выражения есть дифференциал знаменателя, берем знаменатель в качестве новой переменной, так что  $x^2+4x+1=t$ ,  $(2x+4) dx = dt$ ,

$$\int \frac{(2x+4) dx}{x^2+4x+1} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x^2+4x+1) + C.$$

Вообще, интегралы вида  $\int \frac{\psi'(x) dx}{\psi(x)} = \int \frac{d\psi(x)}{\psi(x)}$  подстановкой  $t = \psi(x)$ ,  $dt = d\psi(x)$  сразу приводятся к  $\int \frac{dt}{t} = \ln t + C$ , т. е. к  $\ln \psi(x) + C$  [ср. задачу 5!]. Если в числителе не хватает *множителя*, чтобы он стал полным дифференциалом знаменателя, то этот множитель следует добавить, поместив обратное число перед интегралом для компенсации. Напр.:

$$8. \int \frac{(3x-1) dx}{3x^3-2x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{(6x-2) dx}{3x^3-2x+1} = \frac{1}{2} \ln(3x^3-2x+1) + C.$$

9.  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ . Подстановка  $\sqrt{x} = t$ ,  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{1+t} = \int \frac{(2t+2)-2}{1+t} dt = \int 2dt - \int \frac{2dt}{1+t} = \\ &= 2t - 2 \ln(1+t) + C = 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

10.  $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$ . Подстановка  $\sqrt{x+1} = t$ ,  $x+1 = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ , так что в результате получаем:  $2 \int \frac{(t+1)t}{t-1} dt = 2 \int \left( t+2 + \frac{2}{t-1} \right) dt = t^2 + 4t + 4 \ln(t-1) + C = x+1 + 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1}-1) + C = x + 4\sqrt{x+1} + 4 \ln(\sqrt{x+1}-1) + C'$  (если положить  $C+1 = C'$ ).

11.  $\int \frac{x^2 dx}{3\sqrt[3]{x+2}}$ . Подстановка  $\sqrt[3]{x+2} = t$ ,  $x = t^3 - 2$ ,  $dx = 3t^2 dt$ . Тогда

$$\begin{aligned} \text{найдем: } \int \frac{(t^3-2)^2 \cdot 3t^2 dt}{3t} &= \int (t^7 - 4t^4 + 4t) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{4t^5}{5} + 2t^2 + C = \\ &= \frac{1}{40} (5t^8 - 32t^5 + 80) \cdot t^2 + C = \frac{1}{40} (5x^2 - 12x + 36) \sqrt[3]{(x+2)^2} + C. \end{aligned}$$

В подобных случаях, когда подынтегральное выражение не содержит иных иррациональностей, кроме *корня из линейной функции*  $\sqrt[n]{ax+b}$ , полезно этот именно корень взять за новую переменную.



Пусть читатель использует сделанные выше замечания в следующих примерах:

$$12. \int \frac{x dx}{1+x^2}. \text{ Отв. } \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. [\text{Подстановка } t=x^2.]$$

$$13. \int \sqrt{\cos x} \sin x dx. \text{ Отв. } -\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + C. [t=\cos x.]$$

$$14. \int \frac{e^x dx}{e^x+1}. \text{ Отв. } \ln(e^x+1) + C. [t=e^x+1.]$$

$$15. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx. \text{ Отв. } \frac{1}{3} \ln^3 x + C. [t=\ln x.]$$

$$16. \int \operatorname{tg} x dx. \text{ Отв. } -\ln \cos x + C. [t=\cos x.]$$

$$17. \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx. \text{ Отв. } \frac{1}{4} \arcsin x^2 + C. [t=x^2.]$$

$$18. \int \frac{\sin x dx}{a+b \cos x}. \text{ Отв. } \frac{1}{b} \ln(a+b \cos x) + C. [t=a+b \cos x.]$$

$$19. \int x \cos^2 x^2 dx. \text{ Отв. } \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8} \sin 2x^2 + C. [t=x^2; \text{ см. 155, задача 20.}]$$

20.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2+\beta}}$ . Сразу кажется, что следует положить  $x^2=t$ , но на деле удобнее воспользоваться подстановкой:  $ax^2+\beta=t$ ; дифференциал  $t$  лишь постоянным множителем отличается от  $x dx$ :  $x dx = \frac{1}{2a} dt$ . Итак:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2+\beta}} = \frac{1}{2a} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{a} t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+\beta} + C.$$

Еще проще было бы положить  $\sqrt{ax^2+\beta}=u$ , так что  $ax^2+\beta=u^2$ ; дифференцируя, получим:  $2ax dx = 2u du$ , откуда  $x dx = \frac{1}{a} u du$ . Тогда

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2+\beta}} = \frac{1}{a} \int du = \frac{1}{a} u + C = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+\beta} + C.$$

Аналогично берутся интегралы:

$$21. \int x \cdot \sqrt{ax^2+\beta} dx. \text{ Отв. } \frac{1}{3a} (ax^2+\beta)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$22. \int \frac{x dx}{(ax^2+\beta)^{\frac{3}{2}}}. \text{ Отв. } -\frac{1}{a \cdot \sqrt{ax^2+\beta}} + C.$$

$$23. \int x(ax^2+\beta)^{\frac{m}{2}} dx. \text{ Отв. } -\frac{1}{(m+2)a} (ax^2+\beta)^{\frac{m+2}{2}} + C.$$

( $m$  — целое число).

В этом примере, как частные случаи, содержатся примеры 20, 21, 22 ( $m = -1; 1; -3$ ).

В некоторых случаях для того, чтобы легче усмотреть нужную подстановку,



полезно предварительно произвести те или иные преобразования (иногда весьма незамысловатые) подынтегрального выражения:

$$24. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\frac{x}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}. \text{ Подстановка: } t = \frac{x}{a}, dt = \frac{dx}{a}.$$

$$\text{Отв. } \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$25. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \text{ Отв. } \arcsin \frac{x}{a} + C. \left[ t = \frac{x}{a} \right]$$

$$26. \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}. \text{ Подстановка: } \operatorname{tg} x = t, \frac{dx}{\cos^2 x} = dt;$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln \operatorname{tg} x + C.$$

$$27. \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{dt}{\sin t \cos t}, \text{ если взять}$$

$$t = \frac{x}{2}; \text{ последний же интеграл (см. пред. задачу) дает: } \ln \operatorname{tg} t + C = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$28. \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}. \text{ Отв. } \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

$$29. \int \frac{dx}{\alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 x} (\alpha, \beta > 0). \text{ Деля на } \alpha \cdot \cos^2 x, \text{ приходим к интегралу}$$

$$\frac{1}{\alpha} \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + \frac{\beta}{\alpha}}, \text{ затем подстановка } t = \operatorname{tg} x \text{ дает уже известный нам интеграл}$$

$$(\text{зад. 24}). \text{ Отв. } \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \operatorname{tg} x \right) + C.$$

$$30. \int \frac{dx}{\alpha + \beta \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\alpha \sin^2 x + (\alpha + \beta) \cos^2 x}, \text{ см. пред. зад.}$$

Во всех предшествующих примерах подстановка имела вид:  $t = \psi(x)$ ; как упоминалось, это — обычная ее форма. В заключение однако дадим несколько примеров, в которых  $x$  непосредственно заменяется тригонометрической (как в первом примере предшествующего п<sup>0</sup>) или же гиперболической функцией от новой переменной  $t$ . В этих примерах подынтегральные выражения содержат двучлены  $a^2 - x^2$ ,  $x^2 + a^2$ ,  $x^2 - a^2$  (главным образом, под знаком квадратного корня); естественно является мысль об использовании соотношений:

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 t = \sec^2 t = \frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1, \quad 1 - \operatorname{th}^2 t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$



Именно,

если встре- чается	то прибегают к подстановкам
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \cdot \sin t$ или $x = a \cdot \operatorname{th} t$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \cdot \operatorname{sect} t$ или $x = a \cdot \operatorname{cht}$
$x^2 + a^2$	$x = a \cdot \operatorname{tgt}$ или $x = a \cdot \operatorname{sh} t$

31.  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$ . Подстановка:  $x = a \cdot \operatorname{tgt}$ ,  $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ ,  $x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$ ,  
так что  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt$ . Этот интеграл мы знаем [153, зад. 20], он  
равен  $\frac{1}{2} (t + \sin t \cdot \cos t) = \frac{1}{2} \left( t + \frac{\operatorname{tgt}}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \right)$ .

Переходя теперь к переменной  $x$ , окончательно получаем:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{x^2 + a^2} \right) + C.$$

(Гиперболическая подстановка приводит к сложным выкладкам.)

32.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$ . Здесь удобнее применить гиперболическую подстановку; останавливаясь для примера на нижних знаках, имеем:  $x = a \operatorname{cht}$ ,  $dx = a \cdot \operatorname{sh} t \cdot dt$ ,  $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \operatorname{sh} t$ , и интеграл приводится просто к  $\int dt = t + C$ . Для перехода к  $x$ , из соотношения

$$\frac{x}{a} = \operatorname{cht} = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) \text{ или } e^{2t} - \frac{2x}{a} \cdot e^t + 1 = 0,$$

рассматривая его, как квадратное уравнение относительно  $e^t$ , находим:

$$e^t = \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, *$$

откуда:

$$t = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) - \ln a.$$

Постоянное слагаемое  $-\ln a$  можно объединить с  $C$ .

$$33. \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

$$34. \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C.$$

\* Так как  $t > 0$  и  $e^t > 1$ , то для вычисления  $e^t$  мы и берем больший из двух корней, ибо второй корень будет  $< 1$  (произведение корней равно свободному члену, т. е. 1!).



$$35. \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

В последних трех задачах одинаково просто приводят к цели и тригонометрическая, и гиперболическая подстановки.

**158. Интегрирование по частям.** Пусть  $u$  и  $v$  — две функции от  $x$ . По правилу нахождения производной от произведения имеем:

$$(uv)' = uv' + vu'.$$

Берем интегралы от обеих частей равенства:

$$\int (uv)' dx = \int uv' dx + \int vu' dx.$$

Но, по самому определению интеграла,  $\int (uv)' dx = uv$ . Таким образом, будем иметь:  $uv = \int uv' dx + \int vu' dx$ , откуда

$$\int uv' dx = uv - \int vu' dx. \quad (6)$$

Так как  $u' dx = du$ ,  $v' dx = dv$ , то это равенство можно написать в равносильной форме:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (7)$$

(нужно лишь помнить, что под  $u$  и  $v$  разумеются функции от  $x$ !). Полученная формула носит название *формулы интегрирования по частям*.

Покажем на примерах, как ею пользоваться для вычисления интегралов. Пусть дан  $\int x \cos x dx$ . Положим  $u = x$ ,  $v' = \cos x$  (заметьте:  $v'$ , а не  $v$ !), тогда  $v = \sin x$ ,  $u' = 1$  и по формуле (6) найдем:

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \int x (\sin x)' dx = x \sin x - \int \sin x (x)' dx = \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

Или иначе: положим  $u = x$ ,  $dv = \cos x dx$ , тогда  $du = dx$  и  $v = \sin x$ , так что по формуле (7):

$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Таким образом, интегрирование по частям позволило заменить сложную подынтегральную функцию  $x \cos x$  простой функцией  $\sin x$ . Попутно, для получения  $v$ , пришлось произвести интегрирование функции  $\cos x$  (отсюда и название: *интегрирование по частям*!).

Заметим, что постоянную  $C$  прибавляют лишь в окончательном результате.



Другой пример:  $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ . Можно было бы переписать его в виде  $\int \operatorname{arctg} x \cdot 1 \cdot dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot (x)' dx$ , взять  $u = \operatorname{arctg} x$ ,  $v = x$  и воспользоваться формулой (6). Но проще применить формулу (7), откуда сразу видно, что следует  $\operatorname{arctg} x$  взять за  $u$ , а  $x$  — за  $v$ . Итак,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x \, dx &= x \operatorname{arctg} x - \int x \, d \operatorname{arctg} x = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

После этих примеров нетрудно уяснить, при каких условиях вообще можно применять формулу интегрирования по частям и какое она имеет значение. Положим, что подынтегральная функция может быть представлена в виде произведения двух множителей, один из которых легко интегрируется, тогда, принимая этот множитель за  $v'$ , а другой за  $u$ , мы интегрирование произведения  $uv'$  сводим по формуле (6) к интегрированию выражения  $vu'$ , т. е. произведения, получаемого из нашей функции путем дифференцирования одного множителя ( $u$ ) и интегрирования другого ( $v'$ ). Значит, применение нашей формулы полезно тогда, когда дифференцирование одного и интегрирование другого множителя подынтегральной функции упрощает (в смысле интегрирования) подынтегральное выражение. Обратимся к дальнейшим примерам.

159. Примеры и задачи. Рекуррентные формулы. 1.  $\int x e^{3x} dx$ . Какой из множителей  $x$  и  $e^{3x}$  взять за  $u$ , и какой за  $v'$ ? Первый множитель при интегрировании повышает степень, при дифференцировании же обращается в единицу; что до второго множителя, то и дифференцирование, и интегрирование его вводят лишь численный коэффициент. Ясно, что выгоднее первый множитель дифференцировать, а второй интегрировать, т. е. положить  $u = x$ , а  $v' = e^{3x}$  или  $dv = e^{3x} dx$ ; тогда  $du = dx$ ,  $v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}$  и

$$\int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C.$$

2.  $\int x^3 \ln x \, dx$ . Если в подынтегральной функции  $x^3 \ln x$  второй множитель продифференцировать, то вместо  $\ln x$  сразу получается простая функция  $\frac{1}{x}$  это настолько выгодно, что здесь не следует смущаться тем, что интегрирование первого множителя повысит его степень. Поэтому, применяя интегрирование по частям, мы за  $u$  возьмем  $\ln x$  (т. е. именно ту функцию, которую желательно продифференцировать), а за  $v'$  возьмем  $x^3$  (функцию, которую будем интегрировать или положим  $dv = x^3 dx$ ; тогда будем иметь  $v = \frac{x^4}{4}$ ,  $du = \frac{dx}{x}$ , откуда

$$uv = \frac{x^4 \ln x}{4} \text{ и } v du = \frac{x^4}{4} \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} x^3 dx.$$

Применяя интегрирование по частям, будем иметь:

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C.$$



Взять интегралы:

$$3. \int x \sin x \, dx. \text{ Отв. } -x \cos x + \sin x + C.$$

$$4. \int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx. \text{ Указание } u = x, \, dv = \frac{dx}{\cos^2 x}; \text{ см. задачу 16, 157.}$$

Отв.  $x \operatorname{tg} x + \ln \cos x + C$ .

$$5. \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int x \, d \arcsin x = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \\ = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \text{ [см. задачу 23, 157].}$$

Для вычисления интегралов в двух последних примерах пришлось, кроме интегрирования по частям, прибегнуть и к замене переменной.

$$6. \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \, d \ln x = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Часто для выполнения интегрирования полезно один из множителей подынтегральной функции продифференцировать не один, а несколько раз, а другой проинтегрировать столько же раз. Тогда нужно формулу интегрирования по частям применить несколько раз.

7.  $\int (x^3 - 5x) \sin 2x \, dx$ . Дифференцирование первого множителя и интегрирование второго упрощает подынтегральную функцию, понижая степень полинома, стоящего перед тригонометрической функцией. Для выполнения интегрирования придется применять трижды интегрирование по частям.

Полагая  $u = x^3 - 5x$ ,  $v' = \sin 2x$ , будем иметь:  $u' = 3x^2 - 5$ ,  $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$ , откуда

$$\int (x^3 - 5x) \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}(x^3 - 5x) \cos 2x + \frac{1}{2} \int (3x^2 - 5) \cos 2x \, dx.$$

Полагая в последнем интеграле  $u = 3x^2 - 5$ ,  $v' = \cos 2x$ , будем иметь:  $u' = 6x$ ,  $v = \frac{1}{2} \sin 2x$ , откуда

$$\int (3x^2 - 5) \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}(3x^2 - 5) \sin 2x - 3 \int x \sin 2x \, dx.$$

Полагая наконец, в интеграле правой части равенства  $u = x$ ,  $v' = \sin 2x$ , будем иметь  $u' = 1$ ,  $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$ , откуда

$$\int x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \\ = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Воспользовавшись полученными результатами, последовательно находим:

$$\int (3x^2 - 5) \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}(3x^2 - 5) \sin 2x + \frac{3}{2} x \cos 2x - \frac{3}{4} \sin 2x = \\ = \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{13}{4}\right) \sin 2x + \frac{3}{2} x \cos 2x$$



и

$$\int (x^3 - 5x) \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}(x^3 - 5x) \cos 2x + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{4} \right) \sin 2x + \\ + \frac{3}{4}x \cos 2x + C = \left( -\frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{4}x \right) \cos 2x + \left( \frac{3}{4}x^2 - \frac{13}{8} \right) \sin 2x + C.$$

Постоянное слагаемое  $C$ , и в подобном случае, присоединяют лишь в окончательном результате.

8.  $\int x (\ln x)^2 \, dx$ . Двукратное интегрирование по частям: 1)  $u = (\ln x)^2$ ,  $dv = x \, dx$ , так что  $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$ ,  $v = \frac{1}{2} x^2$  и

$$\int x (\ln x)^2 \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot (\ln x)^2 - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \\ = \frac{1}{2} x^2 \cdot (\ln x)^2 - \int x \ln x \, dx;$$

2) в последнем интеграле полагаем  $u = \ln x$ ,  $dv = x \, dx$ , так что  $du = \frac{dx}{x}$ ,  $v = \frac{1}{2} x^2$  и

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \\ = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2.$$

Подставляя это значение интеграла  $\int x \ln x \, dx$  в предыдущий результат, окончательно найдем:

$$\int x (\ln x)^2 \, dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \frac{1}{2} x^2 (\ln x) + \frac{1}{4} x^2 + C.$$

Взять интегралы:

9.  $\int x^2 \cos x \, dx$ . *Отв.*  $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$ .

10.  $\int e^{2x} x^3 \, dx$ . *Отв.*  $e^{2x} \left( \frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8} \right) + C$ .

Из рассмотренных примеров читателю ясно, что интегрирование по частям (в случае надобности — многократно примененное) окончательно решает вопрос о вычислении интегралов вида:

$$\int x^n \cdot e^{ax} \, dx, \int x^n \cdot \sin bx \, dx, \int x^n \cdot \cos bx \, dx, \int x^n \cdot (\ln x)^m \, dx$$

(где  $n$  и  $m$  — целые положительные числа).

В некоторых случаях применение интегрирования по частям хотя и не приводит к интегралу, легко берущемуся, но позволяет составить уравнение для определения искомого интеграла.

11. Пусть требуется найти интеграл  $\int e^{ax} \sin bx \, dx$ . Упрощения интеграла



нельзя добиться интегрированием по частям (с и н у с заменится к о с и н у с о м); тем не менее выполним его, полагая, напр.,

$$u = \sin bx, dv = e^{ax} dx, \text{ так что } du = b \cdot \cos bx \cdot dx, v = \frac{1}{a} e^{ax},$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

В полученном интеграле снова интегрируем по частям.

$$u = \cos bx, dv = e^{ax} dx, du = -b \cdot \sin bx \cdot dx, v = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx,$$

так что мы вернулись к исходному интегралу! Подставив это выражение интеграла  $\int e^{ax} \cos bx dx$  в ранее полученную формулу, приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left[ \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx \right] = \\ &= \frac{a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx}{a^2} e^{ax} - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx dx, \end{aligned}$$

которое содержит искомый интеграл и в левой, и в правой своей части. Это равенство можно рассматривать как уравнение относительно этого интеграла, из которого последний и определяется обычным порядком: переносим член с интегралом налево:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx}{a^2} e^{ax}$$

и, окончательно,

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \cdot \sin bx - b \cdot \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Постоянную интегрирования и здесь прибавляем лишь в конечном результате.

Предоставляем читателю аналогично получить:

$$12. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cdot \cos bx + b \cdot \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

В качестве последнего примера применения метода интегрирования по частям, рассмотрим вопрос о вычислении интеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

(где  $n$  — целое положительное число). Мы знаем уже, что

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, J_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (8)$$

[157, зад. 24 и 31]. Обращаясь к общему случаю, применим к интегралу  $J_n$  формулу (7), полагая:

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} = (x^2 + a^2)^{-n}, dv = dx$$



так что

$$du = -2nx \cdot (x^2 + a^2)^{-n-1} dx = -2n \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \cdot dx, \quad v = x;$$

мы получим:

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx.$$

Последний интеграл можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx &= \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \\ &= J_n - a^2 \cdot J_{n+1}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение вместо интеграла, приходим к соотношению:

$$J_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \cdot J_n - 2na^2 \cdot J_{n+1},$$

которое в окончательном виде перепишем так:

$$J_{n+1} = \frac{1}{2n \cdot a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot J_n. \quad (9)$$

Полученная формула сводит вычисление интеграла  $J_{n+1}$  к вычислению интеграла  $J_n$ , с меньшим на единицу значком. Если в этой формуле положить  $n=1$ , то найдем:

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot J_1,$$

и стоит лишь подставить вместо  $J_1$  его значение по первой из формул (8), чтобы наново получить для  $J_2$  вторую из этих формул. При  $n=2$  будем иметь:

$$J_3 = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \cdot J_2$$

и, подставляя значение  $J_2$ , получим:

$$J_3 = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, \quad (10)$$

и т. д. Таким образом, формула (9) фактически дает возможность вычислить интеграл  $J_n$  для любого показателя  $n$  (и даже, если угодно, написать для него сразу общее выражение).

Формулы, подобные (9), приводящие вычисление интеграла определенного типа к вычислению интеграла того же типа, но более простого, встречаются в Анализе часто. Их называют *формулами приведения*, или *рекуррентными* (возвратными) *формулами*. [Последнее название мотивируется тем, что для вычисления, скажем, интеграла  $J_{n+1}$  по формуле (9) приходится „возвращаться“ к  $J_n$ , а от него — к  $J_{n-1}$ , и т. д.] В основе вывода рекуррентных формул почти всегда лежит интегрирование по частям.

Этим заканчивается изложение различных *общих приемов*, применяемых при разыскании для данной функции ее первообразной. Наиболее сильным из них является, конечно, метод подстановок, связывающий между собою интегралы весьма различных типов. Интегрирование по частям дает очень полезное орудие, но в сравнительно ограниченной области.



Так как все эти приемы не определяют точно пути, по которому надлежит идти, чтобы вычислить данный интеграл, предоставляя многое искусству вычислителя, то мы остановимся подробнее на некоторых важнейших классах функций, и по отношению к их интегралам установим вполне определенный порядок вычислений.

160. Интегрирование рациональных дробей. Простые дроби. Самым важным и простым классом функций является класс *рациональных функций*: *целых*, т. е. полиномов

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

и *дробных* (рациональных дробей)

$$\frac{Q(x)}{P(x)}, \quad (11)$$

представляющих частное двух полиномов. Так как интегрирование полиномов не представляет затруднений [73], то мы ограничимся рассмотрением *рациональных дробей* (11). Как известно [147], такая дробь называется *правильной*, если степень числителя ниже степени знаменателя, и *неправильной* — если степень числителя равна или выше степени знаменателя, так что, напр., из дробей:

$$\frac{100x^2 + 125}{x^3 - 1}, \quad \frac{x^2 - 1}{5x^2 + 3}, \quad \frac{x^3 + 1}{10x^2 - 17x + 25}$$

лишь первая будет *правильной*, а две другие — *неправильные*.

Если имеем *неправильную дробь* (11), то можно разделить  $Q(x)$  на  $P(x)$  (располагая их по убывающим степеням  $x$ ); если деление произойдет нацело, то дробь вообще можно заменить целым частным; если же нет, то, обозначив целое частное через  $M(x)$ , а остаток от деления через  $N(x)$ , сможем представить дробь в виде:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = M(x) + \frac{N(x)}{P(x)},$$

где степень  $N(x)$  (остатка) уже ниже степени  $P(x)$  (делителя). Этот процесс называется *выделением целой части* (он похож на выделение целого числа из арифметической *неправильной дроби*). Так, для приведенных выше *неправильных дробей* имеем:

$$\frac{x^2 - 1}{5x^2 + 3} = 0,2 + \frac{1,6}{5x^2 + 3}; \quad \frac{x^3 + 1}{10x^2 - 17x + 25} = 0,1x + 0,17 + \frac{0,49x - 3,25}{10x^2 - 17x + 25}$$

По выделении из *неправильной дроби* ее *целой части* остается уже *правильная дробь*. Впредь мы ограничимся вопросом об интегрировании



правильных дробей, ибо целую часть интегрировать умеем. [Вспомним что выделением целой части мы уже пользовались в зад. 10—13, 155.]

В настоящем п<sup>0</sup> мы остановимся на еще более узком классе, так называемых, *простых дробей* (как увидим ниже, к их интегрированию приводится интегрирование всякой правильной дроби). К числу простых мы относим дроби вида:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad (12)$$

( $k=2, 3, \dots$ )

где  $A, M, N, a, p, q$  — вещественные числа, и, кроме того, по отношению к дробям (12) III. и (12) IV. предполагается, что трехчлен  $x^2+px+q$  [или — что то же — уравнение  $x^2+px+q=0$ ] имеет *мнимые корни*, так что

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \quad \left(\text{или } q - \frac{p^2}{4} > 0\right). \quad (13)$$

Таким образом, дроби

$$\frac{5}{x+0,3}, \quad \frac{2x-1,5}{x^2+x+1}, \quad \frac{-24}{(x-5)^3}, \quad \frac{7-x}{(x^2-2x+3)^2}$$

все — простые, между тем как дроби

$$\frac{1}{x^2-5x+6}, \quad \frac{\frac{4}{x^2+x-\frac{3}{4}}}{4} = \frac{1}{4x^2+4x-3}$$

не будут простыми, ибо их знаменатели имеют вещественные корни [читатель уже знает из зад. 18, 19, 155, что они в свою очередь разлагаются на простые!].

Первые две из дробей (12) интегрируются подстановкой  $x-a=t$ ,  $dx=dt$ :

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dt}{t} = A \ln t + C = A \ln(x-a) + C \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= A \int t^{-k} dt = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{t^{k-1}} + C = \\ &= -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \end{aligned} \quad (15)$$

Обратимся к дроби вида (12) III. Начнем с примера; пусть требуется найти интеграл

$$\int \frac{7-x}{x^2-2x+3} dx.$$



В знаменателе подынтегральной дроби постараемся выделить полный квадрат двучлена;  $x^2$  рассматриваем как квадрат первого члена ( $= x$ ),  $-2x$  играет роль удвоенного произведения первого члена на второй ( $= -1$ ), так что недостает лишь квадрата второго члена  $(-1)^2 = 1$ , который мы позаимствуем из 3. Итак,

$$x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2.$$

Это разложение подсказывает нам подстановку:  $t = x - 1$ ,  $x = t + 1$ ,  $dx = dt$ , которая приведет интеграл к виду:

$$\int \frac{6 - t}{t^2 + 2} dt = 6 \int \frac{dt}{t^2 + 2} - \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + 2}.$$

Оба интеграла в правой части берутся легко: первый равен  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}}$  [157, зад. 24], а второй  $\ln(t^2 + 2)$  [числитель есть дифференциал знаменателя!]. Итак, возвращаясь к переменной  $x$ , имеем:

$$\int \frac{7 - x}{x^2 - 2x + 3} dx = 3 \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 3) + C.$$

В общем случае, точно так же выделим из знаменателя  $x^2 + px + q$  полный квадрат двучлена:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Последнее выражение в скобках есть число положительное, в силу (13); поэтому его можно рассматривать как квадрат некоторого положительного числа:

$$q - \frac{p^2}{4} = a^2, \text{ откуда } a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}. \quad (16)$$

Теперь прибегнем к подстановке:

$$\left. \begin{aligned} x + \frac{p}{2} = t, \quad x = t - \frac{p}{2}, \quad dx = dt; \\ Mx + N = Mt + N - \frac{Mp}{2}, \quad x^2 + px + q = t^2 + a^2, \end{aligned} \right\} (17)$$

которая преобразует наш интеграл к виду:

$$\int \frac{Mt + N - \frac{Mp}{2}}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} M \cdot \int \frac{2t dt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2},$$



откуда, как и выше,

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{1}{2} M \ln(x^2 + px + q) + \\ + \frac{1}{a} \left( N - \frac{1}{2} Mp \right) \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C.$$

Подставляя значение  $a$  из (16), окончательно получаем:

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{1}{2} M \ln(x^2 + px + q) + \\ + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \quad (18)$$

В случае интеграла типа (12) IV, напр.:

$$\int \frac{3x - 2}{(x^2 - 2x + 3)^3} dx,$$

мы снова прибегаем к выделению полного квадрата из выражения в скобках и к той же подстановке:

$$x - 1 = t, \quad x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 = t^2 + 2, \quad 3x - 2 = 3t + 1,$$

так что предложенный интеграл преобразуется в следующий:

$$\int \frac{3t + 1}{(t^2 + 2)^3} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2t dt}{(t^2 + 2)^3} + \int \frac{dt}{(t^2 + 2)^3}.$$

Что до первого из двух интегралов справа, то он берется, в свою очередь, подстановкой  $t^2 + 2 = u$ ,  $2t dt = du$ :

$$\int \frac{2t dt}{(t^2 + 2)^3} = \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2(t^2 + 2)^2};$$

второй же сразу получается по формуле (10) [158]:

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 2)^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{t}{(t^2 + 2)^2} + \frac{3}{32} \cdot \frac{t}{t^2 + 2} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}}.$$



Собирая эти результаты и возвращаясь к переменной  $x$ , найдем:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{(x^2-2x+3)^2} dx &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(x^2-2x+3)^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x-1}{(x^2-2x+3)^2} + \\ &+ \frac{3}{32} \cdot \frac{x-1}{x^2-2x+3} + \frac{3\sqrt{2}}{64} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C = \\ &= \frac{1}{32} \cdot \frac{3x^3-9x^2+19x-37}{(x^2-2x+3)^2} + \frac{3\sqrt{2}}{64} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

Легко те же рассуждения повторить и в общем случае интеграла (12) IV. Подстановка (17) преобразует его в интеграл:

$$\int \frac{Mt + N - \frac{Mp}{2}}{(t^2 + a^2)^k} dt = \frac{1}{2} M \cdot \int \frac{2t \cdot dt}{(t^2 + a^2)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.$$

В первом из интегралов справа произведем, как и выше, подстановку:  $t^2 + a^2 = u$ ,  $2t dt = du$ , что даст

$$\int \frac{2t \cdot dt}{(t^2 + a^2)^k} = \int \frac{du}{u^k} = -\frac{1}{(k-1)} \cdot \frac{1}{u^{k-1}} = -\frac{1}{(k-1)} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{k-1}}.$$

Второй же из интегралов справа может быть, при любом  $k$ , вычислен по рекуррентной формуле (9). Затем останется лишь положить в результате

$t = x - \frac{p}{2}$ , чтобы вернуться к переменной  $x$ . Окончательной формулы

в общем виде, в виду ее сложности, выписывать не станем.

Этим исчерпывается вопрос об интегрировании простых дробей.

161. Примеры и задачи. 1.  $\int \frac{dx}{(2x-5)^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-5)}{(2x-5)^4} =$   
 $= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(2x-5)^3} + C.$  [„Подразумевается“ подстановка:  $t = 2x - 5$ .]

2.  $\int \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2} dx = \int \left(2x - 1 + \frac{3}{x-2}\right) dx = x^2 - x + 3 \ln(x-2) + C.$

3.  $\int \frac{9x^4 - 30x^3 + 55x^2 - 44x}{(3x-2)^2} dx.$

$$\begin{array}{r} 9x^4 - 30x^3 + 55x^2 - 44x \mid 9x^2 - 12x + 4 \\ \mp 9x^4 \mp 12x^3 \mp 4x^2 \qquad \qquad \qquad x^2 - 2x + 3 \\ \hline -18x^3 + 51x^2 - 44x \\ \pm 18x^3 \mp 24x^2 \pm 8x \\ \hline 27x^2 - 36x \\ \mp 27x^2 \pm 36x \mp 12 \\ \hline -12 \end{array} \quad \int \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{12}{(3x-2)^2}\right) dx = \frac{1}{3} x^3 - x^2 +$$

$$+ 3x + \frac{4}{3x-2} + C.$$



$$4. \int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx.$$

$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ . Подстановка:  $t = x - \frac{1}{2}$ ,

$x = t + \frac{1}{2}$ ,  $dx = dt$ ,  $3x - 1 = 3t + \frac{1}{2}$  дает

$$\int \frac{3t + \frac{1}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2t \cdot dt}{t^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \ln \left(t^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{3}} + C.$$

Итак, ответ:  $\frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$ . То же, разумеется, получится бы и непосредственно по формуле (18), если положить там  $M=3$ ,  $N=-1$ ,  $p=-1$ ,  $q=1$ .

$$5. \int \frac{dx}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1}. \text{ Имеем: } x^2 \pm \sqrt{2}x + 1 = \left(x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}. \text{ Подста-}$$

новка:  $t = x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $dt = dx$ .

$$\int \frac{dx}{x^2 \pm \sqrt{2}x + 1} = \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \\ = \sqrt{2} \cdot \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} \pm 1) + C.$$

Проверить по формуле (18)!

$$6. \int \frac{3x dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}. \text{ Имеем: } x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1, \text{ подставляя } t = \\ = x + 1, x = t - 1, dx = dt, \text{ получим [см. (8)]}$$

$$\int \frac{3(t-1) dt}{(t^2+1)^2} = \frac{3}{2} \int \frac{2t \cdot dt}{(t^2+1)^2} - 3 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{3}{2(t^2+1)} - \frac{3t}{2(t^2+1)} - \\ - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} t + C. \text{ Отв.: } -\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2 + 3x^2 + 4x + 3}{(x^2 + 2x + 2)^2} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

Взять интегралы:

$$7. \int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 5}. \text{ Отв.: } \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{3} + C.$$

$$8. \int \frac{(x+3) dx}{3x^2 + 5}. \text{ Отв.: } \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 5) + \frac{\sqrt{15}}{5} \operatorname{arctg} \left(x \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + C.$$

$$9. \int \frac{(12x+2) dx}{2x^2 - 2x + 5}. \text{ Отв.: } 3 \ln(2x^2 - 2x + 5) + \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{3} + C.$$

В следующем п<sup>o</sup> будут даны исчерпывающие указания относительно разложения произвольной рациональной дроби на простые; но некоторые элементарные случаи могут быть приведены уже здесь.



10.  $\int \frac{-6x^2 + 16x - 7}{(x-1)^3} dx$ . Применяем подстановку  $x-1=t$ ,  $dx=dt$ ; будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{-6x^2 + 16x - 7}{(x-1)^3} &= \frac{-6(t+1)^2 + 16(t+1) - 7}{t^3} = \\ &= \frac{-6t^2 + 4t + 3}{t^3} = -\frac{6}{t} + \frac{4}{t^2} + \frac{3}{t^3}, \quad *) \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \int \frac{-6x^2 + 16x - 7}{(x-1)^3} dx &= \int \left( -\frac{6}{t} + \frac{4}{t^2} + \frac{3}{t^3} \right) dt = \\ &= -6 \ln t - \frac{4}{t} - \frac{3}{2t^2} + C = -6 \ln(x-1) - \frac{4}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} + C. \end{aligned}$$

Взять интегралы:

11.  $\int \frac{x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 11x^2 + 14x - 15}{(x-2)^3} dx$ . Отв.:  $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} - 3 \ln(x-2) + C$ .

12.  $\int \frac{18x^3 + 69x^2 + 92x + 47}{(3x+5)^2} dx$ . Указание. Подстановка  $t=3x+5$ .

Отв.:  $x^2 + x + \frac{2}{3(3x+5)} + \frac{4}{3} \ln(3x+5) + C$ .

Читателю ясно, что подобным образом всегда может быть проинтегрирована рациональная дробь, у которой знаменатель представляет собою *степень линейной функции*.

Коснемся еще случая правильной дроби, имеющей в знаменателе квадратный трехчлен с *вещественными корнями*. Мы уже указывали в п<sup>o</sup> 155 по поводу зад. 15 относящийся сюда прием. Напр.:

13.  $\int \frac{3dx}{2x^2 + 3x - 5} = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}}$ . Здесь квадратный трехчлен в

знаменателе имеет вещественные корни: 1 и  $-\frac{5}{2}$ , следовательно, может быть

представлен в виде:  $(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)$ . Умножим теперь числитель подынтег-

ральной дроби на разность этих множителей:  $\left(x+\frac{5}{2}\right) - (x-1)$ , а знаменатель,

на равное ей число  $\frac{7}{2}$ ; после очевидных упрощений получим:

$$\frac{\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{\left(x+\frac{5}{2}\right) - (x-1)}{\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)} = \frac{3}{7} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+\frac{5}{2}} \right),$$

\*) Подставляя здесь, обратно,  $x-1$  вместо  $t$ , мы получили бы разложение нашей дроби на простые:

$$-\frac{6}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3};$$

но нам не к чему было его выписывать, ибо для интегрирования этих дробей удобно снова вернуться к переменной  $t$ .



так что искомый интеграл, очевидно, равен

$$\frac{3}{7} \left[ \ln(x-1) - \ln\left(x + \frac{5}{2}\right) \right] + C = \frac{3}{7} \ln \frac{x-1}{x + \frac{5}{2}} + C.$$

Любопытно, что тот же прием с успехом может быть применен и в том случае, когда в числителе не постоянная, а линейная функция:

$$14. \int \frac{4x-7}{2x^2+3x-5} dx = \int \frac{2x - \frac{7}{2}}{x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}} dx. \text{ Умножим и здесь числитель}$$

и знаменатель подынтегральной дроби на  $\left(x + \frac{5}{2}\right) - (x-1) = \frac{7}{2}$ ; аналогично прежнему получим:

$$\frac{2x - \frac{7}{2}}{\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-1)} = \frac{2}{7} \left( \frac{2x - \frac{7}{2}}{x-1} - \frac{2x - \frac{7}{2}}{x + \frac{5}{2}} \right)$$

Остается лишь исключить из неправильных дробей в скобках целые части (которые взаимно сократятся!), чтобы прийти к разложению нашей дроби на простые:

$$\frac{4x-7}{2x^2+3x-5} = \frac{2}{7} \left[ \left( 2 - \frac{\frac{3}{2}}{x-1} \right) - \left( 2 - \frac{\frac{7}{2}}{x + \frac{5}{2}} \right) \right] = \frac{1}{x + \frac{5}{2}} - \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{x-1}.$$

Теперь уже ясно, что искомый интеграл равен

$$\ln\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{3}{7} \ln(x-1) + C = \ln \frac{x + \frac{5}{2}}{(x-1)^{\frac{3}{7}}} + C.$$

Взять интегралы:

$$15. \int \frac{5x+8}{x^2+3x+2} dx. \text{ Отв.: } \ln(x+1)^3(x+2)^2 + C.$$

$$16. \int \frac{(x-8)dx}{x^2-x-2}. \text{ Отв.: } \ln \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2} + C.$$

$$17. \int \frac{(x-7)dx}{2x^2-3x-2}. \text{ Отв.: } \ln \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{x-2} + C.$$

Заметим, в заключение, что и в более сложных случаях иногда разложение дроби на простые достигается путем незамысловатых преобразований. Напр.:

$$18. \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} &= \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2) - x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$



$$\text{Отв.: } -\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x + C \text{ [см. (8)].}$$

162. Разложение правильных дробей на простые. Метод неопределенных коэффициентов. \* После того, как мы научились интегрировать *простые дроби*, мы вновь возвращаемся к общему случаю *правильной дроби* (11). В *высшей алгебре* доказывается такое общее утверждение: *каждая правильная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простых дробей* [147].

Таким образом, интегрирование любой рациональной дроби приводится к интегрированию полинома и ряда простых дробей! На этом основании можно утверждать, что *интеграл от любой рациональной функции выражается через рациональные же функции, логарифмы и обратные круговые (арктангенсы)*.

Для выполнения интегрирования на деле необходимо однако научиться фактически разлагать данную правильную дробь на простые. С этой целью мы дадим более точные указания относительно числа и вида тех простых дробей, на которые разлагается данная правильная рациональная дробь (11).

Подобно тому, как каждое целое число может быть разложено на простые множители, так может быть представлен в виде произведения „простых“ множителей и каждый полином  $P(x)$  степени  $n$  с вещественными коэффициентами. Этими множителями являются либо линейные функции вида  $x - a$  (где  $a$  — вещественное число), либо квадратичные функции вида  $x^2 + px + q$ , с вещественными коэффициентами, но с *мнимыми корнями*. Понятно, что если бы корни такого трехчлена были вещественными, напр.,  $a$  и  $b$ , то его можно было бы представить в виде произведения более простых множителей:  $(x - a)(x - b)$ ; но раз корни его мнимые, то разложить его на *вещественные* множители уже более нельзя. Легко проверить, напр., что

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1), \quad x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1), \quad x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1),$$

причем все множители удовлетворяют поставленным условиям.

Некоторые из множителей, на которые распадается данный полином, могут входить в его разложение несколько раз; собирая такие равные множители (если они есть) в степени, можно *схематически* представить разложение любого полинома  $P(x)$  в следующем виде:

$$P(x) = a_0 (x - a)^k \dots (x^2 + px + q)^r \dots \quad (19)$$

[см. 145, (19)], где  $a_0$  — коэффициент при наивысшей степени  $x$  в полиноме; конечно, в частных случаях в разложении могут встретиться и одни лишь линейные множители, либо одни квадратичные. *Впредь мы будем предполагать, что знаменатель  $P(x)$  рассматриваемой дроби (11) уже разложен на линейные и квадратичные множители*, как это сейчас было разъяснено.

Разложение (19) знаменателя  $P(x)$  на множители теснейшим образом связано с разложением самой дроби на простые дроби. Именно, 1) каждому *неповторяющемуся* множителю  $x - a$  отвечает простая дробь вида

$$\frac{A}{x - a};$$

2) *неповторяющемуся* множителю  $x^2 + px + q$  отвечает дробь:

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q};$$

\* Правильное понимание этого  $p^0$  требует знакомства с главой IX. Однако изложение ведется так, чтобы и читатель, пропустивший вовсе названную главу, все же мог составить себе представление о вещах, достаточное для решения задач.



3) множителю  $x - a$ , входящему с показателем  $k$ , отвечают  $k$  простых дробей:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k};$$

наконец, 4) множителю  $x^2 + px + q$ , повторяющемуся  $r$  раз, отвечают точно также  $r$  дробей:

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_rx + N_r}{(x^2 + px + q)^r}.$$

Таким образом, зная разложение (19), мы тем самым знаем уже, из какого вида дробей составляется искомое разложение данной дроби (11) на простые. Точнее говоря, мы знаем знаменатели всех этих простых дробей, и остается разыскать лишь числители их, т. е. коэффициенты  $A$ ,  $M$ ,  $N$  и т. п. Как это делается мы разъясним на примерах. \*\*

1°. Пусть дана дробь:

$$\frac{2x^3 - 3x + 1}{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x} = \frac{2x^3 - 3x + 1}{x(x+1)(x-2)(x-3)}$$

и требуется разложить ее на простые [ср. 147]. Так как множители знаменателя все линейные и различны, то [см. 1)] разложение будет иметь вид:

$$\frac{2x^3 - 3x + 1}{x(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x-3},$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  нам пока неизвестны и их численные значения подлежат определению. Умножая обе части этого тождества на общий знаменатель дробей, т. е. на  $x(x+1)(x-2)(x-3)$ , мы получим новое тождество:

$$2x^3 - 3x + 1 = A(x+1)(x-2)(x-3) + Bx(x-2)(x-3) + Cx(x+1)(x-3) + Dx(x+1)(x-2) \quad (20)$$

или

$$2x^3 - 3x + 1 = A(x^3 - 4x^2 + x + 6) + B(x^3 - 5x^2 + 6x) + C(x^3 - 2x^2 - 3x) + D(x^3 - x^2 - 2x)$$

или, наконец, если раскрыть скобки и собрать члены, содержащие одинаковые степени  $x$ ,

$$2x^3 - 3x + 1 = (A + B + C + D)x^3 - (4A + 5B + 2C + D)x^2 + (A + 6B - 3C - 2D)x + 6A.$$

Слева и справа мы имеем здесь тождественные полиномы третьей степени, коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  у них должны быть равны; напр., при  $x^3$  слева коэффициент 2, следовательно, и коэффициент  $A + B + C + D$  при  $x^3$  справа должен быть равен 2; слева члена с  $x^2$  вовсе нет, следовательно, и справа коэффициент  $-(4A + 5B + 2C + D)$  должен быть нулем, и т. д. Запишем это:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + B + C + D = 2, \\ x^2 & 4A + 5B + 2C + D = 0, \\ x^1 & A + 6B - 3C - 2D = -3, \\ x^0 & 6A = 1. \end{array}$$

\* Читателю ясно, что если сложить все указанные простые дроби, построенные в соответствии с разложением (19), то, действительно, получится дробь со знаменателем  $P(x)$  (который и будет „общим знаменателем“ всех названных дробей).

\*\* Мы видели на примере 18 предыдущего п°, что иногда разложение дроби на простые достигается непосредственным ее преобразованием (подобные примеры встретятся читателю и в дальнейшем). В таких случаях, разумеется, излагаемые ниже методы становятся ненужными.



Таким путем мы получаем систему уравнений первой степени, из которой и находим неизвестные коэффициенты:  $A = \frac{1}{6}$ ,  $B = -\frac{1}{6}$ ,  $C = -\frac{11}{6}$ ,  $D = \frac{23}{6}$ , так что искомое разложение будет:

$$\frac{2x^3 - 3x + 1}{x(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{23}{6} \cdot \frac{1}{x-3}$$

[в полном согласии с 147].

Заметим, что в рассмотренном простом случае можно было бы определить коэффициенты  $A, B, C, D$  и быстрее. Положим в тождестве (20)  $x=0$ : тогда все слагаемые справа, кроме первого, уничтожатся и мы сразу получим, что  $1=6A$ , откуда  $A=\frac{1}{6}$ . Аналогично, полагая поочередно  $x=-1; 2; 3$ , найдем:  $2=-12B$ ,  $11=-6C$ ,  $46=12D$ , откуда  $B=-\frac{1}{6}$ ,  $C=-\frac{11}{6}$ ,  $D=\frac{23}{6}$ .

Изложенный на примере метод носит название *метода неопределенных коэффициентов*; он находит себе применение в различных отделах математического анализа. Суть его в том, что если мы знаем форму некоторого разложения, но не знаем его коэффициентов, то сначала пишем вместо них буквы („неопределенные коэффициенты“), а затем из условий вопроса стараемся установить их численные значения. \*

2°. Рассмотрим теперь дробь:

$$\frac{x+3}{x^4-1} = \frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

На основании сказанного в 1) и 2) напишем сначала ее разложение с *неопределенными коэффициентами*:

$$\frac{x+3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Умножив на общий знаменатель дробей  $x^4-1$ , получим:

$$\begin{aligned} x+3 &= A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1) \quad (21) \\ &= (A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (A+B-C)x + (A-B-D). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в обеих частях, придем к системе уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+B+C=0, \\ x^2 & A-B+D=0, \\ x^1 & A+B-C=1, \\ x^0 & A-B-D=3. \end{array}$$

Читателя может удивить несоответствие степеней слева и справа: мы и восстанавливаем это соответствие, полагая коэффициенты при  $x^3$  и  $x^2$  справа равными нулю. Из написанной системы легко находим:  $A=1$ ,  $B=-\frac{1}{2}$ ,  $C=-\frac{1}{2}$ ,  $D=-\frac{3}{2}$  [что согласуется с полученными в 147 значениями]. Итак:

$$\frac{x+3}{x^4-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x+3}{x^2+1}$$

И здесь коэффициенты  $A$  и  $B$  можно получить непосредственно, полагая в тождестве (21)  $x=1$  или  $-1$ ; будем иметь:  $4=4A$ ,  $2=-4B$ , откуда, как и выше,  $A=1$ ,  $B=-\frac{1}{2}$ . Подобный прием, как видим, с удобством применяется к определению коэффициентов в простых дробях вида  $\frac{A}{x-a}$ , ибо справа все

\* В сущности этим именно методом мы в 144 уже определяли коэффициенты  $B_1, \dots, B_n$  формулы Тэйлора.



члены, кроме одного (и именно содержащего коэффициент  $A$ ), имеют множителем  $x - a$  и обращаются в нуль при  $x = a$ .

3°. Пусть дана дробь

$$\frac{8x^2 - 33x + 30}{(x-2)^3(x+2)};$$

согласно 3), множителю  $(x-2)^3$  отвечает три простые дроби, неповторяющемуся же множителю  $x+2$  — одна дробь. Напишем разложение с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{8x^2 - 33x + 30}{(x-2)^3(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{x+2}$$

и поступим дальше, как и только что. Умножив обе части на общий знаменатель, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  слева и справа:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + D = 0; \\ x^2 & -2A + B - 6D = 8; \\ x & -4A + C + 12D = -33; \\ x^0 & 8A - 4B + 2C - 8D = 30; \end{array}$$

отсюда и определяем неизвестные коэффициенты:

$$A = 2, B = 0, C = -1, D = -2.$$

**163. Примеры и задачи. 1.** Найти интеграл от дроби

$$F = \frac{2x^4 - x^3 + x^2 + 6x - 4}{x^3 + 1}.$$

*Решение.* Деля числитель на знаменатель, получим в частном  $2x - 1$ , а в остатке  $x^2 + 4x - 3$ , так что

$$F = 2x - 1 + \frac{x^2 + 4x - 3}{x^3 + 1}.$$

Далее,  $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ , причем последний трехчлен имеет мнимые корни; поэтому

$$\frac{x^2 + 4x - 3}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.$$

Имеем:

$$x^2 + 4x - 3 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1).$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + B = 1, \\ x & -A + B + C = 4, \\ 1 & A + C = -3. \end{array}$$

Отсюда:  $A = -2, B = 3, C = -1$ . Окончательно,

$$F = 2x - 1 - \frac{2}{x + 1} + \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1},$$

так что [см. зад. 4, 158]:

$$\int \frac{2x^4 - x^3 + x^2 + 6x - 4}{x^3 + 1} dx = x^2 - x - 2 \ln(x + 1) + \frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C = x^2 - x + \ln \frac{(x^2 - x + 1)^{\frac{3}{2}}}{(x + 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C.$$



2. Проинтегрировать дробь

$$F = \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}.$$

Решение. Имеем:

$$F = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{8}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{x + \frac{3}{2}} + \frac{C}{x - \frac{5}{2}}.$$

Коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  определим, исходя из тождества

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{8} = A\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) + B\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) + C\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right),$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , либо же, что проще, полагая в этом тождестве поочередно  $x = \frac{1}{2}$ ;  $-\frac{3}{2}$ ;  $\frac{5}{2}$ ; мы получим:  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = -\frac{1}{8}$ ,  $C = \frac{3}{8}$ , так что

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{2}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x + \frac{3}{2}} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x - \frac{5}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x+3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x-5}. \end{aligned}$$

Можно было бы и сразу искать разложение в виде:  $\left[ \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{2x+3} + \frac{c}{2x-5} \right]$

$$\begin{aligned} \text{Отв. } \int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} dx &= \frac{1}{4} \ln(2x-1) - \frac{1}{8} \ln(2x+3) + \\ &+ \frac{3}{8} \ln(2x-5) + C = \frac{1}{8} \ln \frac{(2x-1)^2 (2x-5)^2}{2x+3} + C. \end{aligned}$$

3. Найти интеграл от дроби:

$$F = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)}.$$

Указание. Искать разложение ее в виде:

$$F = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Отв.  $A=0$ ,  $B=-1$ ,  $C=0$ ,  $D=2$ ; интеграл равен:

$$\frac{1}{x+1} + 2 \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

4. То же сделать с дробью:

$$F = \frac{1}{x^2+1}.$$



Решение. Мы упоминали уже, что

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Ищем разложение в виде:

$$F = \frac{Ax + B}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Система уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + C = 0, \\ x^2 & -\sqrt{2}A + B + \sqrt{2}C + D = 0, \\ x & A - \sqrt{2}B + C + \sqrt{2}D = 0, \\ 1 & B + D = 1. \end{array}$$

$$\text{Отв. } A = \frac{1}{2\sqrt{2}}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, D = \frac{1}{2};$$

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) + C.$$

5. Найти интеграл от дроби:

$$F = \frac{-2x^3 + 26x^2 + 42x - 96}{(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)}.$$

$$\text{Отв. } F = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3} - \frac{4}{x+4}, \text{ интеграл равен}$$

$$\ln \frac{(x-1)(x-3)^3}{(x+2)^2(x+4)^4} + C.$$

6. Найти  $\int \frac{2x^3 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx$ .

Решение. Имеем, в силу 1) и 4):

$$\frac{2x^3 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Система уравнений:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + B = 0, \\ x^2 & -2B + C = 0, \\ x^1 & 2A + B - 2C + D = 2, \\ x^0 & -2B + C - 2D + E = 2, \\ & A - 2C - 2E = 13; \end{array} \quad \begin{array}{l} A = 1, B = -1, C = -2, \\ D = -3, E = -4. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx &= \int \left[ \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3-4x}{x^2+1} + \ln \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} - 4 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

**164. Интегрирование некоторых иррациональных выражений**  
Мы ограничимся рассмотрением таких выражений, в которых единствен-



ной иррациональностью является корень квадратный из квадратного трехчлена (или двучлена)  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ; иными словами, мы займемся разысканием интегралов вида:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \quad (a \geq 0) \quad (22)$$

где  $R$  есть знак рациональной функции от  $x$  и от радикала, составленной из своих двух аргументов (и из постоянных чисел) с помощью четырех арифметических действий.

Сначала мы предположим, что подкоренное выражение сводится к двучлену  $\alpha x^2 + \beta$  (причем  $\alpha$  и  $\beta$  отличны от нуля), и фактически вычислим ряд простейших (и наичаще встречающихся) интегралов, содержащих  $\sqrt{\alpha x^2 + \beta}$ \*. Отправным пунктом нам послужат интегралы:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C, \quad (23)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad (23a)$$

Оба интеграла уже были вычислены [157, зад. 25 и 32]; впрочем их легко проверить дифференцированием! Обращаясь к интегралу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}},$$

мы должны будем, при его вычислении, различать два случая:  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$ .

Пусть  $\alpha > 0$ . Тогда, вынеся  $\sqrt{\alpha}$  из-под радикала:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}}},$$

сможем воспользоваться формулой (23), полагая  $\beta/\alpha = \pm a^2$ . Мы найдем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \left( x + \sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}} \right) + C.$$

Можно еще умножить аргумент  $\ln$  на  $\sqrt{\alpha}$  или на  $\alpha$ , что введет лишь дополнительное слагаемое  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \sqrt{\alpha}$  или  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln \alpha$  и, следовательно, отра-

\* Напомним, что некоторые такие интегралы уже вычислены элементарно в 157, зад. 20—23.



зится лишь на  $C$ . Окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln (\sqrt{\alpha} x + \sqrt{\alpha x^2 + \beta}) + C' \\ (\alpha > 0) & \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ln (\alpha x + \sqrt{\alpha(\alpha x^2 + \beta)}) + C'. \end{aligned} \right\} (24)$$

Если же  $\alpha < 0$ , так что  $\alpha = -|\alpha|$ , то переписываем радикал в следующем виде:

$$\sqrt{\beta - |\alpha| x^2}.$$

Для того, чтобы корень имел вещественное значение, необходимо предположить в рассматриваемом случае, что  $\beta > 0$  (иначе подкоренное выражение было бы всегда отрицательным). Вынося  $\sqrt{|\alpha|}$  из-под радикала и полагая  $\frac{\beta}{|\alpha|} = a^2$ , можем воспользоваться формулой (23 a), что даст нам:

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} &= \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\beta}{|\alpha|} - x^2}} \\ (\alpha < 0) & \\ &= \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} x \right) + C. \end{aligned} \right\} (24 a)$$

[Если даны численные значения  $\alpha$  и  $\beta$ , то по формулам (24) и (24a) нетрудно сразу написать соответствующие значения интегралов; например:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln (2x + \sqrt{2(2x^2 + 3)}) + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 1}} = \frac{1}{2} \ln (4x + \sqrt{4(4x^2 - 1)}) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln (2x + \sqrt{4x^2 - 1}) + C', \text{ где } C' = C + \frac{1}{2} \ln 2;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x \sqrt{\frac{2}{5}} + C;$$

это относится и к последующим интегралам, вычисленным в общем виде.]

Перейдем теперь к интегралу  $\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx$ , не различая пока слу-



чаев  $\alpha \leq 0$ . Интегрируем по частям, по формуле (7), принимая  $\sqrt{\alpha x^2 + \beta}$  за  $u$ , а  $dx$  за  $dv$ ; будем иметь последовательно:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx &= x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int x d \sqrt{\alpha x^2 + \beta} = \\ &= x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \frac{\alpha x^2}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx = x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \\ &- \int \frac{(\alpha x^2 + \beta) - \beta}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx = x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx + \\ &+ \beta \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}. \end{aligned}$$

В правой части у нас снова получился искомый интеграл; перенося его налево и разделяя все равенство на 2, получим:

$$\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \frac{\beta}{2} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}. \quad (25)$$

Таким образом, искомый интеграл приводится к уже найденному. Воспользовавшись формулами (24) и (24a), соответственно рассматриваемому случаю, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx &= \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \ln(\alpha x + \sqrt{\alpha(\alpha x^2 + \beta)}) + C = \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} \ln(\sqrt{\alpha} x + \sqrt{\alpha x^2 + \beta}) + C' \quad (\alpha > 0), \end{aligned} \right\} (26)$$

$$\left. \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \frac{\beta}{2\sqrt{|\alpha|}} \arcsin x \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} + C \right\} (26a) \\ (\alpha < 0).$$

В частности, из (19a) получается и ранее выведенный другим путем интеграл  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$  [см. (3), 156]; стоит лишь положить  $\alpha = -1$ ,  $\beta = a^2$ .

К интегралам (24) и (26) [соответственно, (24a) и (26a)] приводятся многие другие интегралы, содержащие  $\sqrt{\alpha x^2 + \beta}$ .

*Примеры и задачи.* 1. Интеграл  $\int x^2 \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx$  берется, аналогично предшествующему, с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sqrt{\alpha x^2 + \beta} dx &= \frac{1}{3\alpha} \int x \cdot d(\alpha x^2 + \beta)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\alpha} x \cdot (\alpha x^2 + \beta)^{\frac{3}{2}} - \\ &- \frac{1}{3\alpha} \int (\alpha x^2 + \beta)^{\frac{3}{2}} dx; \end{aligned}$$



представив  $(ax^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}$  в виде  $ax^2\sqrt{ax^2 + \beta} + \beta\sqrt{ax^2 + \beta}$ , мы разобьем последний интеграл на два, из которых первый лишь множителем отличается от искомого:

$$-\frac{1}{3} \int x^2 \sqrt{ax^2 + \beta} dx - \frac{\beta}{3\alpha} \int \sqrt{ax^2 + \beta} dx;$$

перенося его налево, получим (по делении на  $\frac{7}{3}$ ):

$$\int x^2 \cdot \sqrt{ax^2 + \beta} dx = \frac{1}{4\alpha} x (ax + \beta)^{\frac{3}{2}} - \frac{\beta}{4\alpha} \int \sqrt{ax^2 + \beta} dx;$$

наконец, подставим вместо последнего интеграла его выражение (опять, смотря по случаю) (26) или (26a):

$$\int x^2 \cdot \sqrt{ax^2 + \beta} dx = \frac{x}{8\alpha} (2ax^2 + \beta) \sqrt{ax^2 + \beta} - \frac{\beta^2}{8\alpha\sqrt{\alpha}} \ln(\sqrt{\alpha}x + \sqrt{ax^2 + \beta}) + C, \quad (\alpha > 0)$$

или

$$\int x^2 \cdot \sqrt{ax^2 + \beta} dx = \frac{x}{8\alpha} (2ax^2 + \beta) \sqrt{ax^2 + \beta} + \frac{\beta^2}{8|\alpha|\sqrt{|\alpha|}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} x\right) + C, \quad (\alpha < 0)$$

Иной раз бывает полезна подстановка  $x = \frac{1}{t}$ ,  $dx = -\frac{dt}{t^2}$ . Напр.:

$$2. \int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + \beta}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}};$$

дальнейшее вычисление уже зависит от знака  $\beta$  (которое обменялось местами с  $\alpha$ ), и по формуле (24) или (24a) находим:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln \frac{x}{\sqrt{\beta} + \sqrt{ax^2 + \beta}} + C \quad (\beta > 0),$$

или

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2 + \beta}} = -\frac{1}{\sqrt{|\beta|}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{|\beta|}{\alpha}} \cdot \frac{1}{x}\right) + C \quad (\beta < 0)$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2 + \beta}} = -\frac{\sqrt{ax^2 + \beta}}{\beta x} + C. \text{ [Та же подстановка приводит к зад.}$$

20, 157.]

$$4. \int \frac{dx}{(ax^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\beta\sqrt{ax^2 + \beta}} + C. \text{ [Та же подстановка; см. зад. 22, 157.]}$$

$$5. \int \frac{\sqrt{ax^2 + \beta}}{x^3} dx. \text{ [Та же подстановка приводит к интегралу (26) или (26a);}$$

результат зависит от знака  $\beta$ .]

Наконец, во многих случаях простые алгебраические преобразования подынтегрального выражения сразу приводят интеграл к вычисленным ранее. Напр.:

$$6. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2 + \beta}} = \frac{1}{\alpha} \int \frac{(ax^2 + \beta) - \beta}{\sqrt{ax^2 + \beta}} dx = \frac{1}{\alpha} \int \sqrt{ax^2 + \beta} dx - \frac{\beta}{\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + \beta}}.$$



Если воспользоваться формулой (25), то полученное выражение переписывается так:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2 + \beta}} = \frac{1}{2a} x \sqrt{ax^2 + \beta} - \frac{\beta}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + \beta}}.$$

Теперь остается лишь, смотря по случаю, вместо последнего интеграла подставить его значение (24) или (24a), чтобы получить:

$$(a > 0) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2 + \beta}} = \frac{x}{2a} \sqrt{ax^2 + \beta} - \frac{\beta}{2a\sqrt{a}} \ln(\sqrt{ax} + \sqrt{ax^2 + \beta}) + C$$

или

$$(a < 0) \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2 + \beta}} = \frac{x}{2a} \sqrt{ax^2 + \beta} + \frac{\beta}{2|a|\sqrt{|a|}} \arcsin \left( \sqrt{\frac{|a|}{\beta}} x \right) + C.$$

Столь же просто получаются интегралы:

$$7. \int \frac{\sqrt{ax^2 + \beta}}{x} dx = \int \frac{ax^2 + \beta}{x\sqrt{ax^2 + \beta}} dx = a \int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + \beta}} + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + \beta}}$$

[см. зад. 20, 157 и зад. 2].

$$8. \int \frac{\sqrt{ax^2 + \beta}}{x^2} dx \text{ [аналогично приводится к форм. (24) или (24a) и зад. 3.]}$$

$$9. \int \frac{x^2 dx}{(ax^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a} \int \frac{(ax^2 + \beta) - \beta}{(ax^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + \beta}} - \frac{\beta}{a} \int \frac{dx}{(ax^2 + \beta)^{\frac{3}{2}}}$$

(24) или (24a), зад. 4.]

$$10. \int (ax^2 + \beta)^{\frac{3}{2}} dx = a \int x^2 \sqrt{ax^2 + \beta} dx + \beta \int \sqrt{ax^2 + \beta} dx \text{ [зад. 1, (19) или}$$

19a)].

В том случае, если под радикалом стоит полный квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$ , часто выгодно линейной подстановкой свести его к двучлену. Суть дела — в выделении полного квадрата, причем удобно предварительно умножить трехчлен на  $4a$ :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \frac{1}{4a} (4a^2x^2 + 4abx + 4ac) = \\ &= \frac{1}{4a} \left[ (2ax + b)^2 + (4ac - b^2) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

а дальше полагаем  $2ax + b = t$  и, в зависимости от того, будет ли  $a > 0$  или  $< 0$ , получим:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{t^2 + (4ac - b^2)} \quad (a > 0)$$

или

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2\sqrt{|a|}} \sqrt{(b^2 - 4ac) - t^2}. \quad (a < 0)$$

Напр., основные интегралы типа (24), (24a) в общем случае переписутся так:

$$\begin{aligned} 11. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)}) + C = \\ (a > 0) \quad &= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left( ax + \frac{b}{2} + \sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right) + C; \end{aligned}$$



$$(a < 0) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

165. Эйлеровы подстановки. Хотя вычисленные до сих пор интегралы типа (22) примерно покрывают потребности практики, но полезно все же составить себе представление об *общих методах* вычисления произвольных интегралов этого типа. Мы изложим один из них, состоящий в применении так называемых *подстановок Эйлера* (Euler). При этом приходится различать два случая:  $a > 0$  и  $a < 0$ . Остановимся на первом предположении, но начнем с примера.

Пусть требуется вычислить интеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Сделаем подстановку:  $\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x$ ; выгодность ее тотчас же обнаружится. Возводя в квадрат, получим:  $-x + 1 = t^2 - 2tx$  ( $x^2$  уничтожилось!), так что  $x$  выражается рационально через  $t$ :

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1};$$

тогда, разумеется, и радикал выразится через  $t$  рационально:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = t - x = t - \frac{t^2 - 1}{2t - 1} = \frac{t^2 - t + 1}{2t - 1};$$

наконец,

$$dx = 2 \frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2} dt.$$

Подставляя все это, приведем подынтегральное выражение к рациональному виду:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{2dt}{t^2 - 1} = \ln \frac{t - 1}{t + 1} + C = \ln \frac{x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x + 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}} + C.$$

Аналогично этому и в общем случае, при вычислении интеграла типа (22), если  $a > 0$ , прибегают к подстановке:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}$$

(1-я подстановка Эйлера). Возводя это равенство в квадрат, найдем (по уничтожении членов  $ax^2$  в обеих частях!):  $bx + c = t^2 - 2\sqrt{at}x$ , так что

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b};$$

тогда:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a} \cdot \frac{t^2 - c}{2\sqrt{at} + b} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{at} + b}$$

$$dx = 2 \frac{\sqrt{at^2 + bt + c\sqrt{a}}}{(2\sqrt{at} + b)^2} dt.$$

Все остроумие Эйлеровой подстановки именно в том, что для определения  $x$  получается уравнение *первой* степени, так что  $x$  выражается *рационально* через  $t$ , а одновременно с ним — и радикал, и дифференциал также. Если полученные



выражения подставить в (15), то дело сведется (как и в примере) к интегрированию рациональной функции, которое выполнять умеем. В результате нужно будет, конечно, вместо  $t$ , обратно подставить  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ .

Переходя к случаю  $a < 0$ , рассмотрим сначала такой пример:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}.$$

Заметив, что  $1-x^2 = (1+x)(1-x)$ , положим

$$\sqrt{1-x^2} = (1-x) \cdot t,$$

где  $t$  — новая переменная. Возведя в квадрат, по сокращении на  $(1-x)$ , получим:

$$1+x = (1-x) \cdot t^2, \text{ откуда } x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad 1-x = \frac{2}{t^2+1}$$

и, далее,

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t dt}{(t^2+1)^2}.$$

Подставляя, после упрощений, приведем интеграл к виду:

$$\int \frac{-4t}{(t-1)^2(t^2+1)} dt.$$

Разлагаем подынтегральную рациональную дробь на простые:

$$\frac{4t}{(t-1)^2(t^2+1)} = 2 \cdot \frac{(-2t+t^2+1)-(t^2+1)}{(t-1)^2(t^2+1)} = -\frac{2}{(t-1)^2} + \frac{2}{t^2+1},$$

так что интеграл равен:  $\frac{2}{t-1} + 2 \operatorname{arctg} t + C$ . Остается вернуться к  $x$ , полагая (см. подстановку!)

$$t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

После преобразований, найдем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C. \quad (28)$$

Пусть имеем теперь общий случай. Заметим, что при  $a < 0$ , необходимо предположить еще, что выполняется неравенство:  $b^2 - 4ac > 0$ ; действительно, при обратном допущении было бы  $4ac - b^2 > 0$ , а тогда, как видно из разложения (27) (ведь  $a < 0$ !), трехчлен  $ax^2 + bx + c$  имел бы всегда отрицательные значения, так что корень был бы мнимым. Но условие:  $b^2 - 4ac > 0$  свидетельствует о том, что уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два различных вещественных корня  $x_1$  и  $x_2$ , а тогда наш трехчлен разлагается, как известно, на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2),$$

как и в рассмотренном частном примере. Положим теперь:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x_1-x)t^*$$

\* С равным успехом можно было бы положить

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x-x_1)t;$$

это отразилось бы только на знаке новой переменной  $t$ .



(2-я подстановка Эйлера). Отсюда, как и только что,

$$a(x - x_2) = (x - x_1)t^2, \text{ так что } x = \frac{x_1 t^2 - a x_2}{t^2 - a},$$

т. е. выражается через  $t$  рационально, и т. д. Заключение то же, что и при первой подстановке.

Таким образом, две Эйлеровы подстановки достаточны для того, чтобы любой интеграл вида (22) свести к интегралу от рациональной функции. Вообще, нужно сказать, интегрирование не-рационального дифференциала чаще всего пытаются произвести путем сведения его к рациональному дифференциалу — в этом заключается „принцип рационализации“. Эйлеровы подстановки осуществляют этот принцип в отношении интегралов вида (22). Из сказанного, между прочим, явствует, что для представления этих интегралов, нужны, кроме функций, через которые выражаются интегралы от рациональных дифференциалов, еще лишь квадратные корни.

Теоретическая ценность Эйлеровых подстановок очевидна; однако следует отметить, что на практике они нередко приводят к сложным выкладкам. Существуют еще другие приемы вычисления интегралов рассматриваемого типа, но на них мы не можем останавливаться, тем более, что интегралы, наиболее встречающиеся на практике, уже вычислены выше.

Попробуем, в заключение, вновь вычислить фундаментальные интегралы (22) и (22а) с помощью подстановок Эйлера. Для интеграла (22) получается особенно просто; при  $t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2}$  (первая подстановка), имеем:

$$x = \frac{t^2 \pm a^2}{2t}, \quad \sqrt{x^2 \pm a^2} = t - x = \frac{t^2 \pm a^2}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 \pm a^2}{2t^2} dt,$$

так что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

в полном согласии с формулой (22).

В случае же интеграла (22а), воспользуемся второй подстановкой:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{(a+x)(a-x)} = (a-x)t, \quad x = a \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

$$a - x = \frac{2a}{t^2 + 1}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4at}{(t^2 + 1)^2} dt,$$

так что

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{2dt}{t^2 + 1} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

Читателя наверное удивит это „несоответствие“ результата с элементарной формулой (22а). Однако, на деле никакого несоответствия тут нет. Действительно, из легко доказываемого тождества:

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+m}{1-m}} = \operatorname{arcsin} m + \frac{\pi}{2}^*, \quad (|m| < 1)$$

\* Если обозначить левую часть этого равенства через  $\varphi$ , то [49]  $0 < \varphi < \pi$  и  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+m}{1-m}}$ ; вычислим теперь  $\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ :

$$\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \varphi = \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + 1} = \frac{\frac{1+m}{1-m} - 1}{\frac{1+m}{1-m} + 1} = m.$$

Так как, к тому же,  $-\frac{\pi}{2} < \varphi - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ , то [49]  $\varphi - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arcsin} m$ ,  $\varphi = \operatorname{arcsin} m + \frac{\pi}{2}$ , что и доказывает равенство в тексте



если положить в нем  $m = \frac{x}{a}$ , следует, что

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \operatorname{arcsin} x + \frac{\pi}{2};$$

таким образом, две полученные первообразные функции разнятся лишь на постоянную, как и должно быть. Написанное тождество вообще следует иметь в виду при сравнении результатов интегрирования с помощью второй Эйлеровой подстановки или путем непосредственного использования формулы (22 a). Напр., найденное выше выражение (28) для интеграла  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$  можно переписать

и в виде:  $\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} + \operatorname{arcsin} x + C'$  (если включить  $\frac{\pi}{2}$  в новую постоянную  $C'$ ).

Мы пользуемся этим примером, чтобы обратить внимание читателя на то, что один и тот же интеграл иной раз представляется в различных и, на первый взгляд, весьма несходных формах; тщательным исследованием всегда можно установить и непосредственно, что одна приводится к другой.

**166. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений.** Займемся вычислением интегралов от выражений, составленных из  $\sin x$  и  $\cos x$  (а также из постоянных чисел) с помощью четырех арифметических действий, короче говоря — интегралов вида:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \quad (29)$$

где  $R$  означает рациональную функцию от двух аргументов. Для этой цели мы укажем несколько подстановок.

1°. Вспомним, прежде всего, что в п° 157, в связи с задачами 4 — 6, нами были сделаны указания относительно интегрирования выражений вида:

$$g(\sin x) \cdot \cos x dx \text{ или } g(\cos x) \cdot \sin x dx,$$

если функция  $g$  — удобна для интегрирования; именно, в первом случае рекомендовалась подстановка  $t = \sin x$ , а во втором — подстановка  $t = \cos x$ .

Для того, чтобы применить эти указания к интегралу вида (29), нужно попытаться выделить из подынтегрального выражения, скажем, множитель  $\cos x$ ; если оставшееся после этого выражение окажется содержащим, кроме  $\sin x$ , еще лишь четные степени  $\cos x$ , то пред нами будет как раз указанный случай. Действительно, так как  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , то все четные степени  $\cos x$  могут быть рационально выражены через  $\sin x$ :

$$\cos^{2m} x = (\cos^2 x)^m = (1 - \sin^2 x)^m, \quad (m - \text{целое})$$

и, подставив эти выражения, получим в результате, что

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x) \cdot \cos x, \quad (30)$$

где и  $R_1$  — рациональная функция. Остается произвести подстановку:  $t = \sin x$ , чтобы свести дело к интегрированию рационального дифференциала.

Существует признак, по которому можно наперед установить, достигнет ли цели такая подстановка. Допустим, что равенство (30) выполняется, и заменим в нем  $\cos x$  на  $-\cos x$ ; тогда, очевидно,

$R(\sin x, -\cos x) = R_1(\sin x) \cdot (-\cos x) = -R_1(\sin x) \cdot \cos x = -R(\sin x, \cos x)$ , т. е. при изменении знака  $\cos x$  выражение  $R(\sin x, \cos x)$  должно также лишь изменить знак. Обратно, если этот признак имеет место, то, как можно показать, выполняется и равенство (30).

Читателю ясно, что все сказанное остается в силе, если обменять  $\sin x$  и  $\cos x$  ролями.



Примером может служить любой интеграл вида:

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx, \quad (31)$$

где  $m$  и  $n$  — любые целые показатели, из коих хоть один будет нечетным. Пусть, скажем,  $n = 2k + 1$  ( $k$  — целое); тогда сразу видно, что изменение знака  $\cos x$  повлечет за собой изменение знака всего выражения, а это свидетельствует о целесообразности подстановки  $t = \sin x$ . Действительно, выделяя множитель  $\cos x$ , имеем:

$$\sin^m x \cdot \cos^{2k+1} x = \sin^m x \cdot (\cos^2 x)^k \cdot \cos x = \sin^m x \cdot (1 - \sin^2 x)^k \cdot \cos x,$$

так что, полагая  $\sin x = t$ , сведем интеграл (31) к интегралу от рациональной функции:

$$\int t^m (1 - t^2)^k dt.$$

Напр., интеграл  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$  приведет к указанной подстановкой к интегралу  $\int t^2 (1 - t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C$  и, следовательно, равен  $\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$ .

Аналогично (чтобы дать более сложный пример), в случае интеграла

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx,$$

представим подынтегральную функцию в виде:

$$\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} = \frac{\cos^4 x}{(\sin^2 x)^2} \cdot \sin x = \frac{\cos^4 x}{(1 - \cos^2 x)^2} \cdot \sin x;$$

если положить теперь  $\cos x = t$ ,  $-\sin x dx = dt$ , то наш интеграл преобразуется к интегралу

$$\int \frac{-t^4}{(1-t^2)^2} dt.$$

Новое подынтегральное выражение, по выделении целой части и разложении правильно дробной части на простые дроби, переписывается так:

$$\begin{aligned} \frac{-t^4}{(1-t^2)^2} &= -1 + \frac{1-2t^2}{(t-1)^2(t+1)^2} = \\ &= -1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1+t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(t+1)^2}; \end{aligned}$$

поэтому

$$\int \frac{-t^4}{(1-t^2)^2} dt = -t + \frac{3}{4} \ln \frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2-1} + C. *$$

\* Мы не взяли дроби  $\frac{1}{1-t}$  в виде  $-\frac{1}{t-1}$ , ибо не хотели вводить заведомо отрицательный знаменатель (ведь  $t = \cos x < 1$ ); интеграл от дроби

$$\frac{1}{1-t} = -\frac{(-1)}{1-t}$$

равен  $-\ln(1-t)$ .

Эта предосторожность, впрочем, не имеет особого значения в виду того, что выражение под знаком  $\ln$  всегда следует брать по абсолютной величине [см. 154, 4 а].



Подставляя  $\cos x$ , вместо  $t$ , получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx &= -\cos x - \frac{3}{4} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x} + C = \\ &= -\cos x - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{3}{2} \operatorname{Intg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

2<sup>o</sup>. Теперь перейдем к рассмотрению случаев, когда рационализация подынтегрального выражения достигается подстановкой  $t = \operatorname{tg} x$ . Это будет тогда, когда подынтегральную функцию  $R(\sin x, \cos x)$  можно преобразовать в рациональную же функцию от одного  $\operatorname{tg} x$ :

$$R(\sin x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x) = R_1\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right). \quad (32)$$

Действительно, в этом случае, пользуясь известным соотношением:

$$d \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx,$$

можно подынтегральный дифференциал представить в виде:

$$R_1(\operatorname{tg} x) dx = \frac{R_1(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} d \operatorname{tg} x,$$

так что подстановка  $t = \operatorname{tg} x$  приведет его к рациональному виду:

$$\frac{R_1(t)}{1 + t^2} dt.$$

Для представления функции  $R(\sin x, \cos x)$  в виде рациональной функции от  $\operatorname{tg} x$ , можно, напр., поступить так. Подставив вместо  $\sin x$  произведение  $\cos x \cdot \operatorname{tg} x$ , мы получим выражение  $R(\cos x \cdot \operatorname{tg} x, \cos x)$ , зависящее рационально как от  $\operatorname{tg} x$ , так и от  $\cos x$ . Если бы оказалось, что это выражение содержит только четные степени  $\cos x$ , то это как раз и был бы благоприятный случай. Так как

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos^{2m} x = \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^m} \quad (m - \text{целое})$$

то, подставляя эти выражения, мы в упомянутом случае, действительно, получили бы рациональную функцию от  $\operatorname{tg} x$ .

Полезен также следующий признак, по которому (как и в пункте 1<sup>o</sup>) можно наперед судить о целесообразности подстановки  $t = \operatorname{tg} x$ . Если имеет место равенство (32), то, заменив в нем  $\sin x$  на  $-\sin x$  и, одновременно,  $\cos x$  на  $-\cos x$  (что не отразится на  $\operatorname{tg} x$ , представляющем отношение  $\sin x$  к  $\cos x$ ), найдем, что

$$R(-\sin x, -\cos x) = R_1\left(\frac{-\sin x}{-\cos x}\right) = R_1\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = R(\sin x, \cos x);$$

таким образом, при одновременном изменении знаков у  $\sin x$  и  $\cos x$  выражение  $R(\sin x, \cos x)$  должно оставаться неизменным. Обратное, если этот признак налицо, то имеет место (32).

Подстановка  $t = \operatorname{tg} x$  применима, в частности, к интегралам (31) именно в том (оставленном выше без рассмотрения) случае, когда оба показателя  $m$  и  $n$  — четные (ибо при этом подынтегральное выражение, очевидно, не меняется при



одновременном изменении знаков у  $\sin x$  и  $\cos x$ ). Примеры:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} &= \int \frac{dx}{(\cos^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x)^2 \cos^2 x} = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^4 x} d\operatorname{tg} x = \\ &= \int \frac{(1 + t^2)^2}{t^4} dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C; \\ \int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^2 x} &= \int \frac{\cos^4 x dx}{(\cos x \cdot \operatorname{tg} x)^2} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} = \int \frac{dt}{t^2 (1 + t^2)^2} = \\ &= -\frac{1}{t} - \frac{1}{2} \frac{t}{1 + t^2} - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} t + C = -\frac{3}{2} x - \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x + C. \end{aligned}$$

3°. Заметим попутно, что для вычисления интегралов (31) в случае, когда оба показателя  $m$  и  $n$  будут четными и положительными числами, предпочтительнее другой прием, который отчасти был уже намечен в н° 155 (зад. 20 — 22). Именно, соотношения

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha), \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

позволяют выразить произведение и квадрат синуса и косинуса через синус и косинус двойного угла. В результате получится полином относительно этих последних синуса и косинуса, степени вдвое ниже, чем исходный одночлен. Тогда по отношению к каждому отдельному его члену (смотря по тому, встречается ли в нем нечетный показатель, или нет) нужно либо прибегнуть к подстановке пункта 1°, либо же снова воспользоваться только что указанным преобразованием; и т. д. Процесс этот лучше всего разъяснится на примере; в случае  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ , имеем:

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^4 x &= (\sin x \cdot \cos x)^2 \cdot \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} (\cos 2x + 1) = \\ &= \frac{1}{8} \sin^2 2x \cdot \cos 2x + \frac{1}{8} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Первый член интегрируется прежним приемом, полагая  $t = \cos 2x$ , и дает  $\frac{1}{48} \sin^3 2x$ ; второй же вновь преобразуется:

$$\frac{1}{8} \sin^2 2x = \frac{1}{16} (1 - \cos 4x)$$

и его интеграл равен  $\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x$ . Окончательно:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

4°. Наконец, в тех случаях, когда к интегралу (29) не применима ни одна из простых подстановок:

$$t = \sin x, \quad t = \cos x \quad \text{или} \quad t = \operatorname{tg} x, \quad (33)$$

рационализации подынтегрального выражения всегда можно добиться подстановкой:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \quad (34)$$

\* См. 161, зад. 18.



Действительно, с одной стороны,

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

и

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

с другой же —

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \text{ так что } dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Весьма счастливым здесь является то обстоятельство, что и  $\sin x$ , и  $\cos x$ , и  $dx$  выражаются через  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  рационально. Итак,

$$R(\sin x, \cos x) dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2 dt}{1+t^2}$$

— и рационализация достигнута. Подстановка (34) по отношению к интегралам типа (29) играет такую же роль „универсальной“ подстановки, какую подстановки Эйлера играют по отношению к интегралам (2). К сожалению, подобно последним, и только-что рассмотренная подстановка приводит зачастую к сложным выкладкам. Поэтому вообще рекомендуется сначала испытать, нельзя ли воспользоваться какой-либо из подстановок (33), и лишь в случае отрицательного ответа — прибегнуть к подстановке (34).

Попутно мы видим, что интегралы типа (29) выражаются через те же функции, что и интегралы от рациональных дифференциалов, с присоединением к ним еще тригонометрических функций.

Рассмотрим пример; пусть требуется вычислить интеграл:  $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$ .

Ни одна из подстановок (33) не ведет к цели. Полагаем  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , т. е. подставим вместо  $\sin x$  и  $dx$  их выражения  $\frac{2t}{1+t^2}$  и  $\frac{2 dt}{1+t^2}$ ; получим интеграл

$\int \frac{4t dt}{(t+1)^2 (t^2+1)}$ . Так как

$$\frac{4t}{(t+1)^2 (t^2+1)} = 2 \cdot \frac{(2t+t^2+1) - (t^2+1)}{(t+1)^2 (t^2+1)} = \frac{2}{t^2+1} - \frac{2}{(t+1)^2},$$

то этот интеграл равен

$$2 \operatorname{arctg} t + \frac{2}{1+t} + C,$$

так что

$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx = x + \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$$

Заметим еще, что всегда можно подынтегральное выражение в (29) разложить на такие слагаемые, чтобы к каждому из них была приложима одна из подстановок (33), и тем избежать необходимость воспользоваться подстановкой (34). Так, в только-что рассмотренном примере:

$$\frac{\sin x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x \cdot (1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x;$$



к первому члену последнего выражения применима подстановка  $t = \cos x$ , а ко второму подстановка  $t = \operatorname{tg} x$ . [Сравнить получаемый таким путем результат с прежним; установить, что обе первообразные функции разнятся на постоянную.]

167. Примеры и задачи. 1.  $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x \cdot dx$ . Подстановка:  $t = \cos x$ .

Отв.  $\frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$ .

2.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$ . Подстановка:  $t = \sin x$ . Отв.  $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + C$ .

3.  $\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^6 x \cdot \cos^6 x} = \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^6 x} \cdot d \operatorname{tg} x$ . Подстановка:  $t = \operatorname{tg} x$ .

Отв.  $-\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C$ .

$$\begin{aligned} 4. \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot dx &= \frac{1}{16} \int \sin^4 2x \cdot dx = \frac{1}{16} \int \left( \frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{64} \int (1 - 2 \cos 4x + \cos^2 4x) dx = \frac{1}{64} \int dx - \frac{1}{32} \int \cos 4x dx + \frac{1}{128} \int (1 + \cos 8x) dx = \\ &= \frac{3}{128} x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{1024} \sin 8x + C. \end{aligned}$$

5.  $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^6 x}$ . Подстановка:  $t = \operatorname{tg} x$ .  $\int \frac{(1+t^2)^4}{t^4} dt$ .

Отв.  $\frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^3 x + 6 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C$ .

$$\begin{aligned} 6. \int \frac{\sin 3x}{\cos^4 x} dx &= \int \frac{4 \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x}{\cos^4 x} dx = 4 \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx - \\ &- \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx = \frac{4}{\cos x} - \frac{1}{3 \cos^3 x}. \quad (\text{Подстановка: } t = \cos x.) \end{aligned}$$

7.  $\int \frac{\cos 3x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{4 \cos^3 x - 3 \cos x}{\cos^4 x} dx = 4 \int \frac{dx}{\cos x} - 3 \int \frac{dx}{\cos^3 x}$ . Мы знаем

уже [157, зад. 28], что  $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ ; вычислим теперь интеграл

$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{1}{(1 - \sin^2 x)^2} \cos x dx$ . Подстановкой  $t = \sin x$  сведем его к интегралу

$$\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{4} \int \left[ \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \right] dt = \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{1-t} +$$

$$+ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1-t} - \frac{1}{1+t} \right) + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1-t^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{1-t} + C. \quad \text{Подставляя обратно}$$

$\sin x$ , вместо  $t$ , получим:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C$ . Выражение под знаком

логарифма можно преобразовать, умножая числитель и знаменатель на  $1 + \sin x$ .



следующим образом:

$$\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} = \left( \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)^*,$$

так что окончательно  $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C$ , а предло-

женный интеграл  $\int \frac{\cos 3x}{\cos^4 x} dx = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{5}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C$ .

$$8. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \sin 2x} = \int \frac{dx}{2 \sin^2 x \cdot \cos x} = \int \frac{\cos x \cdot dx}{2 \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)}. \text{ Подстановка}$$

$t = \sin x$  приводит к  $\int \frac{dt}{2t^2(1-t^2)}$ . Имеем  $\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{(1-t^2) + t^2}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right)$ . Отв.  $-\frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C$ .

$$9. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos 2x} = \int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos^2 x)(2 \cos^2 x - 1)}. \text{ Подстановка: } t = \cos x$$

приводит к  $\int \frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t^2)(1-2t^2)} &= \frac{2(1-t^2) - (1-2t^2)}{(1-t^2)(1-2t^2)} = \frac{2}{1-2t^2} - \frac{1}{1-t^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - t} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} + t} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right). \end{aligned}$$

Отв.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \cos x}{1 - \sqrt{2} \cos x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$ .

$$10. \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int \frac{\cos x dx}{(1 - \sin^2 x)^2} \text{ подстановкой } t = \sin x \text{ приводится к } \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \\ = \int \left[ \frac{3}{16} \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) + \frac{3}{16} \left( \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} \right) + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{(1-t)^3} + \frac{1}{(1+t)^3} \right) \right] dt.$$

Отв.  $\frac{3}{8} \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C$ .

$$11. \int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin x + \cos x} dx. \text{ Так как при одновременном изменении знаков у } \sin x$$

\* Известно, что

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

полагая здесь  $\alpha = x + \frac{\pi}{2}$ , и получим:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} + x \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right)} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$



и  $\cos x$  подынтегральное выражение не терпит изменения, то ясно, что нужно положить  $t = \operatorname{tg} x$ . Интеграл преобразуется в

$$\begin{aligned} \int \frac{(\operatorname{tg} x \cdot \cos x)^2 \cdot \cos x}{\operatorname{tg} x \cdot \cos x + \cos x} dx &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2} d\operatorname{tg} x = \\ &= \int \frac{t^2}{(1+t)(1+t^2)^2} dt = \int \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{t-1}{t^2+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t-1}{(t^2+1)^2} \right] dt = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1+t}{1+t^2} + C = \frac{1}{4} \ln(\sin x + \cos x) - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C. \end{aligned}$$

12.  $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x}$ , подстановка:  $t = \operatorname{tg} x$ ,  $\int \frac{dt}{(a + bt)(1 + t^2)}$ . Разлагая на простые дроби:

$$\frac{1}{(a + bt)(1 + t^2)} = \frac{A}{a + bt} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1},$$

для определения коэффициентов  $A, B, C$  получим уравнения:

$$A + bB = 0, aB + bC = 0, A + aC = 1,$$

откуда  $A = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$ ,  $B = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ ,  $C = \frac{a}{a^2 + b^2}$ . Отсюда  $\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{arctg} t + \frac{b}{a^2 + b^2} \ln \frac{a + bt}{\sqrt{1 + t^2}} + C = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[ ax + b \ln(a \cos x + b \sin x) \right] + C$ .

13.  $\int \frac{dx}{a + b \cos x}$ , где  $|a| \geq |b|$ . 1) Пусть  $|a| > |b|$ ; без умаления общности можно принять  $a > 0$  (изменением знака всего подынтегрального выражения к этому всегда можно свести дело). Так как ни одна из более простых подстановок не приложима, то полагаем  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ,  $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ ,  $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$ ; получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{2dt}{(a + b) + (a - b)t^2} &= \frac{2}{a - b} \int \frac{dt}{\frac{a + b}{a - b} + t^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a - b}{a + b}} t \right) + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a - b}{a + b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Можно доказать (подобно тому, как мы это сделали в конце предыдущего п.) что это выражение равносильно следующему:

$$-\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcsin} \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} + C'.$$

При  $a < 0$  перед формулой следует, вместо (—), поставить (+).

2) Пусть  $|a| < |b|$  и  $b > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a + b \cos x} &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \int \left[ \frac{1}{\sqrt{\frac{b + a}{b - a}} - t} + \frac{1}{\sqrt{\frac{b + a}{b - a}} + t} \right] dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{\sqrt{\frac{b + a}{b - a}} + t}{\sqrt{\frac{b + a}{b - a}} - t} + C = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{\sqrt{b + a} + \sqrt{b - a} t}{\sqrt{b + a} - \sqrt{b - a} t} + C, \end{aligned}$$



и остается лишь сюда вместо  $t$  подставить  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , чтобы получить окончательный ответ. Можно однако представить ответ и в иной форме, если в дроби, стоящей под знаком логарифма, и числитель, и знаменатель умножить на числитель:

$$\frac{(b+a) + t^2(b-a) + 2t\sqrt{b^2-a^2}}{(b+a) - t^2(b-a)} = \frac{b(1+t^2) + a(1-t^2) + 2t\sqrt{b^2-a^2}}{b(1-t^2) + a(1+t^2)} =$$

$$= \frac{b+a \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\sqrt{b^2-a^2}}{b \frac{1-t^2}{1+t^2} + a};$$

вспоминая что  $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos x$ ,  $\frac{2t}{1+t^2} = \sin x$ , придем к ответу иной формы:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{b+a \cos x + \sqrt{b^2-a^2} \sin x}{a+b \cos x} + C.$$

Та же формула имеет место и при  $b < 0$ .

$$14. \int \frac{\sin x dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{a^2 + b^2} [ax - b \cdot \ln(a \sin x + b \cos x)] + C,$$

$$\int \frac{\cos x dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{a^2 + b^2} [bx + a \cdot \ln(a \sin x + b \cos x)] + C'.$$

Эти интегралы можно свести к зад. 12; но всего проще они вычисляются из связывающих их соотношений. Если обозначить первый из них через  $I_1$ , а второй — через  $I_2$ , то очевидно:

$$aI_1 + bI_2 = \int \frac{a \sin x + b \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = \int dx = x,$$

$$-bI_1 + aI_2 = \int \frac{a \cos x - b \sin x}{a \sin x + b \cos x} dx = \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} = \ln(a \sin x + b \cos x).$$

Из этих двух уравнений легко находятся „неизвестные“  $I_1$  и  $I_2$ .

$$15. \int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcsin} \frac{a \sin x + b}{a + b \sin x} + C \quad (\text{при } |a| > |b|, a > 0)$$

или

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a \sin x - \sqrt{b^2 - a^2} \cos x}{a + b \sin x} + C \quad (\text{при } |a| < |b|, b > 0).$$

*Указание.* Подстановкой  $x = \frac{\pi}{2} - t$  или  $x = t + \frac{\pi}{2}$  приводится к зад. 13.

**168. Таблица употребительных интегралов.** В виду того, что вычисление интегралов в иных случаях может представить затруднения, мы приведем ниже список наиболее употребительных интегралов, систематизированный по типам подынтегральных выражений. Основных интегралов [154] здесь не повторяем. Напоминаем, что выражения, встречающиеся под знаком логарифма, надлежит брать по абсолютной величине [154, 4a]



## Рациональные выражения:

1.  $\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C. \quad (n \neq -1)$
2.  $\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln(ax + b) + C.$
3.  $\int \frac{ax + b}{cx + d} dx = \frac{a}{c} x + \frac{bc - ad}{c^2} \ln(cx + d) + C.$
4.  $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \ln \frac{x+b}{x+a} + C. \quad (a \neq b)$
5.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C.$
6.  $\int \frac{x dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} [a \ln(x+a) - b \ln(x+b)] + C. \quad (a \neq b)$
7.  $\int \frac{x dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C.$
8.  $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
9.  $\int \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2) + C.$
10.  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
11.  $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + a^2} + C.$
12.  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^3} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
13.  $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} + C.$
14.  $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x+b)} = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[ \ln \frac{x+b}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right] + C.$
15.  $\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)(x+b)} = \frac{1}{a^2 + b^2} \left[ a \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - b \cdot \ln \frac{x+b}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right] + C.$
16.  $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)(x+b)} =$   
 $= \frac{1}{a^2 + b^2} \left[ b^2 \ln(x+b) + \frac{1}{2} a^2 \ln(x^2 + a^2) - ab \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right] + C.$
17.  $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}}. \quad (b^2 - 4ac > 0)$
18.  $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C. \quad (b^2 - 4ac < 0)$
19.  $\int \frac{x dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \ln(ax^2 + bx + c) - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$  [см. формулы 17 и 18].



Выражения, содержащие квадратный корень

А. из линейной функции:

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C.$$

$$21. \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} (ax+b)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$22. \int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2} \sqrt{ax+b} + C.$$

$$23. \int x \sqrt{ax+b} dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2} (ax+b)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$24. \int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \ln \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b-ac}} + C. \quad (b-ac > 0)$$

$$25. \int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{ac-b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}} + C. \quad (b-ac < 0)$$

$$26. \int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} dx = \frac{1}{c} \sqrt{(ax+b)(cx+d)} - \frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}} \ln [\sqrt{a(cx+d)} + \sqrt{c(ax+b)}] + C. \quad (c > 0; a > 0)$$

$$27. \int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}} dx = \frac{1}{c} \sqrt{(ax+b)(cx+d)} - \frac{ad-bc}{c\sqrt{|a|c}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{|a|(cx+d)}{c(ax+b)}} + C. \quad (c > 0; a < 0)$$

В. из квадратного двучлена  $x^2 + a^2$ :

$$28. \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$29. \int x \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$30. \int x^2 \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2+a^2) \sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$31. \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2+a^2} + a \cdot \ln \frac{x}{a + \sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

$$32. \int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$33. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$34. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

$$35. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$36. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a + \sqrt{x^2+a^2}} + C.$$



$$37. \int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \frac{x+b}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+a^2}+a^2-bx} + C.$$

$$38. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C.$$

$$39. \int (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8} (2x^2+5a^2) \sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$40. \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

С. из квадратного двучлена  $x^2 - a^2$ :

$$41. \int \sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

$$42. \int x\sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$43. \int x^2\sqrt{x^2-a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2-a^2) \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

$$44. \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2-a^2} + a \cdot \arcsin \frac{a}{x} + C.$$

$$45. \int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

$$46. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

$$47. \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C.$$

$$48. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

$$49. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{a} \arcsin \frac{a}{x} + C.$$

$$50. \int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \frac{bx+a^2+\sqrt{b^2-a^2}\sqrt{x^2-a^2}}{x+b} + C.$$

(|b| > a).

$$51. \int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \frac{bx+a^2}{a(x+b)} + C. \quad (|b| < a).$$

$$52. \int \frac{dx}{(x \pm a)\sqrt{x^2-a^2}} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\frac{x+a}{x \pm a}} + C.$$

$$53. \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C.$$

$$54. \int (x^2-a^2)^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x}{8} (2x^2-5a^2) \sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C.$$

$$55. \int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C.$$



Д. из квадратного двучлена  $a^2 - x^2$ :

$$56. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$57. \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$58. \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$59. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} + a \cdot \ln \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

$$60. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$61. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$62. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$63. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$64. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

$$65. \int \frac{dx}{(x+b) \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arcsin \frac{bx + a^2}{a(x+b)} + C. \quad (|b| > a)$$

$$66. \int \frac{dx}{(x+b) \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{x+b}{\sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 + bx} + C. \quad (|b| < a)$$

$$67. \int \frac{dx}{(x \pm a) \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{a \mp x}{a \pm x}} + C.$$

$$68. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C.$$

$$69. \int (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$70. \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

Е. из квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ :

$$71. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln [2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)}] + C. \quad (a > 0)$$

$$72. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C. \quad (a < 0)$$

$$73. \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

[см. формулы 71 и 72].



$$74. \int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

[см. формулы 71 и 72].

$$75. \int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln \frac{x}{bx + 2c + 2\sqrt{c(ax^2 + bx + c)}} + C. \quad (c > 0)$$

$$76. \int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{|c|}} \arcsin \frac{bx + 2c}{x \sqrt{b^2 - 4ac}} + C. \quad (c < 0)$$

Тригонометрические выражения:

$$77. \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$78. \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$79. \int \sin^3 x dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C = \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{3}{4} \cos x + C.$$

$$80. \int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C = \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x + C.$$

$$81. \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$$82. \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

рекуррентные  
формулы.

$$83. \int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x dx = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$84. \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x dx = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

$$85. \int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$86. \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

$$87. \int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$88. \int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

$$89. \int \sin x \cos^2 x dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

$$90. \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

$$91. \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C.$$

$$92. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C.$$

$$93. \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin x + C.$$

$$94. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$



$$95. \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C.$$

$$96. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C = \operatorname{csc} x + C.$$

$$97. \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x + C.$$

$$98. \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

$$99. \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x + C.$$

$$100. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

$$101. \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$102. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

$$\left. \begin{aligned} 103. \int \sin mx \sin nx dx &= -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C. \\ 104. \int \sin mx \cos nx dx &= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C. \\ 105. \int \cos mx \cos nx dx &= \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C. \end{aligned} \right\} (m \pm n \neq 0)$$

$$106. \int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{a \sin x + b}{a + b \sin x} + C. \quad (a > 0, |b| < a).$$

$$107. \int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a \sin x - \sqrt{b^2 - a^2} \cos x}{a + b \sin x} + C. \\ (b > 0, |a| < b)$$

$$108. \int \frac{dx}{a + b \cos x} = \mp \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{a \cos x + b}{a + b \cos x} + C. \quad (a \geq 0, |b| < a)$$

$$109. \int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} + C. \quad (|a| < |b|)$$

$$110. \int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x} = \frac{1}{a^2 + b^2} [ax + b \cdot \ln(a \cos x + b \sin x)] + C.$$

$$111. \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \frac{b \sin x - a \cos x + \sqrt{a^2 + b^2}}{a \sin x + b \cos x} + C.$$

### Выражения других типов:

$$112. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + C.$$

$$113. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} \cdot e^{ax} + C.$$

$$114. \int \ln x dx = x \ln x - x + C.$$

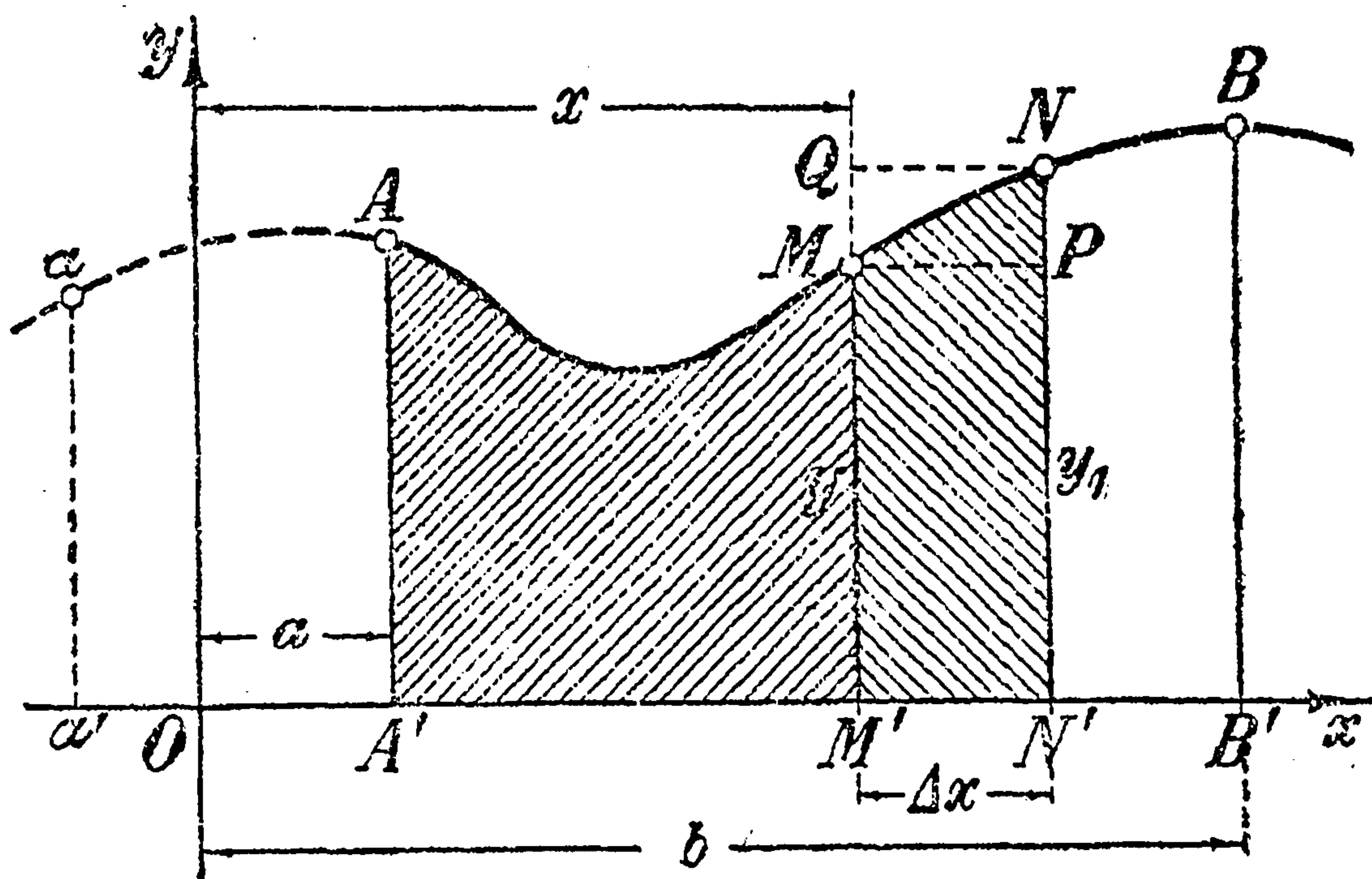


$$115. \int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$116. \int \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + C$$

169. Геометрическое истолкование первообразной функции. **Определенный интеграл.** Пусть дана некоторая функция  $y = f(x)$ . Если она представлена графически, то ее производная  $y' = f'(x)$ , как мы знаем [65], допускает наглядное геометрическое истолкование: производная есть не что иное, как угловой коэффициент касательной к графику функции. Мы покажем сейчас, что не менее простое и поучительное геометрическое истолкование можно дать и понятию первообразной функции для данной функции  $y = f(x)$ .

С этой целью, рассмотрим фигуру  $AA'M'M$ , ограниченную осью  $Ox$ , двумя ординатами  $A'A$  и  $M'M$  и графиком нашей функции (черт. 237). Подобного рода фигуру мы будем называть „криволинейной трапецией“. Обозначим абсциссы точек  $A$  и  $M$ , соответственно, через  $a$  и  $x$  ( $x > a$ ), причем  $a$  будем считать постоянной, а  $x$  — переменной. С изменением  $x$ , т. е.



Черт. 237.

с перемещением ординаты  $M'M$  — будет изменяться и площадь  $AA'M'M$ ; величина этой площади будет зависеть от значений  $x$ , иными словами, будет функцией от переменной  $x$ . Обозначим эту функцию через  $P(x)$ :

$$P(x) = \text{пл. } AA'M'M,$$

и станем искать ее производную по  $x$ , т. е.  $P'(x)$ . С этой целью придадим  $x$  приращение  $\Delta x$ , которое геометрически выразится, скажем, отрезком  $M'N'$ . Ордината  $M'M$  займет теперь положение  $N'N$ , и ей будет отвечать бо́льшая, чем прежде, площадь

$$P(x + \Delta x) = \text{пл. } AA'N'N;$$

при этом, приращение площади будет равно

$$\begin{aligned} \Delta P(x) &= P(x + \Delta x) - P(x) = \text{пл. } AA'N'N - \text{пл. } AA'M'M = \\ &= \text{пл. } MM'N'N. \end{aligned}$$

Для того, чтобы оценить это приращение, построим на основании  $M'N' = \Delta x$  два прямоугольника: один  $MM'N'P$  с высотой  $M'M = y$ ,



а другой  $QM'N'N$  с высотой  $N'N = y_1$ . Так как первый целиком заключен внутри фигуры  $MM'N'N$ , а второй, наоборот, заключает эту фигуру внутри себя, то, очевидно,

$$\text{пл. } MM'N'P < \text{пл. } M'MN'N < \text{пл. } QM'N'N.$$

Но

$$\text{пл. } MM'N'P = M'N' \cdot M'M = y \cdot \Delta x,$$

$$\text{пл. } QM'N'P = M'N' \cdot N'N = y_1 \cdot \Delta x,$$

и мы видели, что  $\text{пл. } MM'N'N = \Delta P(x)$ ; поэтому предыдущее неравенство переписется так:

$$y \cdot \Delta x < \Delta P(x) < y_1 \cdot \Delta x,$$

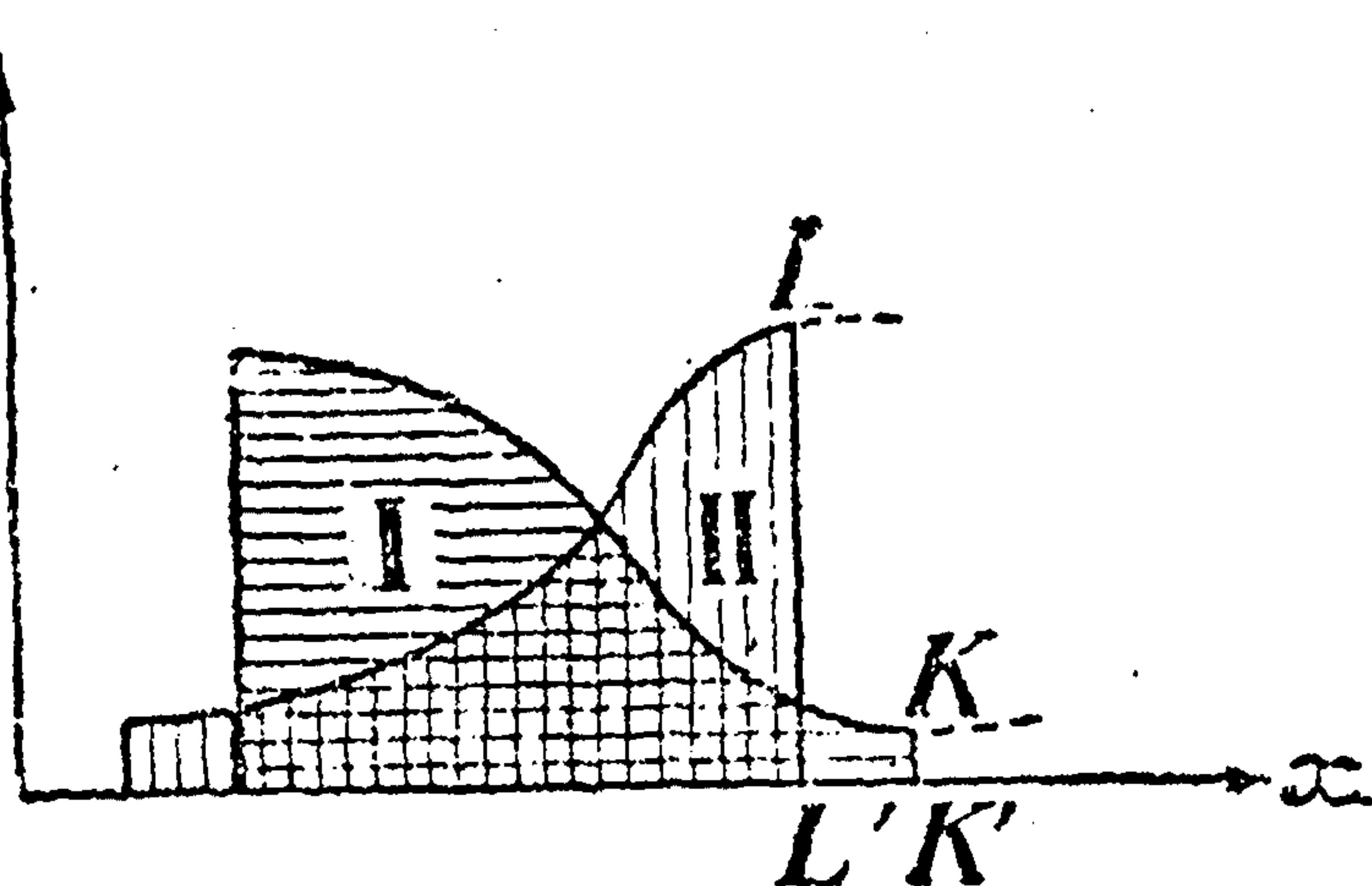
откуда, деля на  $\Delta x$ , получим:

$$y < \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} < y_1.$$

Когда  $\Delta x$  стремится к нулю, точка  $N'$  стремится к  $M'$  и  $N$  к  $M$ , так что наращенная ордината  $N'N = y_1$  стремится к первоначальной ординате  $M'M = y = f(x)$  точки  $M$ .

В таком случае и заключенное между  $y$  и  $y_1$  отношение  $\Delta P(x)/\Delta x$  должно также стремиться к пределу  $y = f(x)$ . Но ведь предел отношения приращений и есть производная, так что

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = f(x).$$



Черт. 238.

Мы получили весьма замечательный и важный результат: *производная переменной площади „криволинейной трапеции“  $AA'M'M$  по  $x$  равна ординате кривой в точке  $x$ .*\*

Для того, чтобы этот результат сделался читателю непосредственно ясным, предлагаем ему всмотреться в черт. 238, где изображены две фигуры I и II; первая заканчивается маленькой ординатой  $K'K$ , а вторая — значительно большей  $L'L$ , и очевидно, что при передвижении этих конечных ординат направо, *скорость возрастания* второй площади будет соответственно больше *скорости возрастания* первой. Здесь сразу выявляется роль *конечной ординаты* в оценке скорости возрастания площади. Выше же мы и установили именно, что конечная ордината в точности выражает эту скорость (по отношению к абсциссе).

\* В частности, напр., если площадь  $AA'M'M$  выражает нагрузку балки между сечениями в точках  $A'$  и  $M'$  [т. е. есть так наз. „грузовая площадь“, см. 53, 7], то „интенсивность нагрузки“ в точке  $M$ , которая служит производной от грузовой площади, представится как раз ординатой  $M'M$ .



Из доказанного утверждения вытекает, что *переменная площадь*  $P(x)$  *есть одна из первообразных для*  $f(x)$  *функций:*

$$P(x) = \int f(x) dx.$$

Или наоборот: *первообразная функция для данной функции*  $y = f(x)$  *геометрически представляется переменной площадью „криволинейной трапеции“*  $AA'M'M$ , *ограниченной графиком функции.*

Заметим, что если начальную ординату  $A'A$ , от которой мы отсчитываем площадь, передвинуть, напр., в положение  $a'a$ , то все значения функции  $P(x)$  увеличатся на величину площади  $aa'A'A$ , и мы получим новую первообразную, которая от прежней отличается (как это и должно быть) на постоянное слагаемое.

Однако, если положение начальной ординаты  $A'A$  фиксировано, т. е. если определенным образом выбрано начальное значение  $a$ , служащее абсциссой точки  $A$ , то переменная площадь  $P(x)$  будет давать одну вполне определенную, первообразную функцию для  $f(x)$ . Чем же эта именно первообразная выделяется среди прочих значений неопределенного интеграла  $\int f(x) dx$ ? Ее особенностью является то, что она *обращается в нуль при*  $x = a$ ; действительно, при совпадении  $x$  с  $a$ , т. е. точки  $M'$  с точкой  $A'$ , фигура  $AA'M'M$  стягивается в отрезок и ее площадь исчезает. Другие первообразные, которые отличаются от  $P(x)$  на постоянную, очевидно, не могут иметь нулевое значение при  $x = a$ .

Благодаря этому свойству функции  $P(x)$ , очень легко найти именно эту первообразную функцию, если вообще известна какая-либо первообразная функция  $F(x)$  для данной функции  $f(x)$  [напр., вычисленная по таблице п<sup>о</sup> 154 или 168, если  $f(x)$  подходит под один из рассмотренных там типов]. Ведь две функции  $P(x)$  и  $F(x)$  представляют значения одного и того же неопределенного интеграла  $\int f(x) dx$  и, следовательно, разнятся на постоянную:

$$P(x) = F(x) + C. \quad (35)$$

Для полного определения функции  $P(x)$  нужно найти еще  $C$ . Вот здесь мы и воспользуемся тем, что при  $x = a$  значение функции  $P(x)$  известно, и положим в равенстве (35)  $x = a$ ; мы получим:  $P(a) = 0 = F(a) + C$ . Отсюда просто определить постоянное число  $C$ , оно оказывается равным  $-F(a)$ . Подставив это значение  $C$  в формулу (35), мы и найдем выражение для функции  $P(x)$  (т. е. для переменной площади  $AA'M'M$ ):

$$\text{пл. } AA'M'M = P(x) = F(x) - F(a). \quad (36)$$

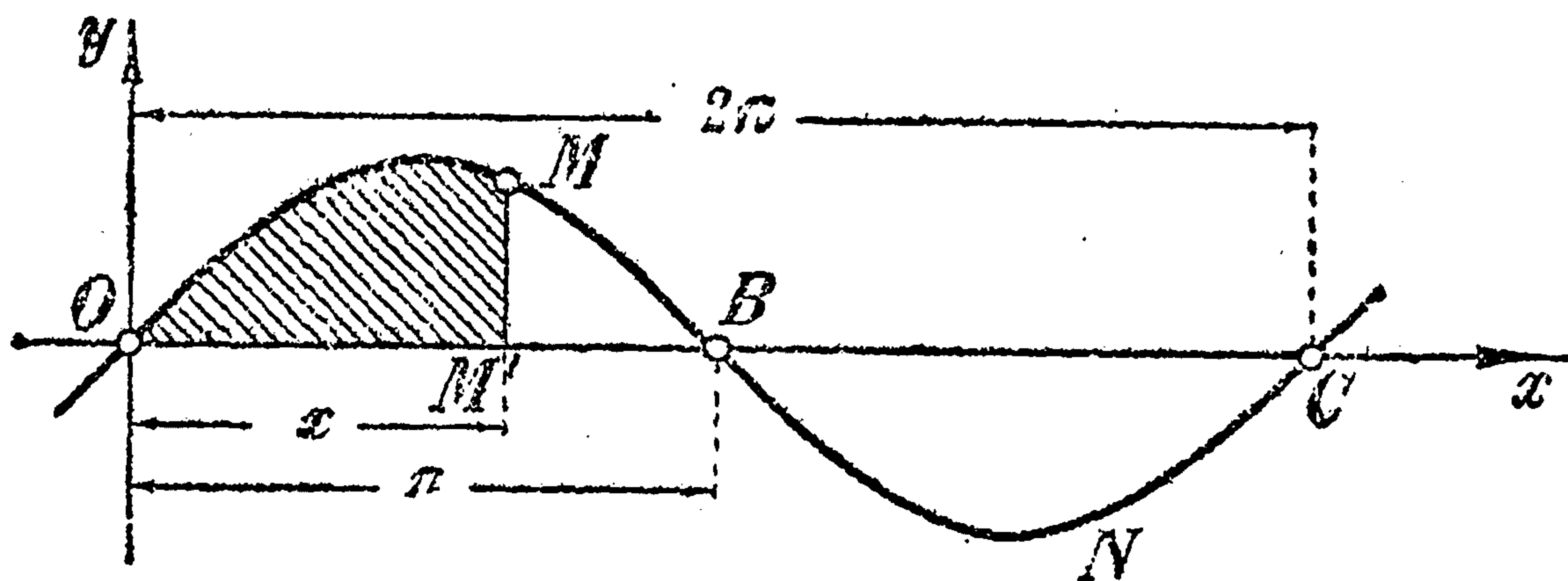
Пусть, напр.,  $y = \sin x$ , и станем рассматривать площадь, ограниченную осью  $Ox$ , синусоидой и двумя ординатами, отвечающими абсциссам  $0$  и  $x$  (первая ордината здесь стягивается в точку!) (см. черт. 239). Роль  $F(x)$  в нашем случае может играть функция  $\int \sin x dx = -\cos x$ , которую най-



дем в таблице; таким образом, функции  $P(x) = \text{пл. } OM'M$  и  $F(x) = -\cos x$  обе являются первообразными для функции  $y = \sin x$ ; первая из них, неизвестная нам, может быть определена с помощью второй по формуле (36):

$$\text{пл. } OM'M = P(x) = F(x) - F(0) = (-\cos x) - (-1) = 1 - \cos x.$$

Важно отметить, что разность  $F(x) - F(a)$ , фигурирующая в формуле (36), совершенно не зависит от выбора функции  $F(x)$  из числа различных первообразных для  $f(x)$ . Это непосредственно ясно из того, что упомянутая разность дает вполне определенную площадь  $P(x)$ ; но и помимо этого очевидно, что переход от первообразной  $F(x)$  к другой первообразной означал бы лишь прибавление



Черт. 239.

к уменьшаемому  $F(x)$  и к вычитаемому  $F(a)$  этой разности одной и той же постоянной, что, разумеется, не отразилось бы на величине самой разности.

Разность  $F(x) - F(a)$  двух значений первообразной функции  $F(x) = \int f(x) dx$  называют определенным интегралом функции  $f(x)$ , взятым от  $a$  до  $x$ , и обозначают так:

$$P(x) = \int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a), \quad (37)$$

причем  $a$  называется нижним пределом интеграла, а  $x$  — верхним.

Таким образом, определенный интеграл  $\int_a^x f(x) dx$  есть та именно первообразная для  $f(x)$  функция, которая обращается в нуль при  $x = a$  (иными словами — это есть площадь  $AA'M'M$ ); ни о какой многозначности, как в случае неопределенного интеграла  $\int f(x) dx$ , здесь нет речи. Если переменной  $x$  придается постоянное значение  $b$ , то соответствующее значение определенного интеграла называют определенным интегралом от  $a$  до  $b$  и пишут:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (38)$$

Если  $b$  есть абсцисса точки  $B$  кривой  $y = f(x)$  (см. черт. 237), то для



того, чтобы найти величину всей площади  $AA'B'B$ , очевидно, нужно в (36) положить  $x = b$ ; мы и получим таким образом чрезвычайно важную формулу:

$$\text{пл. } AA'B'B = P(b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (32)$$

Пусть требуется, напр., определить площадь одной „волны“ синусоиды  $OBMO$  (черт. 239); будем иметь:

$$\text{пл. } OBMO = \int_0^{\pi} \sin x dx = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 - (-1) = 2.$$

[Конечно, площадь получается в квадратных единицах, соответствующих выбранному для графика линейному масштабу.]

В приложениях интегрального исчисления чаще всего приходится иметь дело именно с определенным интегралом; ему специально будет посвящена вся следующая глава. В ней, среди других приложений, читатель найдет и многочисленные упражнения в *вычислении площадей*, которое там будет самоцелью, в то время как здесь площадь играла лишь роль иллюстрации понятия о первообразной функции.

Итак, всякий раз когда находится какая-нибудь *первообразная функция*, тем самым вычисляется некоторая *площадь*. В связи с этим в математике сохранился обычай *самое вычисление первообразной функции называть „квadrатурой“*, хотя бы ни о какой площади (которую нужно было бы „квadrировать“, т. е. сравнить с „квadrатом“) фактически не было и речи. Так напр., говорят, что вычисление пройденного точкой пути по ускорению, заданному в функции от времени, „требуется двух квadrатур“, что значит — „двукратного вычисления первообразной функции“ [ср. 74, 4].

170. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. В главе IV нами был изучен целый ряд функций: рациональная, степенная, показательная и логарифмическая, затем — тригонометрические и обратные им; всех их в совокупности называют *элементарными функциями*; название это прилагают и ко всем функциям, составленным из перечисленных. Затем, в главе V, посвященной дифференцированию, было показано, как находить производные от элементарных функций. При этом и сами производные всегда также выражались через те же элементарные функции. В иных случаях дифференцирование приводило даже от функций сложной природы — к гораздо более простым, как напр., для логарифмической и обратных круговых функций:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arc} \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Переходя к операции, обратной дифференцированию, т. е. к интегрированию, следовало конечно ждать и обратного явления; ведь теперь

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x, \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x,$$

т. е. интегрирование функции способно усложнить природу ее; в частности отсюда видно, что для выражения интегралов от рациональных дробей заведомо не об-

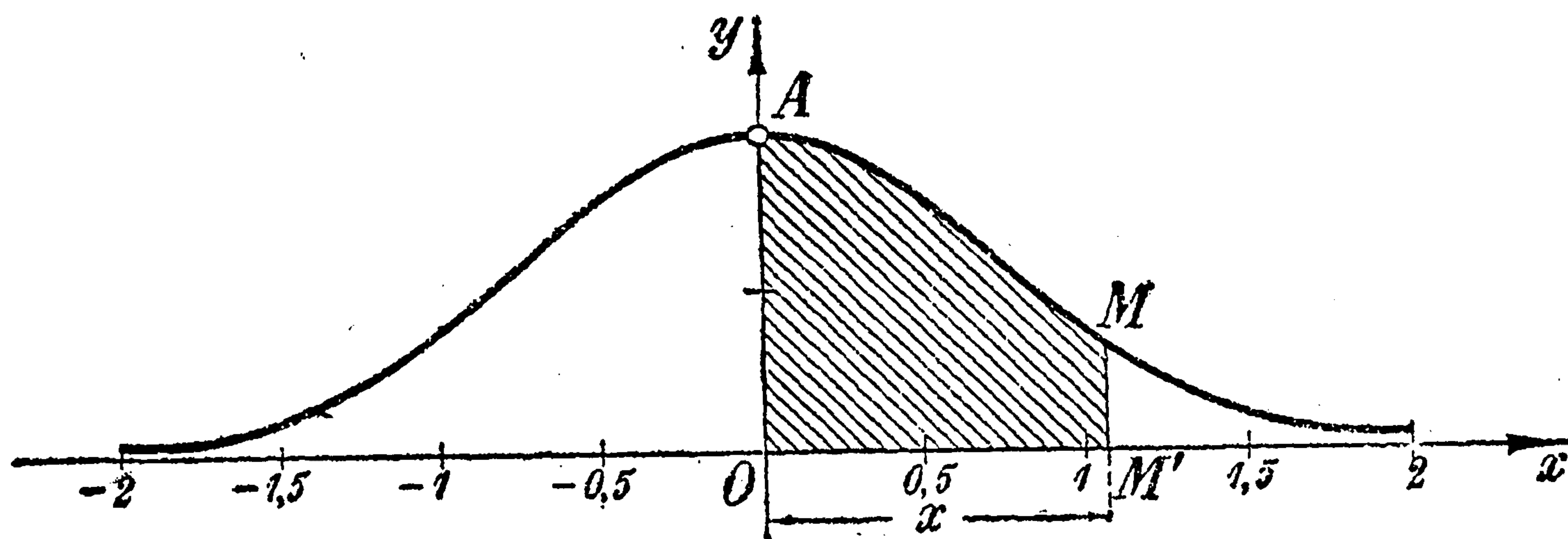


ходимы уже логарифмическая и обратные круговые функции. Впрочем, этих функций (вместе с рациональными) оказывается и достаточно для интегрирования всех вообще рациональных функций [160, 161]. Мы рассмотрели в настоящей главе еще некоторые случаи, когда интегралы от элементарных функций и сами выражаются через элементарные же функции. Конечно, имея в виду лишь потребности техники, мы не исчерпали полностью всех таких случаев; но вообще их немного. Наоборот, *очень часто интеграл от элементарной функции (и даже весьма простой на вид!), сам уже не может быть выражен через элементарные функции!* \*

В виде первого примера, приведем интеграл  $\int e^{-x^2} dx$  играющий важную роль в исчислении вероятностей (в теории ошибок Гаусса)

обыкновенно его применяют в форме определенного интеграла  $\int_0^x e^{-x^2} dx$

(т. е., как разъяснено в предыдущем п<sup>о</sup>, рассматривают именно ту первообразную для  $e^{-x^2}$  функцию, которая обращается в нуль при  $x=0$ ). Читателя, пожалуй



Черт. 240.

удивит, как можно пользоваться таким интегралом, не поддающимся выражению через изученные функции, а быть может, он даже усомнится в самом существовании его. Но стоит лишь построить график функции  $y = e^{-x^2}$  (он изображен на черт. 240) и вспомнить сказанное в предыдущем п<sup>о</sup>, чтобы убедиться в реальности этого интеграла, представляемого попросту площадью  $AOM'M$ . Что же касается до пользования им, то нужно дать себе отчет в том, что выражение интеграла через элементарные функции имеет для нас лишь ту выгоду, что 1) свойства этих функций хорошо изучены и 2) они легко вычисляются либо непосредственно, либо по таблицам. Нужно сказать, однако, что и для тех интегралов, которые через элементарные не выражаются, но важны в приложениях, также составлены таблицы; напр., существуют таблицы значений и для упомяну-

того выше интеграла  $\int_0^x e^{-x^2} dx$ , которыми также легко пользоваться, как и таб-

лицами логарифмов или тригонометрических функций. Ниже читатель ознакомится

\* Здесь можно усмотреть некоторое сходство с положением вещей в арифметике и алгебре. Прямые операции — сложение и умножение, если их применять к натуральным числам, всегда приводят к натуральным же числам в результатах. Наоборот, обратные операции — вычитание и деление, не всегда выполняются в области натуральных чисел и становятся выполнимыми лишь с привлечением новых чисел, отрицательных и дробных. Точно также и извлечение корня, как операция обратная возвышению в степень, заставляет изучать новые числа: иррациональные (и мнимые). Аналогично этому, прямая операция — дифференцирование не выводит из области элементарных функций; для выполнимости же обратной операции — интегрирования, даже над элементарными функциями, приходится привлекать новые функции!



с различными методами приближенного вычисления определенных интегралов, что даст ему некоторое представление о возможности составления подобных таблиц. Затем, в тех случаях, когда это было важно, изучались и свойства функций, представленных интегралами упомянутого типа; эти функции по существу ничем не „хуже“ тех, которые мы считаем „элементарными“!

Из других интегралов, не выражающихся через элементарные функции, упомянем об „интегральном логарифме“  $\int_0^x \frac{dx}{\ln x}$ , об „интегралах диффракции“

$\int_0^x \sin(x^2) dx$ ,  $\int_0^x \cos(x^2) dx$  и, наконец, о так называемых „эллиптических интегралах“. Это название придается вообще всем интегралам типа

$$\int R(x, \sqrt{Y}) dx.$$

где  $R$  есть рациональная функция от двух аргументов, а  $Y$  означает полином третьей или четвертой степени. Эллиптические интегралы встречаются во многих механических вопросах (колебание маятника, движение твердого тела, и др.), затем — при вычислении некоторых геометрических протяжений, напр., длины дуги эллипса (отсюда и название „эллиптические“!), гиперболы, синусоиды, лемнискаты и улитки, и т. д. Для облегчения вычисления эллиптических интегралов, их с помощью тождественных преобразований и подстановок приводят, кроме элементарных функций, к интегралам следующих трех основных типов:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \frac{dx}{(1+nx)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

где  $k^2$  и  $n$  — постоянные, причем  $k^2 < 1$ . Их называют, соответственно, эллиптическими интегралами 1-го, 2-го и 3-го рода; эти интегралы уже несводимы к элементарным функциям. Наибольшую важность из них имеют первые два. Произведем в них, как это делают обыкновенно, еще подстановку  $x = \sin \varphi$ ; тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} &= \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} &= \int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2} \int \frac{(1-k^2\sin^2\varphi) - 1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{k^2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2} \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, дело приводится к двум интегралам (берем их также в форме определенных интегралов):

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi;$$

их связывают с именем Лежандра (Legendre). Для этих интегралов составлены обширные таблицы, в которых приводятся их значения, соответствующие различным значениям постоянной  $k^2$  и угла  $\varphi$ ; и самую постоянную  $k^2$  (меньшую единицы!) берут в форме  $\sin^2\psi$ , так что интегралы оказываются зависящими от двух углов:  $\varphi$  и  $\psi$ .



## Предметный указатель.

*Жирная цифра указывает н<sup>о</sup>, цифра в скобках ( ) означает страницу; все указания, относящиеся к приложениям, помещены курсивом.*

- Абсолютная величина (а. значение) числа **1** (7\*); а. в. (модуль) комплексного числа **142** (381).
- Абсолютная погрешность истинная **1** (7), максимальная **1** (8), суммы **5** (15), разности **6** (18); вычисл. а. п. с помощью диффер. **71** (197).
- Абсцисса точки на оси **29** (85), на плоскости **29** (86).
- Амплитуда синусоид. величины **46** (129).
- Аналитический способ зад. функции **28** (82).
- Аргумент функций **27** (80), а. комплексн. числа **142** (381).
- Арккосинус, арккотангенс, арксинус, арктангенс—см. обратные кругов. функции.
- Архимедова спираль — см. спираль.
- Асимптота **40** (114), **41** (118), **44** (123), **45** (128), **49** (140), **102**, **4**, **5** (278, 279).
- Астроида, как гипоциклоида **114** (306); неявн. уравн. а. **114** (306); касат. к а., ее отрезок между осями **123**, **3** (330); длина дуги а. **132**, **2** (354); кривизна а. **137**, **1** (363).
- Барометрическая формула (б. нивелирование) **24** (67), **25**, **14** (78), **74**, **7** (210).*
- Бегун **12** (29).
- Бесконечная десятичная дробь **1** (7), **3** (10), **18** (53), **22**, **1** (60), **23** (65).
- Бесконечно-большая величина, связь ее с бесконечно-малой **21** (58, 59).
- Бесконечное значение функции **45** (128), **82** (225), **84**, **2** (228), **6** (232).
- Бесконечно-малая величина **19** (56), сумма б.-м. **20**, **VI** (57, 58); сравнение б.-м., порядок б.-м. **25** (69), **26**, **12** (77), **67** (190), **119**, **2** (319); главная б.-м. **25** (70); главная часть б.-м. **26** (74), **67** (190); эквивалентные б.-м. **25** (71), **26** (72, 74), **67** (190).
- Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, ее сумма **22**, **1** (60), из нее пригл. формула **26**, **3** (74).
- Бесконечный ряд, его сумма **22**, **1** (60).
- Бином Ньютона, вывод из формулы Тэйлора **144** (387), примеры **144**, **1**, **2** (388).
- Вектор **111** (296), в. как истолкование компл. числа **141** (380), геом. равенство в. **141** (380), геом. сложение в., по правилу параллелограмма, треугольника или многоугольника **111** (296), **141** (380), проекции в. на оси **141** (380).
- Верные знаки, число их **3** (11, 12); определение числа в. з. по относит. погрешн. **4** (13); число в. з. в сумме **5** (17), разности **6** (18), произвед. и частном **7** (20), **8** (22).
- Вершины гиперболы **102** (278), графика **77** (214), параболы **104** (283), эллипса **98** (272).
- Визир **12** (29).
- Вогнутость кривой, признак направления в. **128** (344—345); применение в теории кривизны **135** (361).
- Возвышение в квадрат, в куб с пом. логар. линейки **14** (37, 40).
- Возвышение в степень приближенного числа **9** (23), **71**, **1** (197).
- Возрастание функции **76** (213).
- Выпуклость кривой, см. вогнутость.
- Вычисление корней уравнений: кубических **149** (400); произвольных **150** (404); метод Ньютона или касат. **151** (405), метод хорд и комбинированный метод **152**, **153** (408, 409).
- Вычитание приближенных чисел **6** (18), случай близких чисел **6** (18), **26**, **2** (74), **67** (191\*).
- Гармоническое колебание **46** (130), скорость **62**, **2** (168), ускорение, сила, вызывающ. г. к. **63**, **3** (175); сложение двух г. к. по одной оси—см. синусоид. велич. и их сложение; сложение двух перпенд. г. к. **110**, **3** (296—297); осуществл. г. к. с пом. эксцентрика **119**, **1**, (317).*
- Гипербола, геом. определение, фокусы **101** (276); оси веществ. и мнимая; центр г. **102** (277—8); параметр г. **106** (286); эксцентриситет г. **102** (278); уравн. г., отнесенное к осям **101** (277), отнесенное к вершине **105** (285), параметрич. представл. г. **110** (295); асимптоты г.



- 102 (278 — 9); сопряженные г. 102 (279); касат. и нормаль к г. 122 (328), их свойства 124 (333); кривизна г. 137 (367); г., как сечение кругового конуса 108 (290). *Примен. г.: антипараллельный кривошип* 103, 1 (280); *область влияния ж. д. станции* 103, 2 (280); *звукометрическое опред. положения нейтр. батареи* 103, 3 (281).
- Гипербола равнобочная 41 (117), 101 (277), 102 (279), 107 (288); графич. построение по точкам 41 (117); параметрич. представл. г. р. 110 (295); кривизна, построение центра кривизны 136, 6 (363). См. пропорциональность обратная.
- Гиперболическая ветвь кривой 40 (114).
- Гиперболические функции 50 (140); дифференцир. г. ф. 62, 1 (167); использ. г. ф.: 51, III (144 — 145), 105 (284), 120 (320); 136, 13 (364); 149 (400), 157 (426).
- Гипоциклоида 114 (304), ее параметр. представл. 114 (305); прямая, как г. (*гипоциклоидальный механизм*) 114 (307). См. астроида.
- График функции 30 (87), примеры 31 (90 — 95); уравнение г. 30 (87); г. линейной функции — см. линейная функция; г. квадратичной функции — см. парабола 2-ой степени; г. обратно-пропорц. зависим. и дробно-линейной функции — см. гипербола равнобочная; г. обратной функции 43 (122).
- Графический способ задания функции 30 (89).
- Графическое дифференцирование 66 (186).
- Графическое изображение чисел отрезками 11 (27), 28 (93).
- Графическое интерполирование — см. интерполирование.
- Графическое построение по точкам гиперболы равнобочной 41 (117), параболы 2-й степени 36 (106), параболы 3-й степ. 39 (113), полукубической параб. 40 (115), параболы  $n$ -ой степени 40 (115), эллипса 99 (273).
- Графическое решение системы двух уравн. 1-ой степ. 92, 5 (253), уравн. 2-й или 3-й степ. 51 (142 — 143), произвольн. уравн. 51 (143 и сл.).
- Давление грунта на подпорную стенку* 84, 5 (235).
- Движок, лицевая сторона д. 12 (29), 13 (30); обратная сторона д. 10 (46).
- Деление отрезка в данном отношении 89 (244); *примен. к опред. положения центра тяж. системы мат. точек* 90 (246).
- Деление прил. чисел 7 (19), с пом. лог. линейки 13 (35), с пом. прил. формул 26 (74).
- Дифференциал 67 (190), вычисление д. 69 (193); таблица д. 75 (210 — 212); д. высших порядков 69 (193); независимость формы д. от выбора незав. переменной 69 (194); прилож. д. к выводу прил. формул 70 (195), к составлению дифференц. уравн. 74, 7 (210).
- Дифференциальные уравнения 74, 6, 7 (209 — 210), 105 (284), 121, 9, 10 (324).
- Дифференцирование 53 (151), правила д. 59 (158), д. обратной функции 57 (153), 69 (195); д. сложной функции 61 (164), 69 (195); д. неявных функций 122 (325), 137 (365); д. графическое 66 (186). См. дифференциал.
- Дробная рационал. функция см. рационал. дробь.
- Дробно-линейная функция 41 (118), ее график — см. гипербола равнобочная.
- Дуга, предел отнош. д. к хорде 130 (347 — 8), дифференциал дуги 130 (349); производная д. по абсциссе 130 (349), по параметру 131 (351), по полярн. углу 131 (353); вычисления длины д. 137 (350 — 357).
- Зависимость функциональная между величинами 27 (80), отличие ее от причинной зависимости 27 (81).
- Затухающие колебания* 81 (222), *логарифм. декремент* 81 (224); *скорость* 62, 5 (169); *ускорение, силы, вызыв. з. к.* 63, 4 (175).
- Извлечение квадр. и кубич. корня с пом. логар. линейки 14 (39, 40), с пом. прил. формул 26, 7 (75).
- Извлечение корня из прил. числа 9 (23).
- Интеграл неопределенный 72 (200), 154 (414), таблица и. 75 (210 — 212), 154 (414 — 415), 168 (464 — 471); различные формы и. 165 (455 — 456), 166 (461), 167, 7, 13, (463 — 4); и., выражающиеся в конечном виде через элемент. функции 162 (442), 165 (455), 166 (460); и., не выраж. в конечном виде 170 (475); геом. истолкование и. в виде площади 169 (473). См. интегрирование.
- Интеграл определенный, как разность двух значений первообразной функции 169 (474); выражение его площадью 169 (473).
- Интегралы эллиптические 169 (477).
- Интегрирование 73 (203); правила и. 73 (203 — 206); и. с пом. простейших приемов 155 (415); и. путем замены переменной 73, III (205), 156 (415); и. по частям 153 (428); и. рационал. дробей 160 — 163 (434 — 447); и. иррацион. выражений, содерж.  $\sqrt{ax + b}$  157 (424) или  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  164 (448 — 452); Эйлеровы



- подстановки 165 (453); и. рацион. выражений от  $\sin x$ ,  $\cos x$  166, 167 (456—464).  
 Интерполирование 28 (82—4), графич. 30 (88), линейное 28 (84), 35 (104), 93 (256\*); и. с помощью полинома, интерполяционная формула Лагранжа 146 (390—392).  
 „Истинное значение“ неопредел. выражения 22 (61).  
 Кардиоида, как эпициклоида 114 (306), парам. представл. к. 119 (317); к., как улитка, ее полярное уравнение 119 (317); длина дуги к. 132, 5 (355); кривизна 136, 7 (363).  
 Касательная к кривой 65 (183); ее уравнение, связанные с нею отрезки 120 (321); к. в вершинах графика 77 (215); к. к кривой, задан. неявным уравнением 122 (325), задан. параметрически 126 (338), задан. полярн. уравн. 127 (341); степень близости касат. и кривой 67 (191). *Примен. к. к установлению профиля моста* 121, 1 (322).  
 Катание кривых без скольжения: круга по прямой 113 (303), круга по кругу 114 (304), прямой по кругу 115 (308); логар. спирали по прямой 132, 6 (356).  
 Катеноида 136, 13 (364), кривизна к. 136, 13 (364), эволюта к. 139 (375).  
 Квадратичная функция 36 (105), 38 (108); наиб. и наим. значения к. ф. 38 (110); свойство ее производной 64, 5 (180), 68 (193) См. парабола 2-ой степени.  
 „Квадратура“ = вычисление интеграла или площади 169 (475).  
 Комплексные числа — см. числа комплексные.  
 Конические сечения 108 (290).  
 Координаты прямоугольные точек на плоскости 29 (84), начало к., оси к., координ. углы 29 (86), преобразование к., перенос начала 37 (107), поворот осей и общее преобразование к. 107 (288); к. полярные, полюс и полярная ось 116 (308); связь между прямоугольными и полярными к. 116 (309). К. „текущие“ 92 (250), 96 (268), 120 (321).  
 Косинус, котангенс — см. тригоном. функции.  
 Косинус, котангенс гиперболические — см. гиперболические функции.  
 Коэффициент пропорциональности 32 (97), 33 (98, 99), 74 (209, 210).  
 Коэффициент угловой, прямой 34 (100), 92 (250); обращение его в  $\infty$  92 (251), 122 (327), 125 (339\*).\*  
 Кривая, ее аналитич. представление явным или неявным уравн. 30 (87), 92 (250), параметрич. уравн. 110 (294), полярн. ур. 117 (312).  
 Кривизна средняя 133 (357), к. в точке 134 (358); круг, центр и радиус к. 135 (360). *Примен. к переходным кривым на ж.-д. закруглениях* 138 (369).  
 Кривошипный механизм обыкнов. 46, 4 (131—3); скорость ползуна 62, 6 (169); ускорение его 63, 5 (176); к. м. без шатуна 46, 3 (130).  
 Кривые второго порядка, к.  $n$ -го порядка 108 (289).  
 Кубическая парабола — см. парабола 3-ей степ.  
 Кубическое уравнение, приведен. вид 15 (43); исследование к. у. 148 (397); число веществ. корней 15 (43), 148 (399); решение к. у. с пом. логар. линейки 15 (43); вычисление корней к. у. с пом. тригоном. функций 149 (400).  
 Кулаки,двигающиеся поступат. 65, 4 (184), вращающиеся 117 (313), 118 (314—5), 119 (317).  
 Лагранжа формула, конечных приращений 68 (191); интерполяционная 146 (392).  
 Лемниската и ее полярн. уравн. 110 (318); неявн. ур. л. 119 (319); характер л. вблизи полюса 119 (319), 137, 2 (369); касат. к л. 127, 2 (343); кривизна 137, 2 (369).  
 Линейная функция 32 (97), 33 (98), ее график 34 (99); каждая функция приibl. уподобляется л. ф. 67 (191); установление вида л. ф. по ее двум значениям и т. п. 94 (257 и сл.); способ натянутой нити для установл. линейной эмпирической зависимости 94 (259).  
 Логарифмическая линейка 11 — 17 (27 — 52); л. л. системы Рика 12 (29), 14 (40), 15 (45), 16 (47, 8, 9); нахождение логар. по числу и обратно с пом. л. л. 16 (46); производство других действий — см. по их названиям; точность вычислений по л. л. 12 (30), 71 (198).  
 Логарифмическая спираль, см. спираль.  
 Логарифмическая функция и ее график 44 (122); характер возрастания л. ф. 44 (123), 56 (153); диффер. л. ф. 56 (152).  
 Логарифмическая шкала 11 (27).  
 Логарифмы, переход от одной системы к другой 23 (67), 44 (124), 56 (152); см. модуль; л. натуральные или неперовы 23 (66), 44 (124), 56 (153); основание натуральных л., число  $e$  23 (65).  
 Маклорина формула 144 (336).  
 Максимумы и минимумы функции 77 (214); м. и м. квадрат. функции 38 (110), правила для нахождения м. и м. 79 (219), 80 (221); примеры: затухающие колебания 81 (222), кривые резонанса



- 82 (224). См. наибольш. и наименьш. значения функции.
- Масштаб шкал на лог. линейке 11 (28), 16 (47—49); м. на осях координат 29 (93), 30 (88), 31 (90—95), 34 (99, 101), 51 (145), 65 (184), 92 (250\*); м. при графич. дифференцир. 66 (186).
- Метод координат 88 и сл. (243 и сл.).
- Метод неопределенных коэффициентов при выводе формулы Тэйлора 144 (385—386), при разложении рац. дробей на простые 162—163 (442—447, особ. 444).
- Метод касательных (Ньютона) и метод хорд для вычисления корней уравн. — см. вычисление корней.
- Мнимая единица  $i$ , ее степени 140 (377, 378).
- Мнимая часть комплексного числа 140 (377).
- Мнимые числа 140 (377).
- Модуль для перехода от одной системы логар. к другой, в частности, от натур. к десятичн. 23 (67), 24 (69), 44 (124); м. комплексного числа 142 (381).
- Наибольшие и наименьшие значения квадрат. функции 36 (105), 38 (109), н. и н. зн. функции 83 (226); упрощения при их разыскании 84 (232); задачи, к ним сводящиеся 71 (199), 84—7 (228—242), 136, 13 (364), [138 (374)]; выбор независ. перем. 36 (236); случай непрерывной независ. перем. 87, 4 (241); достижение н. и н. зн. на концах промежутка 84, 3, 6 (229, 231), 85, 3, 4 (234, 235); графич. способ нахождения н. и н. зн. 31, 20, 21 (94); н. и н. зн. функции двух перемен. 87, 3 (240).
- Натуральные логарифмы — см. логарифмы.
- Начало координат 29 (93, 94).
- Чезависимая переменная 27 (80), изменение н. п. 27 (80), 31, 8 (91), при дифференцир. 69 (194), при интегриров. 156 (419).
- Неопределенные выражения вида  $\frac{0}{0}$  22, 1—5 (61—4), 26, 13 (78), 53 (151); н. в. вида  $\frac{\infty}{\infty}$  22, 6 (64—65), 102 (278); н. в. вида  $\infty - \infty$  102 (278).
- Неперово число. см. число  $e$ .
- Неявные функции 27 (80, 1), дифференцирование их 122 (325), 137 (365).
- Нормаль к кривой, ее уравн. 120 (321), отрезок н. 120 (321).
- Ньютона закон движения 63, 2 (175), применение его 63, 3, 4 (175—176).
- Ньютона метод для вычисл. корней уравн., см. метод касат.
- Обратная функция 43 (120), 44 (123); ее производная 57 (153), 58 (157), 69 (195).
- Обратные круговые или тригоном. функции 49 (138); их дифференцир. 58 (157).
- Округление чисел 3 (10), по правилу дополнения 3 (11).
- Окружность, ее уравн. неявн. 96 (268), явное 96 (268); общий вид уравн. о. 96 (269); параметрич. представл. о. 110 (295); касат. к о. 123, 4 (331); кривизна о. 133 (358); разбивка о. на местн. 26, 13 (77).
- Ордината точки 29 (86).
- Оси координат на плоскости 29 (86).
- Относительная погрешность истин. и максим. 2 (8); связь с абсол. погрешн. 2 (9); определ. о. п. по числу верных знаков 4 (12); о. п. суммы 5 (16), разности 6 (18), произвед. и частного 7 (19), степени и корня 9 (23), 71, 1 (197); о. п. при пользов. логар. линейкой 12 (30), 71, 4 (198); вычисление о. п. с помощью дифференцир. 71 (197—200).
- Парабола 2-ой степени 36 (105), 38 (108); графич. построение по точкам 36 (106); геометр. определение п., фокус, директриса 104 (282), параметр п. 106 (286); уравн. п., отнесенное к оси и касат. в вершине 104 (283); касат. и нормаль к п. 122 (329), их свойства 124 (333), построение касат. к п. 124 (333); подкасат., поднормаль 120 (321), 121, 5, 10 (323, 324); кривизна 137 (365); построение центра крив. 137 (366); эволюта параболы 139 (375); п., как предельный образ для эллипса и гиперболы 106 (286); п., как сечение кругового конуса 108 (290). Прилож. п.: цепной мост 105 (282); бросание тяжел. точки под углом к горизонту 112 (300); поверхность жидкости во вращающ. сосуде 121, 10 (324—325); прожектор 125, 2 (337), вылет (поперечина) подъемного крана 125, 3 (337).
- Парабола 3-ей степени 39 (111—112); графич. построение по точкам 39 (113); кривизна 136, 11 (364); примен. к разбивке переходной кривой на ж.-д. закруглениях 138 (371).
- Парабола полукубическая 42 (120); графич. построение по точкам 42 (120); п. п., как эволюта обыкнов. параболы 139 (375).
- Парабола  $n$ -ой степени 39 (114), графич. построение по точкам 40 (115), подкасат. 120 (321).
- Параболическая ветвь кривой 99 (114).
- Параболоид вращения 112 (302), 121, 10 (325).
- Параметрич. представление кривых 110



- (294); *примен. его* 110—112 (296—302).
- Первообразная функция, см. интеграл неопределенный.
- Перегиб, точки п. 77 (215), 129 (345), 134 (358).
- Переменная величина 19 (54); зависимость между п. в. 27 (79), независимая п. в., зависимая п. в. 27 (80); см. функция.
- Период синусоидальной величины 46 (129).
- Площадь „криволинейной трапеции“, как первообразная функция для ординаты 169 (474), определение п. с пом. неопредел. интеграла 169 (475—476).
- Площадь треугольника 91 (247), geometr. смысл знака площади 91 (248); п. многоугольника 91 (249).
- Погрешность приближ. значения — см. абсол. и относит. погрешность.
- Подера кривой 126 (340).
- Подкасательная к кривой 120 (321); *примен. к определению показателя политропы* 121, 8 (323).
- Поднормаль к кривой 120 (321); *примен.: ускорение по диаграмме (s, v)* 127, 7 (323), *жидкость во вращающемся сосуде* 121, 10 (324—325).
- Показательная функция 44 (122), характ. ее возрастания 44 (123), 57 (455); дифференцир. п. ф. 57 (155); дифференц. уравнение, характеризующее п. ф. 74, 7 (209).
- Полином целый 39 (111); дифференцир. ц. п. 59 (159—160), производн. высших порядк. 64 (177), интегрир. ц. п. 73 (204—205); корни ц. п. и разложение его на линейные множители 143 (382); простые, кратные корни 143 (383); связь между корнями и коэффиц. 143 (384); признаки кратности 145 (388); разложение ц. п. на веществ. множители первой и второй степени 145 (390); интерполиров. с пом. ц. п. 146 (390); вычисление корней ц. п. 150—153 (404—413).
- Полюс при графич. дифференц. 66 (186); п. системы координат 116 (308).
- Полярная диаграмма функциональной зависимости 117 (310—312).
- Полярное уравнение кривой 117 (312).
- Полярные координаты, п. ось, п. радиус — вектор, п. угол 116 (308).
- „Постоянная интегрирования“ 72 (202), определ. ее из условий задачи 74, 4—7 (208—210), 131 (350, 351, 353).
- Правило дополнения 3 (11).
- Правило сокращенного умножения 8 (22).
- Предел переменной величины 18—19 (53—56), действия над переменными и их п. 20 (55—58), примеры 22 (60—65), 23 (65—67).
- Приближенные значения по недост., по избытку 1 (7), с огранич. и с неогранич. точностью 18; 19 (53, 6).
- Приближенные формулы для  $\sin \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\ln(1 + \alpha)$ ,  $(1 + \alpha)^n$ ,  $\sqrt{1 + \alpha}$  и др. 26 (72—3), примеры приложения их 26 (74—8), 138 (370, 372, 373); п. ф., получен. путем дифференцир. 70 (195), 71 (196).
- Приращение незав. переменной 32 (96), 33 (98); п. функции 32 (96), 33 (98), главная часть бескон.-малого п. функции 67 (190), формула конечных приращений 68 (191).
- Производная 54 (150); вычисление ее по таблицам значений функции 64 (177); п. высших порядков 63 (174); логарифмич. производная 62 (172), 71 (197); таблица п. 75 (210—212). См. дифференцирование.
- Пропорциональность прямая 28 (84), 32 (95), 33 (98), 67 (191); обратная 31, (11,5), 16 (92—93), 41 (117).
- Прямая, ее уравн. явное 34 (100), неявное 92 (251); угловой коэффиц. 34 (100), 92 (250); п. через точку 93 (254) через две точки 93 (255), уравн. п. в форме пропорции 93 (256); уравн. прямой в отрезках 92, 7 (254), 93, 5 (257); угол между двумя прямыми 95 (261), условие параллельности 34 (101), 95 (262), условие перпендикул. 95 (262); расстояние между параллельн. п. 95 (264), от точки до прямой 95 (266).
- Равномерное движение* 32 (96), 52 (148), 94, 3 (258), *его график* 35, 1, 2 (102).
- Равнопеременное движение, в частности падение тяжелой точки* 63, 2 (175), 38, 2 (110), 74, 4 (206).
- Радиус кривизны, см. кривизна.
- Расстояние между двумя точками на плоскости 88 (243).
- Расстояние между двумя параллельн. прямыми, от точки до прямой 95 (264—6).
- Рациональные дроби, разложение на простые 147 (393 и сл.), 155, 14—19 (417), 161, 10—18 (440—441); 162 (442 и сл.).
- Рекуррентные формулы, в интегральн. исчисл. 159 (432—433).
- Синус, предел отношения к дуге 22, 4 (62); приближ. формула 26, 12 (72, 77), 138 (370, 2); см. тригонометр. функции.
- Синус гипербол. — см. гипербол. функции.
- Синусоида 45 (126); связь ее с эллипсом 99 (274).



- Синусоидальные величины 46 (128); изображен. их векторами 46 (130), 47 (136); сложение с. в. одного периода 47 (133), разных периодов 48 (135); дифференцир. с. в. 62, 2 (167), интегрир. с. в. 74, 3, 5 (207).
- Скорость равном. движения 32 (96), 33 (99), 54 (148); средняя с. 52 (146), с. неравном. движения в данный момент 52 (147), 54 (150); с. падения тяжелой точки 60, 1, 2 (162); с. ползуна в кривошипно-механизме 62, 6 (169); с. точки, производ. гармонич. колебания 62, 2 (168); затух. колебания 62, 5 (169); с. толкача в кулачном механизме 65, 4 (185), 119, 1 (318); связь между с. и пройденным путем, 52 (148), 74, 4 (208), между с. и ускорением 63, 1 (175), 74, 4 (208); с. в криволинейном движении 131 (352); с. угловая, средняя и в данный момент 53, 1 (148); получение с. и угловой с. графическим дифференцированием 66 (187—190).
- Скорость изменения функции, средняя и в данной точке 53 (148—150), 56 (153), 57 (155), 61 (166), 62, 4 (168), 72 (202), 73, 6, 7 (209), 169 (472).
- Сложение приближ. чисел 5 (15).
- Сложная функция, ее дифференцирование 61 (164), 69 (195).
- Спираль Архимедова 118 (313); касат. к А. с. 127, 1 (343), кривизна А. с. 136, 9 (363); А. с. как подера эвольвенты круга; примен.: эксцентрик, очерченный по А. с. 118 (314—315); уравновешение подъемного крыла разводного моста 126 (340).
- Спираль логарифмическая 118 (315); касат. к л. с. составляет постоянный угол с рад.-вектором 127, 3 (342—343); длина дуги л. с. 131 (353—354); кривизна л. с. 136, 5 (362); примен. в очертании ножей и фрез 127 (343—344); зубчатые колеса, очерч. по л. с. 132 (356).
- Степенная функция 40 (114), построение ее графика по точкам 40 (114—116); дифференцир. с. ф. 54 (151).
- Таблица производных и дифференциалов 75 (210—212); т. интегралов 75 (210—212), 154 (414—415), 168 (444—471).
- Таблицы логарифмов чисел и тригоном. величин, точность вычисления по ним 71 (197—199).
- Табличный способ задания функции 28 (82), вычисление производных при этом способе 64 (177).
- Тангенс, см. тригонометр. функции.
- Тангенс гиперболич. — см. гиперболич. функции.
- Точка возврата (острие) полукубич. параболы 42 (120), эволюты 139 (375).
- Трение, основной закон т. (Кулона), коэффиц. т., угол т. 85, 4, 5 (234—235), 118 (311—312).
- Тригонометрические функции и их графики 45 (125); приближ. формулы 26 (72); дифференцир. т. ф. 58 (155), 59 (161); нахождение т. ф. по углам и обратно, с пом. логар. линейки 16 (47), 26, 12 (77); погрешн. логар.-тригоном. таблиц 71, 5 (199).
- Тэйлора формула, см. формула Т.
- Убывание функции 76 (213).
- Угол, перевод у. из градусн. меры в дугую и обратно, по логар. линейке 17 (51).
- Угол между двумя прямыми 95 (261), между прямой и кривой, двумя кривыми 124, 7, 8 (331), 127 (342).
- Уклон прямой 34 (100—101), 92 (250), кривой 65 (183).
- Улитки 119 (316); эксцентрик, очерчен. по улитке 119 (317); см. карданоида.
- Умножение приближ. чисел 7 (19); сокращ. у. 8 (22); у. с пом. логар. линейки 13 (30).
- Уравнение линии или графика 30 (87), 92 (250).
- Уравнения, их решение. См. графич. реш. уравн. и вычисление корней уравн.
- Ускорение, среднее и в данный момент 63 (175); связь между путем, скоростью и у. 63, 1 (175), 74, 4 (208), у. ползуна кривошипного механизма 63, 5 (176); у. точки, производ. гармонич. колебания 63, 3 (175), затухающие колебания 63, 4 (175); у. ползуна конвейера, вычислен. по таблице значений скорости 64, 6 (180); у. угловое 63, 1 (175); вычисление углового у. по таблице значений числа оборотов в минуту 64, 9 (181); получение у. и углового у. графическим дифференцированием 66 (187—190).
- Фаза синусоидальной величины, начальная ф. 46 (129).
- Формула конечных приращений 68 (191).
- Формула интерполяц. Лагранжа 146 (392).
- Формула, см. аналит. способ задания функции; ф. приближ., см. приближ. ф.; ф. эмпирич., см. эмпирич. ф.
- Формулы Тэйлора и Маклорина для целых полиномов 144 (385), примен. к выводу бинома Ньютона 144 (387), к установл. признаков кратности корня 145 (388).
- Функция, аргумент ее 27 (80); способы задания ф.: аналитич. 28 (82), табличн.



- 28 (82), графич. 30 (89); ф. явная, неявная 27 (80—81); обратная ф. 43 (120), 44 (123); сложная ф. 61 (164); многозначная ф. 42 (120), 43 (122), 49 (138); ф. нескольких переменных 27 (81), 87 (240); ф. подынтегральная 72 (200); ф. первообразная — см. интеграл неопределенный; ф. линейная и т. д. — см. по названиям функций.
- Центр кривизны, см. кривизна.
- Центр мгновенный в плоском движении 125 (339—340), геом. место ц. (центроида) 103, 1 (279).
- Центр тяжести системы матер. точек 90 (246).
- Центробежная сила, пов. жидкости во вращающемся сосуде 121, 10 (324); ж.-д. закругления, подъем наружного рельса 138 (369—370).
- Цепная линия 105 (284); касат. к ц. л. 120 (320); длина дуги ц. л. 131 (350); кривизна ц. л. 136, 1 (361); см. катеноида.
- Циклоида, ее параметр. представление 113 (302), явное уравн. 113 (304); касат. к ц. 126 (338); кривизна ц. 136, 2 (362).
- Частота синусоидальной величины 46 (129).
- Числа рациональные и иррациональные 23 (65), 114 (365).
- Числа вещественные и комплексные 140 (377); ч. мнимые, сопряженные 140 (377); чисто мнимые ч. 141 (379); действия над комплексн. ч. 140 (377—379); геометрич. использование комплексн. ч. 141 (379); модуль и аргумент компл. ч., тригонометр. форма компл. ч. 142 (381).
- Число  $e$ , как предел  $(1 + \frac{1}{\alpha})^\alpha$  при  $\alpha \rightarrow 0$  23 (65), см. барометрич. формула.
- Число верных знаков, см. верные знаки.
- Число целых знаков 13 (32).
- Шкала равномерная и логарифмическая 11 (27); ш. на логарифм. линейке 12 (29), ш. квадратов, кубов 12 (29); равном. ш. на логарифм. линейке 16 (46), ш. синусов и тангенсов 16 (47).
- Штрихи особые на логар. линейке 17 (51).
- Эвольвента круга и ее параметр представл. 115 (307); касат. 126 (340); длина дуги 132, 4 (355); подера э. к. (Архимедова спираль) 126 (340); кривизна 136, 4 (362); примен. к уравновешен. подъемного крыла разводного моста 126 (340).
- Эволюты и эвольвенты 139 (374).
- Эйлеровы подстановки 165 (453).
- Эксцентрики, см. кулаки вращающиеся.
- Эксцентриситет эллипса, гиперболы, параболы — см. эти кривые.
- Эллипс, геом. определ., фокусы э. 97 (270), центр и оси э. 98 (271—2); эксцентриситет э. 98 (272); параметр э. 106 (285); уравн. э., отнесенное к осям 97 (271), к вершине 106 (285); параметрич. представление э. 110 (295); графич. построение э. по точкам 99 (273); эллипсограф 111 (297); э., как проекция окружности 99 (273—274); э., как сечение кругов. цилиндра 99 (274); э., как сечение кругового конуса 108 (290); сопряж. диаметры э. 100 (275); касат. и норм. к э. 122 (326), их свойства 122 (328), 124 (331); проведение касат. к э. 122 (327), 123 (328—329); кривизна 136, 12 (364), 137 (367); построение центра кривизны 137 (367—368); эволюта э. 139 (375); исследование общего уравнения э. 109 (291); применение э.: антипарал. кривошип 103 (279); график  $(s, v)$  для гармон. колебания 111 (296); э. напряжений 111 (296); сложение перпендикулярных гармонич. колебаний 111 (296—297); эллиптические коромысла 111 (299); эллиптические колеса 125 (334).
- Эллиптические интегралы 170 (477).
- Эмпирическая формула 41 3, 4 (120), 60 3, 4 (162); способ натянутой нити для установления линейной э. ф. 94 (259); определение показателя для э. ф. степенного вида, с пом. подкасательной 129 (324).
- Эпициклоида, ее параметр. представл. 114 (304); касат. к э. 126 (339); длина дуги 132, 3 (355); кривизна 136, 3 (362); см. кардиоида.



## ОГЛАВЛЕНИЕ.

### Глава I. Приближенные числа.

	СТР.
1. Абсолютная погрешность приближенного значения величины . . . . .	7
2. Относительная погрешность . . . . .	8
3. Округление чисел. Число верных знаков . . . . .	10
4. Определение относительной погрешности по числу верных знаков и обратно . . . . .	12
5. Действия над приближенными числами. Сложение . . . . .	15
6. Вычитание . . . . .	18
7. Умножение и деление . . . . .	19
8. Правило сокращенного умножения . . . . .	22
9. Возвышение в степень и извлечение корня . . . . .	23
10. Примеры более сложных выражений . . . . .	24

### Глава II. Логарифмическая линейка.

11. Равномерная и логарифмическая шкалы . . . . .	27
12. Описание логарифмической линейки; производство отсчетов . . . . .	29
13. Умножение и деление . . . . .	30
14. Возвышение в квадрат и в куб, извлечение квадратного и кубического корня . . . . .	37
15. Решение кубических уравнений . . . . .	42
16. Логарифмы. Тригонометрические величины . . . . .	46
17. Особые штрихи на логарифмической линейке . . . . .	51

### Глава III. Переменная величина и ее предел.

18. Приближенные значения с ограниченной и неограниченной точностью . . . . .	52
19. Понятие о пределе и о бесконечно малой величине . . . . .	54
20. Действия над переменными и их пределами . . . . .	56
21. Понятие о бесконечно большой величине . . . . .	58
22. Примеры на вычисление пределов. Понятие о неопределенных выра- жениях . . . . .	60
23. Число $e$ . Натуральные логарифмы . . . . .	65
24. Барометрическое нивелирование . . . . .	67
25. Сравнение бесконечно малых величин. Классификация их . . . . .	69
26. Некоторые приближенные формулы и их приложения . . . . .	72

### Глава IV. Функциональная зависимость. Элементарные функции.

27. Зависимость между переменными величинами . . . . .	79
28. Таблица и формула. Интерполирование . . . . .	82
29. Прямоугольные координаты точек на плоскости . . . . .	84
30. График функции. Графическое интерполирование . . . . .	87
31. Примеры и задачи на графики . . . . .	90
32. Закон пропорционального изменения . . . . .	95
33. Основное свойство линейной функции . . . . .	98
34. График линейной функции . . . . .	99
35. Примеры и задачи . . . . .	102



	Стр.
36. Квадратичная функция и парабола . . . . .	105
37. Перенос начала координат . . . . .	107
38. Общий случай квадратичной функции . . . . .	108
39. Полином третьей степени и кубическая парабола . . . . .	111
40. Степенная функция . . . . .	114
41. Гипербола . . . . .	117
42. Полукубическая парабола . . . . .	120
43. Понятие об обратной функции . . . . .	—
44. Показательная и логарифмическая функции . . . . .	122
45. Тригонометрические функции . . . . .	125
46. Синусоидальные величины . . . . .	128
47. Сложение гармонических колебаний одного периода . . . . .	123
48. Сложение гармонических колебаний разных периодов. Биения . . . . .	135
49. Обратные тригонометрические или круговые функции . . . . .	138
50. Гиперболические функции . . . . .	140
51. Решение уравнений с помощью графиков . . . . .	142

### Глава V. Производная и дифференциал.

52. Средняя скорость и скорость в данный момент . . . . .	146
53. Скорость изменения функции, средняя и в данной точке . . . . .	148
54. Производная . . . . .	150
55. Дифференцирование степенной функции . . . . .	151
56. Дифференцирование логарифмической функции . . . . .	152
57. Производные взаимно обратных функций. Дифференцирование показательной функции . . . . .	153
58. Дифференцирование тригонометрических функций и их обратных . . . . .	155
59. Основные правила дифференцирования . . . . .	158
60. Задачи . . . . .	162
61. Дифференцирование сложной функции . . . . .	164
62. Примеры и задачи . . . . .	167
63. Производные высших порядков . . . . .	174
64. Вычисление производных по таблицам значений функции . . . . .	177
65. Уклон кривой и касательная . . . . .	183
66. Графическое дифференцирование . . . . .	186
67. Приращение и дифференциал . . . . .	190
68. Формула конечных приращений (формула Лагранжа) . . . . .	192
69. Вычисление дифференциалов . . . . .	193
70. Приближенные формулы, получаемые с помощью дифференциала . . . . .	195
71. Приложения дифференциала к приближенным вычислениям . . . . .	196
72. Первообразная функция (интеграл) . . . . .	200
73. Составление таблицы интегралов; простейшие правила интегрирования . . . . .	203
74. Примеры и задачи . . . . .	206
75. Сводка полученных правил дифференцирования и интегрирования . . . . .	210

### Глава VI. Ход изменения функции.

76. Признаки возрастания или убывания функции . . . . .	213
77. Максимумы и минимумы функции . . . . .	214
78. Примеры . . . . .	215
79. Первое правило для нахождения максимумов и минимумов. Задачи . . . . .	219
80. Второе правило для нахождения максимумов и минимумов . . . . .	220
81. Затухающие колебания . . . . .	222
82. Резонанс . . . . .	224
83. Наибольшее и наименьшее значения функции . . . . .	226
84. Примеры и задачи . . . . .	228
85. Дальнейшие задачи . . . . .	232
86. Выбор независимой переменной . . . . .	236
87. Задачи . . . . .	238



## Глава VII. Кривые на плоскости.

88. Метод координат. Расстояние между двумя точками . . . . .	243
89. Деление отрезка в данном отношении . . . . .	244
90. Центр тяжести системы материальных точек . . . . .	246
91. Площадь треугольника и многоугольника . . . . .	247
92. Прямая линия и ее уравнение . . . . .	250
93. Прямая через точку, через две точки . . . . .	254
94. Линейная функциональная зависимость . . . . .	257
95. Дальнейшие задачи на прямую . . . . .	260
96. Окружность . . . . .	267
97. Эллипс . . . . .	270
98. Общий вид кривой. Оси и центр симметрии . . . . .	271
99. Эллипс и вписанный и описанный круги . . . . .	272
100. Сопряженные диаметры эллипса . . . . .	275
101. Гипербола . . . . .	276
102. Общий вид кривой. Оси и центр симметрии. Асимптоты . . . . .	277
103. Примеры применения эллипса и гиперболы . . . . .	279
104. Парабола . . . . .	282
105. Форма нити, отягченной грузом . . . . .	283
106. Уравнения, отнесенные к вершине . . . . .	285
107. Поворот осей координат. Общий случай преобразования координат. . . . .	285
108. Кривые второго порядка . . . . .	289
109. Исследование общего уравнения эллипса . . . . .	291
110. Параметрическое представление кривых . . . . .	294
111. Механическое черчение эллипса . . . . .	297
112. Бросание точки под углом к горизонту. Траектория водяной струи. . . . .	300
113. Циклоида . . . . .	302
114. Эпи- и гипоциклоида . . . . .	304
115. Эвольвента круга . . . . .	307
116. Полярные координаты . . . . .	308
117. Полярные диаграммы. Полярные уравнения кривых . . . . .	310
118. Спирали . . . . .	313
119. Улитки. Лемниската . . . . .	316

## Глава VIII. Кривые на плоскости.

120. Касательная и связанные с нею отрезки . . . . .	320
121. Примеры и задачи . . . . .	322
122. Проведение касательных к кривой, заданной неявным уравнением . . . . .	325
123. Примеры и задачи . . . . .	329
124. Свойства касательных и нормалей к кривым второго порядка . . . . .	331
125. Примеры применения этих свойств . . . . .	334
126. Проведение касательных к кривой, заданной параметрически . . . . .	338
127. Проведение касательных к кривой, заданной полярным уравнением . . . . .	341
128. Выпуклость и вогнутость кривой . . . . .	344
129. Точки перегиба . . . . .	345
130. Дифференциал дуги кривой . . . . .	347
131. Вычисление длины дуги . . . . .	350
132. Примеры и задачи . . . . .	354
133. Кривизна кривой линии (средняя) . . . . .	357
134. Кривизна кривой линии в точке . . . . .	358
135. Радиус и центр кривизны . . . . .	360
136. Примеры и задачи . . . . .	361
137. Определение радиуса кривизны для кривой, заданной неявным уравнением . . . . .	365
138. Железнодорожные закругления и переходные кривые . . . . .	369
139. Понятие об эволютах и эвольвентах . . . . .	374



## Глава IX. Комплексные числа. Целые полиномы.

140. Комплексные числа и действия над ними . . . . .	377
141. Геометрическое истолкование комплексных чисел . . . . .	379
142. Тригонометрическая форма комплексного числа . . . . .	381
143. Полином и его корни . . . . .	382
144. Формула Тэйлора . . . . .	385
145. Признаки кратности корней. Разложение полинома на вещественные множители . . . . .	388
146. Интерполирование с помощью полиномов . . . . .	390
147. Рациональные дроби. Разложение на простые дроби . . . . .	393
148. Исследование кубического уравнения . . . . .	397
149. Вычисление корней кубического уравнения . . . . .	400
150. Вычисление корней произвольного уравнения . . . . .	404
151. Метод Ньютона (метод касательных) . . . . .	405
152. Метод хорд и комбинированный метод . . . . .	408
153. Примеры и задачи . . . . .	409

## Глава X. Первообразная функция (неопределенный интеграл).

154. Простейшие правила и формулы . . . . .	414
155. Интегрирование с помощью простейших приемов. Примеры и задачи . . . . .	415
156. Интегрирование путем замены переменной (подстановки) . . . . .	419
157. Примеры и задачи на замену переменных . . . . .	423
158. Интегрирование по частям . . . . .	428
159. Примеры и задачи. Рекуррентные формулы . . . . .	429
160. Интегрирование рациональных дробей. Простые дроби . . . . .	424
161. Примеры и задачи . . . . .	438
162. Разложение правильных дробей на простые. Метод неопределенных коэффициентов . . . . .	442
163. Примеры и задачи . . . . .	445
164. Интегрирование некоторых иррациональных выражений . . . . .	447
165. Эйлеровы подстановки . . . . .	453
166. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений . . . . .	456
167. Примеры и задачи . . . . .	461
168. Таблица употребительных интегралов . . . . .	464
169. Геометрическое истолкование первообразной функции. Определенный интеграл . . . . .	471
170. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции . . . . .	475
Предметный указатель . . . . .	478