Часть II
Выпуск 2

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

проф.
Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

II

выпуск 2

ГТТИ
1933

Проф. Г. М. ФИХТЕНГОЛЬЦ

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ВЫПУСК ВТОРОЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД 1933 МОСКВА

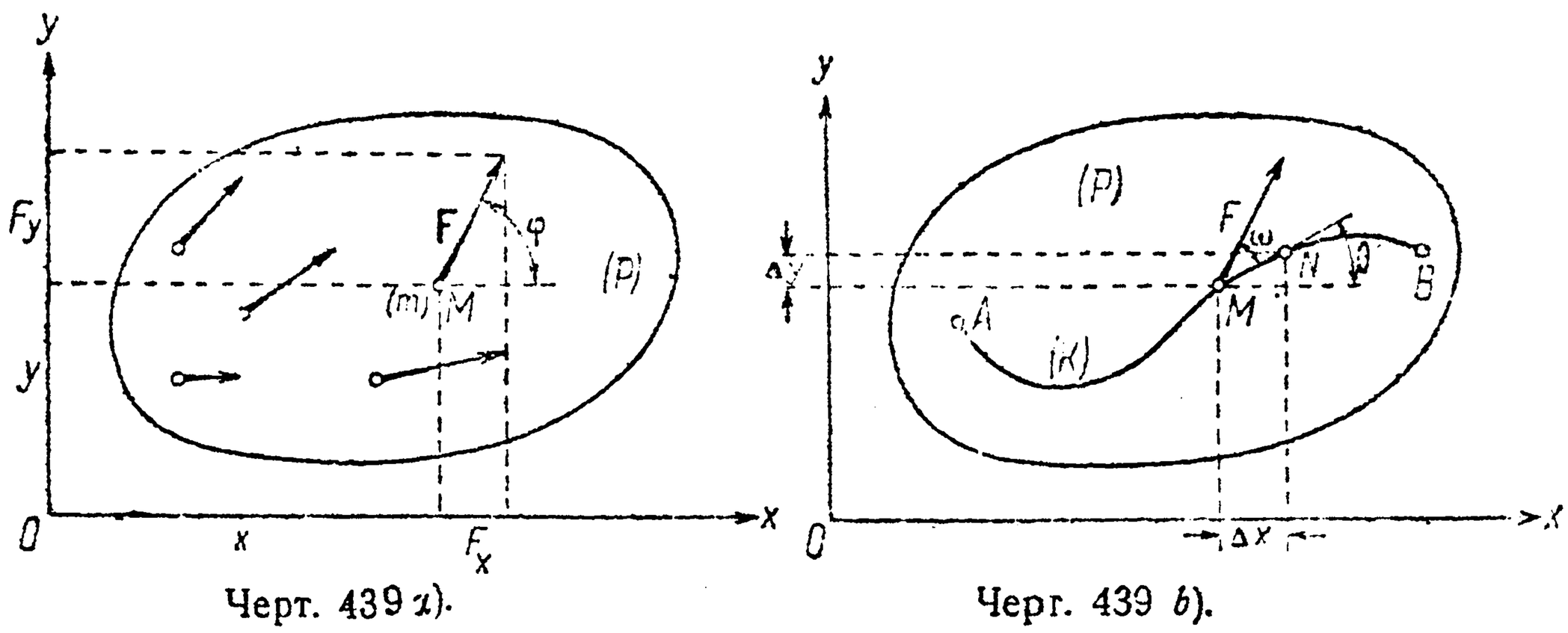
T 21-5-2

1-я типография ОНТИ им. Евгении Соколовой. Ленинград, пр. Красных Командиров, 29.

Глава XV.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

246. Работа сил поля. Криволинейный интеграл. В настоящей главе мы познакомимся с некоторыми важными видоизменениями и обобщениями понятия об определенном интеграле. Плодотворный принцип „суммирования бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых“ (ср. главу XI вып. I) найдет здесь дальнейшие применения. Начнем с установления понятия о *криволинейном интеграле*, к кото-



Черт. 439 *a*). Черт. 439 *b*).

рому мы подойдем естественным образом, исходя из рассмотрения следующего вопроса.

Пусть в некоторой части (P)* плоскости xOy (черт. 439 *a*) в каждой ее точке M на помещенную в ней единицу массы действует определенная сила **H**, величина и направление которой зависят только от положения точки M; если масса m помещенной в M материальной точки отлична от единицы, то действующая на нее сила будет $\mathbf{F} = m\mathbf{H}$. При этих предположениях рассматриваемая область (P) называется (*плоским*) *силовым полем*, а сила **H**, действующая на единицу массы,—*напряжением поля*. Если силы поля, вместо обыкновенных масс, действуют на магнитную массу или электрический заряд, то поле называют, соответственно, *магнитным* или *электрическим*.

Проекции силы **F** на оси координат будут, очевидно, функциями от координат x, y точки M, в которой эта сила приложена:

$$F_x = P(x, y), \quad F_y = Q(x, y).$$

---

* Мы обыкновенно будем обозначать буквой в скобках: (P) — *геометрический образ* (в нашем случае—область), а той же буквой без скобок: P—величину образа (в нашем случае—площадь области), т. е. *число*.

Если через φ обозначить угол, который составляется направлением силы с осью Ox, то очевидно

$$\cos\varphi = \frac{P}{F}, \qquad \sin\varphi = \frac{Q}{F}, \tag{1}$$

где $F = |\mathbf{F}|$.

Поставим себе теперь задачей определить величину L работы, которую производят силы поля по отношению к материальной точке массы m (магнитной массе, электрическому заряду), если эта точка описывает в пределах поля некоторую криволинейную траекторию (K), соединяющую две точки A и B (черт. 439-b).

С этой целью, разобьем кривую (K) на элементарные части, с помощью ряда произвольно взятых на ней точек.

Пусть $MN = \Delta s$ будет одна из этих частей, которую приближенно можно принять за прямолинейный отрезок; ее проекции на оси будут Δx и Δy. Если через θ обозначить угол, который элемент Δs составляет с осью Ox, то

$$\cos\theta = \frac{\Delta x}{\Delta s}, \qquad \sin\theta = \frac{\Delta y}{\Delta s}. \tag{2}$$

Предположим, что сила $\mathbf{F}$, действующая на нашу материальную точку в положении M, сохранит свою величину и направление на перемещении Δs; тогда соответствующая этому перемещению элементарная работа представится так:

$$\Delta L = F \cdot \cos\omega \cdot \Delta s$$

где $\omega = \varphi - \theta$ есть угол между направлениями силы и перемещения. Это выражение последовательно преобразуем, с учетом формул (1) и (2):

$$F \cdot \Delta s\,(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) = P \cdot \Delta x + Q \cdot \Delta y.$$

Суммируя, для искомой величины работы L найдем выражение вида

$$\sum_{(K)} P \cdot \Delta x + Q \cdot \Delta y, \tag{3}$$

где указатель (K) под знаком суммы напоминает о том, что суммирование должно быть распространено на все элементы кривой (K).

Вспомнив ряд сделанных нами упрощающих предположений, читатель легко даст себе отчет в том, что выражение это дает лишь приближенное значение для L, и притом тем более точное, чем меньше элементы, на которые мы разложили кривую (K).

Истинная величина работы L получится отсюда при предельном переходе, в предположении, что число точек деления безгранично растет, а расстояния между ними (а с ними и все Δx и Δy) одновременно стремятся к нулю. *Предел суммы* (3) *обозначают символом*

$$\int_{(L)} P\,dx + Q\,dy \tag{4}$$

и называют **криволинейным интегралом**, *распространенным на кривую* (K). Итак, окончательно, имеем такое общее выражение для искомой работы:

$$L = \int\limits_{(K)} P\,dx + Q\,dy.$$

Мы видим, что криволинейный интеграл, подобно обыкновенному определенному интегралу, также в некоем смысле является *суммой бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых*, но лишь слагаемые эти другого типа. В случае обыкновенного определенного интеграла, мы разлагали на элементы промежуток изменения x (или — если угодно — соответствующий отрезок на оси Ox), для каждого элемента в отдельности вычисляли слагаемое вида

$$f(x) \cdot dx$$

и затем все такие слагаемые „суммировали". В случае криволинейного интеграла мы точно так же разлагаем на элементы данную кривую (K) (отсюда и название „криволинейный"), для каждого элемента вычисляем выражение

$$P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy$$

и „суммируем" все такие выражения, построенные для разных элементов кривой. В обоих случаях мы говорим „суммируем"—для простоты; на самом деле, кроме суммирования, имеется в виду и предельный переход.

Суммы типа (3) и их пределы типа (4) встречаются во многих важных задачах; в следующем n° читатель найдет тому дальнейшие примеры.

Для фактического вычисления криволинейного интеграла типа (4) нужно иметь аналитическое представление кривой (K), которая указывает путь интегрирования. Пусть эта кривая, напр., представлена параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{5}$$

причем t изменяется от t_0 до T. Тогда, подставляя выражение x и y через t не только в множители P и Q, но и в дифференциалы, мы сведем криволинейный интеграл (4) к обыкновенному определенному интегралу

$$\int\limits_{t_0}^{T} (P \cdot x'_t + Q \cdot y'_t)\,dt,$$

который вычислять умеем. При этом пределы t_0 и T интеграла выбираем так, чтобы при изменении t от t_0 до T точка передвигалась по кривой (K) от ее начала к концу.

В частности, если кривая (K) выражена явным уравнением

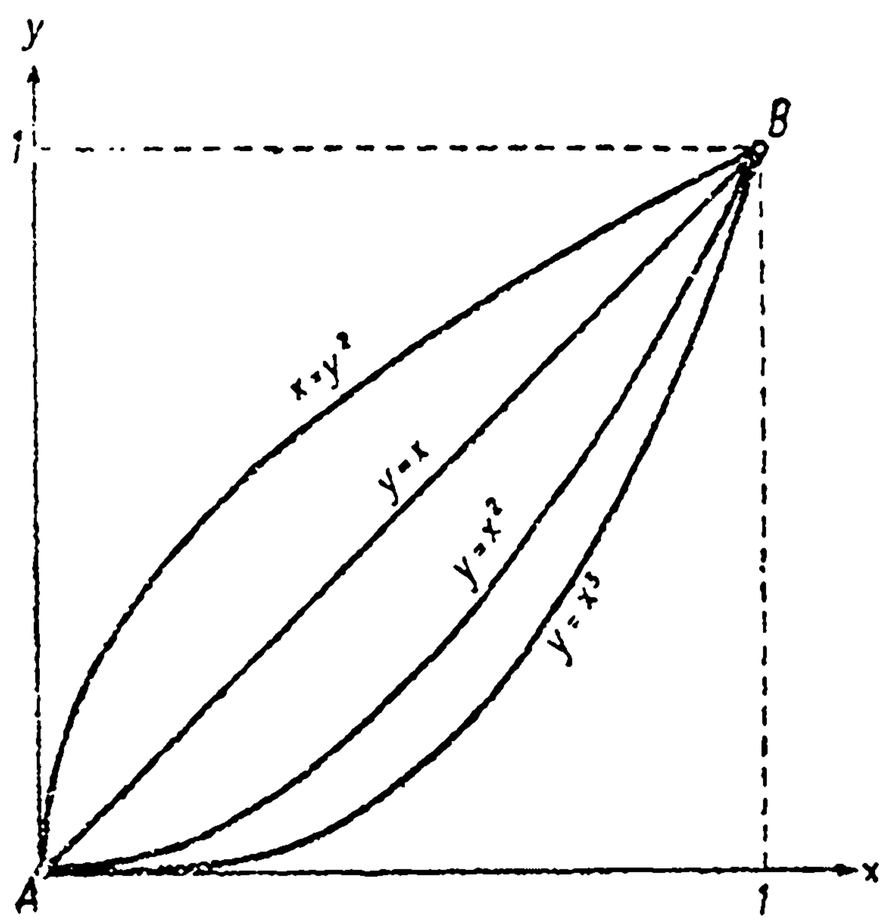
$$y = f(x),$$

так что роль „параметра“ играет x, то нужно лишь, вместо y, подставить в (4) его выражение через x; это даст:

$$\int_{x_0}^{X} (P + Q \cdot y'_x)\, dx,$$

где x_0 и X—крайние значения x.

Заметим, что кривая (K), вдоль которой берется интеграл (4), может оказаться и замкнутой. В подобном случае „начало“ и „конец“ кривой совпадают и, во избежание недоразумений с направлением интегрирования, условливаются вести интегрирование всегда в направлении, соответствующем вращению на угол $\frac{\pi}{2}$ от оси Ox до оси Oy, т. е. при обычном расположении осей на плоскости—против часовой стрелки; это направление и называют положительным. В случае необходимости проинтегрировать в отрицательном направлении, ставят перед интегралом знак (—), а интеграл все же берут в положительном направлении.



Черт. 440.

247. Примеры и задачи на криволинейные интегралы. 1. Вычислить значение криволинейного интеграла

$$I = \int_{(K)} xy\, dx + (y - x)\, dy$$

вдоль кривой (K), соединяющей точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$, если (K) есть: a) прямая $y = x$, b) парабола $y = x^2$; c) парабола $x = y^2$; d) кубическая парабола $y = x^3$ (черт. 440).

Решение. a) Подставляя в I $y = x$, $dy = dx$ и изменяя x между 0 и 1, получим:

$$I = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

b) Имеем $y = x^2$, $dy = 2x\, dx$, так что

$$I = \int_0^1 x \cdot x^2\, dx + (x^2 - x) \cdot 2x\, dx = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2)\, dx = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

c) В этом случае проще за независимую переменную взять y; она также изменяется в промежутке от 0 до 1. Имеем: $x = y^2$, $dx = 2y\, dy$,

$$I = \int_0^1 y^2 \cdot y \cdot 2y\, dy + (y - y^2)\, dy = \int_0^1 (2y^4 - y^3 + y)\, dy = \frac{2}{5}y^5 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = \frac{17}{30}.$$

d) Наконец, здесь $y = x^3$, $dy = 3x^2 \cdot dx$ и

$$I = \int_0^1 x \cdot x^3\, dx + (x^3 - x) \cdot 3x^2\, dx = \int_0^1 (3x^5 + x^4 - 3x^3)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4\Big|_0^1 = -\frac{1}{20}.$$

2. То же для интеграла

$$I = \int_{(K)} 2xy\, dx + x^2\, dy.$$

Отв. Во всех случаях $I = 1$.

3. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{(AB)} (x - y^2)\,dx + 2xy\,dy,$$

если в качестве пути интегрирования берется одна из следующих линий, соединяющих точки $A(0, 0)$ и $B(1, 1)$:

a) прямая AB, выражаемая уравнением $y = x$;

b) ломаная ACB, состоящая из отрезка AC оси Ox ($y = 0$) и отрезка CB прямой $x = 1$;

c) ломаная ADB, состоящая из отрезка AD оси Oy ($x = 0$) и отрезка DB прямой $y = 1$ (черт. 441).

Решение. a) Так как $y = x$ и $dy = dx$, то

$$I = \int\limits_0^1 (x - x^2)\,dx + 2x^2\,dx = \int\limits_0^1 (x + x^2)\,dx = \frac{5}{6}.$$

b) Вдоль отрезка AC: $y = 0$ и $dy = 0$, так что соответствующая ему часть интеграла I будет равна

$$\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2};$$

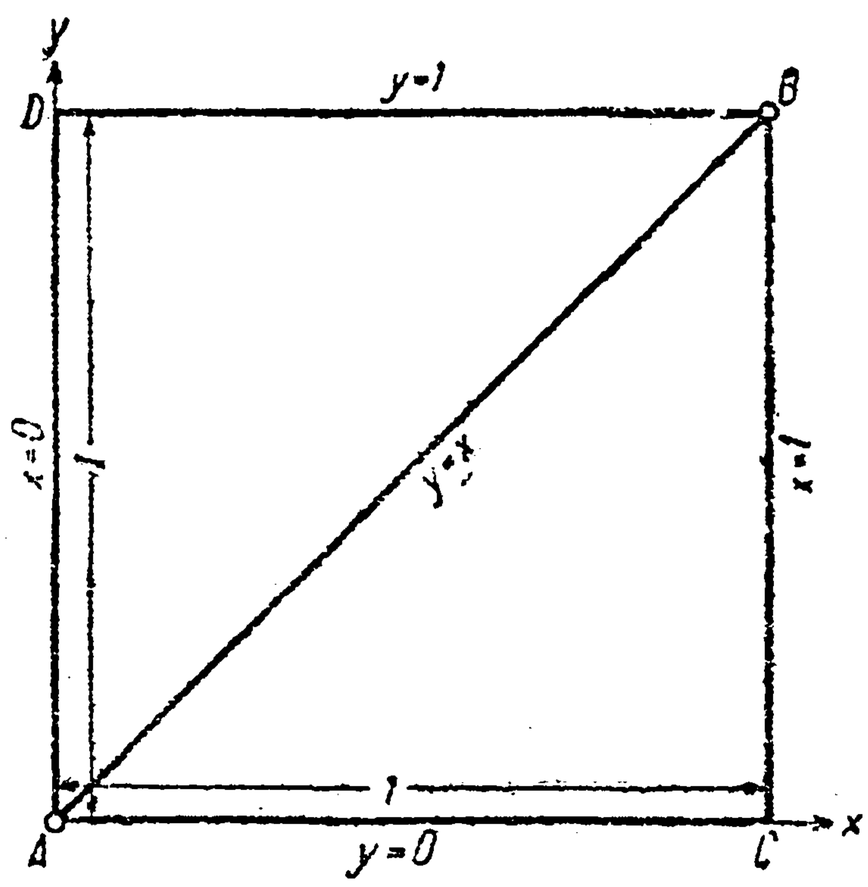
вдоль отрезка CB: $x = 1$, $dx = 0$ и соответствующий интеграл

$$\int\limits_0^1 2y\,dy = 1.$$

Таким образом, окончательно, $I = \frac{3}{2}$

c) Аналогично предыдущему, найдем (так как вдоль отрезка AD интеграл равен нулю):

$$I = \int\limits_0^1 (x - 1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}.$$



Черт. 441.

4. То же для интеграла

$$I = \int (y^2 - 2xy)\,dx + (2xy - x^2)\,dy.$$

Отв. Во всех случаях $I = 0$.

5. Вычислить интеграл

$$I = \int (x^2 + 2xy)\,dy$$

вдоль верхней части эллипса

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,$$

считая слева направо (т. е. от $t = \pi$ до $t = 0$).

Решение. Подставляя вместо x и y их выражения и полагая $dy = b \cdot \cos t \cdot dt$, получим:

$$I = \int\limits_\pi^0 (a^2 \cdot \cos^2 t + 2ab \cdot \cos t \sin t)\, b \cdot \cos t\,dt = a^2 b \cdot \int\limits_\pi^0 \cos^3 t\,dt + 2ab^2 \cdot \int\limits_\pi^0 \cos^2 t \sin t\,dt =$$

$$= a^2 b \cdot \left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Big|_\pi^0 - 2ab^2 \cdot \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_\pi^0 = -\frac{4}{3}ab^2.$$

6. Вычислить криволинейные интегралы

$$I_1 = \int x\,dy - y\,dx,\quad I_2 = \int x\,dy + y\,dx$$

вдоль окружности, описанной радиусом 1 вокруг точки (1, 1).

Указание. Параметрические уравнения окружности будут:

$$x = 1 + \cos t,\qquad y = 1 + \sin t,$$

причем изменение t от 0 до 2π соответствует положительному обходу контура.

Отв. $I_1 = 2\pi$, $I_2 = 0$.

7. Вычислить интегралы, упомянутые в задачах 1—4, вдоль дуг ANB и AMB окружностей, изображенных на черт. 442.

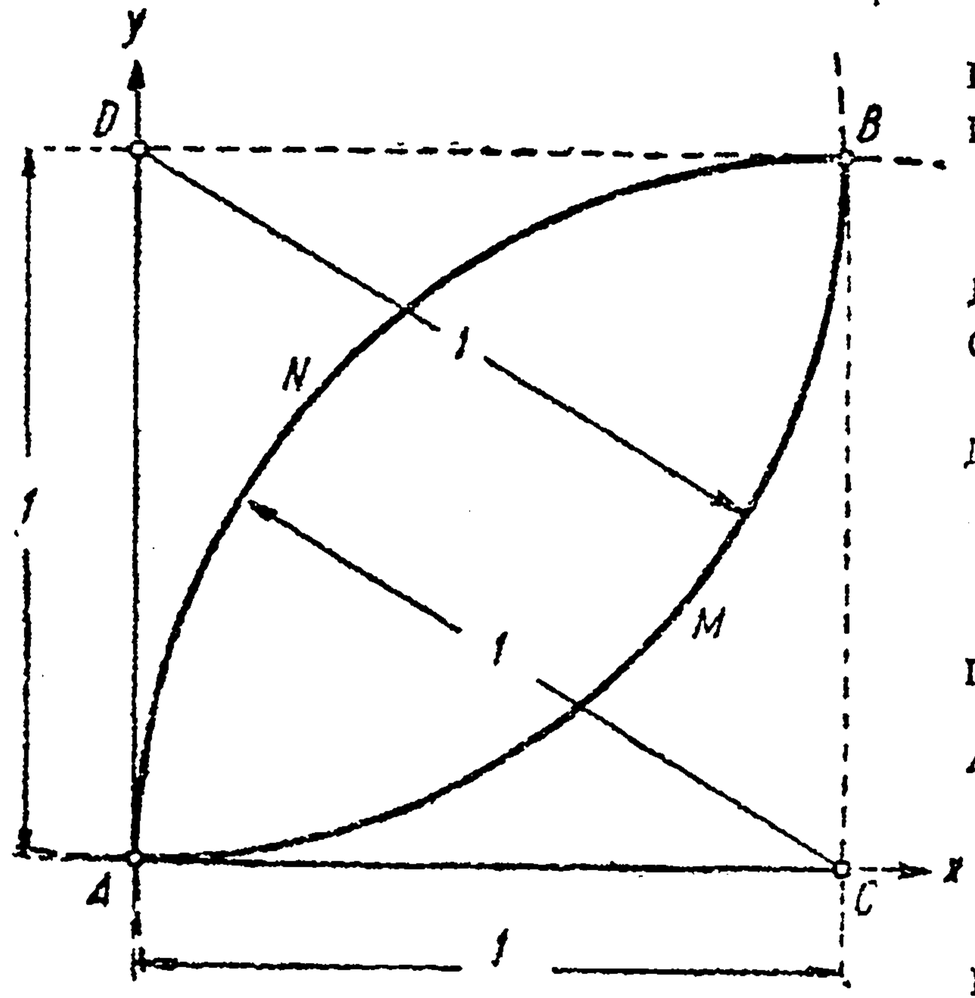
Указание. Параметрические уравнения для дуги ANB:

$$x = 1 + \cos t,\qquad y = \sin t,$$

причем t изменяется от π до $\frac{\pi}{2}$, а для дуги AMB:

$$x = \cos t,\qquad y = 1 + \sin t,$$

и на этот раз t изменяется от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π.



Черт. 442.

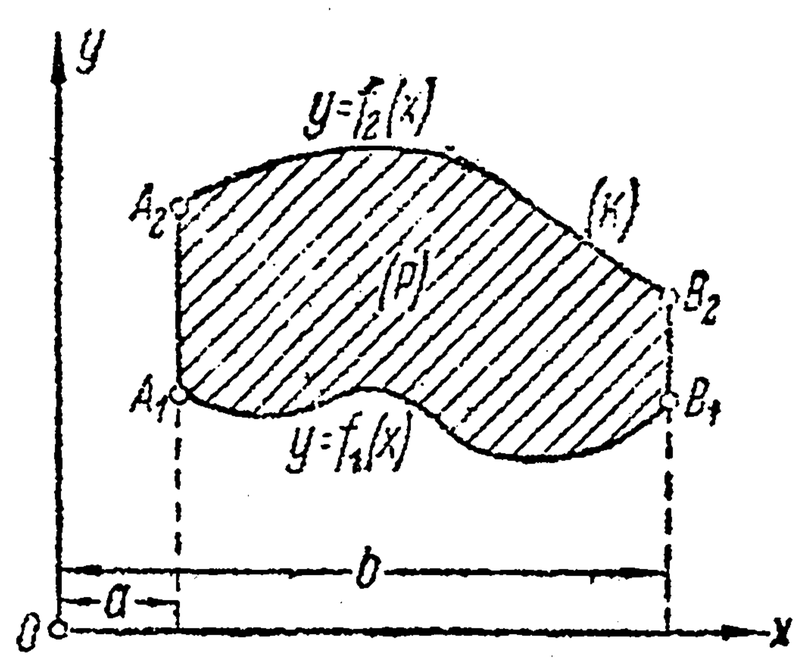
Отв. Для дуги ANB, напр., соответственно: $I = \frac{\pi}{2} - \frac{11}{6}$; 1; $\frac{1}{6}$; 0.

8. Вернемся к одной задаче на вычисление площади, которой мы уже занимались в 171. Рассмотрим вновь фигуру $A_2A_1B_1B_2$ (черт. 443), ограниченную снизу кривой $y = f_1(x)$, сверху же кривой $y = f_2(x)$, а с боков—двумя вертикальными отрезками. Площадь ее P выражается по формуле (2*b*), 171:

$$P = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_b^a f_1(x)\,dx.$$

Не трудно видеть, что эти интегралы можно рассматривать и как „криволинейные интегралы", взятые по кривым (B_1A_1) и (A_2B_2):

$$\int_a^b f_2(x)\,dx = \int_{(A_2B_2)} y\,dx,\qquad \int_b^a f_1(x)\,dx = \int_{(B_1A_1)} y\,dx.$$



Черт. 443.

Действительно, желая вычислить, напр., интеграл $\int\limits_{(A_2B_2)} y\,dx$ вдоль кривой $y = f_2(x)$, при изменении x от a до b (что отвечает перемещению точки от A_2 к B_2), мы должны подставить в подинтегральное выражение $f_2(x)$, вместо y; а это и приведет нас к обыкновенному определенному интегралу $\int_a^b f_2(x)\,dx$. Итак,

$$P = \int\limits_{(A_2B_2)} y\,dx + \int\limits_{(B_1A_1)} y\,dx.$$

Не изменяя результата, можно сюда прибавить еще интегралы

$$\int\limits_{(B_2B_1)} y\,dx \text{ и } \int\limits_{(A_1A_2)} y\,dx,$$

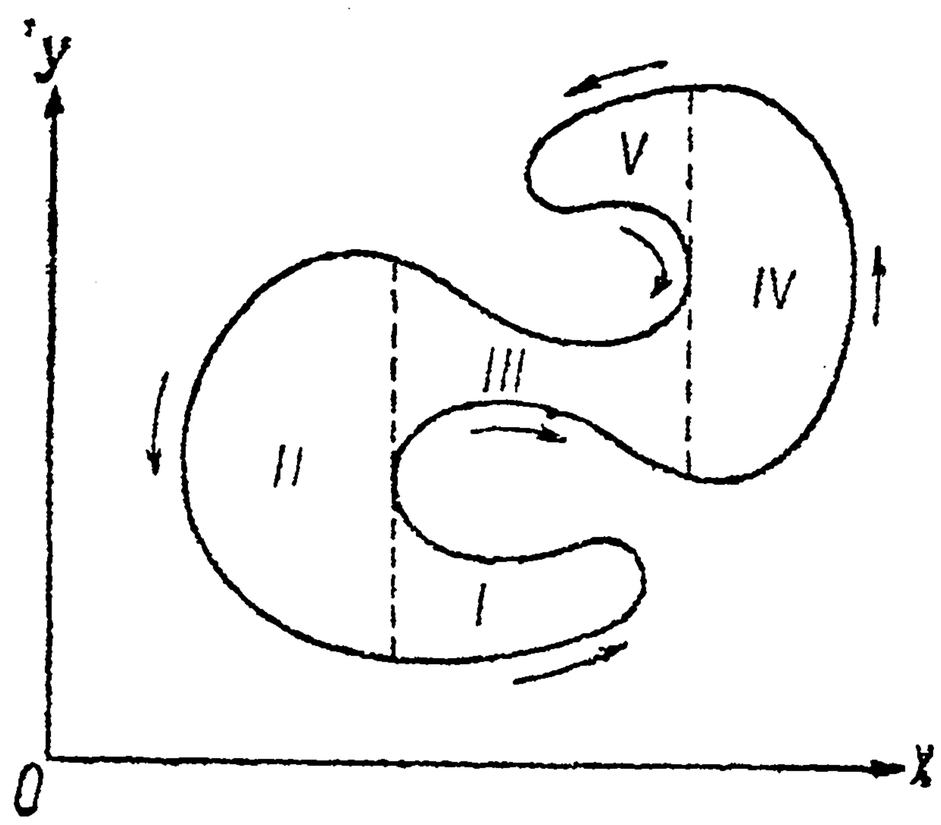
равные нулю, ибо вдоль прямой $x = b$ или $x = a$ всегда $dx = 0$. Таким образом

$$P = \int\limits_{(A_2B_2B_1A_1A_2)} y\,dx.$$

Направление вдоль замкнутого контура здесь отрицательное; поэтому если обозначить весь контур через (K), то по заключенному выше условию надлежит писать:

$$P = -\int\limits_{(K)} y\,dx. \tag{6}$$

Если дана фигура, ограниченная более сложным контуром (черт. 444), то вертикальными прямыми ее можно разбить на части рассмотренного типа. Применим к вычислению площади каждой из этих частей доказанную формулу и сложим результаты. Пренебрегая интегралами, взятыми вдоль вспомогательных прямых (ибо они все — нули!), и складывая интегралы, взятые по отдельным частям контура области, мы получим интеграл, взятый по всему контуру, и вернемся к формуле (6), которая таким образом оказывается справедливой для области, ограниченной любым контуром.



Черт. 444.

Если обменять ролями оси Ox и Oy, то совершенно аналогично получится формула:

$$P = \int\limits_{(K)} x\,dy. \tag{7}$$

Отсутствие знака (—) объясняется тем, что, несмотря на изменение ролей координатных осей, правило для установления положительного направления на замкнутом контуре осталось прежнее.

Наконец, складывая почленно формулы (6) и (7), получим более симметричную формулу:

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{(K)} x\,dy - y\,dx. \tag{8}$$

Итак, *площадь области, ограниченной любым контуром* (K), *выражается каждым из трех криволинейных интегралов* (6), (7), (8), *распространенных на этот контур.*

Если контур задан, напр., параметрическими уравнениями (5), то нужно лишь с их помощью в любом из указанных интегралов перейти к переменной t, установив такие пределы интегрирования по t, которые отвечали бы обходу контура (K) в положительном направлении.

9. Найти по формуле (8) площадь эллипса:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t.$$

Решение. Изменение параметра t от 0 до 2π отвечает обходу эллипса против часовой стрелки, т. е. как раз в положительном направлении. Имеем: $dx = -a\cdot\sin t\,dt$, $dy = b\cdot\cos t\,dt$, так что

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t + b\sin t\cdot a\sin t)\,dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

10. По той же формуле найти площадь, ограниченную одной аркой эпициклоиды (черт. 445):

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t]$$
$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t]$$

и соответствующей дугой круга.

Решение. Интеграл (8) нужно взять сначала по кривой ABC, а затем по кривой CDA. В первом случае мы можем воспользоваться написанными выше уравнениями, изменяя t от 0 до 2π; так как тогда

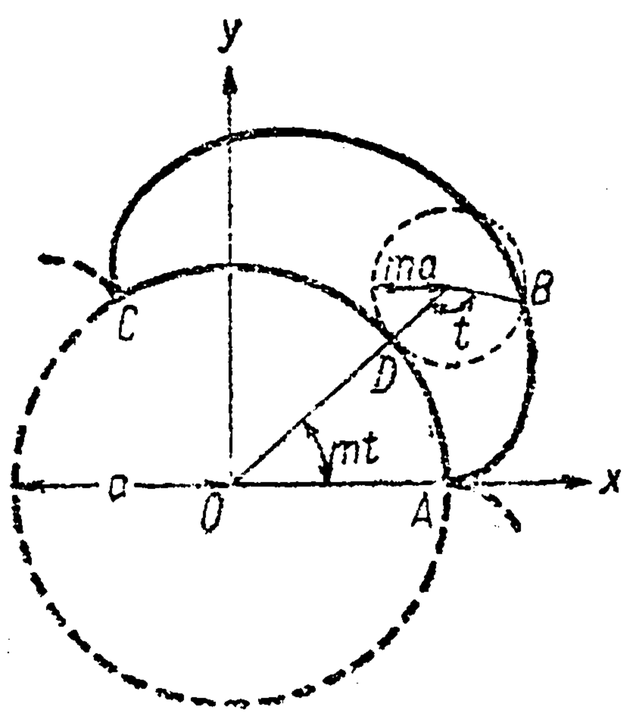
$$x\,dy - y\,dx = a^2 m(1+m)(1+2m)(1-\cos t)\,dt,$$

то первый интеграл будет иметь значение:

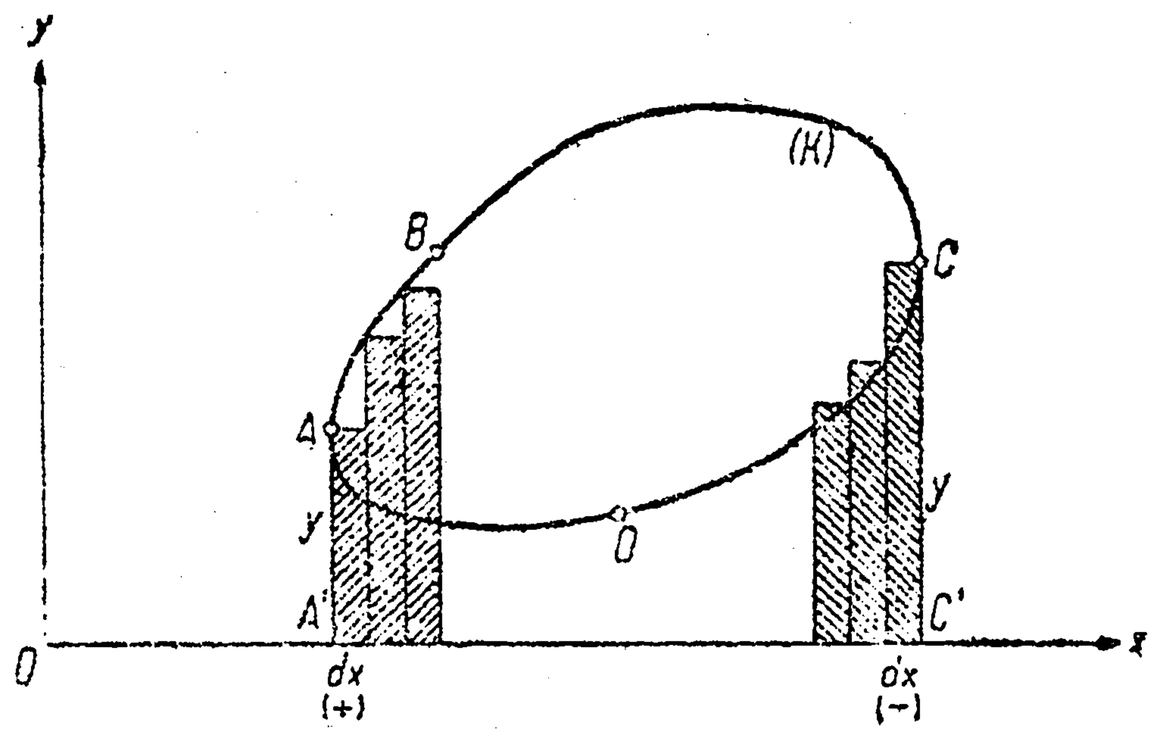
$$\frac{1}{2}\int\limits_{(ABC)} xdy - ydx = \frac{1}{2}a^2 m(1+m)(1+2m)\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\,dt = \pi a^2 m(1+m)(1+2m).$$

Что же касается дуги круга CDA, то, сохраняя тот же параметр, ее можно выразить уравнениями:

$$x = a\cos mt, \qquad y = a\sin mt,$$



Черт. 445.



Черт. 446.

изменяя t на этот раз от 2π до 0. Соответствующий интеграл будет:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{(CDA)} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}a^2 m\int\limits_{2\pi}^{0} dt = -\pi a^2 m.$$

Итак, искомая площадь равна:

$$P = \pi a^2 m(1+m)(1+2m) - \pi a^2 m = \pi a^2 m^2(2m+3).$$

Замечание. Мы получили формулы (6), (7), (8) довольно формальным путем, исходя из прежних выражений площади. Интересно разобраться в геометрической природе этих формул.

Для формулы (6) это, впрочем, очевидно: $y\,dx$ есть *площадь элементарного прямоугольника* (черт. 446). Суммируя их вдоль кривой ABC, мы получаем площадь фигуры $A'ABCC'$, когда же мы переходим к кривой CDA, то dx становится отрицательным, так что площадь фигуры $C'CDAA'$ получается со знаком (—). Полная сумма всех элементарных прямоугольников дает нам истинную величину площади $ABCDA$. О формуле (7) может быть повторено то же.

Обращаясь к формуле (8), мы для простоты введем полярные координаты точки (r, θ), связанные с ее прямоугольными координатами (x, y) соотношениями:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

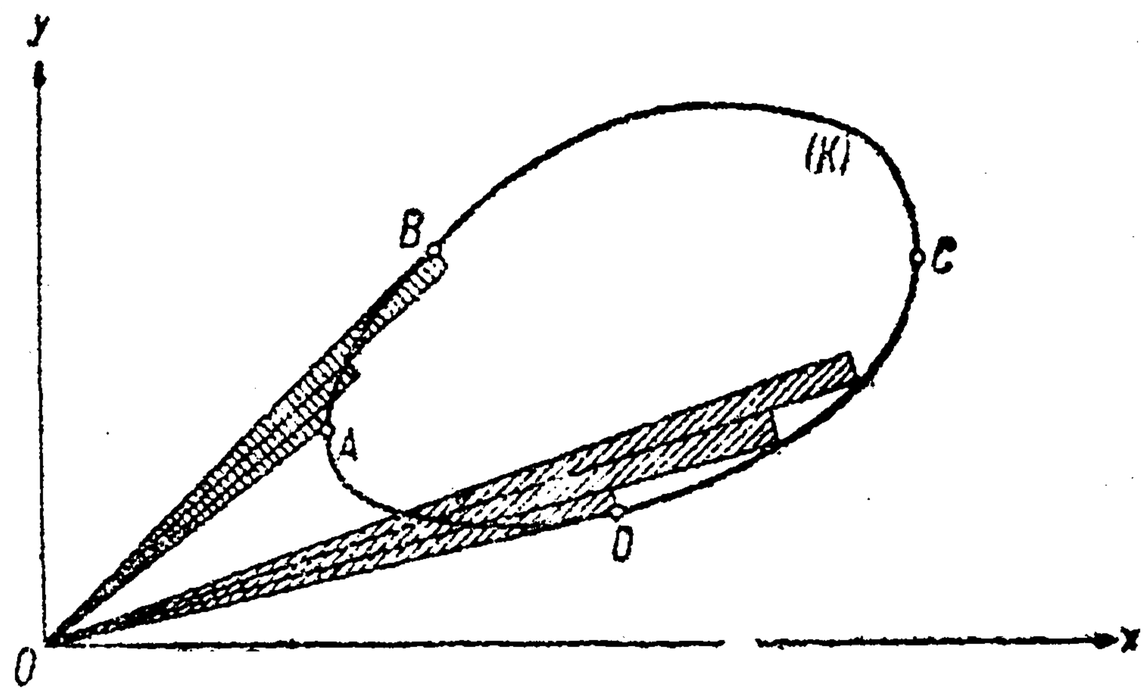
Не трудно проверить, что

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

Если вспомнить формулу (24), 178, и ее вывод, то станет ясно, что подинтегральное выражение в формуле (8) представляет собою *площадь элементарного сектора*

(черт. 447). Суммирование их вдоль кривой DCB дает площадь сектора $ODCB$. На кривой же BAD $d\theta$ уже будет отрицательным, так что суммирование этих элементов вдоль нее приведет к площади сектора $OBAD$, но со знаком (—). Полным результатом суммирования будет снова площадь фигуры $ABCDA$.

11. В качестве применения полученных выше формул для вычисления площадей плоских фигур произвольной формы, мы остановимся здесь на вычислении объемов одного важного класса тел [о котором упоминалось в **179**, зад. 15]. Пусть основаниями тела (черт. 448) служат две произвольного вида фигуры, лежащие в параллельных плоскостях, а боковая поверхность его является *линейчатой* и образована прямыми, соединяющими по произвольному закону точки контуров упомянутых фигур. При этих условиях объем тела выражается формулой:

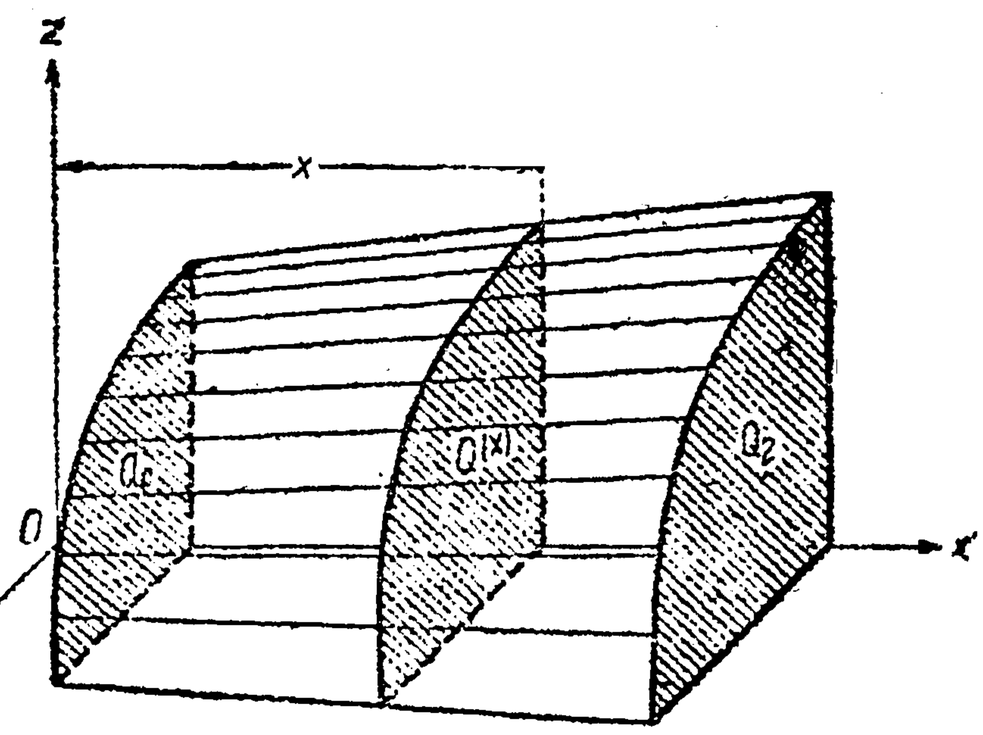


Черт. 447.

$$V=\frac{h}{6}(Q_0+4Q_1+Q_2), \qquad (9)$$

где h означает высоту тела, а Q_0, Q_2 и Q_1 — площади его оснований и среднего сечения.

Согласно сказанному в **179**, достаточно убедиться в том, что площадь $Q(x)$ поперечного сечения рассматриваемого тела, на расстоянии x от некоторой начальной точки O, выражается полиномом от x не выше третьей степени. На деле, как мы увидим, $Q(x)$ представляется даже полиномом второй степени.



Черт. 448.

Пусть

$$y=ax+b; \qquad z=cx+d \qquad (10)$$

будут уравнения образующей той линейчатой поверхности, которая ограничивает наше тело; при этом можно предположить, что коэффициенты a, b, c, d являются функциями от некоторого параметра t, при изменении которого (скажем; от t_0 до T) образующая и описывает поверхность. Если теперь пересечь поверхность плоскостью, параллельной плоскости yOz, на расстоянии x от нее, то в сечении получится кривая, проекция которой (без искажения!) на плоскость yOz как раз и будет иметь уравнения (10) (при $x=$ пост.) своими параметрическими уравнениями. В таком случае площадь сечения, напр., по формуле типа (7), выразится так:

$$Q(x)=\int y\,dz=\int_{t_0}^{T}(ax+b)\,d(cx+d)=$$

$$=x^2\cdot\int_{t_0}^{T}a\cdot dc+x\cdot\int_{t_0}^{T}(a\cdot dd+b\cdot dc)+\int_{t_0}^{T}b\cdot dd,\ *$$

т. е. действительно представляется квадратным трехчленом от x!

* При этом предполагается, что, когда t изменяется от t_0 до T, контуры всех сечений описываются (соответствующими точками образующей) в надлежащем направлении — в данном случае по часовой стрелке (если смотреть с положительной части оси Ox), согласно взаимному расположению осей Oy и Oz.

Легко показать, что правило, аналогичное (9), применимо и к вычислению статического момента нашего тела относительно плоскости yOz, выражаемого интегралом

$$M = \int_a^b x\,Q(x)\,dx$$

[см. 190, зад. 3]; подинтегральная функция здесь будет полиномом третьей степени.

12. Рассмотрим плоское установившееся течение жидкости (черт. 449). Скорость $\mathbf{q}$ частицы жидкости в этом случае будет зависеть только от ее положения, т. е. от ее координат x, y; можно сказать, что мы имеем здесь „поле скоростей".

Если величину скорости обозначить через $q = |\mathbf{q}|$, а ее проекции на оси координат через $u = q_x$ и $v = q_y$, то для угла φ, который составлен вектором $\mathbf{q}$ с осью Ox, будем иметь:

$$\cos\varphi = \frac{u}{q}, \quad \sin\varphi = \frac{v}{q}. \tag{11}$$

Возьмем теперь в плоскости xOy какую-нибудь кривую (K) и поставим себе задачей установить, какое количество жидкости W* протечет через нее в единицу времени. Если рассмотреть элемент $ds = AB$ этой кривой, то за бесконечно малый элемент времени dt он переместится в положение $A'B'$, причем $AA' = BB' = q \cdot dt$. Количество протекшей через элемент ds жидкости равно площади параллелограмма $ABB'A'$, т. е. $AB \cdot AA' \cdot \sin\omega$, где $\omega = \sphericalangle A'AB$.

Если через θ обозначить угол, составляемый элементом ds с осью Ox, то, как легко видеть,

$$\cos\theta = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\theta = \frac{dy}{ds}.$$

[Ср. вып. 1, стр. 169]. Пользуясь этими выражениями и формулами (11), можно представить упомянутую площадь параллелограмма в виде:

$$AB \cdot AA' \cdot \sin(\theta - \varphi) = ds \cdot q \cdot dt \cdot \left(\frac{dy}{ds} \cdot \frac{u}{q} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{v}{q}\right) = (u \cdot dy - v \cdot dx) \cdot dt,$$

так что количество жидкости, протекшей через элемент ds за промежуток времени dt, будет

$$(u \cdot dy - v \cdot dx) \cdot dt,$$

а за единицу времени

$$u \cdot dy - v \cdot dx.$$

Заметим, что это выражение может оказаться как положительным, так и отрицательным, в зависимости от знака угла ω.

Просуммировав по всем элементам кривой (K), для искомого количества W жидкости окончательно получим выражение в виде криволинейного интеграла:

$$W = \int_{(K)} -v\,dx + u\,dy. \tag{12}$$

13. Рассмотрим некоторую массу, скажем, 1 кг газа. Состояние газа характеризуется тремя величинами: его объемом v, давлением p и (абсолютной) температурой T. Если считать газ „идеальным", то эти три величины оказываются связанными между собой уравнением Клапейрона:

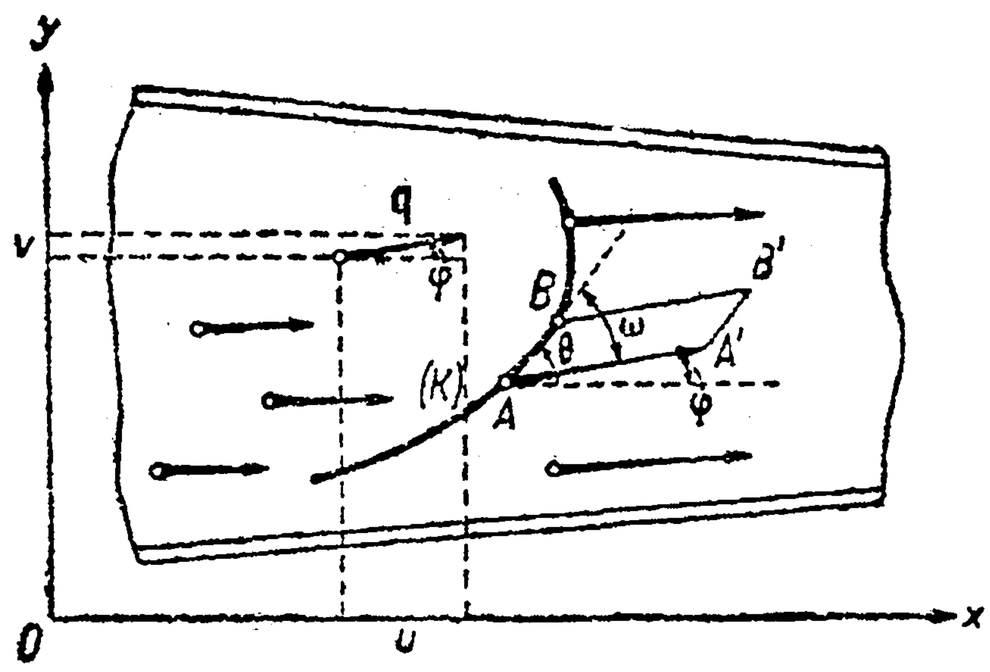
$$pv = RT, \tag{13}$$

и любая из них может быть отсюда выражена через две других. Поэтому для определения состояния газа достаточно, собственно, двух из названных трех величин. Пусть это будут, скажем, v и p, тогда точка с абсциссой v и орди-

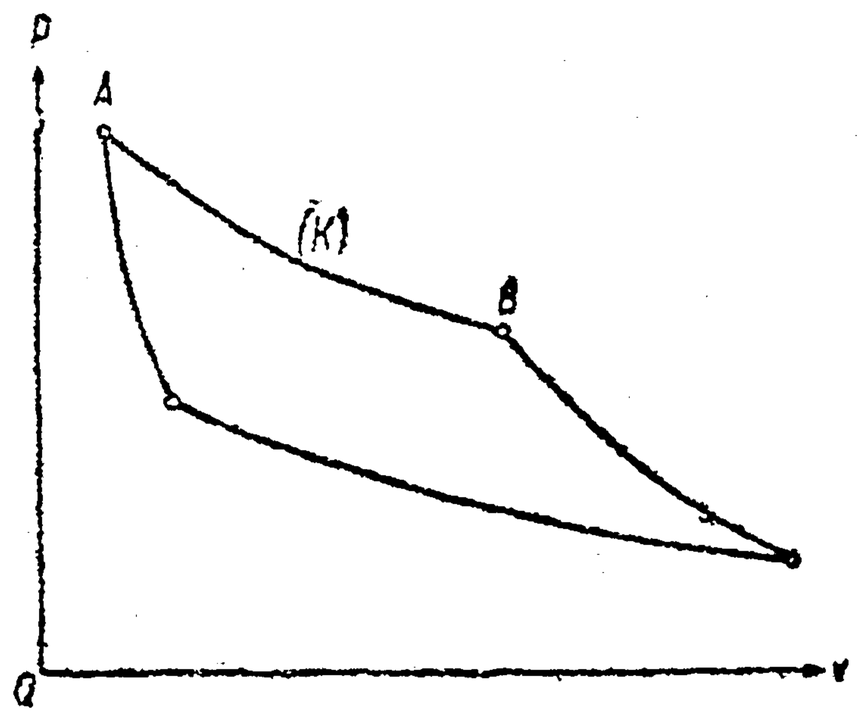
* Это количество измеряется покрытой ею площадью.

натой p (черт. 450) служит изображением состояния газа. Если состояние газа изменяется от начального состояния, отвечающего точке A, до конечного состояния, определяемого точкой B, то весь процесс изменения характеризуется кривой $(K) = (AB)$, устанавливающей последовательность непрерывно сменяющихся состояний. [Мы имеем в виду здесь и впредь так называемые обратимые процессы.]

Поставим теперь себе задачу — установить, какое количество тепла U (кал.) поглощается данной массой газа во время всего этого процесса, характеризуемого кривой (K). С этой целью, как обычно, рассмотрим сначала некоторый „бесконечно малый" элементарный процесс, переводящий газ из состояния (v, p, T) в бесконечно близкое состояние $(v + dv, p + dp, T + dT)$; ему отвечает элемент кривой (K). Определим то элементарное количество тепла dU, которое при этом было сообщено газу. Можно себе представить дело так, что — за счет некоторой части этого тепла — сначала температура T газа повысилась на величину dT; затем, объем v газа увеличился на величину dv, т. е. газом была произведена некоторая механическая работа, на что также было затрачено некоторое количество тепла. Если



Черт. 449.



Черт. 450.

обозначить через c_v теплоемкость газа при постоянном объеме, то на повышение температуры пошло $c_v \cdot dT$ единиц тепла. Элементарная же работа расширения выразится [см. (54), 187] через $p\,dv$ (в обычных единицах работы, напр., в кг-м, если p дано в кг/м², а v — в м³). Желая установить потраченное на производство этой работы тепло, нужно это выражение еще умножить на „тепловой коэффициент работы" $A = \frac{1}{427}\,\frac{\text{кал.}}{\text{кг-м}}$. Итак, окончательно,

$$dU = c_v\,dT + Ap\,dv. \tag{14}$$

Дифференцируя (13), имеем

$$p\,dv + v\,dp = R\,dT. \tag{13 a}$$

Исключая dv из (14) с помощью этого соотношения, получим:

$$dU = (c_v + AR)\,dT - Av\,dp.$$

Отсюда, между прочим, при $dp = 0$, т. е. $p =$ пост., следует, что $dU = (c_v + AR)\,dT$, так что $c_v + AR$ есть не что иное, как теплоемкость c_p газа при постоянном давлении:

$$c_p = c_v + AR. \tag{15}$$

Поэтому можно написать:

$$dU = c_p\,dT - Av\,dp. \tag{16}$$

Наконец, обращаясь к параметрам (v, p), исключим с помощью (13 a) из (14) dT:

$$dU = \frac{c_p}{R}\,p\,dv + \frac{c_v}{R}\,v\,dp. \tag{17}$$

Это и есть окончательное выражение для элементарного приращения тепла dU.

Так как мы желаем определить количество тепла U, полученное газом при процессе изменения его состояния, характеризуемом кривой (K) (черт. 450), то очевидно остается лишь просуммировать элементы (17) вдоль этой кривой:

$$U=\int\limits_{(K)} \frac{c_p}{R} p\,dv+\frac{c_v}{R} v\,dp. \tag{18}$$

Количество тепла U выражается криволинейным интегралом!

Можно было бы, конечно, воспользоваться и выражениями (14) или (16) для dU, но тогда криволинейный интеграл пришлось бы брать вдоль кривых на плоскости (T, v) или (T, p).

248. Интегрирование полных дифференциалов. Остановимся в этом n⁰ на выражениях вида

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy, \tag{19}$$

которые представляют собой „элемент" криволинейного интеграла (4). Нужно сказать, что эти выражения могут быть двух резко различающихся типов, в связи с чем и интегралы (4), как увидим в следующем n⁰, также распадаются на два класса, отличающихся по своим основным свойствам.

Если для какой-нибудь функции $f(x, y)$ от двух переменных составить ее полный дифференциал [224]:

$$df(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy, \tag{20}$$

то он тоже имеет форму (19), причем

$$P(x, y)=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x, y)=\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{21}$$

Обратного, однако, утверждать нельзя: не всякое выражение (19) будет полным дифференциалом!

Итак, вот то разделение выражений (19) на два типа, о котором упоминалось выше: одни из них представляют собой полный дифференциал (или — как охотнее говорят в этом случае — точный дифференциал) от некоторой функции двух переменных, другие же — не представляют. Иными словами, для выражения первого типа найдется *первообразная функция* от двух переменных, т. е. такая функция $f(x, y)$, что выполняются условия (21), отождествляющие (19) с (20); для выражения же второго типа — подобной функции не существует.

Теперь естественно спросить, по какому же признаку можно судить, имея перед собой выражение (19), о принадлежности его к тому или иному типу?

Предположим сначала, что рассматриваемое выражение (19) представляет точный дифференциал функции $f(x, y)$, так что условия (21) выполнены. Тогда, дифференцируя первое из них по y, а второе — по x, получим:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

Но так как порядок, в котором производятся дифференцирования функции f, не отражается на результате [см. 223 (1)], то мы приходим к следующему важному соотношению:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{22}$$

Таким образом, для того чтобы выражение (19) было точным дифференциалом, необходимо выполнение этого условия. Можно доказать, что это же условие является и достаточным для того, чтобы выражение (19) было точным дифференциалом.

С этой целью мы просто покажем, как — при соблюдении условий (22) — фактически находится первообразная функция $f(x, y)$, удовлетворяющая соотношениям (21). Начнем с примера:

$$(6x^2y^2+6xy-1)\,dx+(4x^3y+3x^2+2y)\,dy; \tag{23}$$

здесь

$$P=6x^2y^2+6xy-1, \qquad Q=4x^3y+3x^2+2y$$

и условия (22) соблюдены:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=12x^2y+6x, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=12x^2y+6x.$$

Так как для искомой функции $f(x, y)$ должно иметь место равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2y^2+6xy-1,$$

то естественно попытаться восстановить функцию f интегрированием по x, при постоянном y:

$$f(x, y)=\int(6x^2y^2+6xy-1)\,dx+C=2x^3y^2+3x^2y-x+C.$$

Нужно теперь разобраться в характере „постоянной интегрирования“ C. Эта величина, действительно, сохраняет постоянное значение, покуда y остается постоянным (что мы и предполагали при интегрировании); но при другом значении y и величина C может измениться. Таким образом она является, вообще говоря, некоторой функцией от y, которая еще подлежит определению. Заменяя C через $g(y)$, перепишем полученный уже результат так:

$$f(x, y)=2x^3y^2+3x^2y-x+g(y).$$

Для этой же функции должно выполняться и второе равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y+3x^2+2y$$

или — если подставить вместо f найденное выражение —

$$4x^3y+3x^2+g'(y)=4x^3y+3x^2+2y,$$

откуда: $g'(y)=2y$, так что $g(y)=y^2+c$ (где c — уже абсолютная постоянная, не зависящая ни от x, ни от y). Окончательно:

$$f(x, y)=2x^3y^2+3x^2y-x+y^2+c,$$

и совершенно очевидно, что предложенное выражение (23), действительно, будет ее полным дифференциалом.

Если взять какое-нибудь выражение, напр.:

$$(3x+y)\,dx+(x^2-y^2)\,dy,$$

для которого условия (22) не соблюдены:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x,$$

то попытка попрежнему построить функцию $f(x, y)$ приведет к неудаче. В самом деле, если положить:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x+y \quad \text{и} \quad f(x, y)=\int(3x+y)\,dx+g(y)=\frac{3}{2}x^2+xy+g(y),$$

то для определения $g(y)$ будем иметь условие:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-y^2 \quad \text{или} \quad x+g'(y)=x^2-y^2,$$

откуда

$$g'(y)=x^2-x-y^2,$$

что невозможно, ибо слева мы имеем здесь функцию только от y а справа — функцию и от x, и от y!

Для того чтобы с полной отчетливостью уяснить, почему именно условия (22) обеспечивают возможность восстановить первообразную функцию $f(x, y)$ указанным путем, проделаем рассуждение в общем виде.

Итак, имеем выражение (19) для которого соблюдены условия (22). Требуется найти такую функцию $f(x, y)$, чтобы ее полный дифференциал (20) был тождествен с этим выражением, т. е. чтобы выполнялись равенства (21).

Первое из этих равенств дает нам:

$$f(x, y)=\int P(x, y)\,dx+g(y),$$

для определения же „постоянной интегрирования“ $g(y)$ используем второе равенство:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x, y)\,dx+g(y)\right]=Q(x, y)$$

или

$$g'(y)=Q(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx. \tag{24}$$

Теперь весь вопрос в том, будет ли правая часть, в которую кажущимся образом входит x, фактически содержать это x;*

* Возможность фактического отсутствия x в правой части читатель может объяснить себе, напр., взаимным уничтожением членов, содержащих x.

только при фактическом отсутствии x справа задача определения функции $g(y)$ становится возможной и разрешается простой квадратурой. Для того чтобы убедиться в этом отсутствии, продифференцируем правую часть равенства (24) по x; так как эта производная получится равной нулю, то это и будет означать, что с изменением x это выражение не меняет своего значения, следовательно, от x не зависит.

Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right];$$

переставляя дифференцирования по x и по y, можно переписать это выражение в виде:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int P\,dx\right].$$

Но, по самому определению неопределенного интеграла,

$$\frac{\partial}{\partial x}\int P\,dx=P,$$

так что окончательно приходим к разности

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y},$$

которая, действительно, будет нулем именно в силу (22)!*

Таким образом поставленный вначале вопрос исчерпан полностью: *выражение вида (19) будет точным дифференциалом в том и только в том случае, если соблюдены условия (21).*

Кроме того, при выполнении этих условий, мы умеем фактически строить первообразную функцию $f(x, y)$, полным дифференциалом которой служит данное выражение. Эта функция определяется, как мы видели, с точностью до постоянного слагаемого.

Примеры и задачи. 1. Относительно следующих выражений проверить, являются ли они точными дифференциалами, или нет:

$$a)\ (3x^2y-4xy^2)\,dx+(x^3-4x^2y+12y^3)\,dy,$$

$$b)\ \frac{y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2},\quad c)\ \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$д)\ \frac{3x^5+2y^3}{x^3y^2}\,dx-\frac{2x^5+y^3}{x^2y^3}\,dy.$$

Отв. утвердительный для a), c) и $д$), отрицательный для b).

2. Восстановить по выражению c) зад. 1 его первообразную функцию.

---

* Если условие (22) не соблюдено, то эта разность не нуль, и выражение для $g'(y)$ оказывается зависящим от x! Абсурдность этого результата показывает, что наше предположение о существовании первообразной функции f, для которой имеют место равенства (21), неверно: такой функции нет. Таким образом, еще раз на другой манер мы установили необходимость условия (22) для существования первообразной функции. Выше мы сделали это проще.

Решение.

$$f=\int\frac{y\,dx}{x^2+y^2}=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}+g(y),\ g'(y)=0,\ f=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}+C.$$

3. Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ в выражении (19) представляют суммы членов вида:

$$Ax^my^n,$$

где A = пост., а m, n — произвольные (не обязательно—натуральные) показатели, то практически для разыскания функции $f(x, y)$ [в предположении, что условие (22) выполнено!] проще всего поступить так: проинтегрировать P по x, *считая y постоянным и не присоединяя постоянной интегрирования*, затем проинтегрировать Q по y, с аналогичными оговорками, и наконец полученные выражения объединить в одно, *сохраняя общие им члены лишь по разу.*

Напр., если дано выражение:

$$df=\frac{2x^2y+x^2+y^3}{x^2y}\,dx-\frac{2xy^3+x^2+2y^3}{xy^2}\,dy,$$

так что

$$P=2+\frac{1}{y}+\frac{y^2}{x^2},\qquad Q=-2y-\frac{2y}{x}-\frac{x}{y^2},$$

то прежде всего проверяем выполнение условия (22):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}+\frac{2y}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Затем, интегрируем, как указано:

$$\int\left(2+\frac{1}{y}+\frac{y^2}{x^2}\right)dx=\left(2+\frac{1}{y}\right)x-\frac{y^2}{x},$$

$$\int\left(-2y-\frac{2y}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy=-y^2-\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y};$$

наконец, составляем выражение для f, сохраняя повторяющиеся члены: $\frac{x}{y}$ и $-\frac{y^2}{x}$ по разу:

$$f=2x+\frac{x}{y}-\frac{y^2}{x}-y^2+C.$$

Применить это практическое правило к выражениям *а*) и *д*) зад. 1.

Отв. *а*) $x^3y-2x^2y^2+3y^4+C$; *д*) $\frac{x^3}{y^2}-\frac{y}{x^2}+C$.

4. Применить указанное правило к выражению

$$(2xy-2y^3+y)\,dx+(x^2-xy-6xy^2)\,dy,$$

не проверяя предварительно выполнения условия (22), а затем проверить, будет ли данное выражение полным дифференциалом от полученной функции.

5. В теории перегретого пара Каллендар-Моллье некоторые величины, i („теплосодержание") и S („энтропия"), определяются по их дифференциалам:

$$di=\left[c_p^0+n(n+1)AC\left(\frac{273}{T}\right)^n\frac{P}{T}\right]dT+\left[Av'-AC(n+1)\left(\frac{273}{T}\right)^n\right]dP,$$

$$dS=\left[c_p^0+n(n+1)AC\left(\frac{273}{T}\right)^n\frac{P}{T}\right]\frac{dT}{T}-\left[\frac{AR}{P}+nAC\left(\frac{273}{T}\right)^n\frac{1}{T}\right]dP,$$

где T (температура) и P (давление) играют роль независимых переменных, а остальные буквы означают постоянные. Найти выражения для i и S.

Отв. $i=c_p^0\,T-(n+1)AC\left(\frac{273}{T}\right)^nP+Av'P+$ пост.,

$$S=c_p^0\ln T-AR\ln P-nAC\left(\frac{273}{T}\right)^n\frac{P}{T}+\text{пост.}$$

6. В новых таблицах Моллье исходит из других выражений для дифференциалов i и S:

$$di=\left[c_p^0+\frac{n(n-1)aA}{T^n}P+\frac{m(m-1)bA}{T^m}\cdot\frac{P^3}{3}\right]dT-A\left[\frac{na}{T^{n-1}}+\frac{mbP^2}{T^{m-1}}\right]dP,$$

$$dS=\left[\frac{c_p^0}{T}+\frac{n(n-1)aA}{T^{n+1}}P+\frac{m(m-1)bA}{T^{m+1}}\cdot\frac{P^3}{3}\right]dT-$$

$$-A\left[\frac{R}{P}+\frac{(n-1)a}{T^n}+\frac{(m-1)bP^2}{T^m}\right]dP.$$

Найти соответствующие выражения для i и S.

Отв. $i=c_p^0T-\frac{naA}{T^{n-1}}P-\frac{mbA}{T^{m-1}}\frac{P^3}{3}+$ пост.,

$$S=c_p^0\ln T-\frac{(n-1)aA}{T^n}P-\frac{(m-1)bA}{T^m}\cdot\frac{P^3}{3}-AR\ln P+\text{пост.}$$

Дальнейшие упражнения в восстановлении первообразных функций по их полным дифференциалам читатель найдет в следующей главе [267].

249. Два типа криволинейных интегралов. Вернемся к криволинейному интегралу

$$\int\limits_{(AB)}P\,dx+Q\,dy, \tag{25}$$

взятому вдоль некоторой кривой, соединяющей точки

$$A(x_0, y_0) \quad \text{и} \quad B(X, Y).$$

1°. Наибольший интерес представляет случай, когда *подинтегральное выражение* $P\,dx+Q\,dy$ *оказывается полным дифференциалом* некоторой функции $f(x, y)$:

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=df(x, y), \tag{26}$$

так что интеграл (25) может быть переписан в виде:

$$\int\limits_{(AB)}df(x, y) \tag{25 a}$$

Знание первообразной функции f позволяет сразу же написать значение этого интеграла. Действительно, пусть кривая (AB) параметрически представляется уравнениями

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

причем t изменяется от t_0 до T, так что

$$\varphi(t_0)=x_0, \quad \psi(t_0)=y_0, \quad \varphi(T)=X, \quad \psi(T)=Y. \tag{27}$$

Для вычисления интеграла (25 a), нужно подставить в подинтегральное выражение (26), вместо x и y, функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$; мы получим диф-

ференциал от функции одной переменной: $f[\varphi(t), \psi(t)]$ [225] и, интегрируя, придем к результату:

$$\int_{t_0}^{T} df[\varphi(t), \psi(t)] = f[\varphi(t), \psi(t)]\Big|_{t_0}^{T} = f[\varphi(T), \psi(T)] - f[\varphi(t_0), \psi(t_0)] =$$

$$= f(X, Y) - f(x_0, y_0).$$

Таким образом, искомый *криволинейный интеграл равен разности значений первообразной функции f в конечной и начальной точках пути интегрирования*:

$$\int_{(AB)} P\,dx + Q\,dy = f(x, y)\Big|_{A}^{B}. \tag{28}$$

Мы замечаем в этом случае полное сходство с вычислением обыкновенного определенного интеграла. Суммирование бесконечно малых приращений df дает конечное приращение функции f!

Формула (28) имеет важнейшие следствия. Если мы соединим те же точки A и B какой-нибудь другой кривой и станем вычислять интеграл, взятый по новому пути, то результат мы получим, очевидно, прежний. Таким образом, в рассматриваемом случае *интеграл* (25) *оказывается независящим от пути интегрирования*; он зависит лишь от начальной и конечной точек этого пути: $A(x_0, y_0)$ и $B(X, Y)$, поэтому его обозначают так:

$$\int_{A}^{B} P\,dx + Q\,dy \quad \text{или} \quad \int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} P\,dx + Q\,dy,$$

на подобие обыкновенного определенного интеграла.

В частности, если точка B совмещается с A, так что кривая, по которой берется интеграл, становится замкнутой, то двойная подстановка обращается в нуль: *интеграл по замкнутому контуру всегда равен нулю.*

Примерами для обоих утверждений могут служить задачи 2 и 4 [см. также 7], 247, в которых подинтегральные выражения являются точными дифференциалами:

$$d(x^2y) = 2xy\,dx + x^2dy \text{ и } d(xy^2 - x^2y) = (y^2 - 2xy)\,dx + (2xy - x^2)\,dy,$$

а также интеграл I_2 в задаче 6, где $x\,dy + y\,dx = d(xy)$.

2°. Рассмотрим теперь случай, когда, подинтегральное выражение интеграла (25) не будет точным дифференциалом, что легко может быть установлено с помощью указанного в предыдущем n° признака. К этому случаю относятся, напр., задачи 1 и 3 [см. и 7], 247, и интеграл I_1 в задаче 6. Как видно уже из этих примеров, теперь *интеграл, взятый по кривой, соединяющей две данные точки, может менять свое значение с изменением вида кривой.* Точно также, *интеграл, взятый по замкнутому контуру, может оказаться отличным от нуля.*

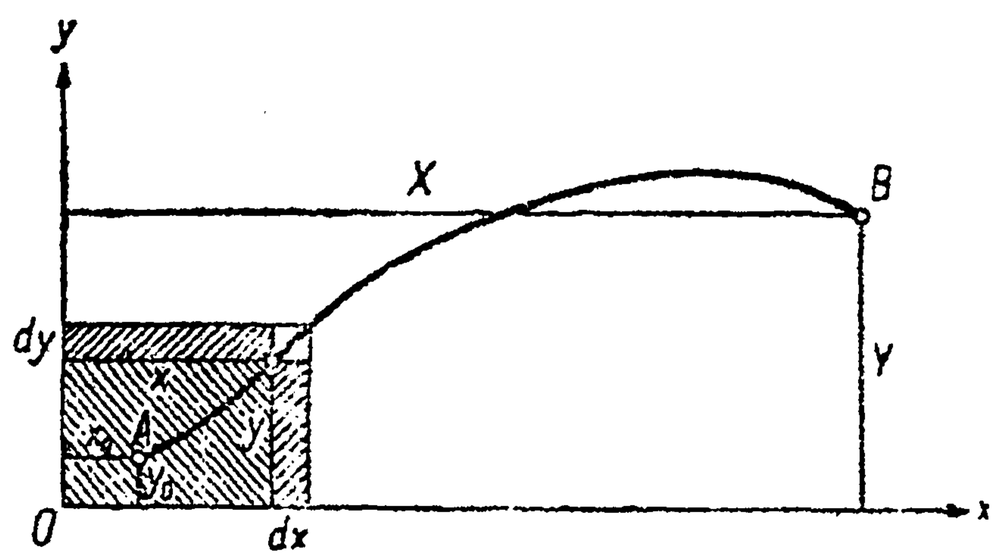
Превосходным примером этого обстоятельства служит интеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_{(K)} x\,dy - y\,dx$$

[247, зад. 8, (8)], выражающий всегда площадь, ограниченную кривой (K). Любопытно сопоставить его с интегралом

$$\int\limits_{(AB)} x\,dy + y\,dx.$$

Подинтегральные выражения в обоих случаях имеют простое геометрическое истолкование. Как мы видели [см. замечание в n⁰ **247** и черт. 447], $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ с точностью до бесконечно малых высших порядков представляет площадь некоторого элементарного сектора. Выражение же $x\,dy + y\,dx$ есть сумма двух элементарных прямоугольников (черт. 451) или, снова с точностью до бесконечно малых высших порядков, площадь элементарного „уголка". Но последнее выражение совпадает с приращением некоторой однозначно определенной для каждой точки (x, y) плоскости величины, именно, площади прямоугольника со сторонами x и y. Последовательное накопление этих приращений (которые могут быть и отрицательными) преобразует „начальный" прямоугольник, со сторонами x_0 и y_0, в прямоугольник со сторонами X и Y, независимо от пути (AB), так что величина интеграла всегда равна разности площадей обоих прямоугольников; если точка B сливается с A, то мы возвращаемся к прежнему прямоугольнику, и сумма всех приращений сводится к нулю. Что в случае первого интеграла дело обстоит совсем не так, объясняется именно тем, что нет такой однозначно определенной для каждой точки плоскости величины, для которой приращением мог мы служить упомянутый элементарный сектор. Для того чтобы убедиться в бесполезности поисков такой величины, достаточно сослаться на предыдущий n⁰:



Черт. 451.

$$P = -\frac{1}{2}y, \quad Q = \frac{1}{2}x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2}!$$

Примеры. 1. Вернемся к рассмотрению силового поля, о котором была речь в n⁰ **246**. Случай, когда проекции P и Q силы **F** удовлетворяют условию (22), представляет в механике особую важность. В этом случае говорят, что „сила **F** имеет потенциал". Тогда существует такая „функция точки" $f(x, y)$, что выполняются соотношения (21); эта первообразная функция получила в механике особое название — „силовая функция". Элемент работы совпадает с дифференциалом этой функции. Если через f_A и f_B обозначить значения силовой функции, соответственно, в точках A и B, то работа, произведенная силами поля при перемещении материальной частицы из A в B, выразится просто приращением силовой функции $f_B - f_A$ и вовсе не зависит от формы траектории. Если материальная частица описывает замкнутую траекторию, то суммарная работа сил поля будет нулем. Все это — есть повторение для данного случая того, что было сказано выше в 1°.

Возьмем конкретный пример: пусть материальная точка притягивается к центру O, который служит началом координат, по закону Ньютона:

$$F = \frac{\mu}{r^2},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ есть расстояние точки от центра. Косинус и синус угла, который составляется силой **F** с осью Ox, будут

$$-\frac{x}{r} \text{ и } -\frac{y}{r},$$

так что проекции силы на оси равны

$$P = -\mu \frac{x}{r^3}, \qquad Q = -\mu \frac{y}{r^3}$$

Легко проверить, что в этом случае условия (22) выполняются:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3\mu xy}{r^5} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

так что сила ньютонианского притяжения имеет потенциал. Силовая функция находится легко, по методу n⁰ 248:

$$f = -\mu \cdot \int \frac{x\,dx}{r^3} + g(y) = \frac{\mu}{r} + g(y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\mu \cdot \frac{y}{r^3} + g'(y) = -\mu \cdot \frac{y}{r^3}, \text{ так что } g'(y) = 0, \; g(y) = c = \text{пост.}$$

Итак, можно положить (отбрасывая постоянную) силовую функцию равной:

$$f = \frac{\mu}{r}$$

Поэтому при перемещении материальной точки из положения A, на расстоянии r от O, в положение B, на расстоянии R от O, силами поля будет произведена работа

$$\frac{\mu}{R} - \frac{\mu}{r}.$$

При удалении точки B в бесконечность, работа обратится в $-\frac{\mu}{r}$; наоборот, если точка из бесконечности переместится в положение A, то работа сил поля выразится через $\frac{\mu}{r}$. Эту работу можно считать мерой, накопленной в точке потенциальной энергии.

2. Мы видели в задаче 12, 247, что количество протекшей (в единицу времени) через кривую (K) жидкости измеряется криволинейным интегралом:

$$\int_{(K)} -v\,dx + u\,dy, \tag{29}$$

где u, v — проекции скорости на координатные оси.

Если контур (K) — замкнутый, то для той части его, через которую жидкость вытекает из ограниченной им области (P), элемент интеграла имеет знак $(+)$; для той же части контура, через которую жидкость втекает в область (P), элемент интеграла имеет знак $(-)$. Таким образом, интеграл (29) дает разность между количествами вытекающей и втекающей в единицу времени жидкости.

Так как здесь $P = -v$, а $Q = u$, то условие (22) для данного случая принимает форму

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{30}$$

При выполнении его, подинтегральное выражение представляет полный дифференциал от некоторой функции $\varphi(M) = \varphi(x, y)$, которую называют „функцией тока". Для любой кривой (AB), соединяющей точки A и B, в силу (28), имеем тогда

$$\int_{(AB)} -v\,dx + u\,dy = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Иными словами, количество жидкости, протекающей в единицу времени через эту кривую, равно просто разности значений функции тока на ее концах.

Интеграл (29), взятый по любому замкнутому контуру, в этом случае

равен нулю, так что *столько же жидкости втекает внутрь него, сколько и вытекает наружу.*

Если мы имеем дело с несжимаемой жидкостью, то — при отсутствии источников, выделяющих жидкость, и точек стока ее — положение вещей необходимо должно быть именно таким, как только-что указано. А это, в свою очередь, требует выполнения условия (30).

3. Наконец, обратимся вновь к вопросу о тепле, полученном данной массой идеального газа при изменении его состояния, характеризуемом некоторой кривой (K), напр., на плоскости (v, p). Это тепло, как мы знаем [247, зад. 13], выражается криволинейным интегралом (18):

$$U = \int\limits_{(K)} \frac{c_p}{R} p\, dv + \frac{c_v}{R} v\, dp.$$

Здесь

$$P = \frac{c_p}{R} p, \quad Q = \frac{c_v}{R} v, \quad \text{так что } \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{c_p}{R} \neq \frac{\partial Q}{\partial v} = \frac{c_v}{R}$$

в виду (15), и условие (22) заведомо не выполняется: выражение (17) [а с ним и (14) или (16)] не является точным дифференциалом! Это свидетельствует о том, что *поглощенное данной массой газа тепло не есть функция его состояния:* даже при циклическом процессе (см. черт. 450), возвращающем газ к его первоначальному состоянию, газу может быть сообщено или от него может быть отнято некоторое количество тепла!

Составим теперь выражение $\frac{dU}{T}$; если принять во внимание (17) и (13), то найдем:

$$\frac{dU}{T} = c_p \frac{dv}{v} + c_v \frac{dp}{p}.$$

Это выражение уже явно представляет собой полный дифференциал, напр., от функции:

$$S = c_p \ln v + c_v \ln p = \ln\left(v^{c_p} \cdot p^{c_v}\right).$$

Криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(p_0, v_0)}^{(p, v)} \frac{dU}{T}$$

на этот раз не зависит от „пути интегрирования", соединяющего произвольно выбранную точку (p_0, v_0) с переменной точкой (p, v), и лишь постоянной отличается от указанной выше функции; им определяется некоторая физическая величина („энтропия"), которая является функцией от состояния газа (с точностью до постоянного слагаемого) и играет важную роль в тепловых расчетах.

Этим мы заканчиваем очерк криволинейных интегралов на плоскости. Аналогично может быть развито и понятие о криволинейном интеграле в пространстве, на чем мы, однако, останавливаться не будем.

250. Задача о вычислении объема. Понятие о двойном интеграле. На подобие того, как в 174 задача о вычислении площади „криволинейной трапеции" привела нас к понятию об определенном интеграле как пределе сумм, так и задача о вычислении объема „призматического" или „цилиндрического бруса" естественно приведет нас к двойному интегралу.

Предположим, что нам задана некоторая функция $z = f(x, y)$ для всех значений x в промежутке (a, b) и всех значений y в промежутке (c, d); этими промежутками определяется некоторый прямоугольник (P), который и служит „областью изменения" переменных

(черт. 452 *a*). Вообразим теперь „призматический брус", имеющий этот прямоугольник своим основанием, но сверху ограниченный поверхностью $z=f(x, y)$, и поставим задачей найти объем V бруса (черт. 452 *b*).

С этой целью разложим основание бруса — прямоугольник (P) — на элементарные прямоугольники, с помощью сетки прямых, параллельных осям. Можно представить себе это так: промежутки (a, b) и $(c, д)$, лежащие соответственно на оси Ox и оси Oy, разложены на части рядом точек:

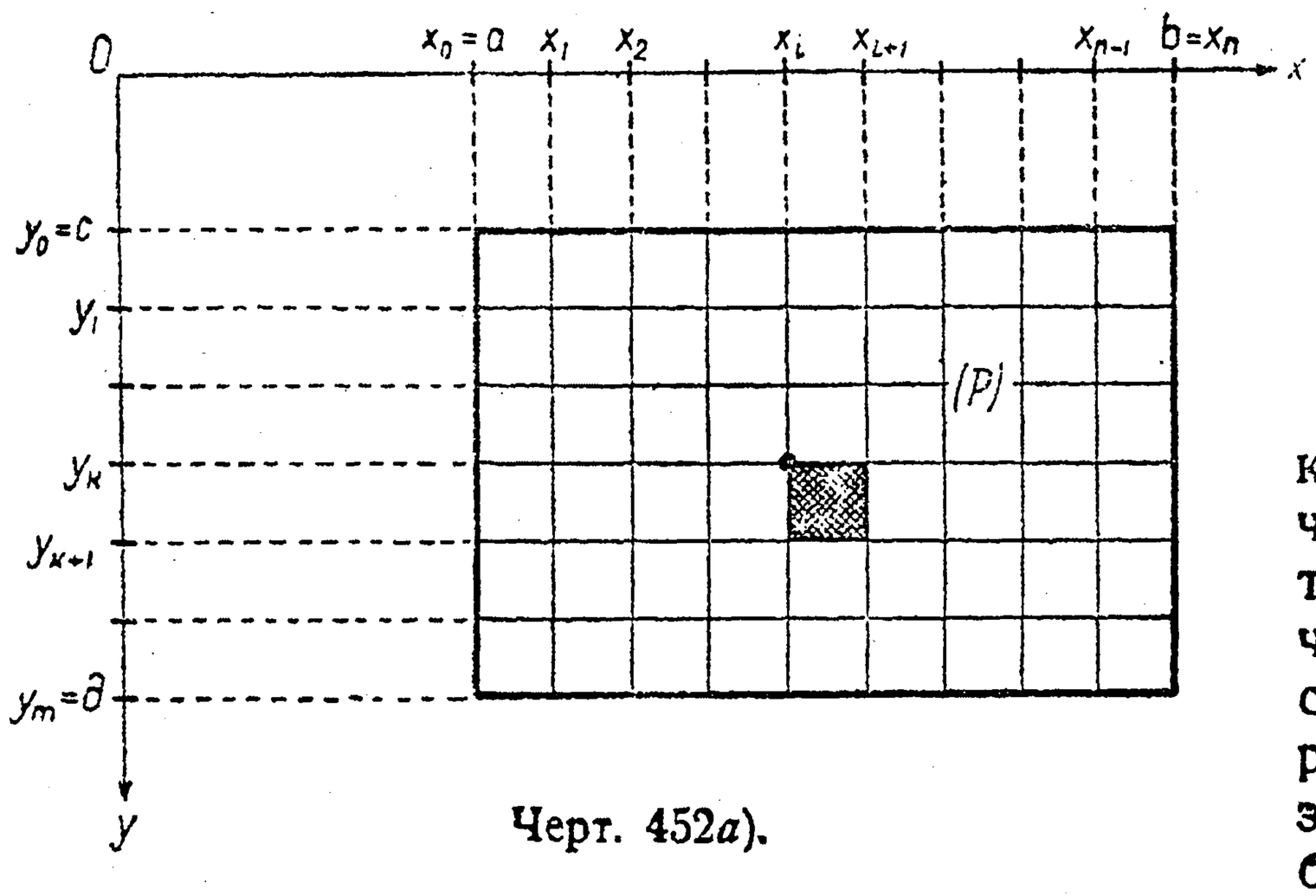
$$a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b,$$
$$c=y_0<y_1<\ldots<y_k<y_{k+1}<\ldots<y_m=д$$

и через эти точки проведены упомянутые прямые. Если положить для простоты

$$x_{i+1}-x_i=\Delta x_i, \qquad y_{k+1}-y_k=\Delta y_k,$$
$$(i=0,1, \ldots, n-1) \qquad (k=0,1, \ldots, m-1),$$

то площадь прямоугольника, лежащего в пересечении i-ой и k-й полос, будет

$$\Delta x_i \cdot \Delta y_k.$$



Черт. 452*a*).

Проведя вертикальные плоскости через все прямые, которыми разложено на части основание бруса, мы тем самым разложим и брус на элементарные „столбики". Строго говоря, такой „столбик" не является призмой, ибо сверху он усечен нашей поверхностью. Но приближенно его можно принять за призму, основанием которой служит элементарный прямоугольник а за высоту взята координата z, отвечающая одной из точек этого прямоугольника, напр., какой-либо из его вершин. В общем случае имеем: основание элементарного столбика $\Delta x_i \Delta y_k$, высота, скажем, $z_{i,k}=f(x_i, y_k)$, так что объем его будет:

$$f(x_i, y_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_k.$$

Таким образом, приближенное выражение для объема V призматического бруса можно написать в виде:

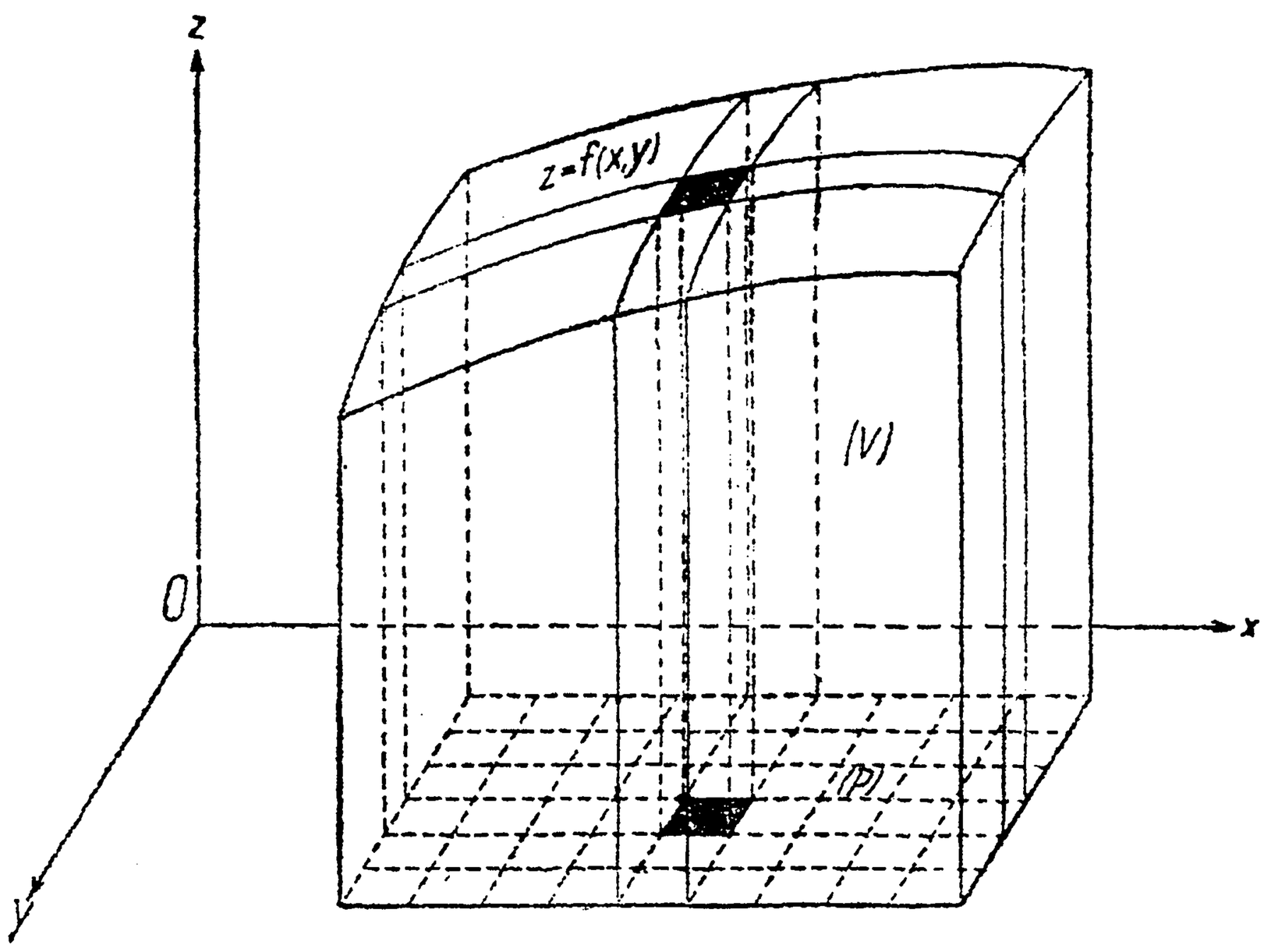
$$V \doteq \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_k.$$

Обращаем внимание читателя на то, что здесь приходится производить двойное суммирование — и по значку i, и по значку k; отсюда — и два знака суммы.

Полученное выражение, очевидно, будет тем точнее, чем меньше все Δx_i и Δy_k. Если устремить эти разности к нулю, то *в пределе* наша двойная сумма даст *точное* значение искомого объема:

$$V = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i, y_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_k.$$

И помимо задачи о вычислении объема, в прикладных вопросах нередко приходится встречаться с подобного рода двойной суммой



Черт. 452*b*).

и ее пределом. Предел этот вообще называют *двойным (определенным) интегралом, распространенным на область (P)*, и по аналогии с суммой

$$\sum\sum f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y,$$

из которой он получается, обозначают символом:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{31}$$

В некотором смысле и здесь можно сказать, что *двойной интеграл является суммой бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.* Но, в отличие от обыкновенного интеграла, слагаемые здесь будут бесконечно малыми *второго* порядка, ибо содержат произведения двух бесконечно малых $\Delta x \cdot \Delta y$; зато и суммировать приходится, так сказать, „вдвойне" бесконечное множество их.

Итак, объем призматического бруса выражается двойным интегралом:

$$V=\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy=\iint\limits_{(P)} z\, dx\, dy. \tag{32}$$

Мы уже подчеркивали, что надобность в такого рода пределах может встретиться и в вопросах, не связанных с вычислением объема. Однако, для какой бы цели мы ни пользовались двойным интегралом, его всегда можно истолковать как объем, на подобие того, как обыкновенный интеграл истолковывался как площадь; такое истолкование часто оказывается полезным.

251. Вычисление двойного интеграла путем приведения его к повторному. Теперь естественно встает вопрос о вычислении двойного интеграла. Для того чтобы подойти к его решению, обратимся вновь к той двойной сумме, в пределе которой и получается интеграл:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_k)\ \Delta x_i\ \Delta y_k.$$

Самое суммирование здесь можно произвести последовательно скажем, сначала по значку i, а затем — по значку k. Иными словами, можно сначала просуммировать все элементы, отвечающие одному и тому же значку k, вынося при этом общий множитель Δy_k за знак суммы:

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_k)\ \Delta x_i\right]\ \Delta y_k=\Delta y_k\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_k)\ \Delta x_i; \qquad (k=\text{пост.})$$

а затем — сложить все такие суммы, получающиеся при различных k:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\Delta y_k\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_k)\ \Delta x_i=\sum\Delta y\sum f(x, y)\ \Delta x.$$

Геометрически это означает, что мы сначала складываем объемы „столбиков“, составляющих „слой“, а затем — объемы всех „слоев“ между собой (черт. 453).

Если теперь считать все Δx и Δy бесконечно малыми, то в пределе суммы обратятся в интегралы, и мы получим основную формулу:

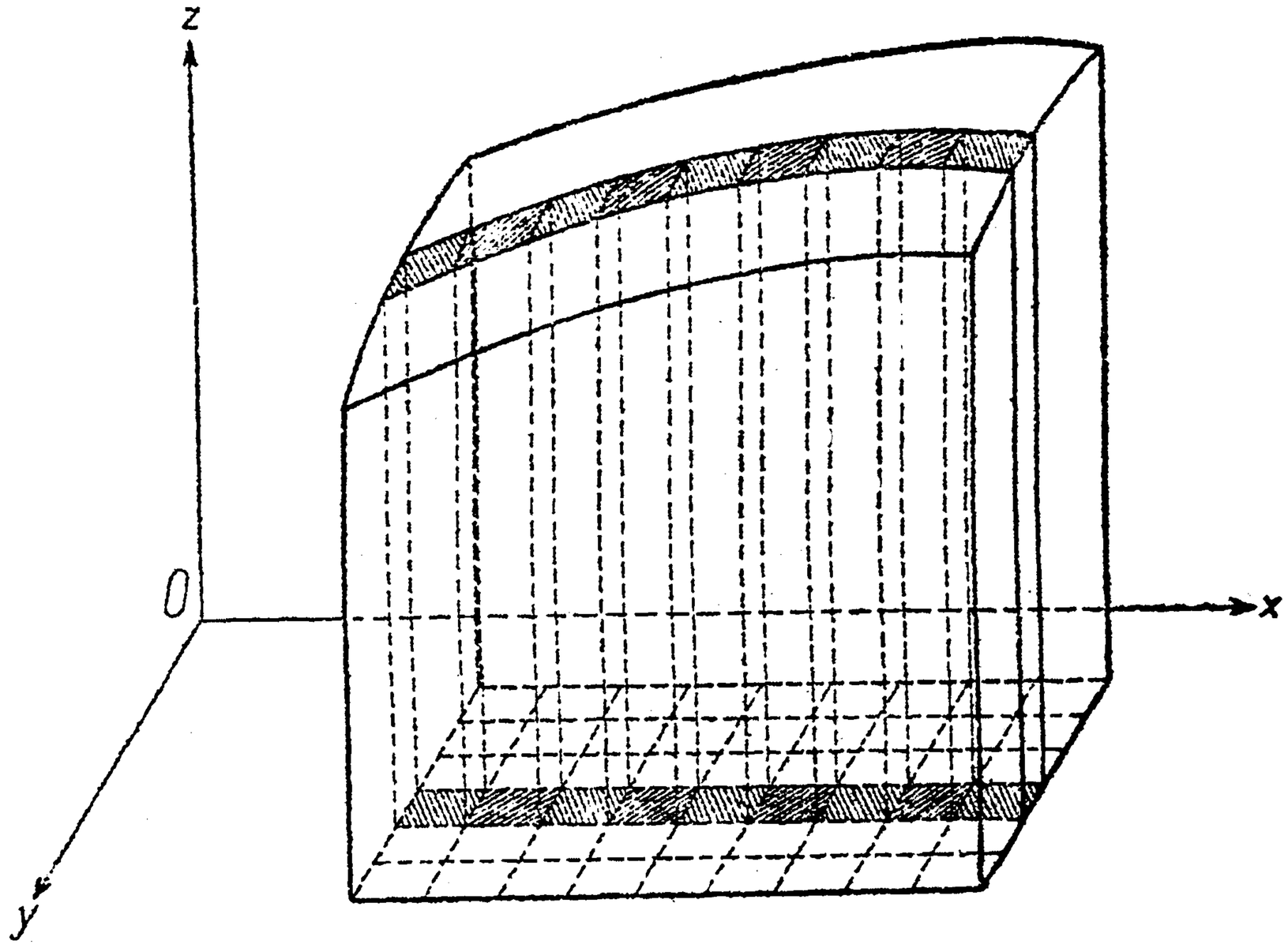
$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x, y)\, dx. \tag{33}$$

Смысл выражения, стоящего справа, заключается в следующем: сначала, рассматривая y как постоянную, вычисляют „внутренний“ интеграл, в котором x играет роль переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x, y)\, dx.$$

Результат, вообще говоря, будет зависеть от фиксированного значения y. Затем, эту функцию от y интегрируют по y между пределами c и d. Таким образом, мы здесь повторно вычисляем обыкновенный интеграл, почему и самое выражение в (33) справа называют *повторным интегралом*.

В виду важности формулы (33), приведем вывод ее еще и в другой форме, пользуясь истолкованием двойного интеграла как объема. Если пересечь призматический брус, о котором была речь в предыдущем п°,



Черт. 453.

плоскостью $y=y_0$ (черт. 454), то в сечении получится некоторая „криволинейная трапеция“ $A'ABB'$, которая проектируется на плоскость xOz без искажения и дает фигуру $M'MNN'$. Эта проекция сверху очевидно ограничена кривой

$$z=f(x, y_0),$$

так что, по формуле (2a), 171, ее площадь представится интегралом:

$$\int_a^b f(x, y_0)\,dx.$$

Заменяя здесь y_0 через y, мы имеем таким образом выражение для переменной площади поперечного сечения нашего тела:

$$Q(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx.$$

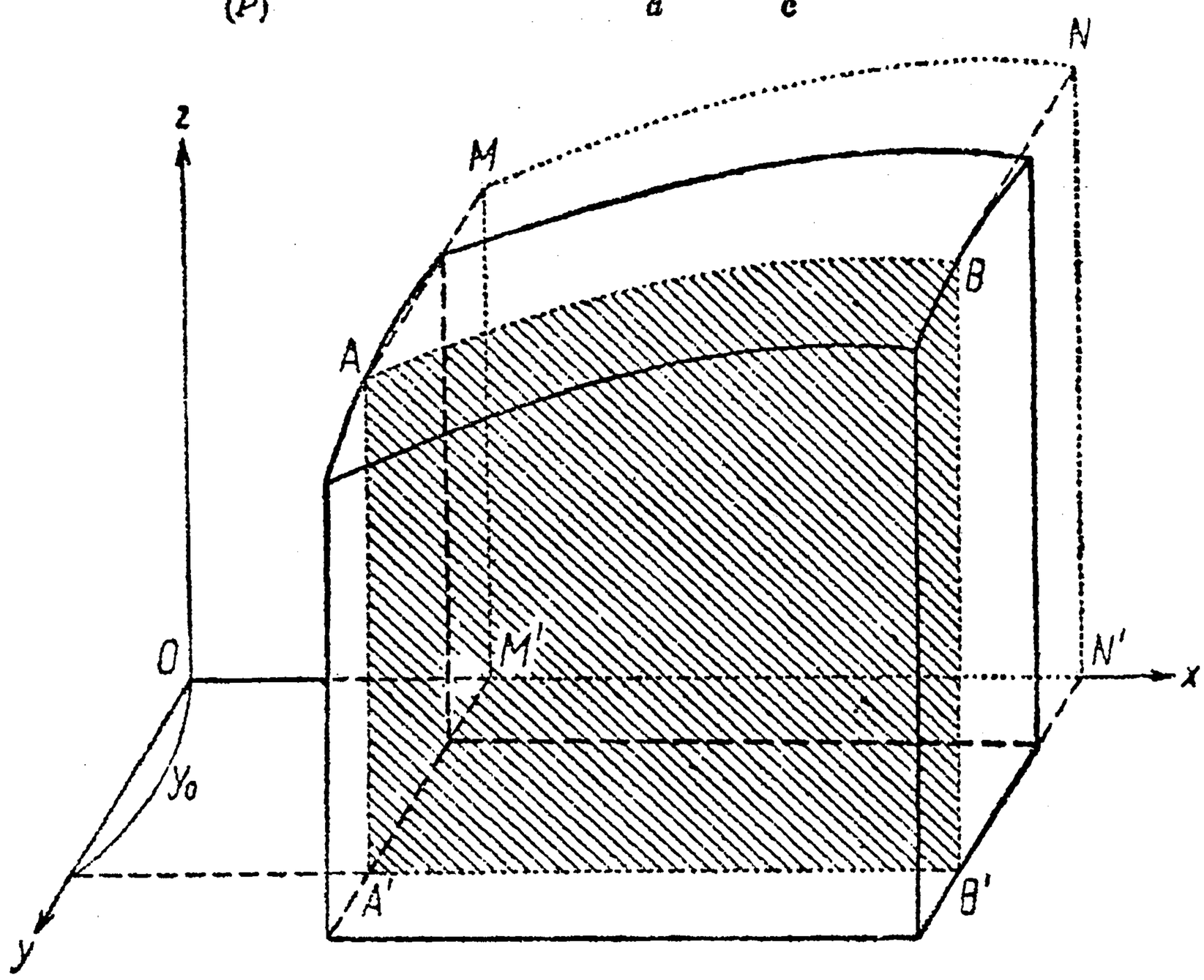
В таком случае, по формуле (26), 179, объем V тела выразится так:

$$V=\int_c^d Q(y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x, y)\,dx.$$

Сопоставляя этот результат с формулой (32), вновь приходим к равенству (33).

Разумеется, во всех предшествующих рассуждениях можно обменять ролями x и y. В частности, вычисляя объем призматического бруса, можно было бы сечь его плоскостями $x=$ пост., и т. д. В результате получится равенство, аналогичное (33):

$$\int\int_{(P)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy. \tag{34}$$



Черт. 454.

Таким образом, *двойной интеграл оказывается равным любому из двух повторных интегралов.* Отсюда, между прочим, явствует, что и эти повторные интегралы равны между собой:

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy, \tag{35}$$

так что *величина повторного интеграла не зависит от порядка, в котором производятся последовательные интегрирования.*

Иногда повторные интегралы вида (33) или (34) пишут в форме

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{или} \quad \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx,$$

причем самый порядок, в котором помещаются дифференциалы, условно указывает, к какой переменной относится тот или иной из обыкновенных интегралов. Так как двойной интеграл совпадает с повторными, то теми же символами обозначают и двойной интеграл.

Примеры и задачи 1. Пусть на плоскости xOy имеем прямоугольник (P), ограниченный прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$. Прямоугольный параллелепипед, построенный на этом основании, усечен сверху эллиптическим параболоидом:

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}.$$

Найти объем V полученного призматического бруса.

Реш. По формуле (32):

$$V=\iint\limits_{(P)}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx\,dy.$$

Переходя затем к повторному интегралу по формуле (33), найдем:

$$V=\int\limits_0^b dy\int\limits_0^a\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx.$$

Прежде всего вычисляем „внутренний" интеграл (считая $y=$ пост.):

$$\int\limits_0^a\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6p}+\frac{y^2x}{2q}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=a}=\frac{a^3}{6p}+\frac{ay^2}{2q};$$

как и следовало ожидать, он оказывается функцией от y.

Теперь интегрируем эту функцию:

$$V=\int\limits_0^b\left[\frac{a^3}{6p}+\frac{ay^2}{2q}\right]dy=\left[\frac{a^3y}{6p}+\frac{ay^3}{6q}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=b}=\frac{a^3b}{6p}+\frac{ab^3}{6q}.$$

Отв. $V=\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$.

2. Вычислить двойной интеграл:

$$I=\iint\limits_{(P)}\frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2},$$

если (P) есть квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$.

Реш. Имеем по формуле (33):

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1\frac{dx}{(x+y+1)^2},$$

но

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{(x+y+1)^2}=-\frac{1}{x+y+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+2},$$

так что

$$I=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+2}\right]dy=\ln\frac{y+1}{y+2}\Bigg|_0^1=\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{4}{3}=0{,}288.$$

3. Найти значение интеграла

$$I=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{x^2\,dx\,dy}{1+y^2}.$$

Отв. $\frac{\pi}{12}$.

4. Доказать, что двойной интеграл

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x)\cdot g(y)\,dx\,dy$$

приводится просто к произведению двух обыкновенных интегралов:

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\cdot\int_c^d g(y)\,dy.$$

5. Вычислить двойной интеграл

$$I=\iint\limits_{(P)}\frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

как по формуле (33), так и по формуле (34); (P) — тот же квадрат, что и в задаче 2.

Реш. 1) По формуле (33):

$$I=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{y\,dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^1 y\,dy\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}$$

[по формуле (40), 168, при $a^2=1+y^2$]; далее,

$$I=\int_0^1\frac{y\,dy}{(1+y^2)\sqrt{2+y^2}}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Bigg|_{t=\sqrt{2}}^{t=\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

[с помощью подстановки $t^2=2+y^2$, 173]; если аргумент логарифма умножить и разделить на $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+1)$, то ответ легко преобразуется к виду

$$I=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}\doteq 0{,}224.$$

По формуле же (34):

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{y\,dy}{(x^3+y^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\int_0^1\frac{y\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\Bigg|_{y=0}^{y=1}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$$

и наконец,

$$I=\int_0^1\left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right]dx=$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln(x+\sqrt{2+x^2})\Bigg|_{x=0}^{x=1}=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$$

[формула (33), 168].

6. Соотношение (35) является источником других полезных формул. Пусть, напр., имеем интеграл

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

зависящий от „параметра" y; поставим вопрос о производной $\frac{d\varphi}{dy}$ этого интеграла по параметру.

Применим соотношение (35) к функции $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$, заменив лишь постоянный предел d переменным y:

$$\int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dy = \int_c^y dy \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx.$$

Так как

$$\int_c^y \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dy = f(x, y) - f(x, c),$$

то это равенство можно переписать в виде:

$$\int_a^b f(x, y)\, dx - \int_a^b f(x, c)\, dx = \int_c^y dy \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx$$

или

$$\varphi(y) - \varphi(c) = \int_c^y dy \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx.$$

Теперь остается взять производные по y от обеих частей равенства; так как $\varphi(c) =$ пост., то слева получим $\frac{d\varphi(y)}{dy}$; справа же мы имеем определенную первообразную функцию от $\int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx$, как функции от y, следовательно, именно это выражение мы и получим в качестве производной. Итак,

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx,$$

т. е., *для того чтобы вычислить производную определенного интеграла по параметру, достаточно произвести дифференцирование по параметру под знаком интеграла*; иными словами, знак дифференцирования по y и знак интегрирования по x могут быть переставлены. Это правило известно под именем *„правила Лейбница"*.

Можно указать целый класс задач в строительной механике, когда это правило находит себе применение. Вспомним теорему Кастильяно [225. 3], которая позволяет, дифференцируя выражение потенциальной энергии V по силе P, найти соответствующую деформацию. Если речь идет об изгибе, а работа изгиба выражается определенным интегралом (70) n⁰ 190, то можно, не вычисляя этого интеграла, сразу написать:

$$\frac{\partial A}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{1}{2EI}\int_0^l M^2\, dx\right] = \frac{1}{2EI}\int_0^l \frac{\partial}{\partial P} M^2 \cdot dx = \frac{1}{EI}\int_0^l M \cdot \frac{\partial M}{\partial P}\, dx$$

последний интеграл часто представляется более простым!

Все сказанное, разумеется, относится и к применению принципа наименьшей работы, о котором мы уже упоминали выше в 229, задача 4. Там нам пришлось вычислять производные по H и по N от выражения

$$A=\frac{1}{2EI}\left\{\int_0^l H^2x^2\,dx+\int_0^l\left(Nx-Hl-\frac{Px^2}{2l}\right)^2dx\right\}.$$

Для первого интеграла это, конечно, не составляет труда; в случае же второго интеграла все же предпочтительнее было бы избежать громоздкого возведения в квадрат многочлена. С этой целью прибегнем к правилу Лейбница, причем величины H и N, поочередно, будут играть роль параметра y:

$$\frac{\partial}{\partial H}\int_0^l\left(Nx-Hl-\frac{Px^2}{2l}\right)^2dx=\int_0^l\frac{\partial}{\partial H}\left(Nx-Hl-\frac{Px^2}{2l}\right)^2dx=$$

$$=\int_0^l 2\left(Nx-Hl-\frac{Px^2}{2l}\right)\cdot(-l)\,dx=l^3\left(2H-N+\frac{1}{3}P\right)$$

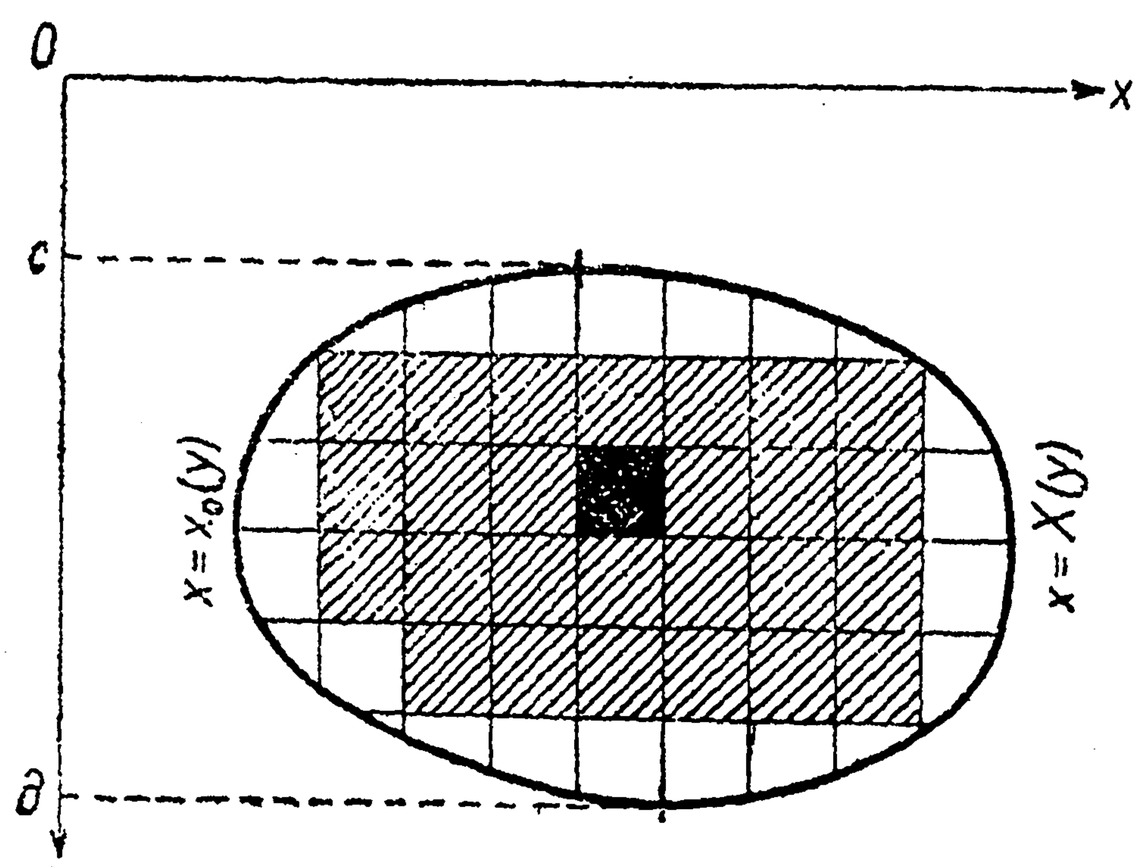
и аналогично:

$$\frac{\partial}{\partial N}\int_0^l\left(Nx-Hl-\frac{Px^2}{2l}\right)^2dx=$$

$$=\int_0^l 2\left(Nx-Hl-\frac{Px^2}{2l}\right)\cdot x\,dx=l^3\left(\frac{2}{3}N-H-\frac{1}{4}P\right).$$

Выкладки, действительно, значительно упростились!

252. Случай криволинейной области. Выше мы подробно остановились на случае, когда область (P), на которую распространяется двойной интеграл, представляет собой прямоугольник. На практике однако чаще приходится иметь дело с более сложными областями.



Черт. 455a).

Пусть, напр., функция $f(x,y)$ задана в области (P), ограниченной кривыми

$$x=x_0(y)\quad\text{и}\quad x=X(y)$$

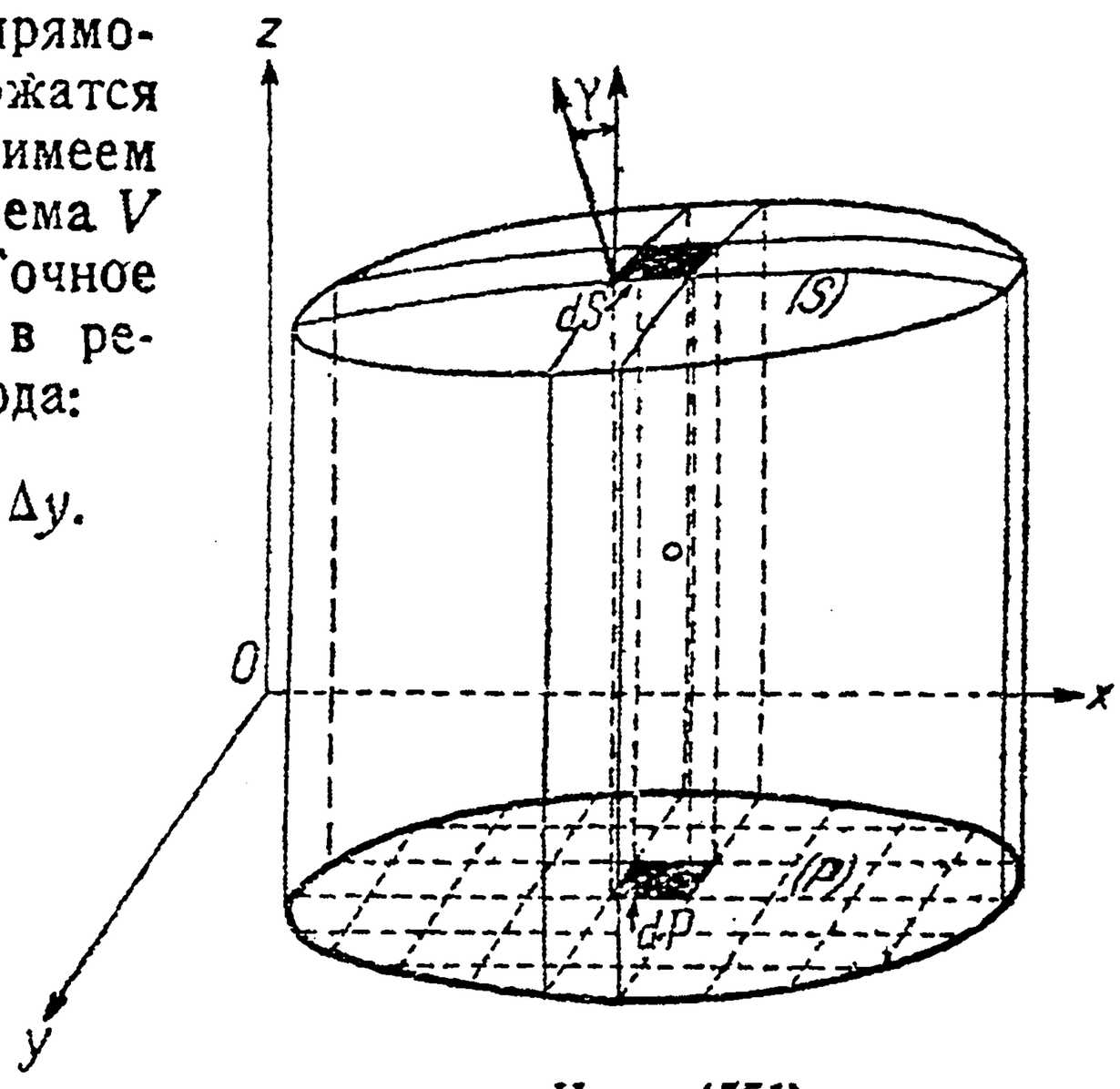
и двумя абсциссами $y=c$ и $y=d$ (черт. 455 a). Построенный на этом основании цилиндр усечем поверхностью (S): $z=f(x,y)$ (черт. 455 b). Задачу о вычислении объема V полученного „цилиндрического бруса" можно решать тем же путем, что и выше. Правда, если разложить область (P) сеткой прямых, параллельных осям, на элементы, то те из них, которые прилегают к контуру области, уже не будут прямоугольными, так что площадь такого элемента собственно не выражается произведением $\Delta x\,\Delta y$. Но значения это не имеет никакого, так как подобными „неправильными" элементами можно было бы просто пре-

небречь: в пределе эта погрешность не окажет влияния. Итак, в лице суммы:

$$\sum\sum f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y,$$

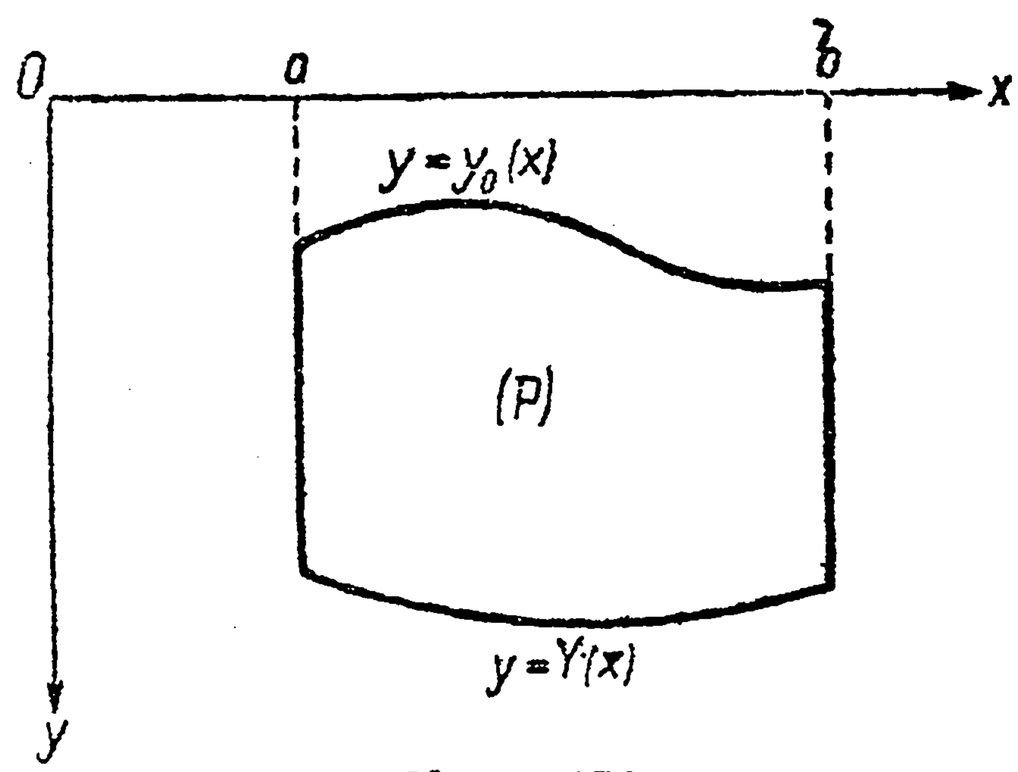
распространенной на те прямоугольники, которые содержатся в области (P), мы и здесь имеем приближенную величину объема V цилиндрического бруса. Точное значение объема получим в результате предельного перехода:

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y.$$



Черт. 455б).

Предел этот и есть двойной интеграл для случая криволинейной области; обозначение — то же, что и выше. Конечно, и здесь общность понятия о двойном интеграле далеко выходит за пределы той частной задачи о вычислении объема, которая нас к нему привела.



Черт. 456.

В рассматриваемом случае так же, как и в случае прямоугольной области, двойной интеграл может быть сведен к повторному, но с одним существенным отличием. Для прямоугольной области, какое бы значение y мы ни фиксировали при вычислении „внутреннего" интеграла, абсцисса x всегда менялась между одними и теми же пределами a и b; теперь же, при заданном y, x может меняться лишь от $x_0(y)$ до $X(y)$, так что *пределы интегрирования для „внутреннего" интеграла сами оказываются зависящими от* y:

$$\int\int_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y)\,dx. \tag{36}$$

Никаких осложнений в процесс вычисления это обстоятельство не вносит.

Если область (P) ограничена двумя кривыми

$$y = y_0(x) \quad \text{и} \quad y = Y(x).$$

и двумя ординатами $x=a$ и $x=b$ (черт. 456), то можно воспользоваться и формулой:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\, dy. \qquad (37)$$

Обе формулы (36) и (37) легко могут быть доказаны геометрически, подобно формулам (33) и (34), если истолковать двойной интеграл как объем цилиндрического бруса с основанием (P) и сначала сечь его плоскостями, параллельными плоскости xOz, а затем — плоскостями, параллельными плоскости yOz, и воспользоваться формулой, выражающей объем тела по его поперечным сечениям.

Повторные интегралы вида (36) или (37) также записывают короче:

$$\int\limits_c^d \int\limits_{x_0(y)}^{X(y)} f(x, y)\, dx\, dy \quad \text{или} \quad \int\limits_a^b \int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Теми же символами обозначают и двойные интегралы.

Случаи более сложных контуров приводятся к рассмотренным; останавливаться на этом не станем.

Примеры и задачи. 1. Вычислить повторные интегралы:

$$a)\ \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\, dy, \quad b)\ \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dy \int\limits_0^{y^2} \sin\frac{x}{y}\, dx.$$

Решение. a) Имеем:

$$\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\, dy = -\frac{x^2}{y}\Bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} = -x + x^3; \quad \int\limits_1^2 (x^3 - x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \frac{9}{4}.$$

b) Аналогично:

$$\int\limits_0^{y^2} \sin\frac{x}{y}\, dx = -y \cdot \cos\frac{x}{y}\Bigg|_{x=0}^{x=y^2} = -y \cdot \cos y + y;$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (y - y\cos y)\, dy = \left(\frac{y^2}{2} - y\sin y - \cos y\right)\Bigg|_{y=\frac{\pi}{2}}^{y=\pi} = \frac{3}{8}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi + 1.$$

2. Найти значение двойного интеграла:

$$I = \iint\limits_P (x^2 + 2xy)\, dx\, dy,$$

где (P) означает указанный на черт. 457 треугольник.

Решение. Уравнение прямой MN будет [92, (14)]

$$+\frac{y}{b} = 1, \text{ откуда } y = \frac{b}{a}(a - x);$$

поэтому

$$I=\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}(a-x)}(x^2+2xy)\,dy\,dx.$$

Имеем:

$$\int_0^{\frac{b}{a}(a-x)}(x^2+2xy)\,dy=(x^2y+xy^2)\Big|_{y=0}^{y=\frac{b}{a}(a-x)}=\frac{b}{a}x^2(a-x)+\frac{b^2}{a^2}x(a-x)^2,$$

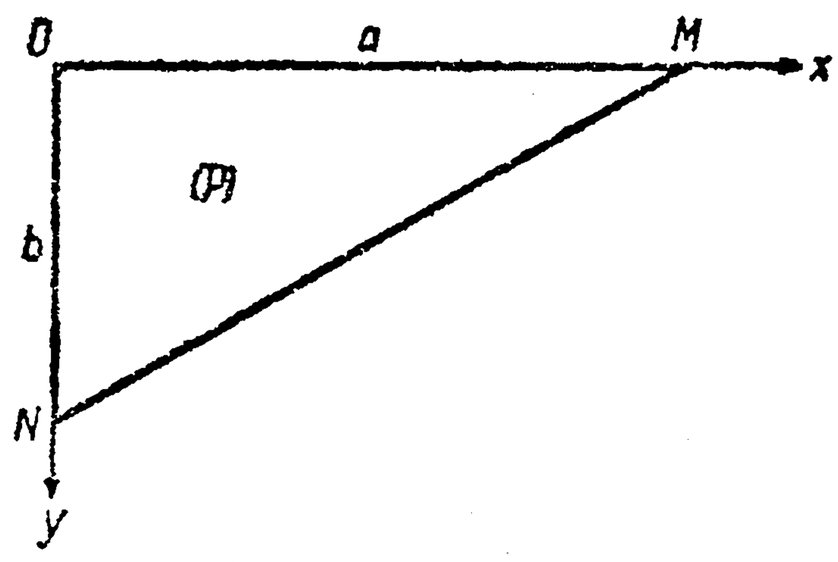
и, наконец, проинтегрировав это выражение по x от 0 до a, найдем:

$$I=\frac{a^2b}{12}(a+b).$$

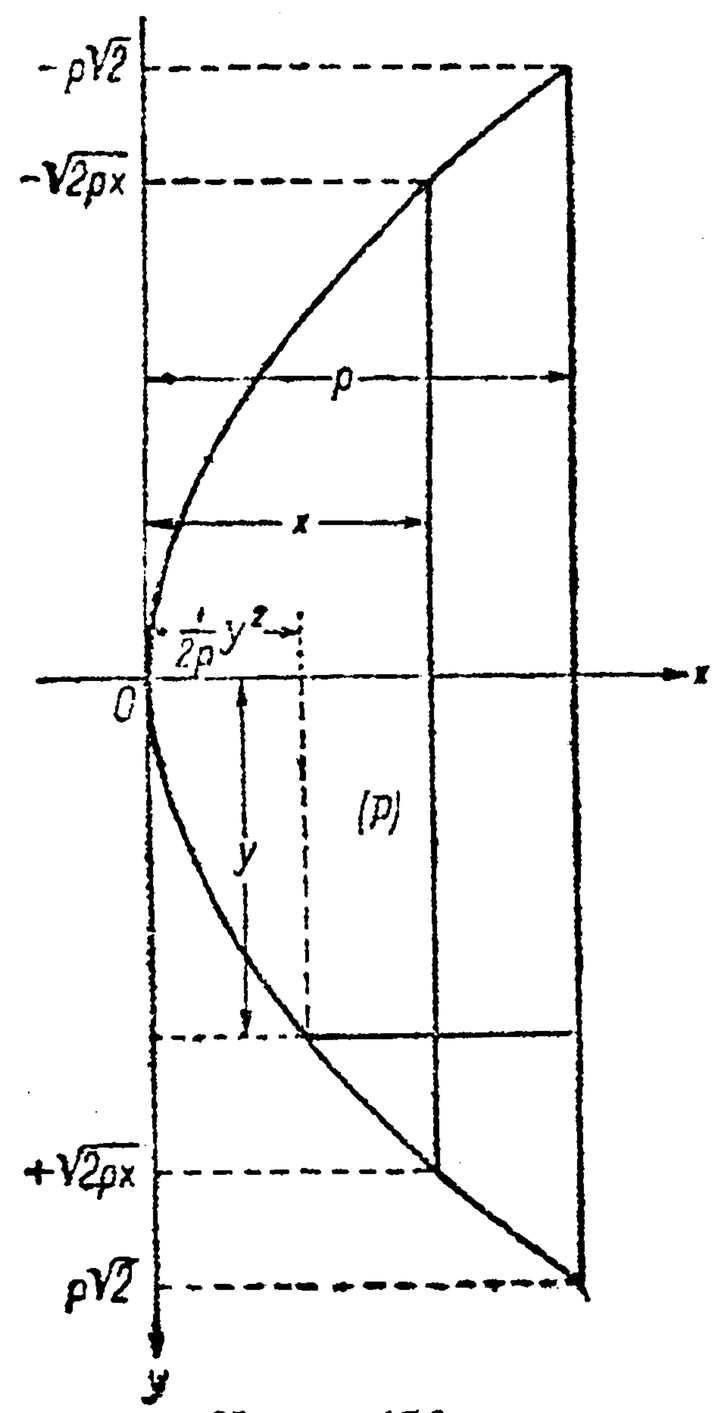
3. Вычислить двойной интеграл:

$$I=\int\int_{(P)}xy^2\,dx\,dy,$$

если (P) есть фигура, ограниченная параболой $y^2=2px$ и прямой $x=p$ (черт. 458).



Черт. 457.



Черт. 458.

Решение. Из уравнения параболы: $y=\pm\sqrt{2px}$; при постоянном значении x между 0 и p, y может изменяться от $-\sqrt{2px}$ до $\sqrt{2px}$, так что

$$I=\int_0^p\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}}xy^2\,dy\,dx.$$

Далее,

$$\int_{-\sqrt{2px}}^{+\sqrt{2px}}xy^2\,dy=\frac{1}{3}xy^3\Big|_{y=-\sqrt{2px}}^{y=\sqrt{2px}}=\frac{2}{3}x(\sqrt{2px})^3=\frac{4\sqrt{2}}{3}p^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}$$

и

$$I=\int_0^p\frac{4\sqrt{2}}{3}p^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{2}}\,dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}p^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_{x=0}^{x=p}=\frac{8\sqrt{2}}{21}p^5.$$

Тот же результат можно получить и иначе. Крайними значениями y будут $-p\sqrt{2}$ и $+p\sqrt{2}$ (что находим из уравнения параболы при $x=p$). При посто-

янном значении y в этом промежутке, x изменяется от $\frac{1}{2p}y^2$ (из уравнения параболы!) до p (см. чертеж). Поэтому

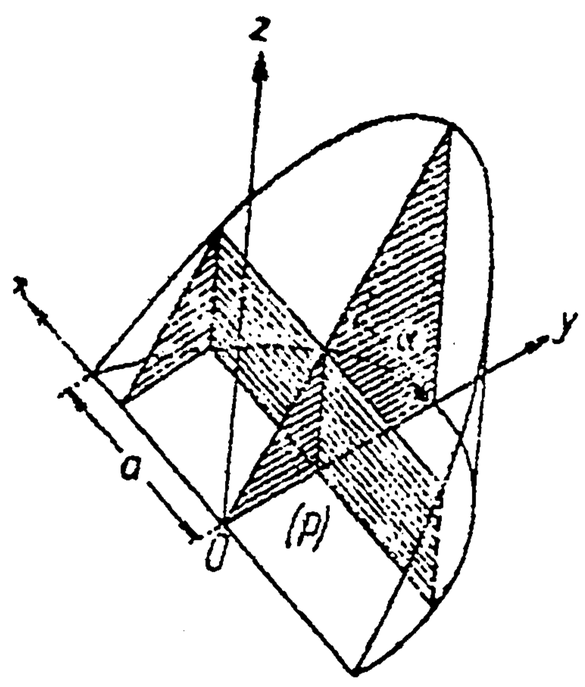
$$I=\int\limits_{-p\sqrt{2}}^{p\sqrt{2}}\int\limits_{\frac{y^2}{2p}}^{p} xy^2\,dx\,dy.$$

Последовательно вычисляем:

$$\int\limits_{\frac{y^2}{2p}}^{p} xy^2dx=\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x=\frac{y^2}{2p}}^{x=p}=\frac{p^2y^2}{2}-\frac{y^6}{8p^2},$$

$$I=\int\limits_{-p\sqrt{2}}^{p\sqrt{2}}\left(\frac{p^2y^2}{2}-\frac{y^6}{8p^2}\right)dy=\frac{p^2y^3}{6}-\frac{y^7}{56p^2}\Big|_{y=-p\sqrt{2}}^{y=p\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{21}p^5$$

4. Рассмотрим вновь „цилиндрический отрезок", о котором была речь в задаче 11, 179, и определим его объем V с помощью двойного интеграла (черт. 459).



Черт. 459.

Если ось Oz направить вертикально вверх, то уравнение секущей плоскости будет: $z=y\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому, обозначая через (P) полукруг, служащий основанием тела, будем иметь:

$$V=\operatorname{tg}\alpha\cdot\iint\limits_{(P)} y\,dx\,dy.$$

Этот двойной интеграл может быть сведен к любому из повторных интегралов:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}y\,dy,\quad \operatorname{tg}\alpha\cdot\int\limits_{0}^{a}y\,dy\int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}dx.$$

Предлагается читателю вычислить их и сопоставить свои выкладки с тем, что было сделано в 179 (ср. черт. 269 и 270). Вероятно, ему легко будет заметить, что там „внутренние интегралы были вычислены как площади поперечных сечений, исходя из элементарно-геометрических соображений.

5. Найти объем V тела, ограниченного плоскостью $z=0$, круговым цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и параболоидом $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$.

Решение. Основанием цилиндрического бруса на плоскости xOy будет служить круг (P) радиуса a; из уравнения окружности: $x^2+y^2=a^2$ ясно, что для x крайними значениями будут $-a$ и a, при постоянном же x в этих пределах, y изменяется от $-\sqrt{a^2-x^2}$ до $+\sqrt{a^2-x^2}$. Тогда, по основной формуле (32) для объема:

$$V=\iint\limits_{(P)}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx\,dy=\int\limits_{-a}^{+a}\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dy\,dx.$$

Очевидно,

$$\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dy=\frac{x^2y}{2p}+\frac{y^3}{6q}\Big|_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y=\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{p}x^2\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{3q}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}},$$

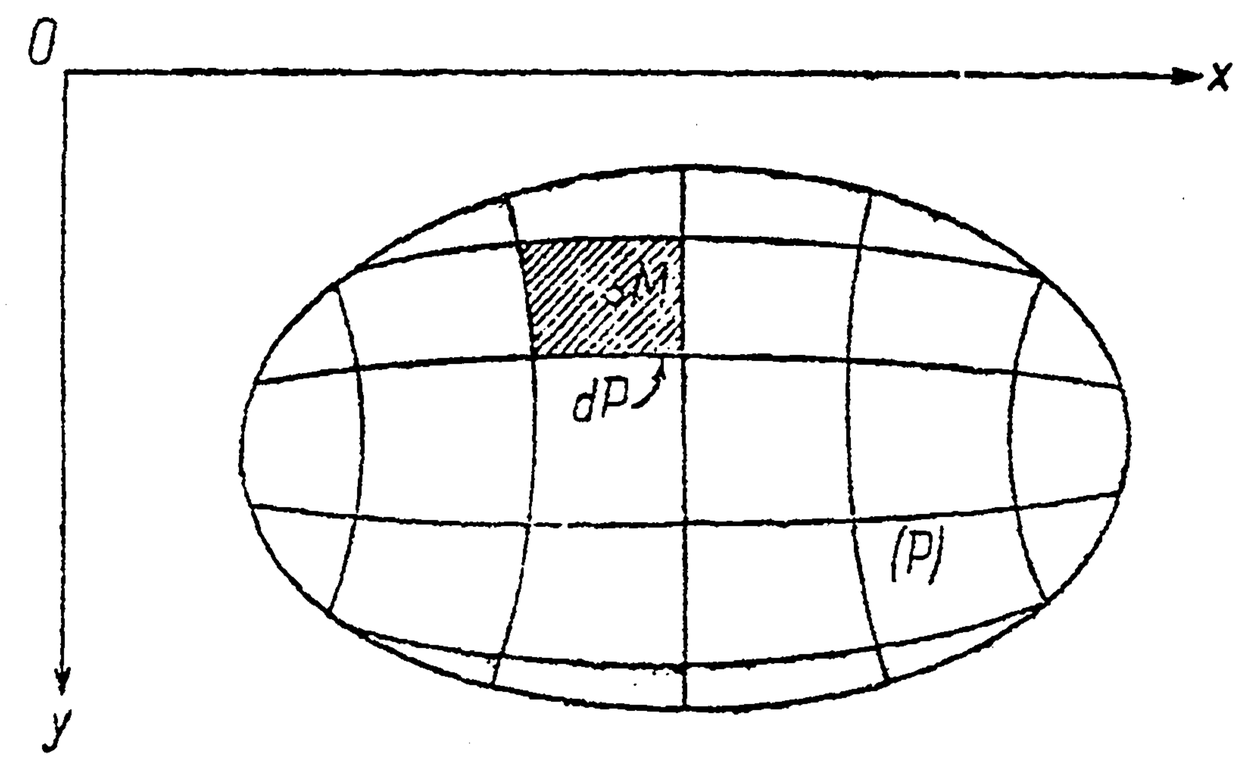
затем, пользуясь формулами 58 и 69, 168, находим:

$$V=\frac{1}{p}\int_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx+\frac{1}{3q}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{p}\left[\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}\right]\Bigg|_{-a}^{a}+$$

$$+\frac{1}{3q}\left[\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}\right]\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{\pi a^4}{8}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

253. Переход к полярным координатам. Если в некоторой области P задана функция $z=f(x, y)$, то можно сказать, что каждой точке M этой области отвечает определенное значение функции z, которая, так сказать, является „функцией точки"; в связи с этим ее можно было бы и обозначить так: $z=f(M)$, чтобы избежать необходимости пользоваться непременно декартовыми координатами точки M.



Черт. 460.

С другой стороны, разложение области P на элементы необязательно производить с помощью сетки прямых, параллельных координатным осям; того же можно достигнуть и с помощью других линий (черт. 460).

Обозначим площадь произвольного элемента области (P) через dP и, выбрав в каждом элементе по точке M, составим сумму

$$\sum f(M)\,dP. \tag{38}$$

[Легко понять, что сумма

$$\sum\sum f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y, \tag{38a}$$

с которой мы имели дело раньше, есть просто частный случай этой суммы.]

Предположим теперь, что все элементы нашей области во всех направлениях бесконечно убывают. Тогда сумма (38) будет стремиться к тому же пределу, что и частная сумма (38a), т. е. к двойному интегралу

$$\int\int_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{39}$$

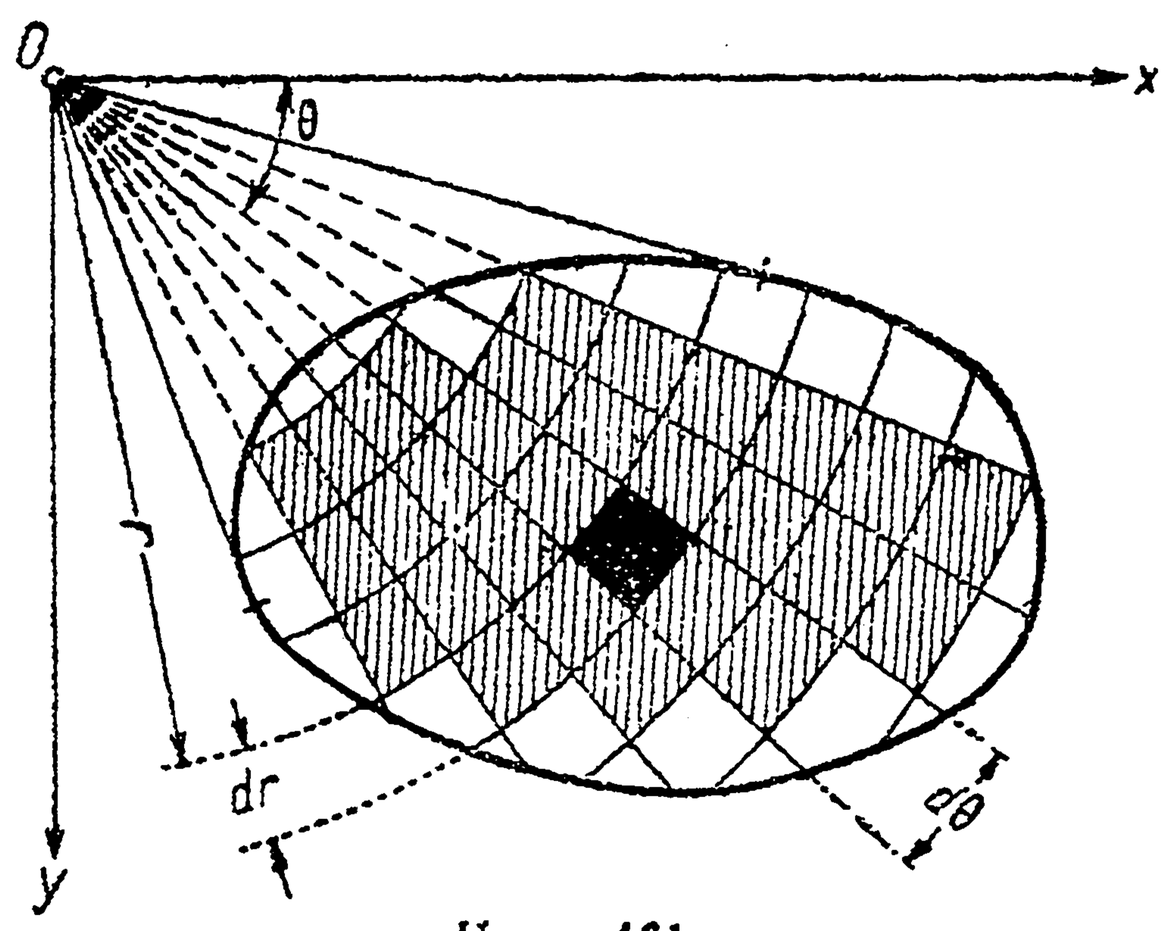
который теперь естественнее было бы обозначить символом:

$$\iint\limits_{(P)} f(M)\,dP, \tag{40}$$

напоминающим вид суммы (38).

Эта более общая точка зрения на двойной интеграл позволяет теперь перейти и к другой частной его форме, отвечающей применению полярных координат.

Если положение точки M на плоскости определяется ее полярными координатами r, θ, то „функция точки" будет, в сущности, функцией от этих координат: $f(r, \theta)$. Для разложения области (P) на элементы в этом случае пользуются системой лучей, исходящих из полюса, и системой концентрических окружностей, описанных вокруг центра (черт. 461). Таким образом, вся область (P) разбивается на элементы, в роде зачерненного (исключая разве лишь прилегающие к контуру, которыми можно пренебречь). Каждый такой элемент можно принять за прямоугольник, с основанием $r\,d\theta$ (длина дуги радиуса r, соответствующей центральному углу $d\theta$) и высотой dr. Итак, в нашем случае



Черт. 461.

$$dP = r\,dr\,d\theta,$$

и интеграл (40) запишется так:

$$\iint\limits_{(P)} f(r, \theta)\cdot r\,dr\,d\theta. \tag{41}$$

Может случиться, что первоначально интеграл был дан в форме (31); отсюда нетрудно перейти к полярным координатам—стоит лишь в подинтегральную функцию подставить $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ и заменить элемент площади $dx\,dy$ через $r\,dr\,d\theta$:

$$\iint\limits_{(P)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(P)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta. \tag{42}$$

Как увидим на примерах, такая замена иногда значительно упрощает вычисление интеграла.

Не следует думать, что элемент $dx\,dy$ при этом замещается равным ему элементом $r\,dr\,d\theta$. На деле, переходя к полярным координатам, мы совсем наново и по другому разбиваем область (P) на элементы (ср. черт. 455*a* и 461!). На окончательном результате это не отражается, благодаря *предельному переходу*, который всегда подразумевается, даже если о нем нет упоминания.

Обратимся теперь к вопросу о **вычислении** интеграла в полярных координатах. Написав для простоты подинтегральную функцию как в случае (41), так и в случае (42) в виде $\varphi(r, \theta)$, имеем таким образом интеграл:

$$\iint\limits_{(P)} \varphi(r, \theta)\, dr\, d\theta.$$

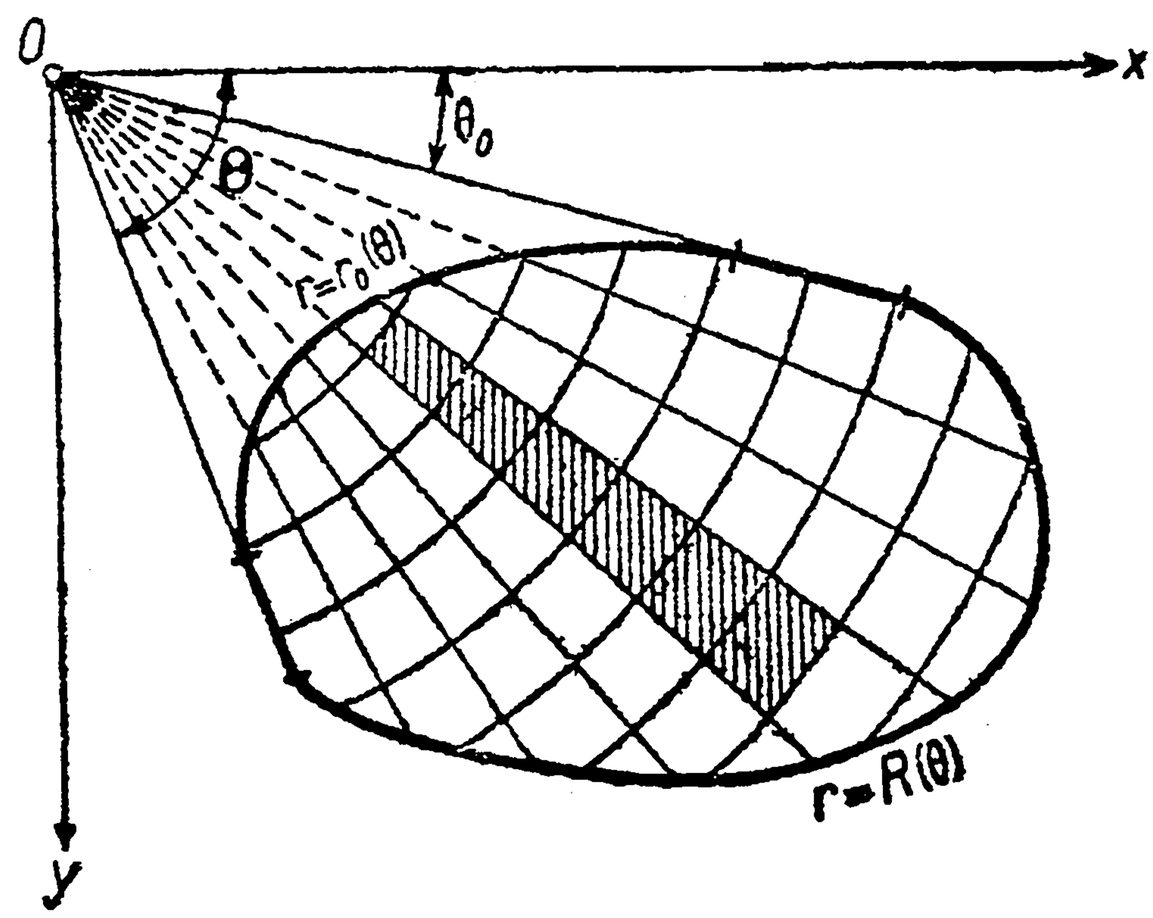
Предположим, что рассматриваемая область (P) ограничена двумя кривыми:

$$r = r_0(\theta) \text{ и } r = R(\theta)$$

и двумя исходящими из полюса лучами, под углами θ_0 и Θ к полярной оси (черт. 462). Тогда наш двойной интеграл приведется к повторному:

$$\iint\limits_{(P)} \varphi(r, \theta)\, dr\, d\theta = \int\limits_{\theta_0}^{\Theta} d\theta \int\limits_{r_0(\theta)}^{R(\theta)} \varphi(r, \theta)\, dr. \tag{43}$$

В этом можно убедиться так же, как и в справедливости формулы (33) [или (36)], суммируя сначала слагаемые, соответствующие одному элементарному сектору (при постоянных θ и $d\theta$), а затем лишь складывая полученные суммы (черт. 462).



Черт. 462.

О вычислении **обыкновенных** интегралов по r или по θ уже говорить не приходится. Интегралы (43) записывают иногда короче:

$$\int\limits_{\theta_0}^{\Theta} \int\limits_{r_0(\theta)}^{R(\theta)} \varphi(r, \theta)\, dr\, d\theta.$$

Примеры и задачи. 1. Вычислить двойной интеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a\theta} r\, dr\, d\theta.$$

Решение. Имеем:

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a\theta} r\, dr\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{a\theta} r\, dr,$$

$$\int\limits_0^{a\theta} r\, dr = \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r=0}^{r=a\theta} = \frac{1}{2} a^2 \theta^2, \quad I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 \theta^2\, d\theta = \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{3} \theta^3 \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

2. Найти двойной интеграл

$$I=\iint\limits_{(P)} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta,$$

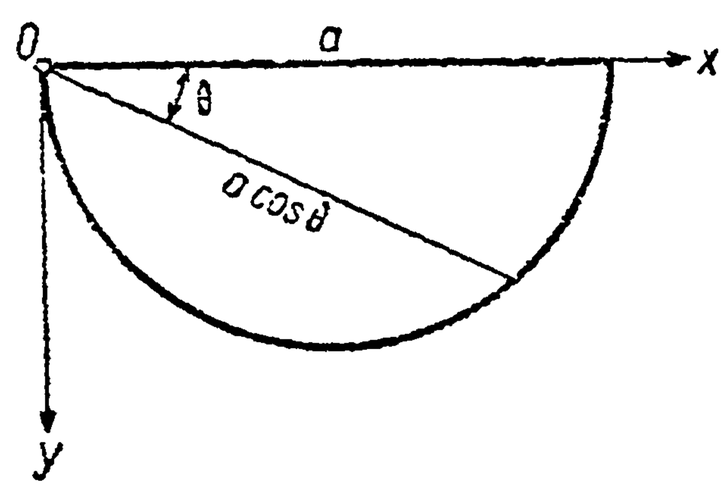
распространенный на полукруг (P) диаметра a (черт. 463).

Решение. Полярное уравнение окружности, при указанном на чертеже положении полярной оси, будет $r=a\cdot\cos\theta$ [117]. Угол θ изменяется между крайними значениями 0 и $\frac{\pi}{2}$, при постоянном же θ в этих пределах — r меняется от 0 до $a\cos\theta$. Итак,

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta,$$

$$\int\limits_0^{a\cos\theta} r^2\sin\theta\,dr=\sin\theta\cdot\frac{r^3}{3}\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\theta}=\frac{a^3}{3}\cos^3\theta\sin\theta,\ I=\frac{a^3}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{a^3}{3}\cdot-\frac{\cos^4\theta}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^3}{12}.$$



Черт. 463.

3. Решить задачу 5 предыдущего n°, перейдя к полярным координатам.

Решение. Мы имеем:

$$V=\iint\limits_{(P)}\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx\,dy,$$

где область (P) представляла собою круг, описанный вокруг начала радиусом a В подобном случае всего естественнее перейти к полярным координатам, ибо для точек круга θ меняется от 0 до 2π, а r — от 0 до a, независимо от значения θ Итак, по формуле (42):

$$V=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a}\left(\frac{r^2\cos^2\theta}{2p}+\frac{r^2\sin^2\theta}{2q}\right)r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{p}\cos^2\theta+\frac{1}{q}\sin^2\theta\right)d\theta\cdot\int\limits_0^{a}r^3\,dr=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi a^4}{8}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right).$$

Мы видим, что переход к полярным координатам внес значительные упрощения в вычисления.

4. Вычислить значение двойного интеграла

$$I=\int\limits_0^{a}\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx,$$

перейдя к полярным координатам.

Решение. Здесь сначала следует выяснить, какова область интегрирования; она ограничена кривыми:

$$y=0 \text{ и } y=\sqrt{a^2-x^2},$$

причем x изменяется от 0 до a, следовательно представляет собой первый квадрант круга радиуса a, описанного вокруг начала. Для точек этой области θ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а r — от 0 до a, независимо от θ. Итак, по формуле (42):

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\cdot\int_0^a e^{-r^2}\cdot r\,dr=\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}).$$

5. Определить объем V тела, ограниченного с боков круговым цилиндром:

$$\left(x-\frac{1}{2}R\right)^2+y^2=\frac{1}{4}R^2 \text{ или } x^2+y^2=Rx,$$

а сверху и снизу—сферой:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Решение. Напомним, что мы уже имели дело в 238 с пересечением этих поверхностей (см. черт. 409). Так как рассматриваемое тело симметрично как относительно плоскости xOy, так и относительно плоскости xOz, то можно ограничиться той его частью, которая лежит в первом октанте, и учетверить полученный объем. Из уравнения сферы:

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},$$

так что по формуле (32):

$$V=4\int\int_{(P)}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где (P) есть полукруг в плоскости xOy, построенный на радиусе R сферы, как на диаметре. Подобную же область мы уже имели в задаче 2 (черт. 463). Вводя, как и там, полярные координаты, получим:

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta.$$

Затем,

$$\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\,dr=-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=0}^{r=R\cos\theta}=\frac{1}{3}R^3(1-\sin^3\theta),$$

$$V=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta=\frac{4}{3}R^3\left(\theta+\cos\theta-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).\ *$$

6. Покажем на примере, как изложенное выше может быть применено и к *бесконечным* областям.

Рассмотрим интеграл

$$I=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

распространенный на весь первый квадрант плоскости.

---

* Таким образом, если из правой полусферы изъять тот цилиндрический брус, о котором только-что шла речь, то остающееся тело будет иметь объем $\frac{8}{9}R^3$, выражающийся через радиус без всяких иррациональностей!

Переходя к повторному интегралу, видим, что

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\cdot\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\left\{\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right\}^2$$

(ибо величина интеграла не зависит от обозначения независимой переменной).

Замечая, что квадрант бесконечной плоскости совпадает с квадрантом круга бесконечного радиуса, и вводя полярные координаты, будем иметь, с другой стороны (ср. зад. 4):

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-r^2}\cdot 2r\,dr=-\frac{\pi}{4}\cdot e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=\infty}=\frac{\pi}{4}$$

Сопоставляя оба выражения для I, получим:

$$\left\{\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right\}^2=\frac{\pi}{4},$$

откуда

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{44}$$

Таким образом, мы попутно вычислили этот замечательный интеграл, играющий важную роль в теории вероятностей и в математической физике.

Найденный результат интересен еще тем, что первообразная функция для e^{-x^2}, как мы уже не раз упоминали [напр. **170**], не выражается в конечном виде, так что с ее помощью интеграл (44) не мог бы быть вычислен!

254. Примеры и задачи на применение двойного интеграла. 1. Если функция $z=f(x,y)$ определена в области (P), то *средним значением функции* в этой области называют число:

$$z_m=\frac{1}{P}\iint\limits_{(P)}f(x,y)\,dP.$$

Эта формула вполне аналогична формуле (19), **175**.

Для примера рассмотрим течение жидкости в трубе или канале; в каждой точке M поперечного сечения (P) течение имеет определенную скорость v, которая является „функцией точки". Тогда *средняя скорость* течения в рассматриваемом течении выразится формулой:

$$v_m=\frac{1}{P}\iint\limits_{(P)}v\,dP. \tag{45}$$

2. Пусть, скажем, вода течет в круглой трубе, радиуса R и уклона i. По формуле Базена: скорость течения v на расстоянии r от оси трубы будет такова:

$$v=v_0-21\sqrt{\frac{Ri}{2}}\left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

где v_0 — скорость течения на оси трубы. Определить среднюю скорость течения.

Решение. По формуле (45), пользуясь полярными координатами [ср (41)], найдем:

$$v_m=\frac{1}{P}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\left[v_0-21\sqrt{\frac{Ri}{2}}\left(\frac{r}{R}\right)^3\right]r\,dr=$$

$$=\frac{1}{\pi R^2}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}v_0r^2-\frac{21}{5}\sqrt{\frac{Ri}{2}}\,\frac{r^5}{R^3}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=R}=v_0-\frac{42}{5}\sqrt{\frac{Ri}{2}}.$$

3. Если в двойном интеграле, распространенном на область (P), положить подинтегральную функцию равной 1, т. е. рассмотреть интеграл

$$\iint\limits_{(P)} dP,$$

то в результате получится просто площадь P нашей области; суммирование элементов dP, очевидно, приводит именно к P! Таким образом, вообще говоря, всякая площадь выражается двойным интегралом.

Пусть мы имеем дело с „криволинейной трапецией", ограниченной осью Ox, кривой $y=f(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$. Тогда, преобразуя наш интеграл в повторный, по формуле (37), найдем:

$$P=\iint\limits_{(P)} dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{f(x)} dy=\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

или, заменяя для краткости $f(x)$ через y:

$$P=\int\limits_a^b y\,dx$$

—это в точности совпадает с формулой (2a), 171, по которой мы раньше вычисляли площадь „криволинейной трапеции".

Если пожелать вычислить площадь сектора, ограниченного кривой $r=f(\theta)$ и двумя радиусами-векторами, отвечающими $\theta=\theta_0$ и $\theta=\Theta$, то естественно и элемент площади взять в полярных координатах, так что [см. (43)]

$$P=\iint\limits_{(P)} r\,dr\,d\theta=\int\limits_{\theta_0}^{\Theta} d\theta\int\limits_0^{f(\theta)} r\,dr=\frac{1}{2}\int\limits_{\theta_0}^{\Theta}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

или, снова заменяя $f(\theta)$ просто на r:

$$P=\frac{1}{2}\int\limits_{\theta_0}^{\Theta} r^2\,dr,$$

что совпадает с старой формулой (24), 178.

4. Новым приложением двойного интеграла является вычисление *площади кривой поверхности* [в 182 мы имели дело только с случаем поверхности вращения].

Пусть имеем поверхность (S), выражаемую уравнением $z=f(x,y)$, причем точка (x,y) изменяется в некоторой области (P) (черт. 455). Если разбить область (P) на элементы (dP) и на каждом из них построить прямой цилиндр, то и поверхность (S) окажется разбитой на элементы (dS). Взяв какую-нибудь точку на этом элементе, можно считать самый элемент совпадающим с тем элементом касательной плоскости в этой точке, который вырезается на ней цилиндром, построенным на (dP). В таком случае, так как (dP) служит проекцией (dS),

$$dP=dS\cdot\cos\gamma,$$

где γ есть угол между касательной плоскостью и плоскостью xOy или—что то же—угол между нормалью к поверхности и осью Oz. Отсюда

$$dS=\frac{dP}{\cos\gamma},$$

так что, суммируя, получим искомую формулу:

$$S=\iint\limits_{(P)}\frac{dP}{\cos\gamma}. \qquad (46)$$

Если воспользоваться последней из формул (94), **245**, то этот результат можно переписать в виде:

$$S=\int\int_{(P)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dP,$$

где, как мы помним, для краткости положено:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

5. Пусть требуется вычислить площадь S той части поверхности сферы

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

которая вырезается цилиндром

$$x^2+y^2=Rx$$

[ср. **238**, черт. 409; **253**, зад. 5].

Очевидно, достаточно найти площадь, соответствующую первому октанту. Имеем:

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\quad p=\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=-\frac{x}{z},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{R}{z}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Прибегая, как и в задаче 5, **253**, к полярным координатам, получим:

$$S=4\int\int_{(P)}\frac{R\,r\,dr\,d\theta}{\sqrt{R^2-r^2}}=4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=$$

$$=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\,d\theta=2R^2(\pi-2).*$$

6. Если на одной (скажем, верхней) полости конуса вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

взять произвольную фигуру (S), то ее площадь S оказывается пропорциональной площади P ее проекции на горизонтальную плоскость. Доказать это.

Этот результат непосредственно вытекает из того факта, что для данного случая

$$\cos\gamma=\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}=\text{пост.},$$

так что по формуле (46) сразу получается:

$$S=\int\int_{(P)}\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}\,dP=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}\int\int_{(P)}dP=\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a}\cdot P.$$

7. Для инженера несравненно бо́льший интерес представляют применения двойного интеграла в области механических понятий. Рассмотрим в плоскости xOy произвольную фигуру (P) и разложим ее на элементы (черт. 464). Тогда

$$x\cdot dP,\ y\cdot dP;\ x^2\cdot dP,\ y^2\cdot dP$$

---

* И здесь интересно отметить, что, отняв из площади полусферы $2\pi R^2$ полученный результат, для площади остающихся—за выделением вырезанных цилиндром—частей полусферы получим выражение $4R^2$, также не содержащее никаких ирра[illegible] [illegible] примеч. на стр. 41.]

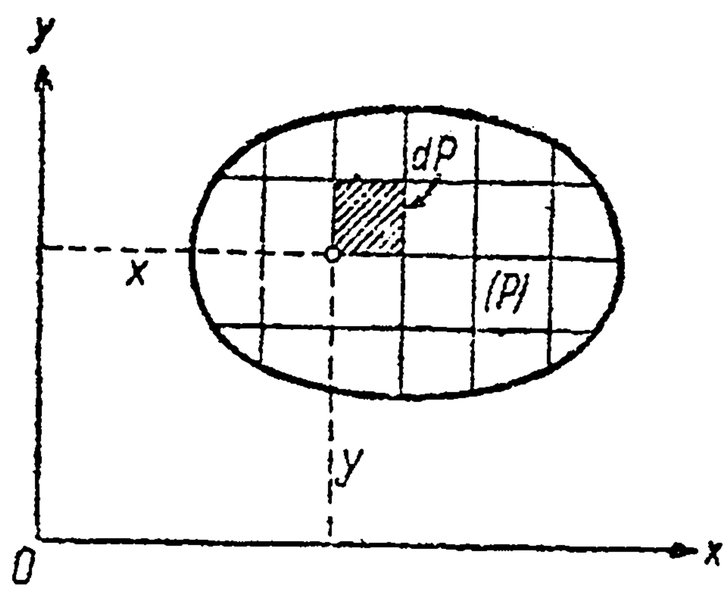
представляют, соответственно, статические моменты одного из таких элементов относительно осей Oy и Ox, и моменты инерции его относительно тех же осей. Суммируя, сразу получаем формулы, выражающие упомянутые моменты для всей фигуры:

$$M_y = \iint\limits_{(P)} x\,dP,\ M_x = \iint\limits_{(P)} y\,dP,\ I_y = \iint\limits_{(P)} x^2\,dP,\ I_x = \iint\limits_{(P)} y^2\,dP. \quad (47)$$

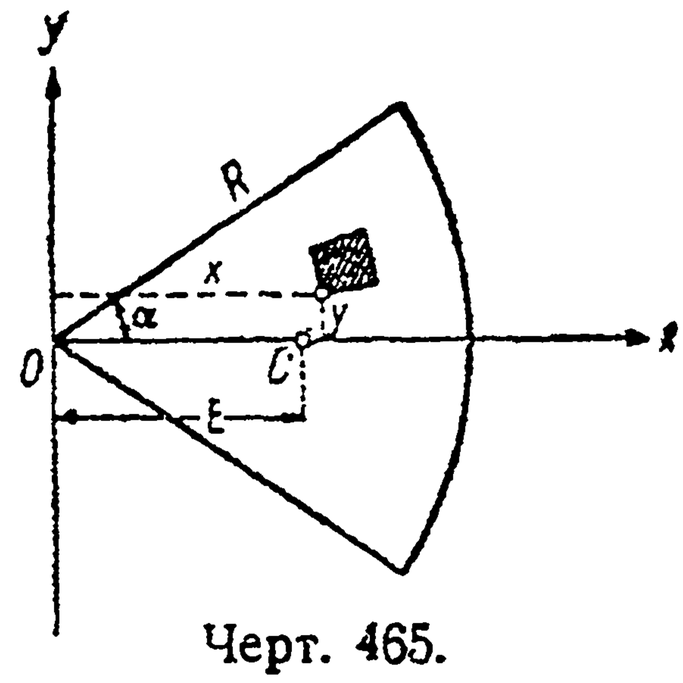
Отсюда для координат ξ, η центра тяжести фигуры получим:

$$\xi = \frac{M_y}{P} = \frac{\iint\limits_{(P)} x\,dP}{P},\ \eta = \frac{M_x}{P} = \frac{\iint\limits_{(P)} y\,dP}{P} \quad (47a)$$

Для случая „криволинейной трапеции", переходя к повторным интегралам, мы вернемся к прежним формулам, которыми мы уже пользовались в 184 [(42), (43)] и



Черт. 464.



Черт. 465.

185 [(44)]. Напр., если речь идет о той же „криволинейной трапеции", что и в задаче 3, то для статических моментов будем иметь:

$$M_y = \int\limits_a^b x\,dx \int\limits_0^{f(x)} dy = \int\limits_a^b x f(x)\,dx,\ M_x = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{f(x)} y\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx, \text{ и т. д.}$$

Из полученных теперь общих формул, в частности, можно вывести и формулы, отвечающие применению полярных координат.

8. Найти: *a*) положение центра тяжести кругового сектора и *b*) его момент инерции относительно биссектрисы центрального угла: Даны радиус R и центральный угол 2α.

Решение. a) Возьмем упомянутую биссектрису за полярную ось (и за ось Ox прямоугольных координат) (черт. 465). Тогда

$$M_y = \iint\limits_{(P)} xr\,dr\,d\theta = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^2\,dr = \frac{2}{3}R^3 \sin\alpha,$$

и так как площадь $P = R^2\alpha$, то

$$\xi = \frac{2R}{3}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

В виду симметрии, очевидно, $\eta = 0$.

b) Аналогично,

$$I_x = \iint\limits_{(P)} y^3 r\,dr\,d\theta = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \sin^3\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^3\,dr = \frac{1}{8}R^4(2\alpha - \sin 2\alpha).$$

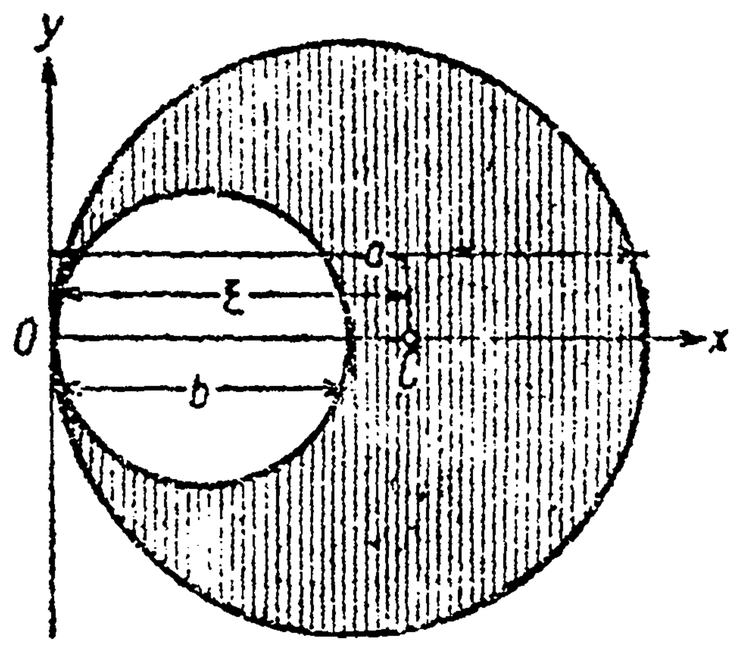
9. Найти положение центра тяжести для фигуры, содержащейся между двумя касающимися окружностями (черт. 466):

Решение. Принимая во внимание полярные уравнения окружностей:

$$r = a \cdot \cos\theta, \quad r = b \cdot \cos\theta$$

(если a и b означают их диаметры), сразу получим по формуле (43):

$$M_y = \int\limits_{(P)} x\, r\, dr\, d\theta = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int\limits_{b\cos\theta}^{a\cos\theta} r^2\, dr = \frac{2}{3}(a^3 - b^3)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta;$$



Черт. 466.

в силу результатов задач 2, **172**, и 7, **173**,

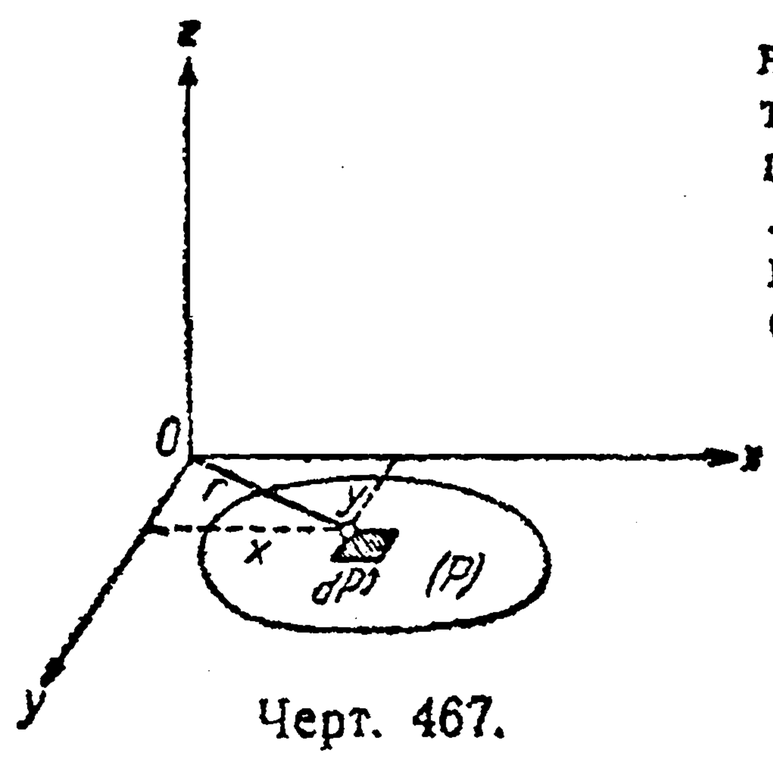
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16},$$

поэтому окончательно:

$$M_y = \frac{\pi}{8}(a^3 - b^3).$$

Разделяя на $P = \frac{1}{4}\pi(a^2 - b^2)$, получим:

$$\xi = \frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}.$$



Черт. 467.

10. Произведение $r^2 \cdot dP$ элемента площади dP на квадрат его расстояния до полюса O (или — что то же — до оси Oz, перпендикулярной к плоскости фигуры (черт. 467), называется *полярным моментом инерции* элемента. Отсюда суммированием получается полярный момент инерции всей фигуры [ср. **190**, зад. 7]:

$$I_O = \iint\limits_{(P)} r^2\, dP.$$

Из того, что $r^2 = x^2 + y^2$, сразу вытекает:

$$\iint\limits_{(P)} r^2\, dP = \iint\limits_{(P)} y^2\, dP + \iint\limits_{(P)} x^2\, dP,$$

т. е.

$$I_O = I_x + I_y;$$

таким образом *„полярный" момент инерции равен сумме двух „экваториальных" моментов относительно любых двух исходящих из полюса и взаимно перпендикулярных осей (в плоскости фигуры).*

При вычислении полярного момента инерции часто бывает удобно пользоваться полярными координатами; очевидно,

$$I_O = \iint\limits_{(P)} r^3\, dr\, d\theta.$$

11. Найти полярный момент инерции кардиоиды: $r = a(1 + \cos\theta)$ относительно полюса.

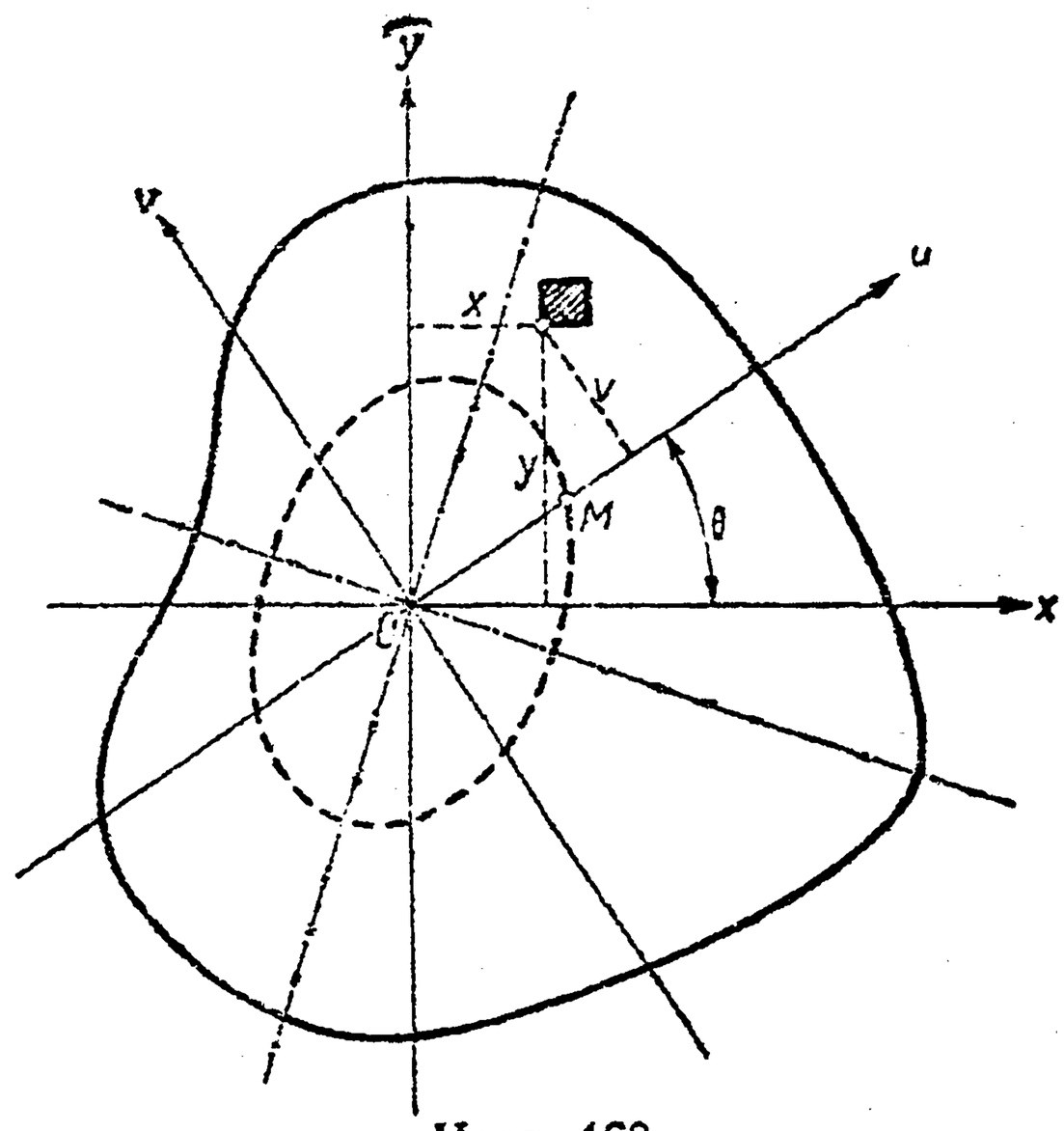
Решение. Имеем:

$$I_O = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\theta \int\limits_0^{a(1+\cos\theta)} r^3\, dr = \frac{a^4}{2}\int\limits_0^{\pi} (1+\cos\theta)^4\, d\theta = 8a^4\int\limits_0^{\pi} \cos^8\frac{\theta}{2}\, d\theta.$$

Если прибегнуть к подстановке $t=\frac{\theta}{2}$ и снова воспользоваться результатами задач 2, **172**, и 7, **173**, то найдем:

$$I_O = 16a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t\,dt = 16a^4\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35}{16}\pi a^4.$$

12. Предположим теперь, что в плоскости xOy дана произвольная плоская фигура (P), и поставим себе задачей — найти общее выражение для момента инерции этой фигуры относительно любой оси Ou, составляющей с осью Ox угол θ (черт. 468).



Черт. 468.

Если принять ось Ou и перпендикулярную к ней ось Ov за новые координатные оси, то, как мы знаем [**107**, (32 a)], зависимости между новыми и старыми координатами любой точки будут:

$$u = x\cos\theta + y\sin\theta,$$

$$v = -x\sin\theta + y\cos\theta,$$

Очевидно,

$$I_u = \iint_{(P)} v^2\,dP$$

и, так как

$$v^2 = y^2\cdot\cos^2\theta - 2xy\cdot\sin\theta\cos\theta + x^2\cdot\sin^2\theta,$$

то

$$I_u = \cos^2\theta\cdot\iint_{(P)} y^2\,dP - 2\sin\theta\cos\theta\iint_{(P)} xy\,dP + \sin^2\theta\iint_{(P)} x^2\,dP.$$

Коэффициентами при $\cos^2\theta$ и $\sin^2\theta$ являются, как мы видим, моменты инерции I_x и I_y относительно осей координат; но, кроме них, здесь встречается еще величина

$$K_{xy} = \iint_{(P)} xy\,dP, \tag{48}$$

которую называют *центробежным моментом* [см. ниже, зад. 15] или—*произведением инерции*. Итак,

$$I_u = I_x\cdot\cos^2\theta - 2K_{xy}\sin\theta\cos\theta + I_y\cdot\sin^2\theta. \tag{49}$$

Для наглядной иллюстрации изменения момента инерции фигуры при вращении оси Ou поступают следующим образом: на оси Ou откладывают отрезок:

$$OM = \frac{1}{\sqrt{I_u}} \tag{50}$$

(черт. 468) и рассматривают геометрическое место полученных таким путем точек M. Если через x и y обозначить координаты одной из этих точек, то

$$X = OM\cdot\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{I_u}},\ Y = OM\cdot\sin\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{I_u}}.$$

Разделяя соотношение (49) на I_u, мы легко получим уравнение упомянутого геометрического места:

$$I_x\cdot X^2 - 2K_{xy}\cdot XY + I_y\cdot Y^2 = 1.$$

Мы видим, что это — кривая второго порядка; так как I_u (как сумма положительных элементов) не обращается в нуль, то OM не обращается в бесконечность, и кривая может быть только *эллипсом.* * Он носит название *эллипса инерции.*

Если центробежный момент K_{xy} равен нулю (и только в этом случае), формула (49) принимает простейший вид:

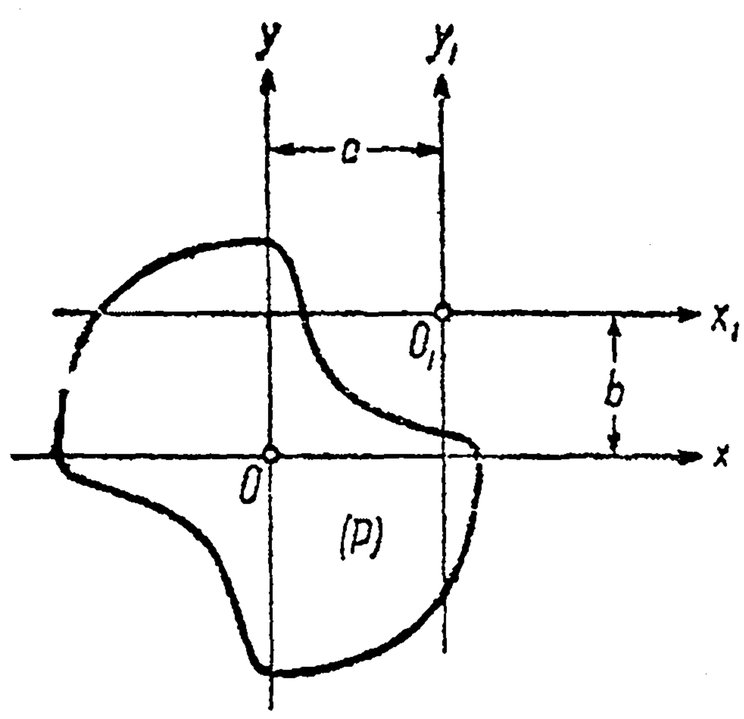
$$I_u = I_x \cdot \cos^2\theta + I_y \cdot \sin^2\theta,$$

а уравнение эллипса инерции приобретает форму:

$$I_x \cdot X^2 + I_y \cdot Y^2 = 1,$$

которая показывает, что в этом случае оси координат служат осями эллипса. Итак, оси эллипса инерции (их называют *главными осями инерции*) характеризуются тем, что для них центробежный момент равен нулю.

Читатель видит, что для установления положения главных осей инерции (в общем случае, когда $K_{xy} \neq 0$) и для определения отвечающих им моментов инерции, можно воспользоваться теорией приведения общего уравнения эллипса к простейшему виду, изложенной в n⁰ **109**. Согласно формуле (45) угол φ, на который надо повернуть оси координат, чтобы они совместились с осями эллипса, определяется из соотношения



Черт. 469.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2K_{xy}}{I_y - I_x}, \tag{51}$$

а соответствующие этим осям моменты инерции являются [**109**, (46)] корнями квадратного уравнения:

$$t^2 - (I_x + I_y) \cdot t + (I_x \cdot I_y - K_{xy}^2) = 0,$$

т. е. равны соответственно:

$$t = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 - I_x \cdot I_y + K_{xy}^2}$$

или

$$t = \frac{I_x + I}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + K_{xy}^2} \tag{52}$$

Во всех этих вопросах двойные интегралы I_x, I_y, K_{xy} играют основную роль.

13. Относительно *вычисления* центробежного момента K_{xy} заметим следующее. *Если одна из осей, напр ось Oy, будет осью симметрии рассматриваемой фигуры, то центробежный момент равен нулю.* Действительно, в этом случае каждому элементу dP по одну сторону оси найдется такой же по величине симметричный ему элемент dP по другую сторону, так что соответствующие элементы $xy\,dP$ и $-xy\,dP$ интеграла взаимно уничтожаются.

Затем, при вычислении момента K_{xy} часто бывает полезна выводимая ниже формула. Предположим, что начало координат O является *центром тяжести* фигуры, так что [см. (47)]:

$$\int\int_{(P)} x\,dP = 0, \quad \int\int_{(P)} y\,dP = 0. \tag{53}$$

Проведем через точку O_1 (a, b) оси O_1x_1 и O_1y_1, параллельные прежним, и постараемся определить центробежный момент $K_{x_1y_1}$ (черт. 469). Так как [**37**, (12)]

$$x_1 = x - a, \quad y_1 = y - b,$$

* Обращаем внимание читателя на то, что столь простой результат получился благодаря удачной мысли откладывать на оси Ou именно отрезок (50).

Иногда, впрочем, откладывают величину, пропорциональную этому отрезку, что отражается лишь на размерах, но не на форме эллипса.

то

$$K_{x_1 y_1} = \iint\limits_{(P)} (x-a)(y-b)\,dP =$$

$$= \iint\limits_{(P)} xy\,dP - a\cdot\iint\limits_{(P)} y\,dP - b\cdot\iint\limits_{(P)} x\,dP + ab\iint\limits_{(P)} dP$$

или, в виду (53),

$$K_{x_1 y_1} = K_{xy} + ab\cdot P.$$

Если $K_{xy}=0$, то формула приобретает особенно простой вид:

$$K_{x_1 y_1} = ab\cdot P. \tag{84}$$

14. Рассмотрим, для примера, встречающееся в строительном деле Z-образное сечение балки (черт. 470), и построим для него так называемый *центральный эллипс инерции*, отнесенный к центру тяжести O фигуры. Положение этого центра тяжести непосредственно ясно из соображений симметрии. При обозначенных на чертеже размерах, с помощью известной формулы для момента инерции прямоугольника [185, зад. 1], легко получить:

$$I_x = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[b\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^3 - (b-\delta)\left(\frac{h}{2}-\delta_1\right)^3\right] = \frac{2}{3}(\cdot 8\cdot 10^3 - 7\cdot 8{,}7^3) = 2260 \text{ см}^4$$

$$I_y = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[\delta_1\cdot\left(b-\frac{\delta}{2}\right)^3 + (h-\delta_1)\left(\frac{\delta}{2}\right)^3\right] = \frac{2}{3}(1{,}3\cdot 7{,}5^3 + 18{,}7\cdot 0{,}5^3) = 367 \text{ см}^4.$$

Для вычисления K_{xy} разобьем нашу фигуру прямыми kl и mn на три прямоугольника. Для среднего из них центробежный момент равен нулю, ибо оси координат служат для него осями симметрии. Если начальную точку перенести в $C(C')$, сохранив направления осей, то то же будет справедливо и для верхнего (нижнего) прямоугольника. Тогда, по формуле (54),

$$K_{xy} = -2\,b\,\delta_1\cdot\frac{b-\delta}{2}\cdot\frac{h-\delta_1}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 1{,}3\cdot 7\cdot 18{,}7 = -681 \text{ см}^4.$$

Подставляя эти значения в формулы (51) и (52), найдем

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 0{,}719, \quad 2\varphi = 35°43',$$

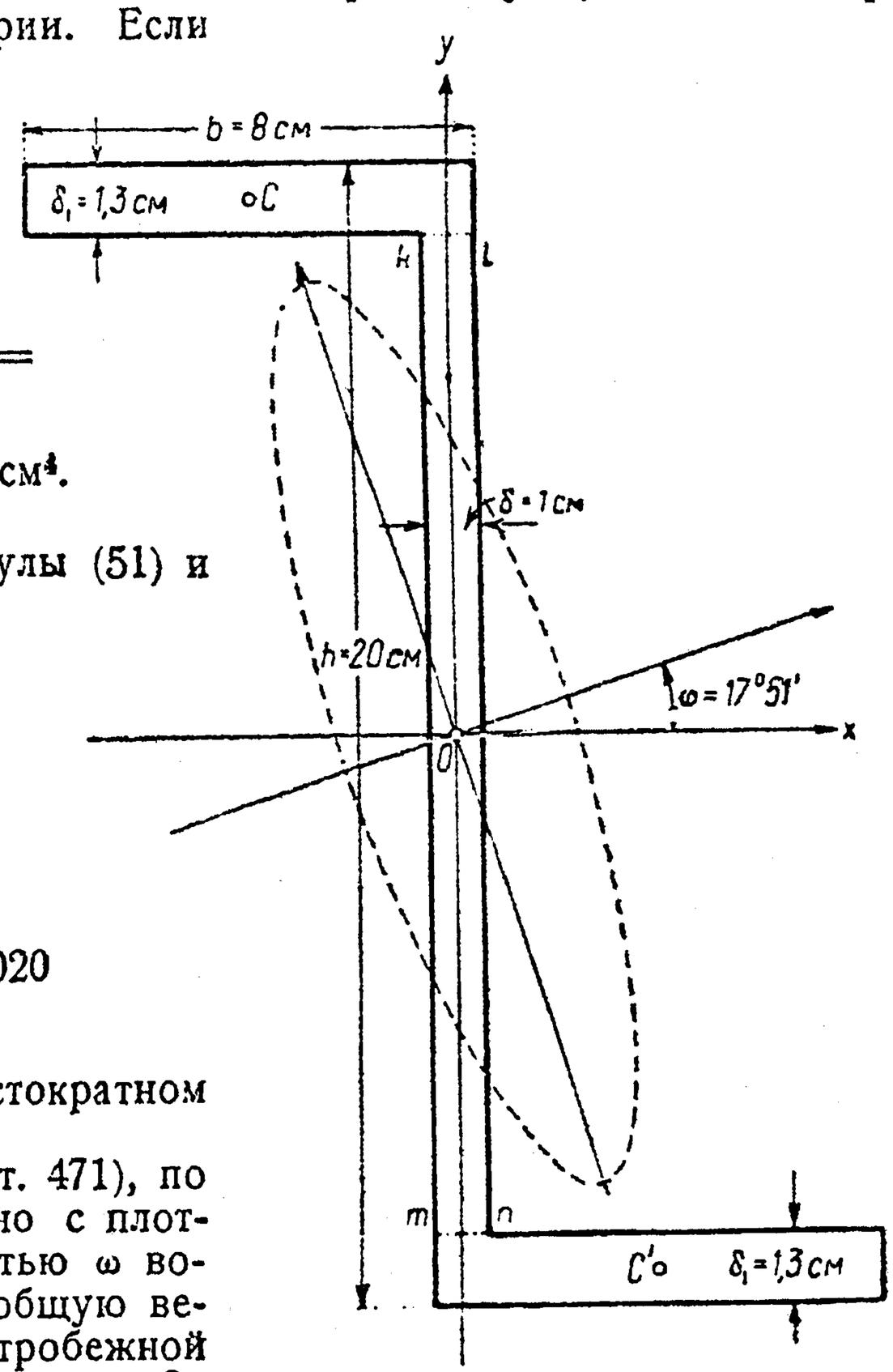
$$\varphi = 17°51',$$

$$t_1 = 2480 \text{ см}^4, \quad t_2 = 148 \text{ см}^4.$$

Полуоси эллипса инерции

$$\frac{1}{\sqrt{148}} = 0{,}082 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{2480}} = 0{,}020$$

на чертеже для ясности отложены в стократном масштабе.



Черт. 470 (уменьш $^2/_5$).

15. Пусть плоская фигура (P) (черт. 471), по которой массы распределены равномерно с плотностью 1, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси Oy. Требуется определить общую величину развивающейся при этом центробежной силы F и ее момент M относительно оси Oz (моменты относительно других осей очевидно

равны нулю). При каких условиях действие центробежной силы равно нулю?

Решение. Для элемента dP центробежная сила будет:

$$dF\,\omega^2 \cdot x = dP$$

(направленная в одну сторону при $x > 0$ и в другую — при $x < 0$) и момент ее относительно оси Oz:

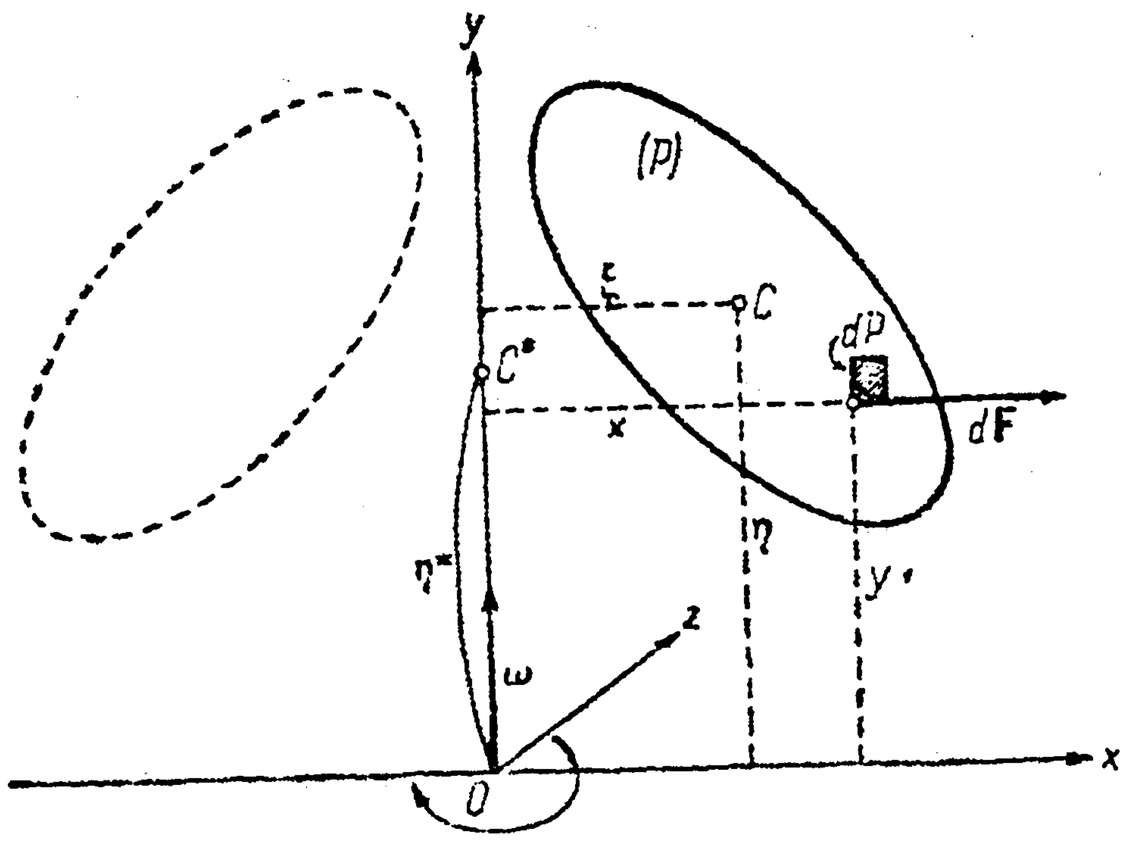
$$dM = \omega^2 \cdot xy \cdot dF$$

Отсюда, суммируя:

$$F = \omega^2 \cdot \int\int_{(P)} x\,dP, \quad M = \omega^2 \int\int_{(P)} xy\,dP$$

или

$$F = \omega^2 \cdot M_y, \quad M = \omega^2 \cdot K_{xy}.$$



Черт. 471.

Таким образом, величина K_{xy} при $\omega = 1$ является моментом центробежной силы; этим объясняется и название „центробежный момент".

Для того чтобы действие центробежной силы на ось вращения было равно нулю, надо, чтобы выполнялись условия:

$$M_y = 0, \quad K_{xy} = 0.$$

Первое означает, что центр тяжести нашей фигуры лежит на оси Oy, а второе — что эта ось является главной осью инерции. Итак, центробежная сила в том лишь случае не производит никакого действия на ось вращения, если этой осью служит одна из главных центральных осей инерции фигуры.

16. Рассмотрим тело, полученное от вращения плоской фигуры (P) (черт. 471) вокруг оси Oy, которая ее не пересекает. Определить его объем V и положение его центра тяжести C^*.

Решение. Возьмем сначала элементарное кольцо, описанное элементом dP фигуры; его объем можно принять равным объему цилиндра высоты $2\pi x$ с основанием dP, так что

$$dV = 2\pi x \cdot dP \tag{55}$$

$$V = 2\pi \int\int_{(P)} x\,dP = 2\pi \cdot M_y = 2\pi\,\xi \cdot P,$$

где M_y — статический момент нашей фигуры относительно оси Oy, а ξ — расстояние центра тяжести C фигуры от этой оси. Таким образом, мы снова получили теорему Гульдина [184], но на этот раз для фигуры, ограниченной любым контуром.

Статический момент относительно плоскости zOx элементарного кольца, о котором только что была речь, очевидно, равен

$$dM = y \cdot dV = 2\pi \cdot xy \cdot dP,$$

так что для момента M всего тела получается выражение:

$$M = 2\pi \int\int_{(P)} xy \cdot dP = 2\pi \cdot K_{xy}.$$

В таком случае координата $y = \eta^*$ центра тяжести C^* (очевидно, лежащего на оси вращения) определится формулой:

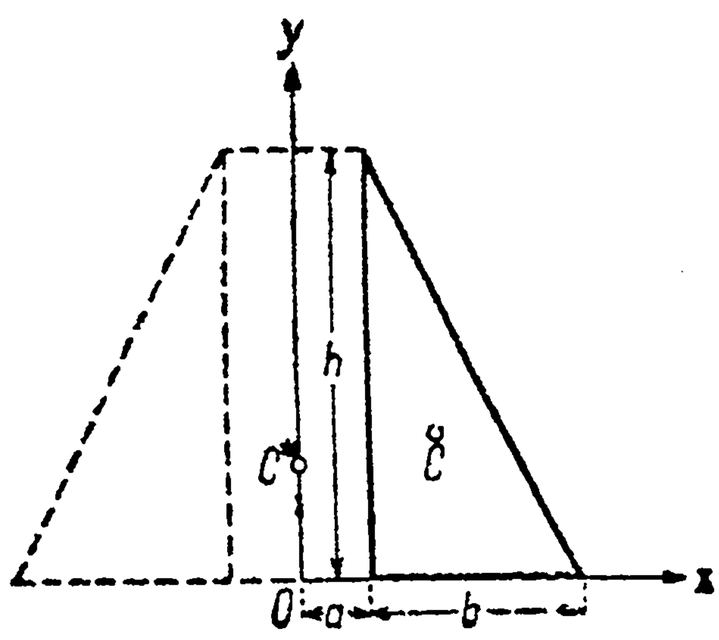
$$\eta^* = \frac{M}{V} = \frac{K_{xy}}{M_y}. \tag{66}$$

17. Применим полученный результат к частному примеру: пусть фигура (P) будет прямоугольным треугольником (черт. 472). Тогда, при обозначениях чертежа,

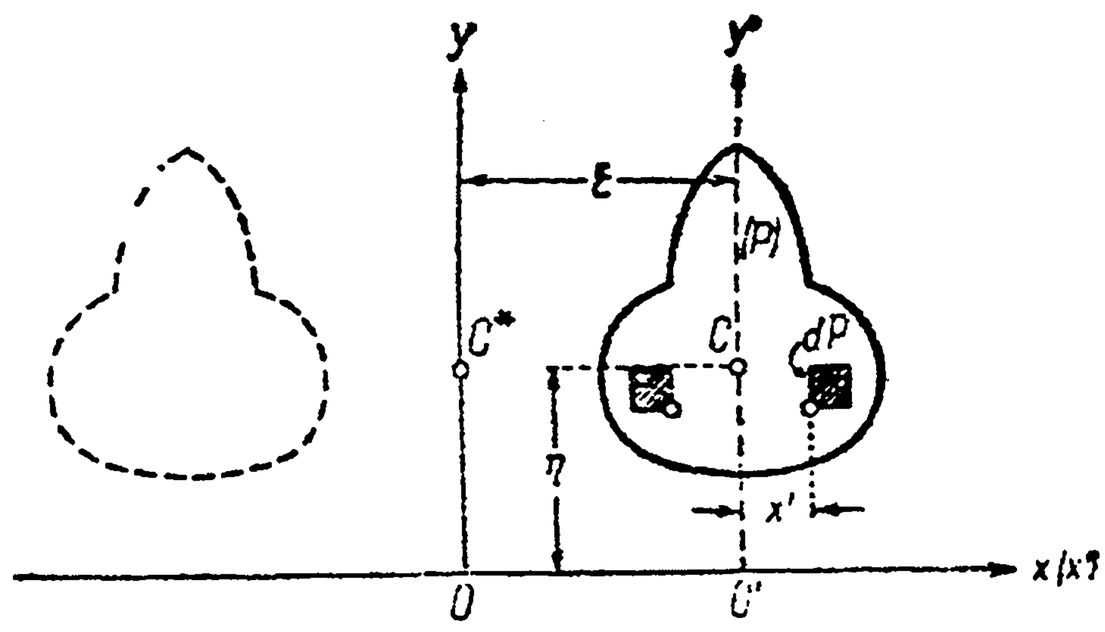
$$M_y = \frac{bh}{2} \cdot \left(a + \frac{1}{3} b\right) = \frac{bh(3a+b)}{6}$$

(так как положение центра тяжести треугольника известно). Затем, уравнение наклонной стороны треугольника будет

$$y = -\frac{h}{b}(x - a - b) = \frac{h}{b}(a + b - x),$$



Черт. 472.



Черт. 473.

и

$$K_{xy} = \iint\limits_{(P)} xy\, dP = \int\limits_a^{a+b} x dx \int\limits_0^{\frac{h}{b}(a+b-x)} y dy = \frac{h^2}{2b^2} \int\limits_a^{a+b} x(a+b-x)^2 dx = \frac{bh^2(4a+b)}{24}.$$

Наконец, в силу (56),

$$\eta^* = \frac{h}{4} \frac{4a+b}{3a+b}.$$

Как видим, эта координата вообще отлична от координаты $\eta = \frac{h}{3}$ центра тяжести самого треугольника!

18. Однако, если вращающаяся фигура имеет ось симметрии, параллельную оси вращения (черт. 473), то необходимо

$$\eta^* = \eta,$$

т. е. центры тяжести тела и плоской фигуры находятся на одной высоте. Доказать это.

Доказательство. При обозначениях чертежа, прежде всего:

$$M_y = \xi \cdot P,$$

затем, так как $K_{x'y'} = 0$, то, в силу формулы (54),

$$K_{xy} = \xi\eta \cdot P;$$

отсюда, по (56), и получается требуемое равенство.

19. Вычислить *момент инерции* I тела вращения относительно его оси. Как упрощается формула, если выполняются предположения предыдущей задачи?

Момент инерции элементарного кольца, объем которого выражается формулой (55), будет

$$dI = 2\pi x^3\, dP,$$

так что

$$I = 2\pi \int\int_{(P)} x^3\, dP.$$

При наличии оси симметрии (черт. 473), произведем замену:

$$x = \xi + x';$$

тогда

$$x^3 = \xi^3 + 3\xi^2 x' + 3\xi x'^2 + x'^3$$

и

$$I = 2\pi\left[\xi^3 \int\int_{(P)} dP + 3\xi^2 \int\int_{(P)} x'\, dP + 3\xi \int\int_{(P)} x'^2\, dP + \int\int_{(P)} x'^3\, dP\right].$$

Первый из интегралов в скобках дает площадь P, второй — статический момент фигуры относительно оси симметрии (следовательно, равен нулю!); третий представляет момент инерции I_y фигуры относительно той же оси. Наконец, четвертый также равен нулю; действительно, по симметрии, всегда для элемента $x'^3\, dP$ найдется взаимно с ним уничтожающийся элемент $(-x')^3\, dP$. Окончательно:

$$I = 2\pi\xi\,(\xi^2 P + 3I_{y'}).$$

20. Пусть дан цилиндрический брус, имеющий своим основанием фигуру (P) на плоскости xOy и ограниченный сверху поверхностью $z = f(x, y)$. Требуется найти статические моменты этого тела относительно всех трех координатных плоскостей и определить координаты (ξ, η, ζ) его центра тяжести.

Подражая рассуждениям n° 184, разобъем брус на элементарные столбики с основаниями dP и высотой $z = f(x, y)$, (черт. 455b); сосредоточим „массу" $dV = z \cdot dP$ столбика в его центре тяжести, т. е. в точке $\left(x, y, \frac{1}{2} z\right)$. Соответствующие элементарные статические моменты будут:

$$dM_{yz} = xz \cdot dP, \quad dM_{zx} = yz \cdot dP, \quad dM_{xy} = \frac{1}{2} z^2 \cdot dP.$$

Суммируя эти элементы, придем к формулам:

$$M_{yz} = \int\int_{(P)} xz\, dP, \quad M_{zx} = \int\int_{(P)} yz\, dP, \quad M_{xy} = \frac{1}{2}\int\int_{(P)} z^2\, dP. \tag{57}$$

Отсюда [ср. формулы (43) n° 184],

$$\xi = \frac{\int\int_{(P)} xz\, dP}{V}, \quad \eta = \frac{\int\int_{(P)} yz\, dP}{V}, \quad \zeta = \frac{\frac{1}{2}\int\int_{(P)} z^2\, dP}{V}.* \tag{58}$$

21. Применить формулы (56) к частному случаю: пусть основанием бруса служит прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, сверху же брус ограничен эллиптическим параболоидом:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$$

Отв.

$$\xi = \frac{3a^2 q + 2b^2 p}{a^2 q + b^2 p} \cdot \frac{a}{4}, \quad \eta = \frac{2a^2 q + 3b^2 p}{a^2 q + b^2 p} \cdot \frac{b}{4},$$

$$\zeta = \frac{9a^4 q^2 + 10a^2 b^2 pq + 9b^4 p^2}{a^2 q + b^2 p} \cdot \frac{1}{60pq}.$$

* Читатель легко сообразит, как видоизменяются эти формулы, если усечь цилиндрический брус произвольными поверхностями и сверху и снизу.

22. Найти центр тяжести „цилиндрического отрезка" (черт. 459).

Решение. При обозначениях чертежа, уравнение секущей плоскости будет:

$$z = my,$$

где

$$m = \operatorname{tg} \alpha.$$

Роль (P) играет здесь полукруг, ограниченный полуокружностью: $x^2 + y^2 = a^2$. Имеем:

$$M_{yz} = \iint\limits_{(P)} xz\, dP = m \int_{-a}^{a} x\, dx \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\, dy = \frac{m}{2} \int_{-a}^{a} x\,(a^2 - x^2)\, dx = 0,$$

ввиду нечетности подинтегральной функции [173, (13)], этот результат можно было предвидеть из симметричности тела относительно плоскости yOz. Затем

$$M_{zx} = \iint\limits_{(P)} yz\, dP = m \int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2\, dy = \frac{2m}{3} \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{2m}{3} \left[\frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} \right] \Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{\pi}{8} ma^4,$$

причем мы пользовались четностью подинтегральной функции при интегрировании по x [173, (12)] и формулой 69, 168. Легко сообразить, что

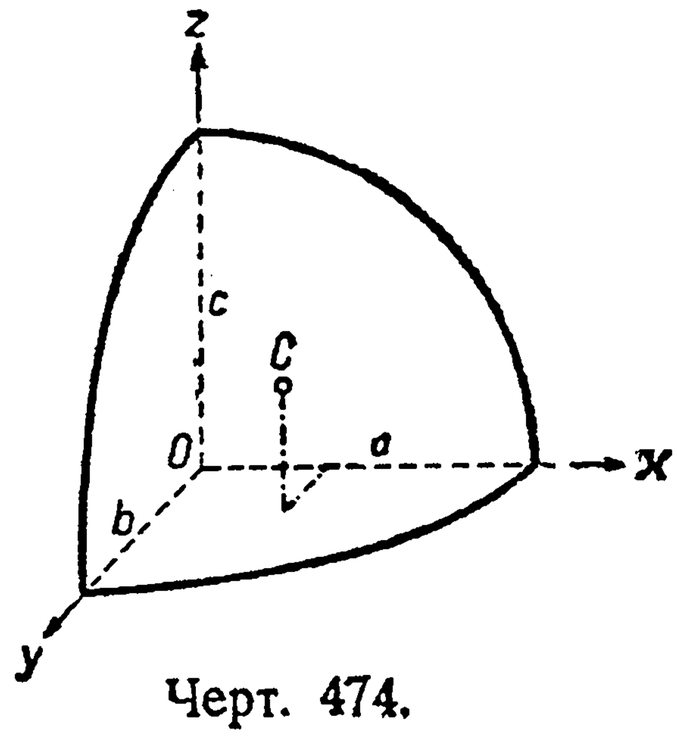
$$M_{xy} = \frac{1}{2} \iint\limits_{(P)} z^2\, dP = \frac{m}{2} \cdot M_{zx} = \frac{\pi}{16} m^2 a^4.$$

Так как объем

$$V = \frac{2}{3} ma^3$$

[252, зад. 4], то окончательно, по формулам (58):

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{3}{16} \pi a, \quad \zeta = \frac{3}{32} \pi ma = \frac{3}{32} \pi a \operatorname{tg} \alpha.$$



Черт. 474.

23. То же — для части эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

содержащейся в первом октанте (черт. 474).

Решение. Областью (P) здесь служит четверть эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}};$$

далее, из уравнения поверхности эллипсоида имеем:

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

По последней из формул (57):

$$M_{xy} = \iint\limits_{(P)} z^2\, dP = \frac{1}{2} c^2 \int_{0}^{a} dx \int_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dy,$$

но

$$\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\left(y-\frac{x^2y}{a^2}-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\frac{2b}{3a^3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}},$$

так что [снова пользуясь формулой 69, **168**]

$$M_{xy}=\frac{\pi}{16}abc^2.$$

Известно [**179**, 13], что объем эллипсоида есть $\frac{4}{3}\pi abc$, следовательно для одного октанта $V=\frac{1}{6}\pi abc$ и

$$\zeta=\frac{3}{8}c.$$

Аналогично:

$$\xi=\frac{3}{8}a,\quad \eta=\frac{3}{8}b.$$

24. Моментом инерции материальной частицы массы m относительно оси или плоскости называется произведение массы m на квадрат расстояния материальной частицы, соответственно, от оси или плоскости. Моменты инерции того столбика с „массой“ $dV=z\cdot dP$, о котором шла речь в задаче 20, относительно плоскостей yOz, zOx или оси Oz, очевидно, будет

$$dI_{yz}=x^2z\,dP,\quad dI_{zx}=y^2z\,dP,\ dI_z=(x^2+y^2)z\,dP.$$

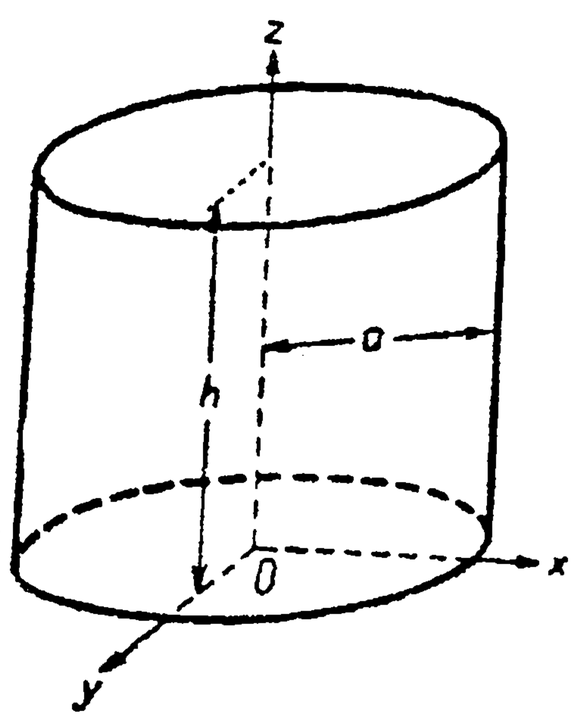
Откуда для всего цилиндрического бруса (зад. 20) получим;

$$I_{yz}=\iint_{(P)}x^2z\,dP,\ I_{zx}=\iint_{(P)}y^2z\,dP,\ I_z=\iint_{(P)}(x^2+y^2)z\,dP=I_{yz}+I_{zx}. \qquad (59)$$

25. Пусть имеем круговой цилиндр высоты h, ограниченный поверхностью $x^2+y^2=a^2$. Найти для него момент инерции относительно любой плоскости, проходящей через ось (напр., xOz) (черт. 475).

Решение. Область (P) — круг. В силу (59):

$$I_{zx}=\iint_{(P)}y^2z\,dP=h\int_{-a}^{a}dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}y^2\,dy=\frac{4}{3}h\int_0^a(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{\pi}{4}ha^4$$



Черт. 475.

Если „плотность“ масс, заполняющих цилиндр, есть $\rho\neq 1$, то очевидно надлежит лишь ввести еще множителем ρ,

$$I_{zx}=\frac{\pi}{4}ha^4\rho=\frac{ma^2}{4}, \qquad (60)$$

где

$$m=\pi a^2h\rho$$

есть масса цилиндра.

Замечание. Мы уже вычислили момент инерции цилиндра относительно его оси [**190**, зад. 8]; его и по последней из формул (59) вычислить крайне просто, если прибегнуть к полярным координатам; моменты же $I_{zx}=I_{yz}$ равны его половине!

26. Найти момент инерции относительно оси Oz прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями $x=-a$, $x=a$, $y=-b$, $y=b$, $z=-c$, $z=c$.

Указ. Удвоить момент инерции верхней половины параллелепипеда.

Отв. $\frac{1}{3}abc\,(a^2+b^2)$.

27. То же — для эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Решение. Можно ограничиться одним октантом эллипсоида (черт. 474), с тем чтобы результат умножить на 8. В таком случае областью (P) будет четверть эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Имеем:

$$I_{zx}=8\iint\limits_{(P)} y^2 z\,dP=8c\iint\limits_{(P)} y^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{8c}{a}\int\limits_0^b y^2\,dy\int\limits_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-x^2}\,dx;$$

по формуле 56, **168**, если в нее вместо a^2 поставить $a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$:

$$\int\limits_0^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-x^2}\,dx=$$

$$=\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)-x^2}+\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\arcsin\frac{x}{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}=$$

$$=\frac{\pi a^2}{4}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right);$$

таким образом

$$I_{zx}=\frac{8c}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}\int\limits_0^b y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

Аналогично:

$$I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

Окончательно:

$$I_z=I_{zx}+I_{yz}=\frac{4}{15}\pi abc\,(a^2+b^2).$$

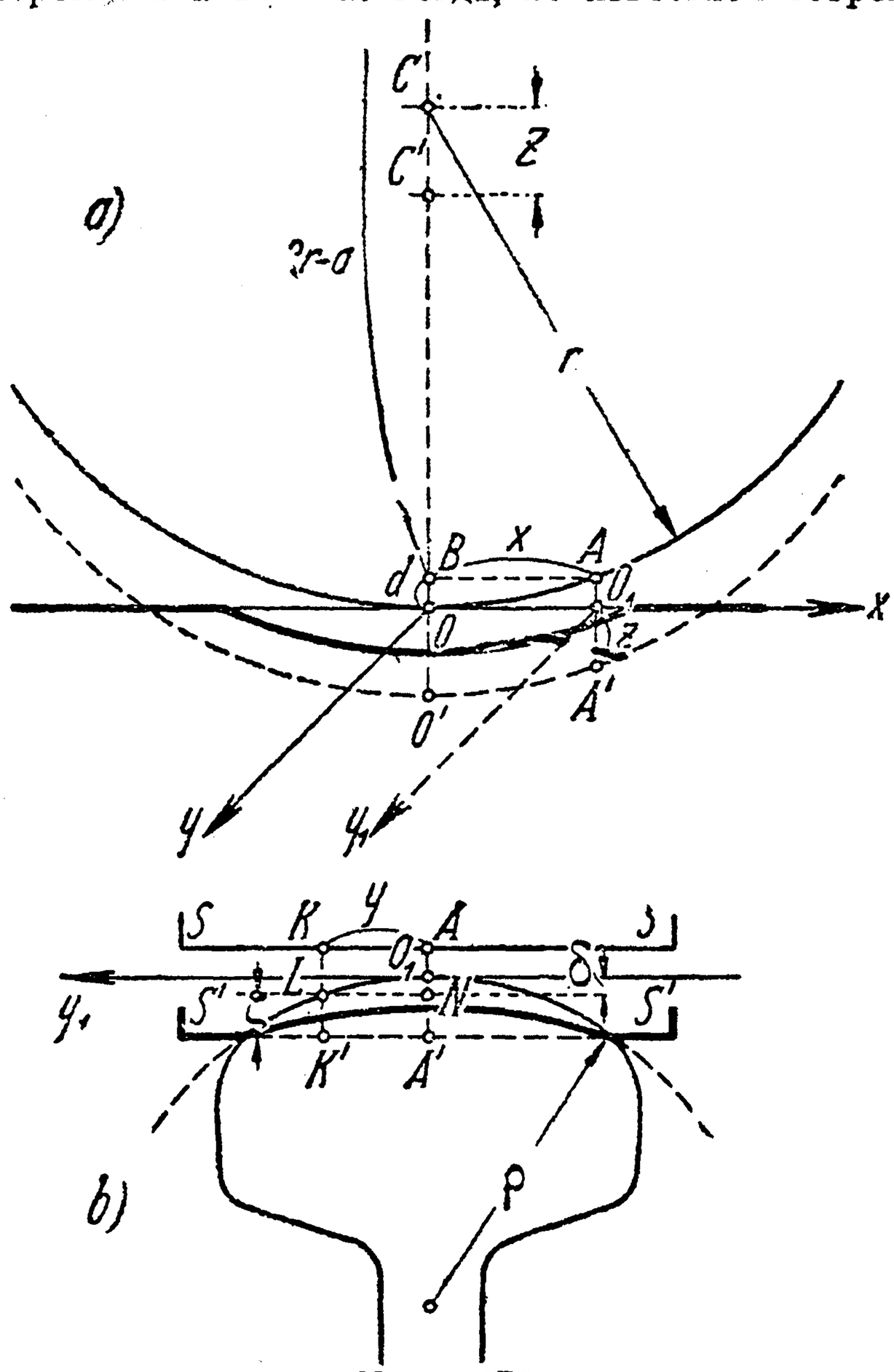
28. Рассмотрим, в качестве последнего примера, вопрос о давлении между шиной колеса ж.-д. вагона и рельсом. При этом, для простоты, мы пренебрежем наклоном рельса и коничностью шины, т. е. будем считать ось симметрии сечения рельса вертикальной, а поверхность шины цилиндрической. Сечение рельса сверху ограничено дугой круга. Вследствие огромного удельного давления в точке O прикосновения шины и рельса происходит сжатие материала как

шины, так и рельса, так что фактически вокруг O образуется некоторая поверхность опоры (*площадка смятия*).

Проведем через точку O горизонтальную плоскость и в ней возьмем ось Ox вдоль по рельсу и ось Oy поперек рельса. На черт. 476 *a*) представлено сечение шины и рельса вертикальной плоскостью через ось Ox. Обозначим общее понижение колеса через Z. Предположим сначала, для большей отчетливости, что материал колеса абсолютно несжимаем, так что колесо, как целое, врезается в рельс. Легко определить величину z, на которую при этом опускается ниже первоначальной поверхности рельса точка A на сечении поверхности шины, с абсциссой x. Именно,

$$z = A'O_1 = A'A - O_1A = Z - d,$$

где $d = O_1A$. Опустим из A перпендикуляр AB на диаметр, на котором получатся отрезки d и $2r - d$. Тогда, по известной теореме элементарной геометрии:



Черт. 476.

$$\frac{d}{x} = \frac{x}{2r - d} \quad \text{или} \quad x^2 = 2rd - d^2.$$

В виду малости величины d, квадратом ее можно пренебречь и положить $x^2 = 2rd$, откуда с достаточной точностью получаем:

$$d = \frac{x^2}{2r}.$$

Таким образом, окончательно:

$$z = Z - \frac{x^2}{2r}. \qquad (61)$$

На черт. 476 *b*) представлено вертикальное сечение шины и рельса, проходящее через точку A, но поперек рельса (параллельно оси Oy). Образующая SS шины займет положение $S'S'$; произвольная ее точка K с ординатой y перейдет в K'. Для отрезка $\zeta = K'L$ имеем:

$$\zeta = A'N = A'O_1 - NO_1 = z - \delta,$$

где $\delta = NO_1$ определится аналогично d:

$$\delta = \frac{y^2}{2\rho}.$$

Итак [см. (61)]:

$$\zeta = Z - \frac{x^2}{2r} - \frac{y^2}{2\rho}. \qquad (62)$$

Фактически, разумеется, сжимается не только материал рельса, но и материал шины. Поэтому найденная величина ζ дает лишь сумму сжатий соответствующих элементов шины и рельса, которая распределяется между ними обратно пропорционально модулям упругости того и другого материала. При равенстве этих модулей, напр., на долю как шины, так и рельса придется лишь половинное сжатие. Этому предположению отвечают жирные линии раздела на черт. 476 *a*) и *b*).

Как бы то ни было, *удельное давление* q в любой точке площадки смятия, очевидно, будет пропорционально соответствующему суммарному сжатию ζ, так что, означая через λ коэффициент пропорциональности, имеем:

$$q = \lambda\zeta = \lambda Z\left(1 - \frac{x^2}{2rZ} - \frac{y^2}{2\rho Z}\right). \qquad (63)$$

Из формулы (62) теперь ясно, что площадка смятия проектируется на плоскость xOy в виде фигуры (P), ограниченной *эллипсом*

$$\frac{x^2}{2rZ}+\frac{y^2}{2\rho Z}=1$$

вдоль которого сжатие ζ обращается в нуль.

Полное давление Q на опорную площадку выразится двойным интегралом, распространенным на эту фигуру (P):

$$Q=\iint\limits_{(P)} q\,dP=\lambda Z\iint\limits_{(P)}\left(1-\frac{x^2}{2rZ}-\frac{y^2}{2\rho Z}\right)dx\,dy=\lambda Z\cdot I,$$

который мы сейчас и вычислим. Полагая для краткости

$$a^2=2rZ,\quad b^2=2\rho Z, \tag{64}$$

имеем

$$I=4\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dy;$$

подобный интеграл мы встречали в зад. 23. Окончательно:

$$I=\frac{\pi ab}{2}.$$

Таким образом [см. (64)],

$$Q=\lambda Z\cdot\frac{\pi ab}{2}=\lambda\pi Z^2\sqrt{r\rho}. \tag{65}$$

Если ввести площадь эллипса (P), которая равна

$$P=\pi ab,$$

и *наибольшее удельное давление*, очевидно имеющее место при $x=y=0$:

$$q_0=\lambda Z \tag{66}$$

[см. (63)], то можно также написать:

$$Q=\frac{1}{2}q_0P,$$

откуда

$$q_0=\frac{2Q}{P}.$$

Площадь P фактически можно измерить в натуре, окрашивая рельс краской, разрушаемой от давления в пределах площадки смятия. Таким образом, полученная формула дала возможность найти q_0 (которое оказалось больше 4500 кг/см²!).

Определяя Z из (65) и подставляя в (66), приходим к также полезной формуле

$$q_0=\mu\sqrt{\frac{Q}{\sqrt{r\rho}}},\quad \text{при } \mu=\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}},$$

которая устанавливает характер зависимости q_0 от Q, r и ρ.*

255. Масса неоднородного тела. Понятие о тройном интеграле. Переходя к установлению понятия о тройном интеграле, в виду аналогии его с простым и двойным интегралами, мы можем опустить подробности. К сожалению лишь, цепь задач—об определении площади и

* Изложенное здесь решение вопроса нужно рассматривать как приближенное, ибо не приняты во внимание боковые давления со стороны сжатого материала.

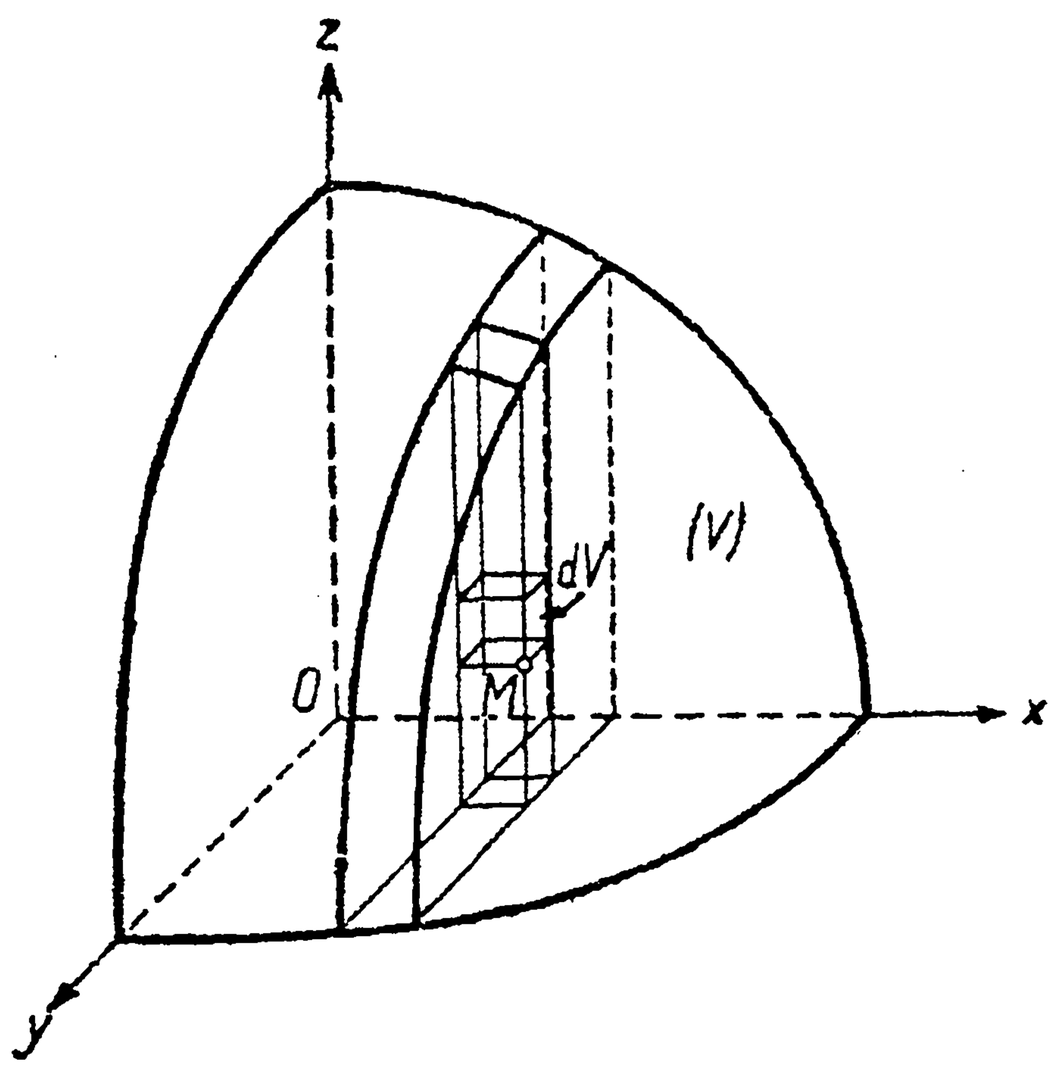
объема — естественно приведших нас к простому и двойному интегралам, как к пределам особого типа сумм, на этот раз прерывается, и нам придется исходить из задачи совсем другого рода.

Рассмотрим тело (V) произвольной формы (черт. 477), в котором массы расположены неравномерно, так что плотность ρ в каждой точке тела $M(x, y, z)$ имеет свое значение, являясь таким образом „функцией точки“:

$$\rho = f(M) = f(x, y, z).$$

Задача состоит в определении всей массы m тела.

Разложим тело на элементы dV; это можно сделать, напр., с помощью системы плоскостей, параллельных координатным плоскостям, или каких-нибудь других поверхностей. Взяв в каждом элементе произвольную точку M, приближенно примем, что плотность ρ во всем элементе dV сохраняет то значение $f(M)$, которое она имеет фактически лишь в выбранной точке. Тогда масса элемента приближенно выразится произведением этой плотности $f(M)$ на объем элемента dV:



Черт. 477.

$$dm = \rho\, dV = f(M)\, dV, \qquad (67)$$

а искомая масса всего тела — суммой:

$$m \doteq \sum_{(V)} f(M)\, dV.$$

Если перейти к пределу, предполагая, что все элементы нашего тела по всем направлениям бесконечно убывают, то получим точное выражение для массы:

$$m = \lim \sum_{(V)} f(M)\, dV.$$

Подобного рода предел встречается и в других задачах; его называют тройным интегралом, распространенным на тело (V), и обозначают символом:

$$\int\int\int_{(V)} f(M)\, dV,$$

аналогичным обозначению (40) двойного интеграла.

Если положение точки M определяется ее прямоугольными координатами x, y, z, и тело (V) рассекается на элементы плоскостями, параллельными координатным (см. чертеж), то элемент, вообще говоря, будет иметь форму прямоугольного параллелепипеда, и объем dV элемента выразится произведением:

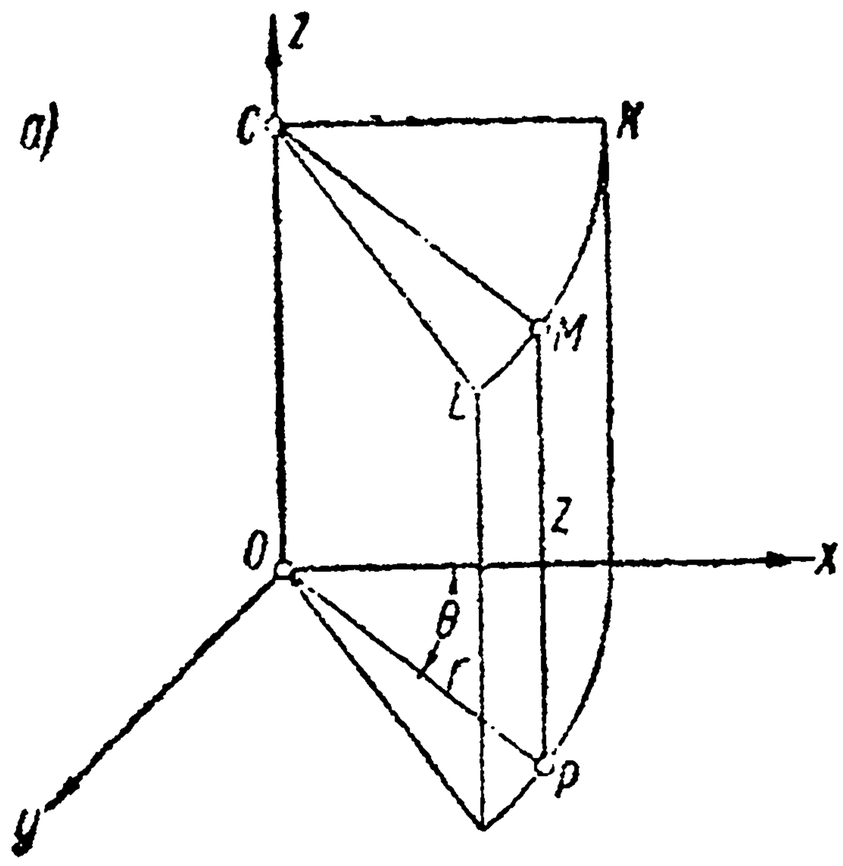
$$dV = dx\, dy\, dz; \qquad (68)$$

исключение могут представить лишь элементы, примыкающие к границе тела, но ими можно пренебречь. При этих условиях, вместо указанного символа, употребляют такой:

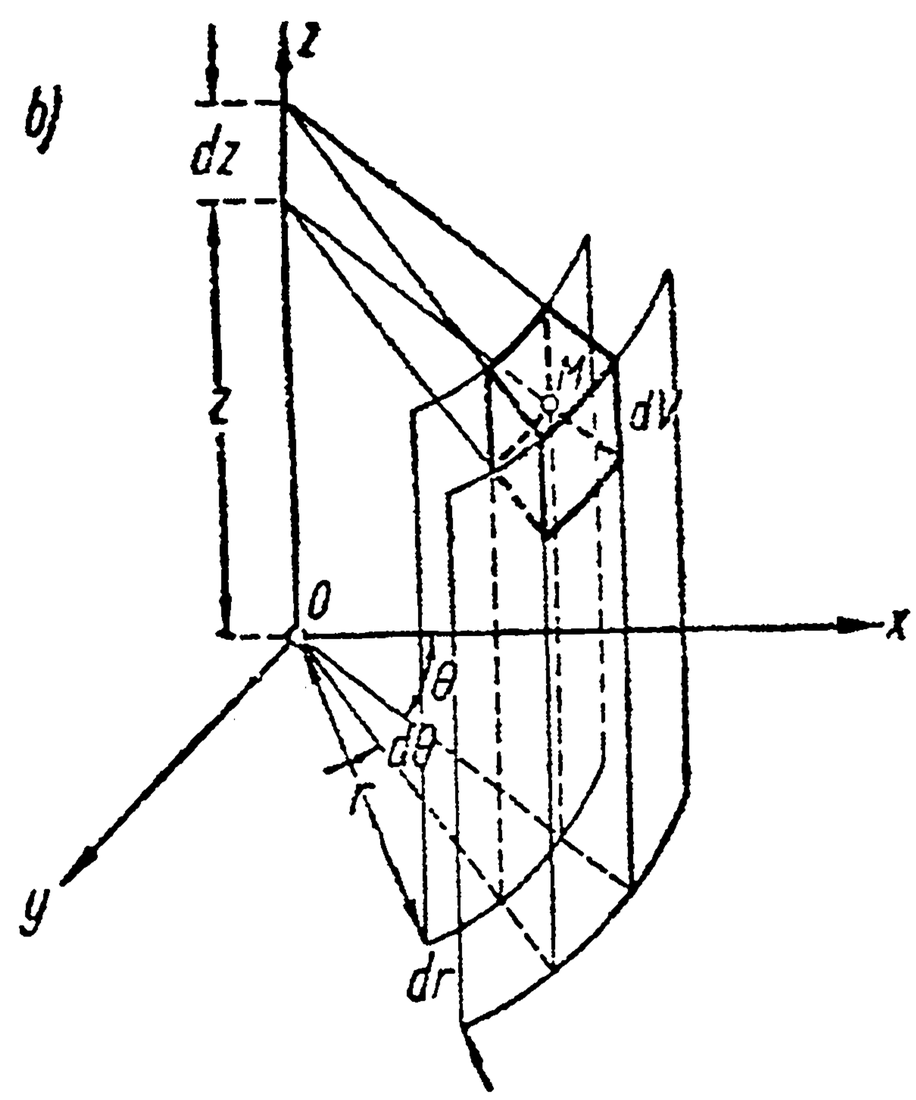
$$\int\int\int_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

оно сходно с обозначением (39) двойного интеграла.

Иной раз применяют другие, отличные от прямоугольной, координатные системы. Остановимся, для примера, на так называемых *цилиндрических координатах*, которые встречаются чаще других. В этой системе положение точки M в пространстве определяется (см. черт. 478 *a*) полярными координатами r и θ ее проекции P на плоскость xOy и той же координатой z, что и в прямоугольной системе. Если из трех координат, r, θ и z, координата r сохраняет постоянное



Черт. 478 *a*).



Черт. 478 *b*).

значение, а две другие произвольно изменяются, то точка M опишет *цилиндрическую поверхность*, имеющую ось Oz своей осью (отсюда— и название самой координатной системы!); при постоянном θ получается вертикальная плоскость, проходящая через ось Oz, а при постоянном z — горизонтальная плоскость. При пользовании цилиндрическими координатами, естественно разлагать рассматриваемое тело на элементы с помощью именно упомянутых цилиндрических поверхностей и плоскостей. На черт. 478 *b*) изображен такой элемент, ограниченный двумя цилиндрическими поверхностями (отвечающими r и $r+dr$), двумя проходящими через ось Oz плоскостями (отвечающими θ и $\theta+d\theta$) и, наконец, двумя горизонтальными плоскостями (отвечающими z и $z+dz$). При бесконечно малых dr, $d\theta$ и dz, его можно рассматривать как прямоугольный параллелепипед с измерениями dr, $r\,d\theta$ и dz, так что в этом случае элемент объема будет таков:

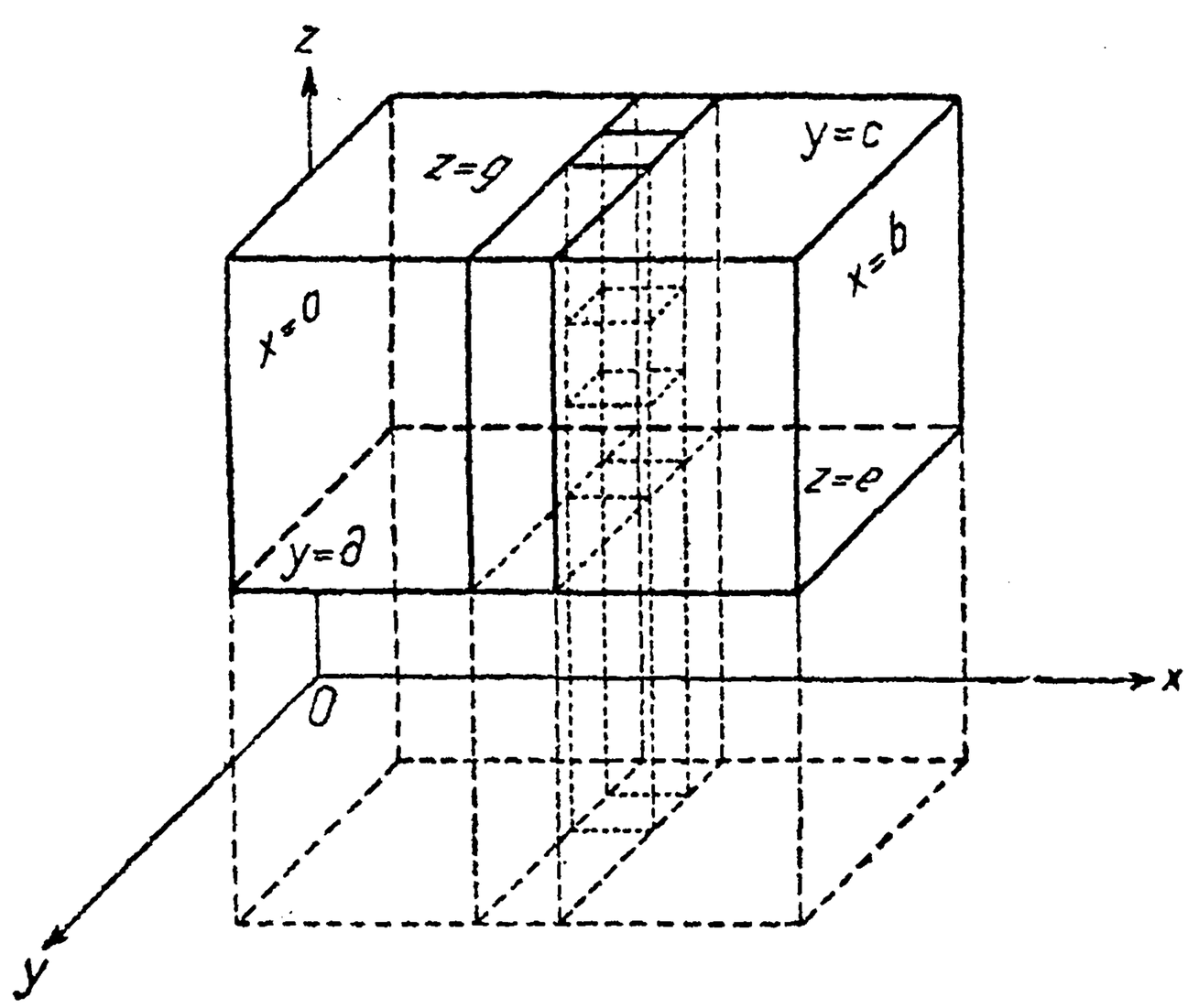
$$dV = r\, dr\, d\theta\, dz, \tag{68a}$$

а интеграл напишется в форме:

$$\iiint\limits_{(V)} f(r, \theta, z) \cdot r\,dr\,d\theta\,dz.$$

При переходе от обычных прямоугольных координат к цилиндрическим надо лишь в подинтегральном выражении заменить x и y, соответственно, через $r\cos\theta$ и $r\sin\theta$, а вместо dV в формуле (68) подставить выражение (68 a).

Перейдем теперь к вопросу о **вычислении тройного интеграла**. В основе этого вычисления лежит та же идея **последовательного** суммирования элементов; именно, если элемент объема взят (как обычно!) в форме (63), то можно например (см. черт. 477) сначала просуммировать по всем элементам, составляющим вертикальный „столбик", расположенный параллельно оси Oz, затем по всем „столбикам", составляющим вертикальный же „слой", параллельный плоскости yOz, и наконец — по всем „слоям", составляющим наше тело. Это трехкратное суммирование и объясняет самое название: „тройной интеграл". Итак, в результате, вычисление тройного интеграла приводится к последовательному вычислению трех простых интегралов, напр., сначала по z, затем — по y, и наконец — по x.



Черт. 479.

Особенно просто это выглядит, если тело (V) представляет собою прямоугольный параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям (черт. 479). Пусть этот параллелепипед ограничен плоскостями: $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=д$, $z=e$, $z=g$; тогда имеем формулу:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^д dy \int\limits_e^g f(x, y, z)\,dz. \qquad (69)$$

Сначала вычисляется „внутренний" интеграл

$$\int\limits_e^g f(x, y, z)\,dz,$$

причем x и y рассматривают как постоянные; результат является вообще функцией от этих именно величин; затем, считая x постоянной, вычисляют „промежуточный" интеграл по y; его значение будет зависеть лишь от фиксированного x; и наконец берут „наружный" инте-

грал по x. Символ, стоящий в правой части формулы (69), называют *повторным интегралом*; иногда вместо него пользуются обозначением:

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Само собою разумеется, что роли переменных x, y, z можно произвольно обменивать, и простые интегралы по этим переменным брать в любом порядке.

Пусть, напр., требуется вычислить интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x+y+z+1}}.$$

Имеем последовательно:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} = 2\sqrt{x+y+z+1}\,\Big|_{z=0}^{z=1} =$$

$$= 2\left(\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1}\right);$$

$$\int_0^1 2\left(\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1}\right) dy =$$

$$= \frac{4}{3}\left[(x+y+2)^{\frac{3}{2}} - (x+y+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right];$$

$$\int_0^1 \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right] dx =$$

$$= \frac{8}{15}\left[(x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+2)^{\frac{5}{2}} + (x+1)^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{8}{15}\left(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3}\right) \doteq 0{,}7.$$

В случае тела (V), отличного от параллелепипеда, пределы „внутреннего“ и „промежуточного“ интегралов уже не будут постоянными, а сами (вообще говоря) окажутся зависящими от фиксированных переменных. Пусть, напр., тело (V) представляет собой „цилиндрический брус“, ограниченной снизу и сверху поверхностями $z = z_0(x, y)$ и $z = Z(x, y)$ (черт. 480), а с боков — цилиндрической поверхностью,

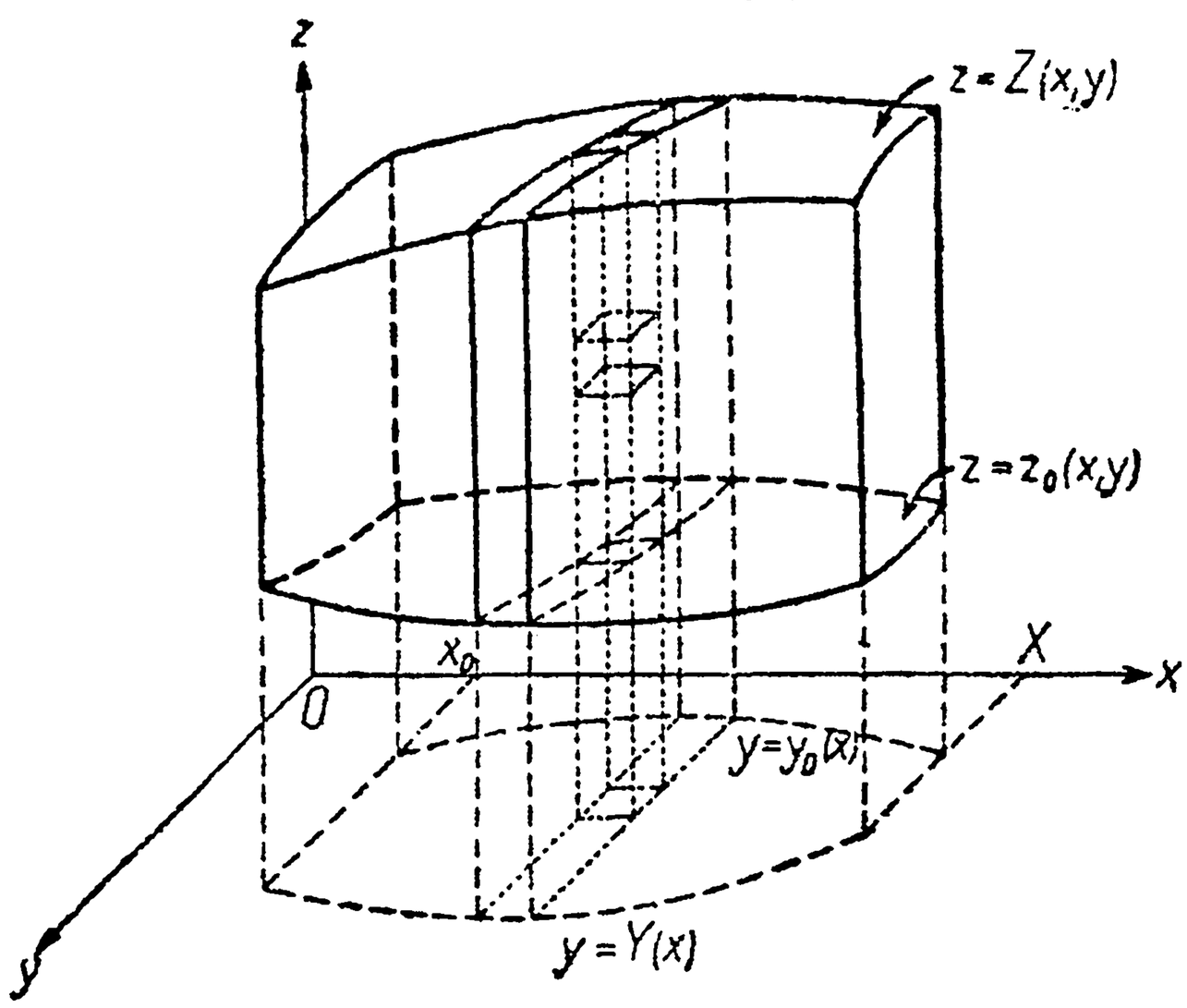
образующие которой параллельны оси Oz, а направляющая (на плоскости xOy) состоит из двух кривых $y=y_0(x), y=Y(x)$, $[y_0(x)\leqslant Y(x)]$ и двух прямых $x=x_0, x=X$, $(x_0<X)$. Тогда будет иметь место формула:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{x_0}^{X}dx\int\limits_{y_0(x)}^{Y(x)}dy\int\limits_{z_0(x,y)}^{Z(x,y)}f(x,y,z)\,dz. \qquad (70)$$

так как при вычислении, напр., „внутреннего" интеграла величины x и y считаются постоянными, то зависимость от них пределов „внутреннего" интеграла не вносит в вычисление никаких усложнений, то же относится и к „промежуточному" интегралу.

Для примера вычислим интеграл

$$I=\iiint\limits_{(V)}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}},$$



Черт. 480.

где (V) пусть будет той частью сферы радиуса a с центром в начале, которая расположена в первом октанте (это тело как раз и изображено на черт. 477). В этом случае: $z_0=0$, $Z(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, что легко получить из уравнения сферической поверхности: $x^2+y^2+z^2=a^2$; боковая цилиндрическая поверхность здесь исчезает, основанием же тела служит четверть круга, описанного радиусом a вокруг начала в плоскости xOy; поэтому $y_0=0$, а $Y(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, как следует из уравнения окружности: $x^2+y^2=a^2$. Итак, по формуле (70):

$$I=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dy\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}.$$

Прежде всего, по формуле 61, 168, если заменить в ней x на z и a^2 на $a^2-x^2-y^2$ (а следовательно a на $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$), получим:

$$\int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\Bigg|_{z=0}^{z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Далее

$$\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\pi}{2} \cdot dy = \frac{\pi}{2}\sqrt{a^2-x^2}$$

и, наконец, по формуле 56, 168,

$$\int^a \frac{\pi}{2}\sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} = \frac{\pi^2}{8}a^2.$$

256. Примеры и задачи на применение тройного интеграла. 1. Прежде всего ясно, что суммирование всех элементарных объемов dV приводит к объему V всего тела:

$$V = \int\int\int_{(V)} dV = \int\int\int_{(V)} dx\, dy\, dz. \tag{71}$$

Таким образом, объем каждого тела выражается тройным интегралом. В случае „цилиндрического бруса" (черт. 455 *b*), имеем

$$V = \int dx \int dy \int_0^z dz = \int dx \int dy \cdot z = \int\int_{(P)} z\, dx\, dy,$$

и мы возвращаемся к формуле (32), n⁰ 250. Если известны площади сечений, перпендикулярных оси Ox:

$$Q(x) = \int\int dy\, dz = \int dy \int dz,$$

то

$$V = \int dx \int dy \int dz = \int Q(x)\, dx,$$

и получается формула (26) n⁰ 17Э.

2. Вычислим объем эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Для этого случая

$$x_0 = -a,\ X = a,\ y_0 = -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad Y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

$$z_0 = -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},\quad Z = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

так что

$$V = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz$$

„Внутренний" интеграл сразу же берется и мы приходим к тому же самому двойному (или повторному) интегралу:

$$V = 2c\int_{-a}^{a}\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

который получили бы, если бы вычисляли объем, скажем, верхней половины эллипсоида (с тем, чтобы затем его удвоить) по формуле (32)! Затем:

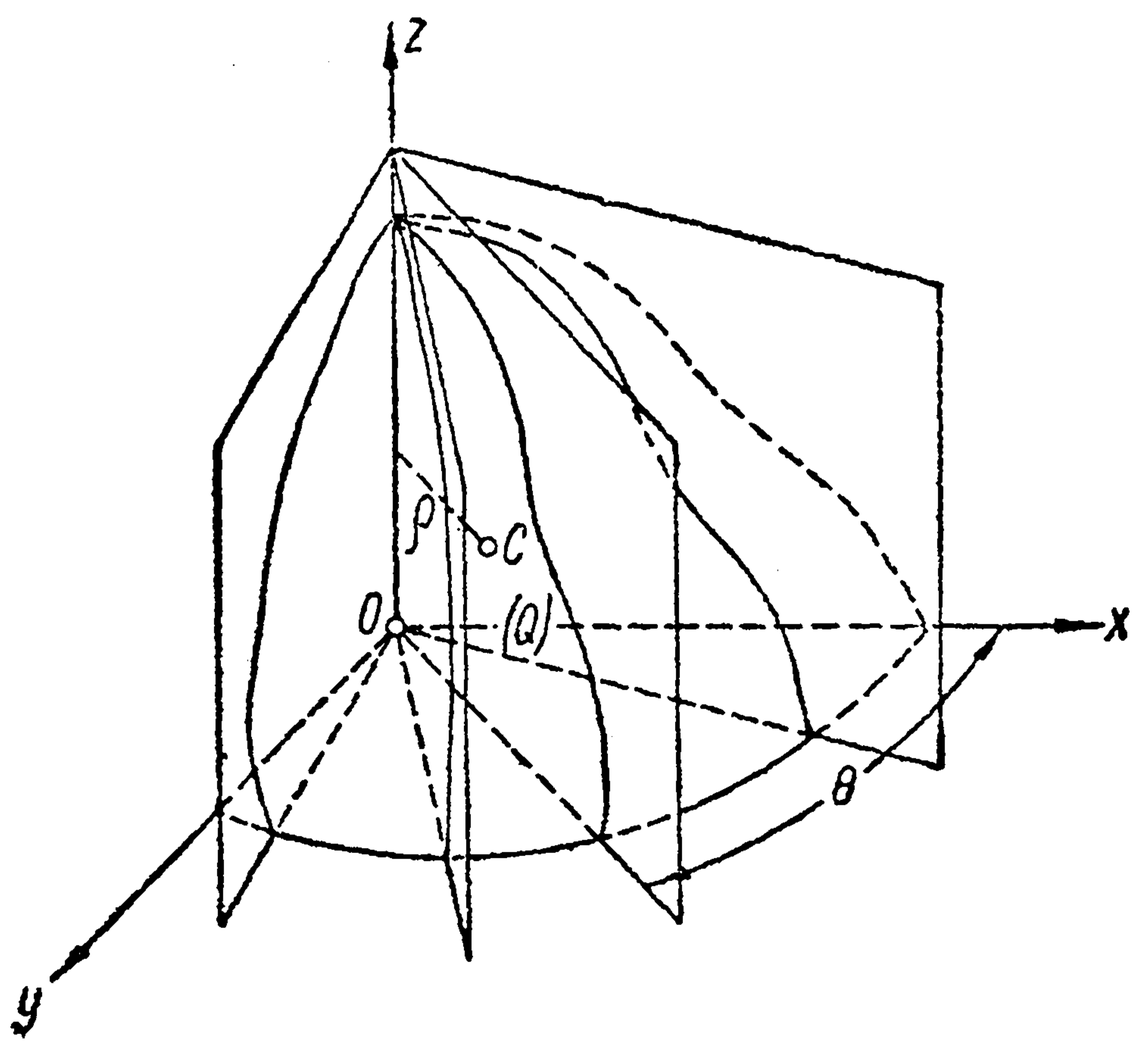
$$\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \frac{1}{b}\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\,b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

и

$$V = 2\,c\cdot\frac{\pi}{2}\,b\int\limits_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\,\pi\,abc. \qquad (72)$$

Заметим, что интеграл

$$\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz = \pi\,bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$



Черт. 481.

есть не что иное, как площадь эллипса с полуосями

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \text{ и } c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

получающегося в сечении нашего эллипсоида плоскостью, параллельной плоскости yOz, на расстоянии x от нее. Если площадь эллипса считать уже известной, то объем непосредственно выразится интегралом (72), по формуле (26) n⁰ **179**!

Из этого примера читателю ясно, что в простых случаях всегда можно избежать пользования формулой (71).

3. В *цилиндрических координатах*, о которых речь была в n⁰ **255**, объем выразится так:

$$V = \iiint\limits_{(V)} r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Этот тройной интеграл можно заменить повторным, взяв в качестве „наружного" интеграл по θ:

$$V = \int\limits_{\theta_0}^{\Theta} d\theta \int dz \int r\,dr;$$

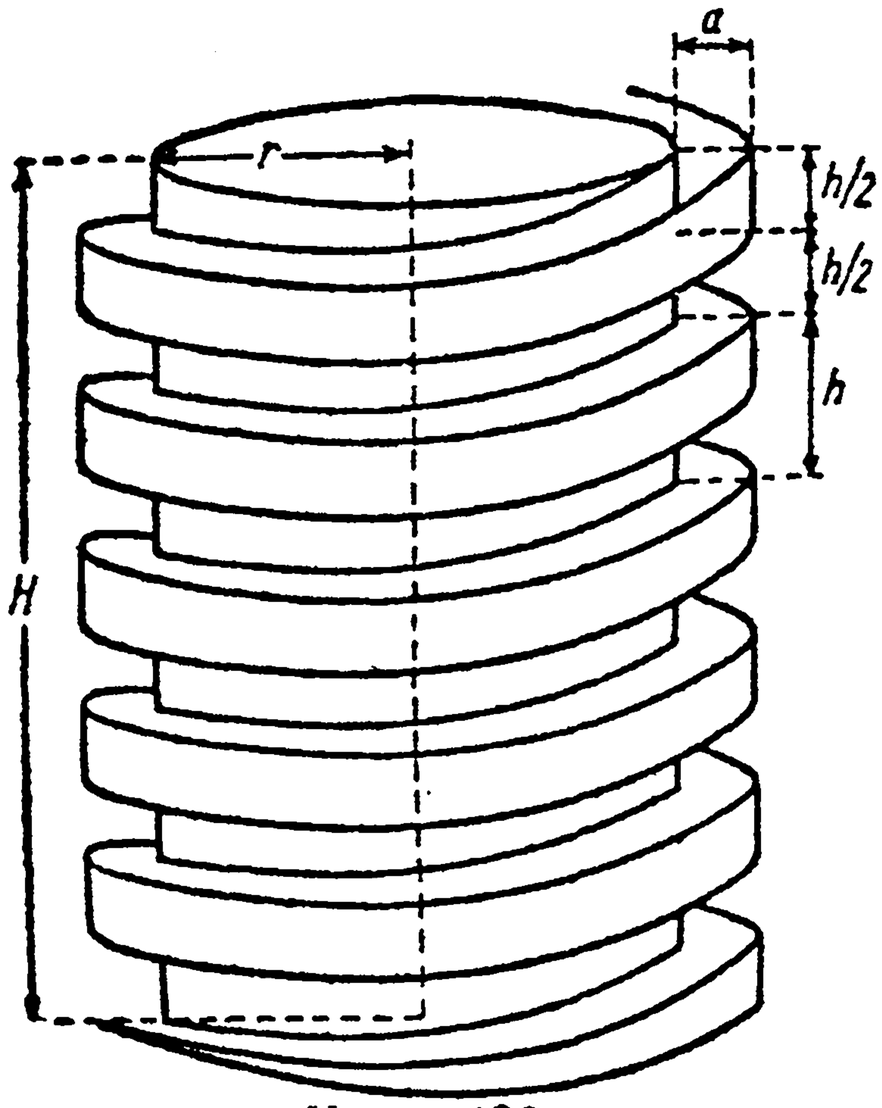
здесь через θ_0 и Θ обозначены крайние значения угла θ. Если два внутренних простых интеграла заменить двойным, то получим:

$$= \int\limits_{\theta_0}^{\Theta} d\theta \iint r\,dr\,dz,$$

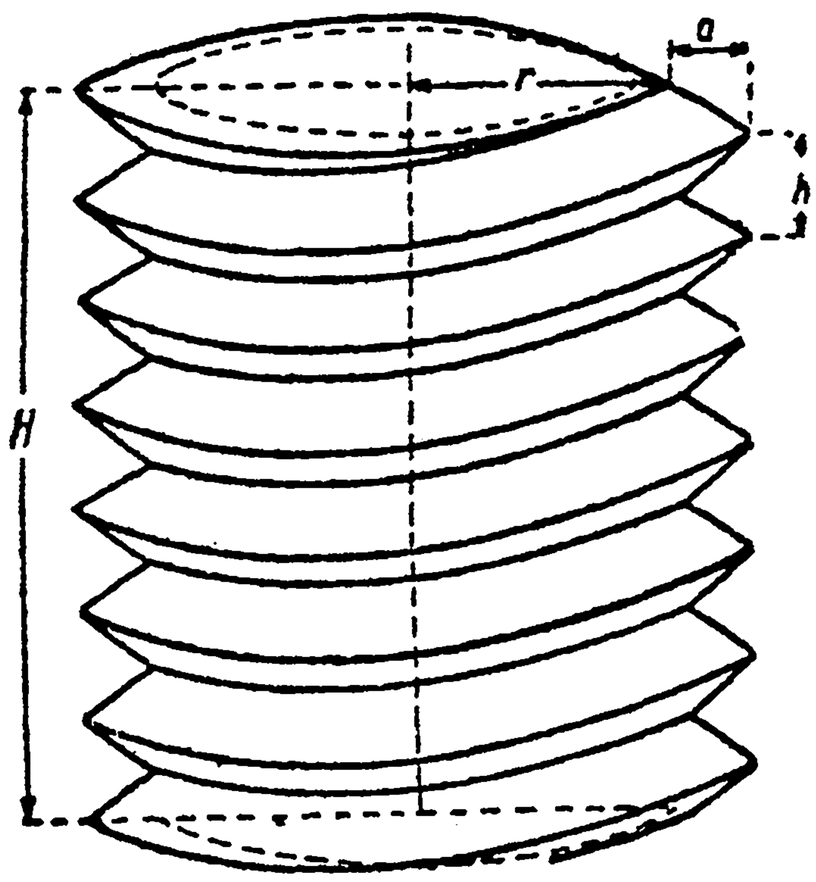
причем двойной интеграл вычисляется при θ — пост. Не трудно сообразить: на какую область распространяется двойной интеграл при данном значении θ, это будет, очевидно (черт. 481), та плоская фигура (Q), которая получается в сечении нашего тела плоскостью, отвечающей упомянутому значению θ. Если рассматривать r и z как абсциссу и ординату точек этой фигуры, то сразу становится ясным, что двойной интеграл

$$\int\int_{(Q)} r\,dr\,dz$$

выражает статический момент фигуры (Q) относительно оси Oz [см. (47),



Черт. 482.



Черт. 483.

254]. Его можно заменить произведением площади Q этой фигуры на расстояние ρ ее центра тяжести от оси Oz. Таким образом, окончательно,

$$V = \int_{\theta_0}^{\Theta} Q\rho\,d\theta; \tag{73}$$

напомним, что Q и ρ являются здесь функциями от θ.

В случае тела вращения Q и ρ имеют постоянные значения, а θ_0 и Θ можно принять равными 0 и 2π; в этом случае по формуле (73) непосредственно получаем:

$$V = Q \cdot 2\pi\rho,$$

т. е. теорему Гульдина [184].

Итак, формула (73) дает естественное и далеко идущее обобщение теоремы Гульдина. Она с успехом прилагается к определению объемов ряда важных в технике тел. *

4. Пусть, напр., требуется определить объем V винта: a) с прямоугольной нарезкой (черт. 482) и b) с треугольной нарезкой (черт. 483), при обозначенных на чертеже размерах.

Решение. a) При определении объема v одного полного оборота нарезки полагаем в (73)

$$Q = \frac{1}{2}ah,\ \rho = r + \frac{1}{2}a,\ \theta_0 = 0,\ \Theta = 2\pi$$

* Можно удивляться тому, что эта простая и полезная формула не получила до сих пор широкой известности. Мне она была сообщена преподавателем Инст. гражд. возд. флота П. П. Кусковым; ему же принадлежат и приводимые ниже примеры 4 и 5.

и получим

$$v = 2\pi \cdot \frac{1}{2} ah \cdot \left(r + \frac{1}{2} a\right).$$

Вся нарезка, кроме n полных оборотов, содержит еще две „неправильных" части, примыкающих к плоскостям среза. Их объемы также можно было бы вычислить по формуле (73), но проще непосредственно сообразить, что они обе вместе составят пол-оборота нарезки, так что полный объем нарезки будет

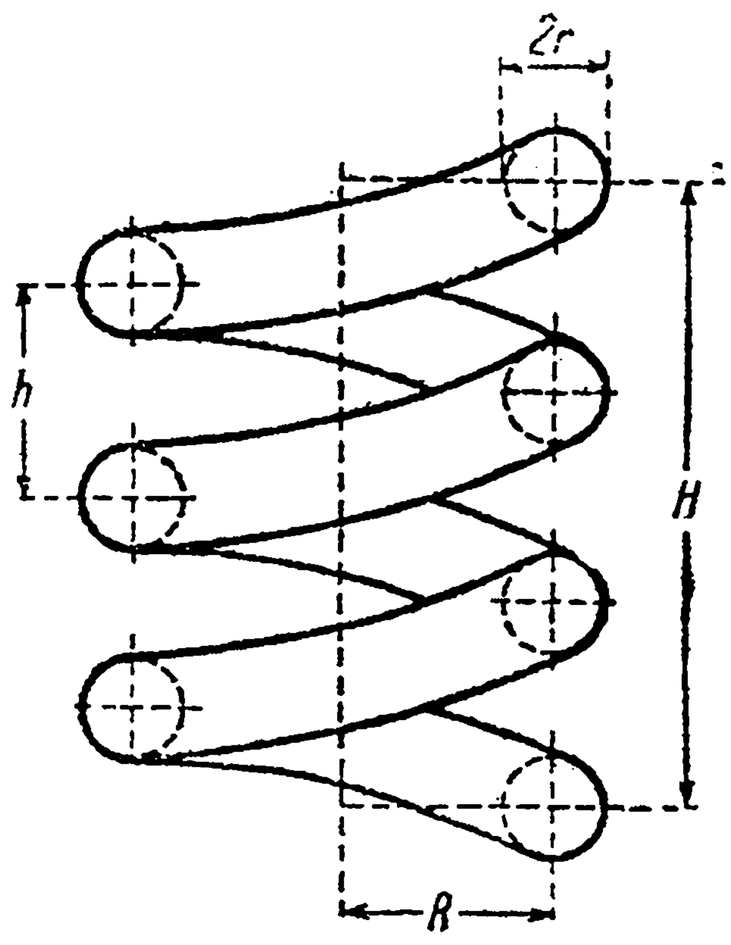
$$\left(n + \frac{1}{2}\right) v = \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) h \cdot \left(ar + \frac{1}{2} a^2\right) = \pi H \left(ar + \frac{1}{2} a^2\right).$$

Сюда нужно прибавить еще объем $\pi r^2 H$ цилиндрического стержня винта, так что окончательно

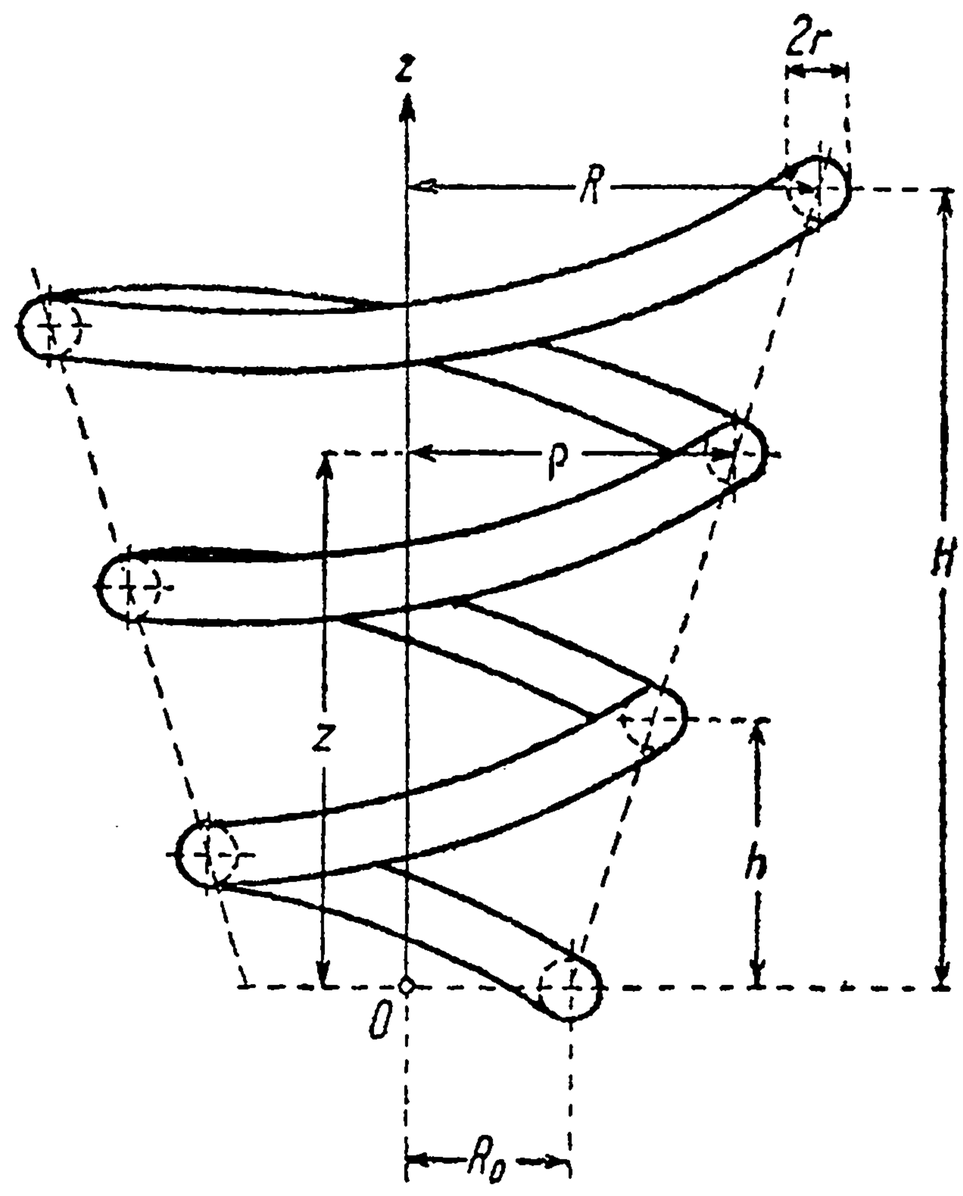
$$V = \pi H \left(r^2 + ar + \frac{1}{2} a^2\right).$$

$$b)\ Q = \frac{1}{2} ah,\ \rho = r + \frac{1}{3} a,\ \theta_0 = 0,\ \Theta = 2\pi;\ v = 2\pi \cdot \frac{1}{2} ah \cdot \left(r + \frac{1}{3} a\right).$$

Кроме n полных оборотов, нарезка содержит еще две части, вместе составляющие один оборот, так что ее объем равен



Черт. 484.



Черт. 485.

$$(n+1)\, v = \pi\, (n+1)\, h \cdot \left(ar + \frac{1}{3} a^2\right) = \pi H \left(ar + \frac{1}{3} a^2\right).$$

Наконец,

$$V = \pi H \left(r^2 + ar + \frac{1}{3} a^2\right).$$

Интересно отметить, что в обоих случаях объем винта не зависит от хода (или шага) винта h.

Легко сообразить, что при вытачивании нарезок винта снимается, смотря по случаю, объем

$$a)\ \pi H \left(ar + \frac{a^2}{2}\right),\quad b)\ \pi H \left(ar + \frac{2}{3} a^2\right).$$

5. Определить объем V: a) цилиндрической (черт. 484) и b) конической (черт. 485) пружины с круглым сечением, при обозначенных на чертеже размерах.

Решение. *a*) Пусть число полных витков будет n; тогда

$$V=\int_0^{2n\pi}\pi r^2\cdot R\,d\theta=2n\pi^2 R r^2=\frac{2\pi^2 R r^2 H}{h}.$$

b) Переменное расстояние ρ от оси до центра сечения пружины, очевидно, линейно зависит от расстояния z по оси пружины, а это последнее, в свою очередь, пропорционально углу θ; таким образом, ρ оказывается линейной функцией от θ:

$$\rho=a\theta+b.$$

Так как при $\theta=0$ и $\theta=2n\pi$ должно быть, соответственно, $\rho=R_0$ и $\rho=R$, то легко сообразить, что

$$a=\frac{R-R_0}{2n\pi},\quad b=R_0.$$

Имеем:

$$V=\int_0^{2n\pi}\pi r^2\cdot(a\theta+b)\,d\theta=\pi r^2\cdot\left[\frac{a}{2}\theta^2+b\theta\right]\Bigg|_0^{2n\pi}=n\pi^2 r^2(R+R_0)=$$

$$=\frac{H}{h}\pi^2 r^2(R+R_0).$$

6. Пусть тело (V) заполнено массой по произвольному закону, так что плотность ρ вообще будет функцией точки. Для „элемента массы"

$$dm=\rho\,dV$$

статические моменты относительно координатных плоскостей будут соответственно

$$dM_{yz}=x\,dm,\quad dM_{zx}=y\,dm,\quad dM_{xy}=z\,dm,$$

так что для статических моментов всего тела получим:

$$M_{yz}=\iiint\limits_{(V)}x\,dm=\iiint\limits_{(V)}\rho x\,dV,\quad M_{zx}=\iiint\limits_{(V)}\rho y\,dV,\quad M_{xy}=\iiint\limits_{(V)}\rho z\,dV.$$

Отсюда, разделяя на массу m, найдем, как обычно, координаты ξ, η, ζ центра тяжести тела:

$$\xi=\frac{M_{yz}}{m},\quad \eta=\frac{M_{zx}}{m},\quad \zeta=\frac{M_{xy}}{m}.$$

Эти формулы носят совершенно общий характер. Если предположить (как мы это делали до сих пор) $\rho=1$, то они примут вид:

$$M_{yz}=\iiint\limits_{(V)}x\,dV,\quad M_{zx}=\iiint\limits_{(V)}y\,dV,\quad M_{xy}=\iiint\limits_{(V)}z\,dV.$$

Если тело представляет собой „цилиндрический брус", какой мы обычно рассматривали, то, выполняя на самом деле интегрирование по z, получим отсюда формулы (57), 254. Для фактического вычисления только ими и приходится пользоваться в тех простых случаях, которые практически важны.

7. Аналогично устанавливаются формулы для моментов инерции:

$$I_{yz}=\iiint\limits_{(V)}x^2\,dm=\iiint\limits_{(V)}\rho x^2\,dV,\quad I_{zx}=\iiint\limits_{(V)}\rho y^2\,dV,$$

$$I_z=\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\,dm=\iiint\limits_{(V)}\rho(x^2+y^2)\,dV=I_{yz}+I_{zx},$$

и т. д. Из них в частности, получаются и формулы (59), 254.

Если некоторое тело (V) вращается вокруг оси Ox с угловой скоростью ω, то для элемента dm, отстоящего от оси на расстояние $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (черт. 486), линейная скорость будет $v=r\omega$, а следовательно — *живая сила*

$$dT=\frac{1}{2}dm\cdot v^2=\frac{1}{2}\omega^2\cdot r^2\,dm.$$

Отсюда легко получить выражение для живой силы T всего вращающегося тела:

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\iiint\limits_{(V)} r^2\,dm=\frac{1}{2}\omega^2\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2)\,dm=\frac{1}{2}I_z\cdot\omega^2.$$

8. Поставим теперь задачей — вычислить момент инерции рассматриваемого тела (V) относительно произвольной оси Ou (черт. 487), составляющей с координатными осями, соответственно, углы α, β, γ.

Для произвольной точки $M(x, y, z)$ тела расстояние $MD=\delta$ от оси получается по теореме Пифагора:

$$\delta^2=MD^2=OM^2-OD^2=r^2-d^2.$$

Очевидно [(1), 231]

$$r^2=x^2+y^2+z^2.$$

С другой стороны, проектируя ломаную $OAPMD$ на оси Ou, как мы это делали в 236, при выводе нормального уравнения плоскости, мы (как и в указанном месте) получим:

$$d=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

Таким образом,

$$\delta^2=x^2+y^2+z^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2$$

или, если принять в расчет основное соотношение, связывающее направляющие косинусы [см. (5), 232]:

$$\begin{aligned}\delta^2&=(x^2+y^2+z^2)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2=\\&=x^2(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+y^2(\cos^2\gamma+\cos^2\alpha)+z^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)-\\&\quad-2yz\cdot\cos\beta\cos\gamma-2zx\cdot\cos\gamma\cos\alpha-2xy\cdot\cos\alpha\cos\beta.\end{aligned}$$

Теперь ясно, что

$$\begin{aligned}I_u=\iiint\limits_{(V)}\delta^2\,dm&=\cos^2\alpha\iiint\limits_{(V)}\rho(y^2+z^2)\,dV+\cos^2\beta\iiint\limits_{(V)}\rho(z^2+x^2)\,dV+\\&+\cos^2\gamma\iiint\limits_{(V)}\rho(x^2+y^2)\,dV-\\&-2\cos\beta\cos\gamma\iiint\limits_{(V)}\rho\,yz\,dV-2\cos\gamma\cos\alpha\iiint\limits_{(V)}\rho\,zx\,dV-\\&-2\cos\alpha\cos\beta\iiint\limits_{(V)}\rho\,xy\,dV.\end{aligned}$$

Первые три интеграла справа представляют, очевидно, моменты инерции I_x, I_y, I_z тела относительно координатных осей; последние же три:

$$K_{yz}=\iiint\limits_{(V)}\rho\,yz\,dV,\quad K_{zx}=\iiint\limits_{(V)}\rho\,zx\,dV,\quad K_{xy}=\iiint\limits_{(V)}\rho\,xy\,dV$$

носят название *произведений инерции* или *центробежных моментов* [ср. 254 зад. 12]. Итак, искомый момент инерции I_u следующим образом выражается в функции от направляющих косинусов оси Ou:

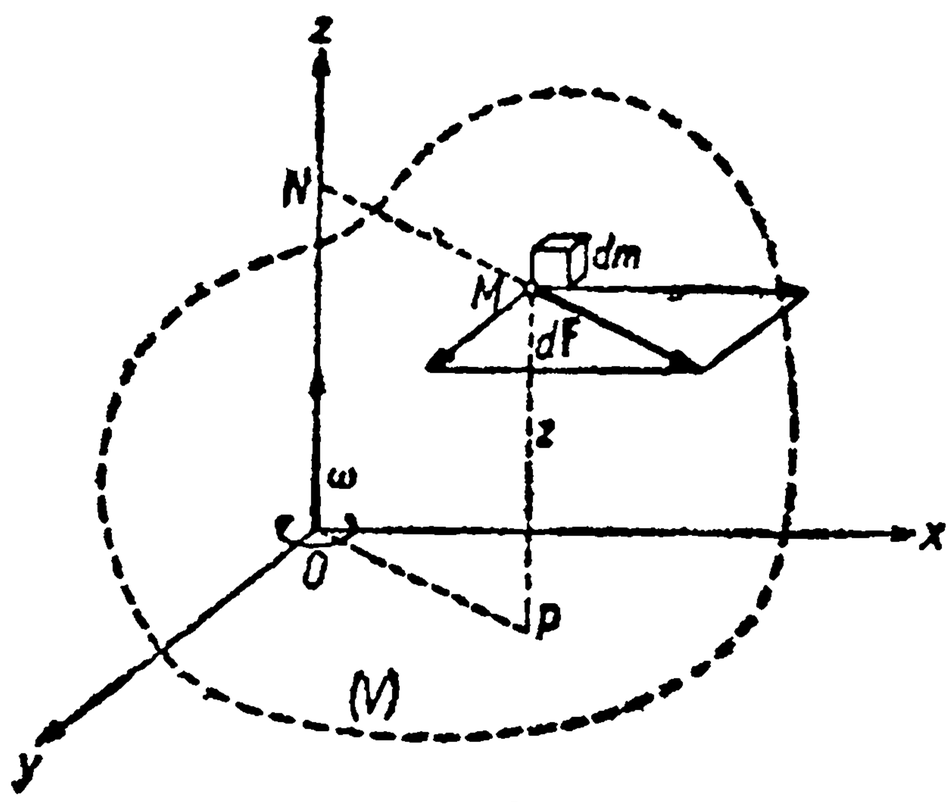
$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2K_{zx}\cos\gamma\cos\alpha -$$
$$- 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta. \qquad (74)$$

Если пожелать наглядно изобразить распределение моментов инерции тела относительно различных осей, проходящих через начало, то — аналогично тому, как мы это делали для плоской фигуры — следует на каждой оси Ou отложить отрезок (50):

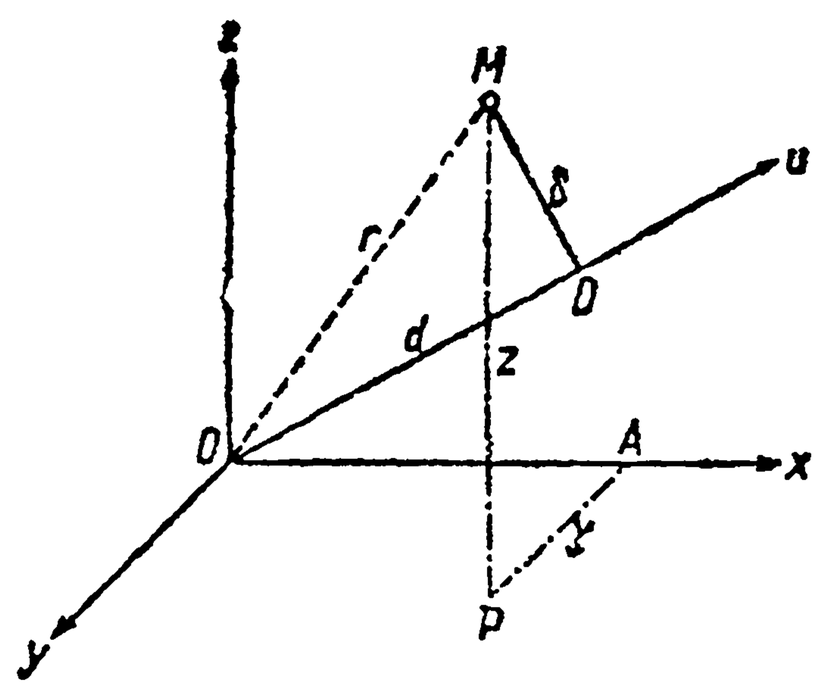
$$OM = \frac{1}{\sqrt{I_u}}.$$

Пусть

$$X = OM \cdot \cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{I_u}},\quad Y = \frac{\cos\beta}{\sqrt{I_u}},\quad Z = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{I_u}}$$



Черт. 486.



Черт. 487.

будут координаты конца M этого отрезка. Разделяя равенство (74) на I_u, получим для геометрического места точек M уравнение второго порядка:

$$I_x \cdot X^2 + I_y \cdot Y^2 + I_z \cdot Z^2 - 2K_{yz} \cdot YZ - 2K_{zx} \cdot ZX - 2K_{xy} \cdot XY = 1. \qquad (75)$$

Так как OM не обращается в бесконечность, то эта поверхность второго порядка необходимо является эллипсоидом; она носит название эллипсоида инерции.

Начало координат служит центром эллипсоида инерции; в этом легко убедиться, заметив, что одновременно с точкой (X, Y, Z) уравнению поверхности удовлетворяет и точка $(-X, -Y, -Z)$, симметричная первой относительно начала.

Важную роль при исследовании движения твердого тела играют оси эллипсоида инерции, называемые *главными осями инерции*; если точка O есть центр тяжести тела, то соответствующие оси инерции называются *главными центральными осями инерции*.

Будет ли та или другая из координатных осей главной осью инерции, зависит от центробежных моментов. Именно, если, например,

$$K_{xy} = 0, \quad K_{zx} = 0, \qquad (76)$$

так что в уравнении (75) нет вовсе членов, содержащих x в первой степени, то ось Ox наверное будет одной из главных осей инерции. Действительно, так как в этом случае изменение X на $-X$ не отражается на виде уравнения эллипсоида инерции, то плоскость yOz будет его плоскостью симметрии, откуда и следует, что ось Ox будет одной из его осей. Справедливо и обратное заключение.

Соотношения (76) наверное будут иметь место, если массы распределены равномерно ($\rho =$ пост.) и плоскость yOz оказывается плоскостью симметрии самого тела (V), ибо тогда каждому элементу $\rho xy\,dV$ $(\rho zx\,dV)$ интеграла K_{xy} (K_{zx}) отвечает совместно с ним уничтожающийся элемент $\rho(-x)y\,dV = -\rho xy\,dV$ $(-\rho zx\,dV)$ того же интеграла. Впрочем, и непосредственно ясно, что плоскость xOy должна быть плоскостью симметрии и для эллипсоида инерции.

9. Чтобы показать важность установленных только-что понятий, остановимся на вопросе о центробежной силе, развивающейся при вращении твердого тела вокруг оси. Вопрос этот имеет огромное значение в машиностроении.

Итак, пусть некоторое материальное тело (V) вращается вокруг оси Oz, с постоянной угловой скоростью ω (черт. 486). На элемент dm тела будет действовать элементарная центробежная сила dF величины

$$dF = \omega^2 \cdot r \cdot dm,$$

где r есть расстояние NM элемента от оси вращения. Так как направляющие косинусы этой элементарной силы равны

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad 0,$$

то ее проекции на оси будут

$$dF_x = \omega^2 \cdot x\, dm = \omega^2 \cdot \rho\, x\, dV, \quad dF_y = \omega^2 \cdot \rho y\, dV, \quad dF_z = 0.$$

Отсюда проекции на оси результирующей силы $\mathbf{F}$ всех таких элементарных центробежных сил будут:

$$F_x = \omega^2 \iiint\limits_{(V)} \rho x\, dV = \omega^2 M_{yz}, \quad F_y = \omega^2 M_{zx}, \quad F_z = 0, \tag{77}$$

где M_{yz} и M_{zx} — статические моменты нашего тела относительно плоскостей yOz и zOx. Если через ξ, η, ζ обозначить координаты центра тяжести тела, то эти формулы можно переписать так:

$$F_x = \omega^2 \cdot \xi\, m, \quad F_y = \omega^2 \eta\, m, \quad F_z = 0.$$

Отсюда видно, что упомянутая результирующая сила $\mathbf{F}$ в точности такова, какова была бы центробежная сила, если бы вся масса тела была сосредоточена в его центре тяжести.

Элементарная центробежная сила, о которой выше была речь, очевидно будет иметь следующие моменты относительно координатных осей:

$$dM_x = z \cdot dF_y = \omega^2 \rho\, yz\, dV, \quad dM_y = z \cdot dF_x = \omega^2 \rho \cdot zx\, dV, \quad dM_z = 0.$$

Следовательно, результирующие моменты относительно этих осей будут:

$$M_x = \omega^2 \iiint\limits_{(V)} \rho\, yz\, dV = \omega^2 K_{yz}, \quad M_y = \omega^2 K_{zx}, \quad M_z = 0. \tag{78}$$

Для того, чтобы центробежные силы не оказывали никакого действия на вал (а через его посредство — на подшипники, в которых он укреплен), необходимо и достаточно, чтобы результирующая сила $\mathbf{F}$ и результирующие моменты M_x и M_y были равны нулю. Первое условие дает, в виду (77),

$$M_{yz} = 0, \quad M_{zx} = 0,$$

а это означает, что центр тяжести тела должен лежать на оси Oz; пусть им и будет начало O. Второе же условие [см. (78):

$$K_{yz} = 0, \quad K_{zx} = 0$$

показывает, что ось Oz должна быть одной из главных осей инерции. Итак, *центробежная сила в том лишь случае не производит давления на подшипники вала, если ось вращения совпадает с одной из главных центральных осей инерции вращающегося тела.*

10. Применим полученные формулы к конкретным примерам. Пусть диск турбины Лаваля весом $G = 5$ кг, вращающийся со скоростью $n = 25\,000$ обор./мин., насажен на вал с ошибкой, так что его центр тяжести C сдвинут относительно геометрической оси вращения Oz на величину $\delta = 0{,}25$ мм $= 0{,}00025$ м (черт. 488).

Определим, какая будет развиваться центробежная сила и какое давление она будет оказывать на подшипники вала (которые предположим расположенными симметрично относительно диска).

Так как в нашем случае

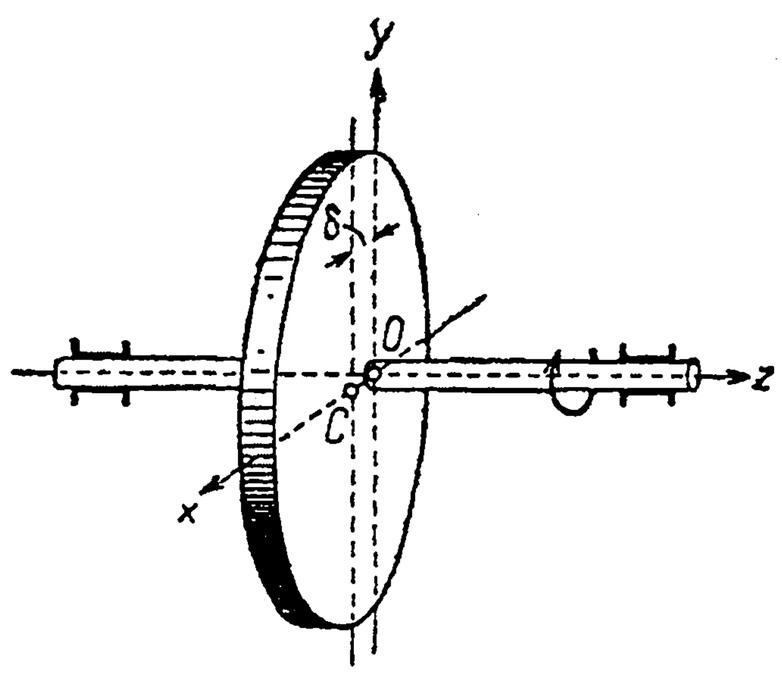
$$m = \frac{G}{g}, \qquad \omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{n\pi}{30},$$

то, считая массу диска сосредоточенной в его центре тяжести, сразу получим,

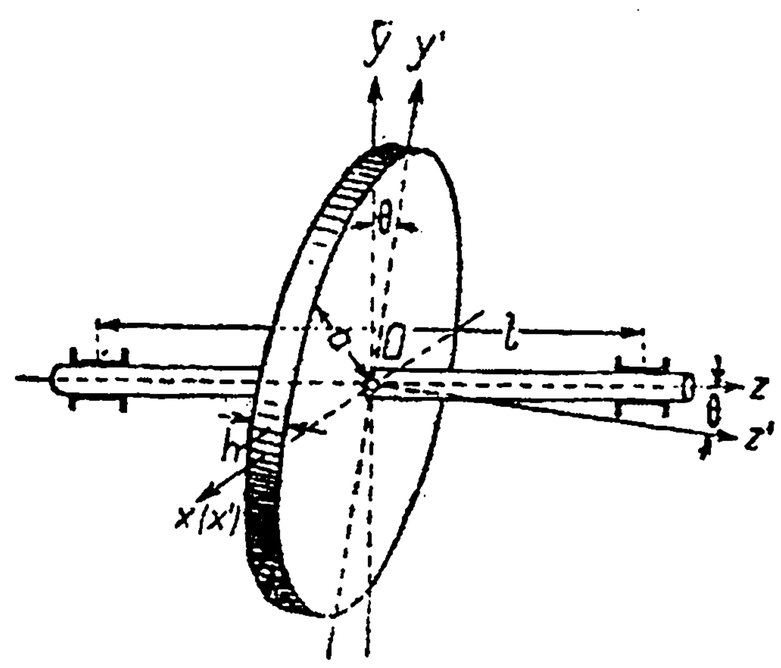
$$F = m\omega^2\delta = \frac{G}{g}\cdot\left(\frac{n\pi}{30}\right)^2\cdot\delta = \frac{5}{9{,}81}\left(\frac{25\,000\cdot 3{,}14}{30}\right)^2\cdot 0{,}00025 \text{ кг},$$

т. е. $F \doteq 870$ кг, в 175 раз более давления от веса диска! На подшипники это давление распределится поровну.

11. Еще более любопытен случай ошибки другого рода, когда — хотя центр тяжести O диска лежит на оси вращения Oz, — но ось Oz' самого диска составляет с осью вращения некоторый угол θ, скажем в 3° (черт. 489). Теперь результирующая сила $F = 0$, но остается еще вычислить результирующий



Черт. 488.



Черт. 489.

момент. С этой целью выберем ось Ox в плоскости среднего сечения диска перпендикулярно к оси вращения Oz (см. чертеж). Так как она, очевидно, будет одной из главных центральных осей инерции диска (который мы предполагаем цилиндрическим и однородным), то, в силу (76), $K_{zx} = 0$, а с ним и $M_y = 0$ [см. (78)]. Таким образом, весь результирующий момент центробежных сил сведется к

$$M = M_x = \omega^2 K_{yz}.$$

Остается определить центробежный момент

$$K_{yz} = \iiint\limits_{(V)} \rho yz\,dV.$$

Наше тело расположено неудобно по отношению к системе осей Ox, Oy, Oz, поэтому мы попытаемся перейти к системе осей Ox', Oy', Oz' (см. чертеж), являющихся, очевидно, главными центральными осями инерции тела. Так как оси Ox и Ox' тождественны, то, преобразуя координаты y, z, получим формулы перехода [ср. 107, (32)]:

$$y = y'\cos\theta - z'\sin\theta, \quad z = y'\sin\theta + z'\cos\theta.$$

Отсюда

$$yz = \sin\theta\cos\theta\,(y'^2 - z'^2) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,y'z',$$

так что

$$K_{yz} = \sin\theta\cos\theta\left[\iiint\limits_{(V)} \rho y'^2\,dV - \iiint\limits_{(V)} \rho z'^2\,dV\right] +$$

$$+ (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\iiint\limits_{(V)} \rho y'z'\,dV.$$

Последний интеграл справа есть не что иное, как центробежный момент $K_{y'z'}$ и следовательно равен нулю (поскольку ось Ox' есть главная ось инерции). Первые же два интеграла представляют собой моменты инерции нашего цилиндрического диска относительно плоскости $x'Oz'$ (проходящей через его ось) и плоскости $x'Oy'$ (среднего поперечного сечения):

$$K_{yz} = \sin\theta \cos\theta \, [I_{z'x'} - I_{x'y'}].$$

Оба эти момента уже нам известны [254, (60), и 190, 10]:

$$I_{z'x'} = \frac{ma^2}{4}, \quad I_{x'y'} = \frac{mh^2}{12},$$

где a означает радиус диска, а h — его толщину.

Так как в нашем случае h мало по сравнению с a, то можно вторым моментом пренебречь и просто положить:

$$K_{yz} = \frac{m}{8} a^2 \sin 2\theta.$$

Итак, если скажем $a = 30$ см $= 0{,}3$ м, будем иметь:

$$M = \frac{m}{8} \omega^2 a^2 \sin 2\theta = \frac{1}{8} \frac{G}{g} \left(\frac{n\pi}{30}\right)^2 a^2 \sin 2\theta =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{9{,}81} \cdot \left(\frac{25\,000 \cdot 3{,}14}{30}\right)^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot \sin 6^\circ \doteq 4\,100 \text{ кг-м}.$$

Если расстояние l между подшипниками равно 90 см $= 0{,}9$ м, то давление P на каждый из подшипников определится из соображения, что момент Pl, доставляемый реакциями подшипников, должен уравновесить момент M центробежных сил:

$$Pl = M, \text{ откуда } P = \frac{M}{l} \doteq \frac{4100}{0{,}9} \doteq 4\,500 \text{ кг},$$

т. е. в 1800 раз больше давления от веса диска!

Примеры, приведенные в настоящем n°, должны создать у читателя представление о применении тройных интегралов в технике, отвечающее фактическому положению дела: ими часто и с удобством пользуются в рассуждениях, при устанавливании общих результатов и формул, но вычислять обыкновенно приходится лишь двойные или даже простые интегралы, к которым они в простых случаях непосредственно приводятся

Глава XVI.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

257. Основные понятия. Уравнения первого порядка. В главах X и XI мы подробно рассматривали задачу об определении функции y по наперед заданной ее производной

$$y' = f(x) \tag{1}$$

или по дифференциалу

$$dy = f(x)\,dx \tag{1a}$$

и учились производить операцию *интегрирования* (или *квадратуру*), с помощью которой она решается:

$$y = \int f(x)\,dx + C. \tag{2}$$

Часто однако приходится определять функцию, исходя из более сложных условий. Именно, данные задачи могут привести к уравнениям, связывающим значения независимой переменной (напр., x) с значениями как самой неизвестной функции (скажем, y), так и ее производных первого и высших порядков (y', y'',...), т. е. к уравнениям вида:

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = 0.$$

Такого рода уравнения (в которых фигурирует *одна* независимая переменная) называются (*обыкновенными*) *дифференциальными уравнениями*. Вместо производных неизвестных функций в них могут фигурировать и их дифференциалы. Вот примеры дифференциальных уравнений:

$$1)\ x\sqrt{1+y'^2} = a;\quad 2)\ x^2\frac{d^2h}{dx^2} + x\frac{dh}{dx} - h = Ax^3;\quad 3)\ \frac{dy}{dx} + cxy = 0;$$

$$4)\ EIy_x^{(4)} + ky = 0;\quad 5)\ dp + (ap+b)\,dy = 0;$$

$$6)\ x'' + 2hx' + k^2x = A\sin mt;\quad 7)\ \frac{c_v}{R}v\,dp + \frac{c_p}{R}p\,dv = 0.$$

В них роли независимой переменной и искомой функции от нее играют соответственно: 1) x и y; 2) x и h; 3), 4) x и y; 5) y и p (или *наоборот*!); 6) t и x; 7) v и p (или *наоборот*!).

Дифференциальные уравнения уже встречались нам в различных частях курса.* Соотношения между величинами, интересующими инже-

* См. напр., 74, 6, 7; 105; 121; 9, 10; 180; 206, VII.

нера, вплоть до основных законов природы [о законах движения, например, уже была речь в nn° 74, 112, 244] — часто выражаются именно в виде дифференциальных уравнений. Во многих случаях оказывается проще и естественнее устанавливать соотношения между бесконечно малыми элементами рассматриваемых величин, и лишь на основе этих соотношений искать уже зависимость между самими величинами. Поэтому важно, с одной стороны, освоиться с самым процессом облекания вопроса в форму дифференциального уравнения, с *составлением* дифференциального уравнения, с другой же стороны — научиться хотя бы в простейших случаях *интегрировать* уравнение, т. е. находить из него выражение для искомой функции. К сожалению, здесь еще чаще, чем при квадратурах [170], мы сталкиваемся с невозможностью свести дело к элементарным функциям. Обычно стараются привести задачу к простым квадратурам, хотя бы и не выполняющимся в конечном виде, но зачастую и это оказывается невозможным; в подобных случаях приходится обращаться к методам *приближенного интегрирования* [см. ниже 295, 297—303].

В зависимости от порядка наивысшей производной, который встречается в дифференциальном уравнении, говорят о дифференциальном уравнении первого, второго и т. д. порядков. Из приведенных выше уравнений 1)—7), напр., уравнения 1), 3), 5), 7) будут первого порядка, 2) и 6) — второго порядка, 4) — четвертого порядка. Остановимся на уравнениях первого порядка.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка таков:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{или} \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (1) представляет его частный случай. Уравнению (3) удовлетворяет не одна лишь функция y, а бесчисленное множество таких функций; общее выражение функции, удовлетворяющей нашему дифференциальному уравнению, всегда содержит некоторую произвольную постоянную, C, и имеет вид:

$$y = \varphi(x, C), \tag{4}$$

так что, придавая C различные значения, мы отсюда будем получать различные функции, удовлетворяющие уравнению (3). Мы видели это и на общем решении (2) уравнения простейшего вида (1), где встречается произвольное постоянное слагаемое, и на общих решениях других дифференциальных уравнений, которые встречались нам раньше. Иногда зависимость между переменными x и y получается в неявной форме:

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{4a}$$

или

$$\Phi(x, y) = C. \tag{4b}$$

Соотношения (4), (4*a*), (4*b*) мы в равной мере будем называть *общим решением* или *общим интегралом* данного дифференциального уравнения. Если же придать произвольной постоянной C некоторое опре-

деленное численное значение, то мы получим *частное решение* или *частный интеграл.*

Иногда нахождение общего интеграла и является конечной целью интегрирования дифференциального уравнения [см., напр., ниже вывод *формулы Пуассона* в теории идеальных газов, 261, 1]. Но чаще всего техническая задача, приведшая к дифференциальному уравнению, требует определенного, конкретного, частного решения, требует установления числового значения постоянной C. Как мы это уже видели на отдельных примерах, встречавшихся в курсе, сама задача позволяет установить, какое *начальное* значение y_0 должна иметь искомая функция при некотором *начальном* значении x_0. По этим *начальным условиям* и устанавливается значение C. Действительно, в какой бы форме (4), (4*a*) или (4*b*) ни получился общий интеграл, полагая в нем $x=x_0$, $y=y_0$, мы придем к условию:

$$y_0=\varphi(x_0, C), \quad \Phi(x_0, y_0, C)=0, \quad \Phi(x_0, y_0)=C,$$

откуда определяется C, а с ней и то частное решение уравнения (3), которое отвечает задаче.

Конечно, всего лучше читатель уяснить это себе на конкретных задачах, приводимых ниже; осваиваясь с их решением, пусть он обратит внимание на все указания, относящиеся к установлению значения произвольной постоянной.

258. Уравнения первой степени относительно производной. Отделение переменных. Чаще всего приходится иметь дело с случаем, когда в уравнение (3) производная $y'=\frac{dy}{dx}$ входит в первой степени, т. е. когда уравнение имеет вид:

$$P(x, y)+Q(x, y)\cdot y'=0 \quad \text{или} \quad P(x, y)+Q(x, y)\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

где P и Q суть функции от x и y. В этом случае часто удобнее писать уравнение так:

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0. \tag{5}$$

Если уравнение (3) не будет первой степени относительно y', то, разрешая его относительно этой производной, мы сведем его к одному или нескольким уравнениям вида:

$$y'=f(x, y),$$

уже первой степени относительно y'! Поэтому достаточно заняться уравнениями первой степени.

Если в уравнении (5) коэффициент P на деле зависит только от x, а коэффициент Q — только от y, т. е. если уравнение имеет вид:

$$P(x)\,dx+Q(y)\,dy=0, \tag{6}$$

то говорят, что *переменные отделены.* В этом случае интегрирование производится очень просто. Действительно, выражение $P(x)\,dx$ есть дифференциал от функции $\int P(x)\,dx$, а выражение $Q(y)\,dy$ —

дифференциал от функции $\int Q(y)\,dy$, так что левая часть уравнения (6) представляет собой дифференциал от суммы этих функций:

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy.$$

В силу уравнения (6) этот дифференциал равен нулю, следовательно сама функция сводится к постоянной:

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C.\,*$$

Если мы на самом деле выполним те квадратуры, которые здесь лишь обозначены, то мы и получим общий интеграл нашего уравнения в виде: $\Phi(x, y) = C$.

Заметим, что иногда предпочитают члены с dx и dy помещать в разных частях уравнения:

$$P(x)\,dx = -Q(y)\,dy; \tag{7}$$

интегрируя каждую часть порознь и не забывая о произвольной постоянной, которую достаточно присоединить к одному из интегралов, придем к результату

$$\int P(x)\,dx = -\int Q(y)\,dy + C, \tag{8}$$

тождественному с полученным выше.

Предположим теперь, что требуется удовлетворить еще начальным условиям

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0.$$

Вместо того, чтобы сначала находить общий интеграл, а затем подбирать постоянную C, исходя из этих условий, можно поступить проще, именно: „просуммировать“ элементарные величины (7), слева — между x_0 и x, а справа — между соответствующими значениями y_0 и y:

$$\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx = -\int_{y_0}^{y} Q(y)\,dy.$$

Самый вид полученного равенства подчеркивает, что оно заведомо выполняется при $x = x_0$ и $y = y_0$ (обе части обращаются в нуль!).

Читателю ясно, что этот прием лишь формой отличается от прежнего. Ведь и в формуле (8) под интегралами можно было разуметь именно только-что написанные определенные интегралы; а тогда, полагая $x = x_0$, $y = y_0$, сразу видим, что в этом случае $C = 0$.

---

* Следует заметить, что когда мы в настоящей главе употребляем символ $\int$, то всегда имеем в виду хотя и произвольную, но определенную первообразную функцию, так что постоянную интегрирования мы никогда не включаем в этот символ. Это замечание нужно иметь в виду все время при дальнейшем изложении.

Пример 1. Пусть, напр., дано уравнение:

$$\sin x\,dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0.$$

Интегрируем

$$\int \sin x\,dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C \quad \text{или} \quad -\cos x + 2\sqrt{y} = C,$$

откуда

$$y = \frac{(\cos x + C)^2}{4}.$$

Таковы различные формы общего интеграла. Придавая постоянной C частные значения, напр., $C=0$, $C=2$, получим частные решения нашего уравнения:

$$y = \frac{1}{4}\cos^2 x, \quad y = \frac{1}{4}(2+\cos x)^2 = 1 + \cos x + \frac{1}{4}\cos^2 x;$$

легко непосредственной подстановкой убедиться, что эти функции, действительно, удовлетворяют уравнению.

Обратимся к определению постоянной C из начальных условий. Например, если при $x=0$ мы желаем иметь $y=1$, то из общего интеграла, подставляя эти значения, сразу находим: $C=1$, что приводит к такому частному решению:

$$y = \frac{(1+\cos x)^2}{4} = \cos^4\frac{x}{2}.$$

Как упоминалось, можно в этом случае и избежать необходимости составлять общий интеграл, написав сразу:

$$\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int_0^x \sin x\,dx, \text{ т. е. } 2(\sqrt{y}-1) = \cos x - 1,$$

откуда

$$\sqrt{y} = 1 - \frac{1-\cos x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} \text{ и } y = \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^2.$$

Часто случается, что хотя уравнение (5) и не имеет вида (6), но может быть преобразовано к этому виду, после чего интегрируется, как указано выше. Такое преобразование и носит название *отделения переменных*. Переменные легко отделяются в том случае, когда коэффициенты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ представляют собой произведения множителей, зависящих каждый только от одной переменной, т. е. когда

$$P(x, y) = P_1(x)\cdot P_2(y), \quad Q(x, y) = Q_1(x)\cdot Q_2(y).$$

Действительно, достаточно разделить обе части уравнения

$$P_1(x)\,P_2(y)\,dx + Q_1(x)\,Q_2(y)\,dy = 0 \tag{9}$$

на $P_2(y)\,Q_1(x)$, чтобы этим уже отделить переменные:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}dy = 0.$$

Уравнения (1) или (1*a*), очевидно, подходят под этот тип. Другой простой частный случай, с которым часто приходится сталкиваться, это:

$$y' = g(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = g(y).$$

Отсюда

$$\frac{dy}{g(y)}=dx, \quad \int \frac{dy}{g(y)}=x+C.$$

В сущности говоря, до сих пор нам встречались дифференциальные уравнения только этих двух типов.

Пример 2. $y \sin \frac{x}{2}\, dx - \cos \frac{x}{2}\, dy = 0.$

Уравнение имеет вид (9); отделяем переменные:

$$\frac{dy}{y}=\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\, dx$$

и интегрируем:

$$\ln y = -2 \ln \cos \frac{x}{2} + C.$$

Потенцируя, определяем отсюда y:

$$y=\frac{e^C}{\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Заменим $\cos^2 \frac{x}{2}$ через $\frac{1+\cos x}{2}$ и введем новую постоянную c, полагая $c=2e^C$: в результате приведем общий интеграл к виду:

$$y=\frac{c}{1+\cos x}.$$

Замечание. Теперь, когда — после рассмотренных примеров — читатель, вероятно, уже освоился с нехитрой техникой интегрирования уравнений с отделяющимися переменными, уместно обратить его внимание на следующее обстоятельство. В уравнении (6), равно как и в общем уравнении (5), мы, разумеется, не можем считать обе переменные, x и y, независимыми, ибо иначе dx и dy были бы оба произвольными и уравнение могло бы иметь место лишь при $P=Q=0$. Таким образом, одну из переменных, скажем, y мы считаем функцией от другой, x, и весь вопрос именно в том, чтобы найти такую функцию, которая удовлетворяла бы уравнению. Однако, когда мы вычисляли интеграл $\int Q(y)\, dy$, мы с этим вовсе не считались и действовали так, как если бы y была независимой переменной. Ошибка ли это? Конечно, нет — ведь если выражение $Q(y)dy$ является дифференциалом от функции $\int Q(y)\, dy$ независимой переменной y, то оно сохранит это свойство и тогда, когда под y будет разуметься функция от x [см. конец n° 60]. Или иначе: мы уже давно знаем, что при вычислении неопределенного интеграла можно временно заменять одну независимую переменную — другой, лишь бы в окончательном результате под новой переменной (в нашем случае, под y) опять разумелась функция от старой (x).

Пример 3. $y^2(1+y'^2)=a^2$.

Это уравнение не будет первой степени относительно y'; но, разрешая его относительно y', получим два уравнения (соответственно двум знакам перед корнем):

$$y'=\pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

здесь переменные уже отделяются:

$$\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=dx.$$

Интегрируя, найдем:

$$\mp\sqrt{a^2-y^2}=x+C.$$

Этот общий интеграл можно представить в форме:

$$(x+C)^2+y^2=a^2, \tag{10}$$

в которой даже пропадает двойственность знака.

По поводу последней задачи сделаем одно замечание. Как это ни покажется читателю удивительным, но общий интеграл (10) не охватывает *всех без исключения* функций y от x, удовлетворяющих данному уравнению! Действительно, если положить просто $y=\pm a$, то, как легко непосредственно проверить, эти „функции" удовлетворяют дифференциальному уравнению (ибо для них $y'=0$), но ни при каком значении C не получаются из (10). Такого рода исключительное решение, не входящее в общий интеграл, носит название *особенного*. Интересно отметить момент нашего рассуждения, когда мы его „пропустили". Деля на $\sqrt{y^2-a^2}$, мы молчаливо предположили, что этот корень *не нуль*, и тем самым исключили случай $y=\pm a$!

Вообще заниматься особенными решениями мы не будем, так как в технике они не находят приложений, но отметить факт их существования считали полезным.

259. Замечание о составлении дифференциальных уравнений. Переходим теперь к различным техническим задачам, которые приводятся к дифференциальным уравнениям с отделяющимися переменными. Так как самый процесс интегрирования для этих случаев совершенно элементарен и не вызывает никаких затруднений, то мы хотели бы именно сейчас сосредочить внимание читателя на другой стороне вопроса — на составлении дифференциального уравнения.

Как правило, для этого приходится рассматривать бесконечно малые элементы входящих в вопрос тел и бесконечно малые приращения тех величин, о которых идет речь. Если иной раз по видимости этого удается избежать, то лишь ценою использования уже готового понятия о скорости изменения величины, готового выражения для углового коэффициента касательной и т. п., которые сами появились из рассмотрения бесконечно малых элементов.

При установлении зависимости между бесконечно малыми приращениями следует пользоваться всеми возможными упрощающими допущениями и приближенными заменами, сводящимися в сущности к отбрасыванию бесконечно малых величин высших порядков. В частности, все без исключения бесконечно малые приращения рассматриваемых величин техники всегда заменяют их дифференциалами; как читатель знает, это также сводится к отбрасыванию бесконечно малых высших порядков [67, 224]. *Для того чтобы привлечь внимание читателя к упомянутым моментам,*

на протяжении нескольких ближайших пп° все относящиеся сюда пояснения и даже беглые указания набраны курсивом.

Важно всемерно подчеркуть, что получающееся в результате всех этих упрощений и отбрасываний *дифференциальное уравнение вида* (5):

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

оказывается отнюдь не приближенным, а вполне точным! Хотя с подобными обстоятельствами читатель уже сталкивался в главе XI при интегрировании простейшего уравнения вида (1) [177], в виду исключительной важности этого вопроса мы и здесь войдем в подробности.

Итак, предположим, что, заменяя приращения x и y их дифференциалами и отбрасывая, в случае надобности, бесконечно малые слагаемые высшего, чем Δx, порядка, мы пришли к уравнению (5). Если бы мы не делали этой замены, то вместо dx и dy мы имели бы Δx и Δy; восстановим, кроме того, все отброшенные бесконечно малые и, перенеся их в правую часть равенства, обозначим сумму их через α (очевидно, α также будет бесконечно малой высшего порядка). Итак, рассуждая вполне строго, мы пришли бы не к равенству (5), а к такому:

$$P(x, y)\,\Delta x + Q(x, y)\,\Delta y = \alpha,$$

которое вполне точно. Разделим теперь обе части его на Δx:

$$P(x, y) + Q(x, y)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\alpha}{\Delta x}$$

и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Так как при этом

$$\frac{\alpha}{\Delta x} \to 0,$$

то в пределе получим равенство

$$P(x, y) + Q(x, y)\cdot y_x' = 0$$

или

$$P(x, y) + Q(x, y)\cdot\frac{dy}{dx} = 0,$$

которое тождественно с (5). Таким образом, и это уравнение оказывается точным!

Такое уничтожение погрешности в результате предельного перехода уже не удивило бы читателя. Но при обычном методе составления уравнения мы лишь кажущимся образом избегаем этого предельного перехода, фактически же именно его и выполняем, отбрасывая бесконечно малые высших порядков и заменяя приращения дифференциалами. Этот обычный для техников путь есть просто кратчайший путь к цели!

Можно еще и иначе убедиться в точности равенства (5). Все наши замены и упрощения сводятся к отбрасыванию ряда бесконечно малых высшего порядка; наша задача состоит в том, чтобы показать, что *фактически все эти отброшенные бесконечно малые взаимно*

уничтожаются. Обозначим сумму их через β;* тогда в точности равенства

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \beta$$

мы уже не можем сомневаться. Разделим полученное равенство на dx:

$$P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{dx}.$$

Так как отношение двух бесконечно малых dy и dx есть *постоянное число*, y_x' (в этом обстоятельстве весь корень вопроса), то левая часть представляет собой попросту некоторое постоянное число, скажем, k, так что и

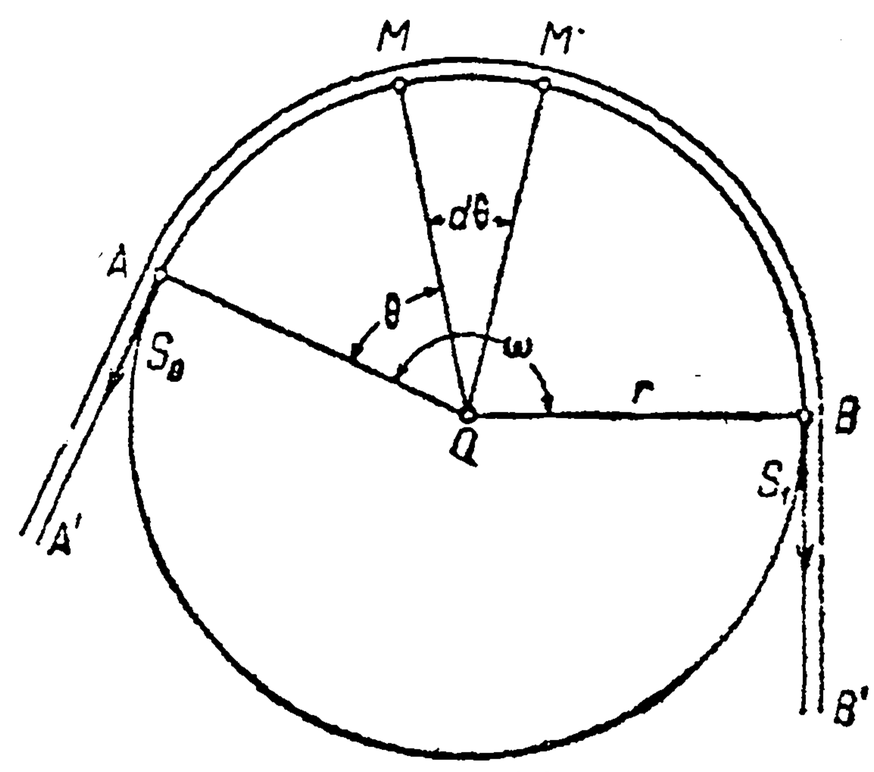
$$\frac{\beta}{dx} = k \text{ или } \beta = k \cdot dx.$$

Если бы k было отлично от нуля, то β была бы бесконечно малой первого порядка, что невозможно, ибо она является суммой бесконечно малых высшего порядка; следовательно, необходимо $k = 0$, так что и $\beta = 0$ тождественно, что и требовалось доказать.

Обращаем внимание читателя на то, что мы вовсе не утверждаем, что всякое отбрасывание бесконечно малых высшего порядка приводит к точному результату. Лишь в том случае, если мы, так сказать, доведем это отбрасывание „до конца" и придем к уравнению вида (5), однородному и линейному относительно дифференциалов, можно уже ручаться за его абсолютную точность.

Все сделанные пояснения помогут читателю лучше разобраться в составлении уравнений nn° 260—262. Но и обратно: смысл этих пояснений читатель несомненно лучше поймет, имея уже опыт в составлении уравнений; поэтому мы рекомендуем ему вернуться к настоящему n° после изучения ближайших nn°.

260. Трение канатов и ремней. Представим себе, что через неподвижно укрепленный цилиндрический барабан перекинут канат (ремень, тормозная лента и т. п.), который прилегает к цилиндру по некоторой дуге AB (черт. 490), соответствующей центральному углу ω („угол обхвата"). Пусть к концу A каната приложена сила S_0, а к концу B — сила S_1. При равенстве этих сил канат, разумеется, остается в покое. Но даже при увеличении силы S_1, благодаря трению каната о барабан, канат некоторое время все же будет неподвижен, пока S_1 не достигнет некоторого предельного значения, после чего канат уже начнет скользить по барабану. Какова же эта наибольшая сила S_1, которая при наличии трения может быть уравновешена силой S_0?



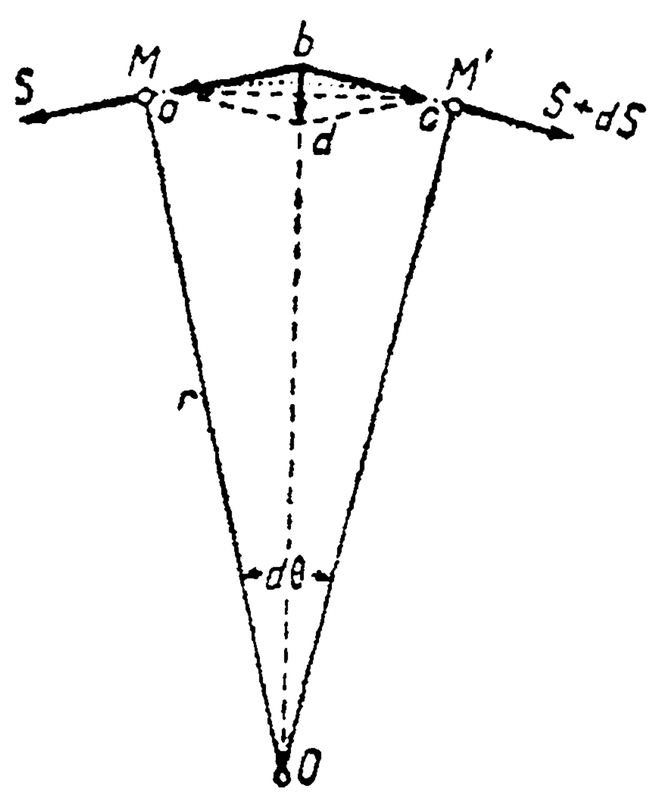
Черт. 490.

Для решения этого вопроса рассмотрим сначала, как распределится натяжение S вдоль части AB каната в тот момент, когда лишь начинается скольжение.** Что это натяжение не будет постоянным, явствует уже из того, что в точках A и B оно соответственно равно S_0 и S_1!

* Величина β не тождественна с величиной α, фигурировавшей в предыдущем рассуждении: в β входит еще та бесконечно малая высшего порядка, которою dy отличается от Δy (умноженная на Q).

** При всех последующих рассуждениях мы предполагаем канат вполне гибким

Возьмем на дуге AB какую-нибудь точку M, положение которой определяется углом $\theta = \sphericalangle AOM$, и установим, какие силы действуют на *элемент* MM' каната, соответствующий центральному углу $d\theta$. Прежде всего, в точке M действует натяжение $S = S(\theta)$, а в точке M' — натяжение $S + dS = S(\theta + d\theta)$.* Оба натяжения направлены по касательным к окружности барабана. Для того чтобы определить силу трения, нужно установить нормальную силу dN, прижимающую рассматриваемый элемент каната к поверхности барабана. С этой целью найдем равнодействующую только что упомянутых натяжений по правилу параллелограмма (см. черт. 491, где дуга MM' представлена в увеличенном масштабе). *При этом можно приближенно считать стороны параллелограмма равными, т. е. принять его за ромб.* Тогда диагональ bd этого ромба, представляющая величину и направление равнодействующей, пройдет через центр сечения барабана и, следовательно, как раз и даст нормальную к его поверхности силу dN. Так как острый угол $\sphericalangle bad$ равен $d\theta$, то очевидно



Черт. 491.

$$dN = 2S \cdot \sin\frac{d\theta}{2}.$$

Для того чтобы отчетливее выявить, что при этом выводе мы пренебрегаем лишь бесконечно малыми высших порядков, можно было бы заметить, что радиальная сила dN слагается из радиальных составляющих обоих натяжений S и $S + dS$, так что

$$dN = S \cdot \sin\frac{d\theta}{2} + (S + dS) \cdot \sin\frac{d\theta}{2}.$$

Отбрасывание бесконечно малой высшего порядка $dS \cdot \sin\frac{d\theta}{2}$ возвращает нас к прежнему результату.

Затем, *снова пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, можно* $\sin\frac{d\theta}{2}$ *заменить через* $\frac{d\theta}{2}$, что окончательно приведет нас к простому выражению для dN:

$$dN = S \cdot d\theta. \tag{11}$$

Так как сила трения dR пропорциональна этой нормальной силе, то, обозначая множитель пропорциональности (коэффициент трения) через μ, получим

$$dR = \mu\, dN = \mu S \cdot d\theta.$$

Трение противодействует начинающемуся движению, так что сила dR вместе с натяжением S в точке M должна уравновешивать натяжение $S + dS$ в точке M', откуда:

$$dS = \mu S \cdot d\theta.$$

Это и есть дифференциальное уравнение, из которого определяется искомая функция S от θ. Отделяем переменные:

$$\frac{dS}{S} = \mu\, d\theta \tag{12}$$

и интегрируем:

$$\ln S = \mu\theta + c.$$

Отсюда, если e^c обозначить через C, получаем, наконец:

$$S = Ce^{\mu\theta}.$$

Так как в точке A, т. е. при $\theta = 0$, натяжение S должно равняться S_0 (начальные условия!), то, полагая $\theta = 0$, находим: $C = S_0$, так что закон распределения натяжений установлен вполне:

$$S = S_0 e^{\mu\theta}.$$

и нерастяжимым. В действительности эти предположения не выполняются, поэтому выводимые ниже формулы нуждаются в опытных поправках. Тем не менее они фактически лежат в основе всех расчетов, связанных с трением гибких тел.

* *Дифференциал dS вместо приращения ΔS!*

Теперь, взяв θ равным „углу обхвата" ω, придем к основной *формуле Эйлера*:

$$S_1 = S_0 e^{\mu\omega}. \tag{13}$$

Конечно, эту формулу проще было получить, „просуммировав" бесконечно малые величины (12), справа — от 0 до ω, а слева соответственно этому — от S_0 до S_1. Это сразу дало бы нам

$$\ln \frac{S_1}{S_0} = \mu\omega,$$

откуда потенцированием и находится формула (13).

Нужно помнить, что соотношение (13) отвечает предельному положению, когда скольжение только начинается; при $S_1 < S_0 e^{\mu\omega}$ скольжения вовсе нет, при $S_1 > S_0 e^{\mu\omega}$ скольжение будет происходить и даже ускоренно.

Если задана сила S_1 (напр., к концу B каната подвешен груз), то наименьшая сила S_0, способная его удержать в состоянии равновесия (или равномерно опускать), будет очевидно:

$$S_0 = S_1 \cdot e^{-\mu\omega}. \tag{14}$$

Важно отметить, что отношение $e^{\mu\omega}$ очень быстро возрастает с увеличением угла ω (который, разумеется, может принимать значения и бо́льшие 2π!). Полагая, например, $\mu = 0{,}4$, что соответствует трению пенькового каната по деревянному барабану, имеем следующую таблицу:

ω	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	4π	5π	6π	7π	8π
$e^{\mu\omega}$	1,87	3,51	6,59	12,35	23,14	43,38	152,4	535,5	1881	6610	23200

Отношение сил S_1 и S_0 возрастает в геометрической прогрессии, когда угол обхвата ω растет лишь в арифметической прогрессии! Теперь становится ясным, каким образом, обернув несколько раз вокруг врытого в землю столба буксирный канат, брошенный с парохода на пристань, один-два человека в состоянии преодолеть инерцию большого парохода.

Пусть, напр., требуется медленно спустить с высоты груз $S_1 = 100$ кг, причем веревка скользит по горизонтально укрепленному деревянному блоку, охватывая три четверти его окружности $\left(\omega = \frac{3\pi}{2}\right)$. Тогда по формуле (14), пользуясь таблицей, для удерживающей груз силы тотчас находим:

$$S_0 = 100 : 6{,}59 \doteq 15{,}2 \text{ кг}.$$

Наоборот, если нужно удержать, скажем, груз $S_1 = 500$ кг силою $S_0 = 5$ кг с помощью каната, намотанного на железный барабан ($\mu = 0{,}25$), то по формуле (13) легко определить соответствующий угол ω:

$$e^{0{,}25\,\omega} = 500 : 5 = 100; \qquad 0{,}25\,\omega = \ln 100 = \frac{\log 100}{M} = \frac{2}{0{,}4343},$$

наконец,

$$\omega = \frac{8}{0{,}4343} = 18{,}46 = 5{,}89\,\pi,$$

так что канат достаточно обернуть вокруг барабана неполных три раза.

Полная сила трения R, действующая на окружности барабана, равна очевидно разности сил S_1 и S_0:

$$R = S_1 - S_0 = S_0(e^{\mu\omega} - 1). \tag{15}$$

В первом примере она была 84,8 кг, а во втором достигла 495 кг.

Применим эту формулу к так называемому (простому) ленточному тормозу. На черт. 492 представлено тормозное колесо, насаженное на вал, вращение которого (против часовой стрелки) задерживается с помощью охватывающей колесо

железной тормозной ленты $CABD$. Конец D ленты укреплен неподвижно, конец же C прикрепляется к концу рычага CE, ось которого проходит через D; к другому его концу E прилагается сила P, натягивающая ленту и тормозящая вал. Так как вращение вала против часовой стрелки создает такое же трение, что и движение ленты в сторону точки B, то можно воспользоваться выведенными выше формулами. В частности, из (15) имеем:

$$S_0 = \frac{R}{e^{\mu\omega} - 1},$$

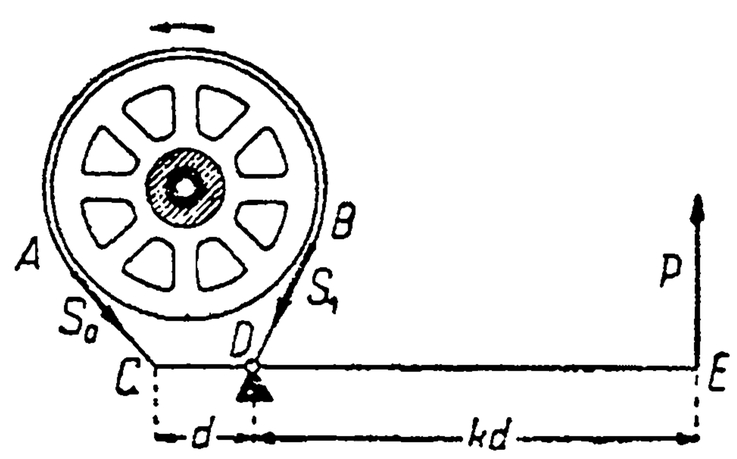
где R есть тормозящая сила на окружности тормозного колеса. Если обозначить через k отношение плеч рычага CE, то сила P, которую нужно приложить к рукоятке E тормоза, чтобы создать тормозящую силу R, будет

$$P = \frac{S_0}{k} = \frac{R}{k(e^{\mu\omega} - 1)}.$$

Напр., при $\omega = 1{,}4\pi$ и $k = 10$, заметив, что для трения железа по железу $\mu = 0{,}18$, имеем:

$$e^{0{,}18 \cdot 1{,}4\pi} = 2{,}21, \qquad \frac{1}{2{,}21 - 1} = 0{,}83; \qquad P = 0{,}083\,R.$$

Полученные выше формулы играют важную роль в вопросе о передаче мощности с одного шкива (ведущего) на другой (ведомый). Предположим, что на черт. 490 изображен в разрезе именно последний шкив, причем конец BB' каната (или ремня) будет ведущим (сбегающим). Если представить себе такое же „предельное" состояние, соответствующее едва начинающемуся скольжению, как и выше, то применимы прежние рассуждения, так как элемент каната и вращающийся барабан, к которому он прилегает, находятся в относительном покое. Таким образом, натяжение S_1 в конце BB' окажется бо́льшим, чем натяжение S_0 в конце AA', и их разность $R = S_1 - S_0$, т. е. сила трения, и будет той силой, которая вращает шкив и способна совершать работу.



Черт. 492.

Эта переданная сила выражается формулой (15) или [если S_0 выразить через S_1 по формуле (14)]

$$R = S_1 \cdot \frac{e^{\mu\omega} - 1}{e^{\mu\omega}} = S_1\,(1 - e^{-\mu\omega}). \tag{16}$$

Однако, все это справедливо, пока скорость v каната незначительна. При значительной величине v приходится принимать в расчет еще центробежную силу, действующую на прилегающие к шкиву элементы каната в сторону от центра и, следовательно, уменьшающую нормальное давление dN, а с ним — и силу трения dR. Если радиус шкива обозначить через r, а вес погонной единицы длины каната — через γ, то длина элемента MM' каната (черт. 490 или 491) будет $ds = r\,d\theta$, а масса $dm = \frac{\gamma}{g} r\,d\theta$. Таким образом, величина соответствующей центробежной силы будет

$$\frac{dm \cdot v^2}{r} = \frac{\gamma\, r d\theta \cdot v^2}{gr} = \frac{\gamma}{g} v^2 \cdot d\theta.$$

Это выражение нужно отнять от (11), так что теперь

$$dN = \left(S - \frac{\gamma}{g} v^2\right) d\theta$$

и, соответственно этому,

$$dR = \mu \left(S - \frac{\gamma}{g} v^2\right) d\theta.$$

Таким образом, окончательно дифференциальное уравнение теперь будет иметь следующий вид:

$$dS = \mu \left(S - \frac{\gamma}{g} v^2 \right) d\theta.$$

Здесь также переменные легко отделяются:

$$\frac{dS}{S - \frac{\gamma}{g} v^2} = \mu \, d\theta,$$

откуда, суммируя, сразу получаем:

$$\int_{S_0}^{S_1} \frac{dS}{S - \frac{\gamma}{g} v^2} = \mu\omega$$

или

$$\ln \frac{S_1 - \frac{\gamma}{g} v^2}{S_0 - \frac{\gamma}{g} v^2} = \mu\omega$$

и, наконец,

$$S_1 - \frac{\gamma}{g} v^2 = \left(S_0 - \frac{\gamma}{g} v^2 \right) \cdot e^{\mu\omega}.$$

Передаваемое усилие $R = S_1 - S_0$, вместо (15) или (16), теперь выразится так:

$$R = \left(S_0 - \frac{\gamma}{g} v^2 \right) (e^{\mu\omega} - 1) = \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} v^2 \right) (1 - e^{-\mu\omega}). \qquad (17)$$

Так как силу R можно считать приложенной на окружности шкива, то за 1 сек. точка приложения силы пройдет путь rv, так что выполняемая этой силой за 1 сек. работа, т. е. „передаваемая мощность", будет равна:

$$W = rv \left(S_1 - \frac{\gamma}{g} v^2 \right) (1 - e^{-\mu\omega}).$$

Если наибольшее натяжение S_1 установить по допустимому для каната (ремня) напряжению на разрыв, то можно поставить вопрос о наиболее выгодной скорости v. Предоставляем читателю убедиться обычными методами [79, 80, 83], что наибольшая мощность отвечает скорости

$$v = \sqrt{\frac{S_1 g}{3\gamma}}.$$

Из (17) ясно, что скорость v не может возрастать беспредельно: лишь только окажется, что

$$\frac{\gamma}{g} v^2 = S_0 = S_1,$$

то трение исчезнет и скользящий канат никакой мощности передавать не будет.

261. Задачи на составление дифференциальных уравнений. 1. *Формула Пуассона.* Предложим себе установить зависимость между объемом v и давлением p, скажем, единицы массы (1 кг) идеального газа при адиабатическом процессе (т. е. в случае полного отсутствия теплового обмена между газом и окружающей средой).

Удобно здесь воспользоваться выведенной в задаче 13, 247, формулой (17):

$$dU = \frac{c_p}{R} p \, dv + \frac{c_v}{R} v \, dp, *$$

* *Дифференциалы вместо приращений!* Да и помимо этого, при самом выводе упомянутой формулы (17) мы неоднократно пользовались упрощениями, оправдываемыми именно рассмотрением бесконечно малых элементов.

где dU есть элементарное количество тепла, сообщенное газу, c_p, c_v и R — известные постоянные. В случае адиабатического процесса $dU = 0$, так что искомое дифференциальное уравнение будет:

$$c_p p dv + c_v v\, dp = 0 \text{ или } \frac{dp}{p} + \frac{c_p}{c_v} \cdot \frac{dv}{v} = 0;$$

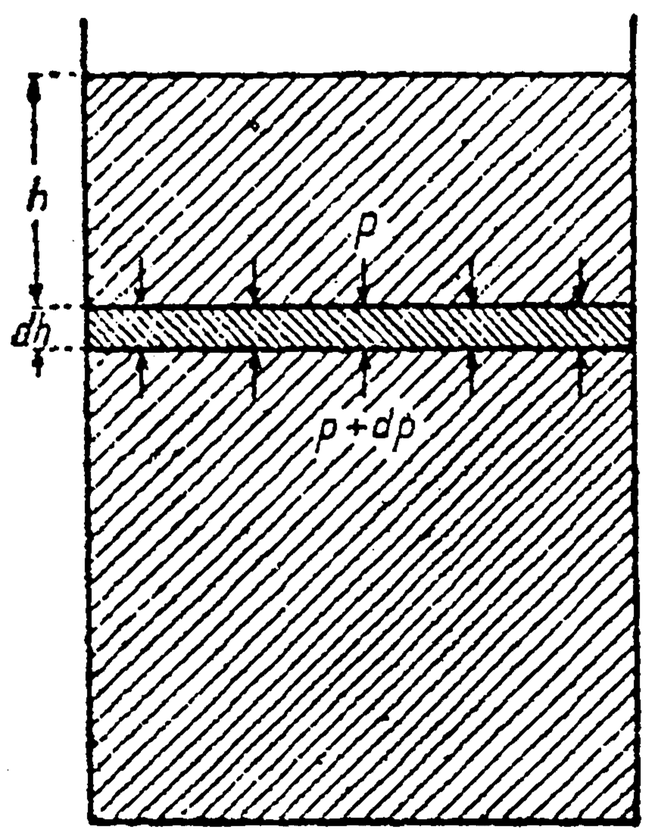
отсюда

$$pv^k = C, \tag{18}$$

где $k = \frac{c_p}{c_v}$.

Постоянная C может быть определена, если дана пара соответственных значений p и v.

Таким образом, наконец, установлена эта важная формула, о которой нам уже приходилось неоднократно упоминать. Она известна под именем формулы или уравнения Пуассона (Poisson). Характерная для каждого газа постоянная k, как видим, есть не что иное, как отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Для воздуха и двухатомных газов $k = 1{,}41$.



Черт. 493.

При помощи уравнения Клапейрона: $pv = RT$, отсюда могут быть получены зависимости, связывающие T с v или с p:

$$Tv^{k-1} = C_1, \qquad Tp^{-\frac{k-1}{k}} = C_2.$$

2. *Давление зерна на стенки силоса.* Это давление p_s предполагается пропорциональным давлению p зерна на горизонтальную площадку:

$$p_s = k \cdot p. \tag{19}$$

Требуется установить закон изменения p (и p_s) с возрастанием глубины h, учитывая и трение зерна о стенки силоса (коэффициент трения $= \mu$).

С этой целью возьмем бесконечно тонкий слой между двумя горизонтальными плоскостями, проведенными на глубине h и $h + dh$, и установим условие равновесия его (черт. 493). По первой плоскости будет действовать давление p вниз, а по второй — давление $p + dp$ * вверх. Если умножить это еще на площадь S поперечного сечения силоса, то в общем получится сила

$$S(p + dp) - Sp = S \cdot dp,$$

действующая вверх. Затем, на выделенный слой будет действовать его собственный вес; если через γ обозначить вес единицы объема, то вес всего слоя будет:

$$\gamma \cdot S \cdot dh.$$

Наконец, если открыть нижнее отверстие силоса, то при начале же движения, вследствие давления зерна на стенки, возникнет сопротивление ему в виде трения, направленного вверх. Определим его величину для нашего элементарного слоя. Обозначим через P — периметр сечения силоса; тогда поверхность части стенок, ограничивающей наш слой, будет $P \cdot dh$. *В виду бесконечной малости dh можно принять, что боковое давление (на единицу площади) в пределах этой части будет постоянным* и выразится формулой (19). Тогда полное боковое давление равно: $kPp \cdot dh$, а вызванное им трение будет:

$$\mu kPp \cdot dh.$$

Теперь уже не трудно установить условие равновесия всех указанных сил:

$$S \cdot dp + \mu kPp dh - \gamma S dh = 0$$

* *Дифференциал вместо приращения!*

или

$$dp + \left(\frac{\mu kP}{S} p - \gamma\right) dh = 0.$$

Полагая для простоты

$$\frac{\mu kP}{S} = \lambda,$$

перепишем полученное дифференциальное уравнение в виде:

$$\frac{dp}{\gamma - \lambda p} = dh$$

или — для удобства интегрирования —

$$\frac{-\lambda\, dp}{\gamma - \lambda p} = -\lambda\, dh.$$

Соображая, что при $h = 0$ должно быть и $p = 0$ (начальные условия!), суммируем слева от 0 до p, а справа от 0 до h:

$$\ln \frac{\gamma - \lambda p}{\gamma} = -\lambda h;$$

отсюда уже легко получить:

$$1 - \frac{\lambda}{\gamma} p = e^{-\lambda h},$$

$$p = \frac{\gamma}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda h}\right) = \frac{\gamma S}{\mu kP}\left(1 - e^{-\frac{\mu kP}{S} h}\right).$$

Наконец, в силу основного допущения (1):

$$p_s = \frac{\gamma S}{\mu P}\left(1 - e^{-\frac{\mu kP}{S} h}\right).$$

Из этих формул (принадлежащих Янсену) мы видим, что давления p и p_s возрастают не пропорционально глубине h. Очевидно, что какова бы ни была эта глубина, боковое давление p_s никогда не превзойдет постоянной границы:

$$p_s < \frac{\gamma S}{\mu P}.$$

Коэффициенты μ и k определяются из опыта; для пшеницы, например, они равны соответственно, 0,40 и 0,44.

3. *Основное уравнение вентиляции.* Рассмотрим вопрос о вентиляции рабочего помещения данного объема V (м³), в котором под влиянием технологических процессов развиваются вредные выделения (тепловые, газовые, пылевые и т. п.), в количестве Z единиц в час. Часовой обмен воздуха, организуемый для борьбы с этими выделениями, обозначим через M (м³/час); при этом приточный воздух также может содержать ту же вредность, скажем, в концентрации ζ (на 1 м³).

Нас интересует концентрация z (на 1 м³) рассматриваемой вредности в рабочем помещении через промежуток времени t (час) после начала работ; начальное значение z_0 этой концентрации при $t = 0$ (остаток от работы предыдущего дня) считаем данным. *

Установим приращение вредных выделений за бесконечно малый промежуток dt времени. Концентрация z увеличится на dz, ** общее же количество вредности — на $V \cdot dz$. Это приращение складывается следующим образом. Приточный воздух с собой принес $\zeta M \cdot dt$, технологические процессы создали $Z \cdot dt$ единиц вредности. Отсюда нужно отнять то количество вредных выделений, которое содержалось в извлеченном за промежуток dt из помещения воздухе; *пренебрегая изменением*

* Мы ограничимся предположением, что вредные выделения и обмениваемый воздух распределяются по помещению равномерно.

** *Дифференциал вместо приращения!*

Концентрации z за рассматриваемый бесконечно малый промежуток времени, можно положить это количество равным $zM \cdot dt$. Итак, окончательно:

$$V \cdot dz = M\zeta \cdot dt + Z \cdot dt - Mz \cdot dt;$$

это и есть основное дифференциальное уравнение вентиляции.

Отделяя переменные, можно представить его в виде

$$\frac{V \cdot dz}{M\zeta + Z - Mz} = dt$$

или

$$\frac{-M \cdot dz}{M\zeta + Z - Mz} = -\frac{M}{V}\,dt.$$

Суммируя слева от z_0 до z, а справа от 0 до t, получим

$$\ln \frac{M\zeta + Z - Mz}{M\zeta + Z - Mz_0} = -\frac{M}{V}\,t$$

или — потенцируя —

$$\frac{M\zeta + Z - Mz}{M\zeta + Z - Mz_0} = e^{-\frac{M}{V}t}.$$

Отсюда:

$$z = \left(\zeta + \frac{Z}{M}\right)\left(1 - e^{-\frac{M}{V}t}\right) + z_0 \cdot e^{-\frac{M}{V}t}.$$

4. *Экстратоки размыкания и замыкания.* Если в электрической цепи действует постоянное напряжение V, то обозначая через R сопротивление цепи и через J силу тока, по закону Ома будем иметь $V = RJ$, так что сила тока также будет постоянной. Когда же напряжение V меняется (а также в моменты размыкания или замыкания тока постоянного напряжения), во многих случаях имеет место явление „самоиндукции", которое состоит в обнаружении некоторой дополнительной электродвижущей силы, пропорциональной *скорости изменения силы тока* $\frac{dJ}{dt}$ и действующей в одном направлении с V, если сила тока убывает, т. е. $\frac{dJ}{dt} < 0$, или в противоположном направлении, если сила тока возрастает, т. е. $\frac{dJ}{dt} > 0$. Таким образом величину так называемой электродвижущей силы самоиндукции можно представить так:

$$-L \cdot \frac{dJ}{dt},$$

где L — множитель пропорциональности („коэффициент самоиндукции").

Если налицо самоиндукция, то при размыкании тока сила тока не сразу падает до нуля, а при замыкании — не сразу достигает своей нормальной величины. Постараемся охарактеризовать эти явления аналитически.

При наличии самоиндукции закон Ома принимает следующую форму:

$$V - L \cdot \frac{dJ}{dt} = RJ$$

или

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{R}{L}J = \frac{V}{L}. \tag{20}$$

[*Мы получили это дифференциальное уравнение, не рассматривая бесконечно малых элементов, потому что воспользовались, как готовым, понятием о скорости изменения силы тока!*]

a) Пусть постоянный ток силы J_0 размыкается в момент $t = 0$. Так как теперь $V = 0$, то уравнение (20) примет вид:

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{R}{L}J = 0.$$

Отделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{R}{L}\,dt, \quad \ln J = -\frac{R}{L}\,t + \ln C,^*$$

откуда

$$J = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Так как в момент $t = 0$ сила тока J еще была равна J_0 (начальные условия!), то $C = J_0$, и окончательное выражение для силы тока будет иметь вид:

$$J = J_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Этот ток, проходящий в цепи, когда в ней исчезло напряжение, под действием одной лишь электродвижущей силы самоиндукции, называется „экстратоком размыкания". С возрастанием t его сила очень быстро стремится к нулю, особенно при тех малых значениях L, которые встречаются обыкновенно. Если мы хотим установить, через сколько секунд сила тока упадет до 0,01 своей исходной величины, то нужно положить

$$e^{-\frac{R}{L}t} = 0{,}01,$$

откуда

$$\frac{R}{L}\,t = \ln 100 = \frac{2}{M} \quad \text{и} \quad t = \frac{2}{M} \cdot \frac{L}{R} = 4{,}6\,\frac{L}{R} \text{ сек.}$$

Постоянное отношение L к R называется „временной постоянной" тока. Напр., если $R = 0{,}36$ (ома), $L = 0{,}02$ (генри), то эта постоянная равна $\frac{1}{18}$ и $t = 0{,}26$ сек.!

b) Если цепь (в момент $t = 0$) замыкается и в ней начинает действовать постоянное напряжение V, то из уравнения (20), снова отделяя переменные, получаем:

$$\frac{-R\,dJ}{V - RJ} = -\frac{R}{L}\,dt, \qquad \ln(V - RJ) = -\frac{R}{L}\,t + \ln C,$$

$$V - RJ = C \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Постоянную C определяем из начальных условий: при $t = 0$ и $J = 0$; очевидно $C = V$, так что окончательно:

$$J = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Мы видим, что на ряду с током $\frac{V}{R}$ (отвечающим закону Ома) как бы одновременно протекает в обратном направлении ток

$$\frac{V}{R}\,e^{-\frac{R}{L}t},$$

называемый „экстратоком замыкания". Его сила также быстро убывает и практически скоро становится неощутимой. Пусть, напр., в цепь с постоянным напряжением 500 вольт включается электромотор (постоянного тока) с общим сопротивлением $R = 250$ ом и самоиндукцией $L = 640$ генри. Определим, через сколько времени после включения мотора ($t = 0$) ток достигнет 90% своей окончательной силы

$$\frac{V}{R} = \frac{500}{250} = 2 \text{ амп.}$$

Из уравнения $e^{-\frac{R}{L}t} = 0{,}1$, как и выше, найдем: $t = 2{,}3\,\frac{L}{R} = 5{,}9$ сек.

---

* Предвидя потенцирование, мы берем здесь постоянную интегрирования сразу в виде $\ln C$; очевидно, что $\ln C$ есть в такой же мере произвольная постоянная как и C. Это простое замечание следует иметь в виду и в последующем.

Рассмотренные вопросы приобретают важность в тех случаях, когда замыкание и размыкание быстро следует одно за другим (при телеграфировании).

Ниже (**265**) мы еще вернемся к уравнению (20) и исследуем случай переменного тока.

5. *Антифрикционная пята.* Последний пример мы поначалу сформулируем как чисто геометрическую задачу:

Найти кривую, для которой отрезок $t = MT$ касательной (черт. 494), от точки касания M до точки пересечения T с осью Oy был бы постоянным ($= a$).

Из $\triangle MPT$ ясно, что

$$t = \frac{x}{\cos\alpha}; \tag{21}$$

где α — угол касательной с осью Ox; поэтому требование задачи можно записать так:

$$\frac{x}{\cos\alpha} = a. \tag{22}$$

Пользуясь известным выражением для углового коэффициента касательной: $\operatorname{tg}\alpha = y'$, легко вычислить:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+y'^2}; \tag{23}$$

подставляя это в равенство (22), приведем его к виду дифференциального уравнения:

$$x\sqrt{1+y'^2} = a.$$

Это уравнение имеет ту особенность, что оно не разрешено относительно производной; если разрешить его, то получим:

$$y' = \mp\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}. \tag{24}$$

Остается взять квадратуру [воспользовавшись, напр., формулой 59, **168**]:

$$y + C = \pm\left[a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| - \sqrt{a^2-x^2}\right]. \tag{25}$$

Меняя произвольную постоянную C, мы получим бесчисленное множество кривых, удовлетворяющих задаче; этого и следовало ожидать, ибо передвигание кривой параллельно оси Oy не влияет на величину отрезка $t = MT$. При $C = 0$ получится кривая, изображенная на черт. 494; она состоит из двух ветвей, имеющих острия („точки возврата") на оси Ox и асимптотически приближающихся к оси Oy Эти особенности легко усмотреть и из уравнений (24) и (25). Если взять в (25) $C = 0$ то легко убедиться, что точки $(\pm a, 0)$ лежат на кривой, а из (24) видно, что касательной в них будет служить сама ось Ox. Наконец, при $x \to 0$ аргумент ln, а с ним и ордината y стремится к бесконечности.

Найденная выше кривая носит название *трактрисы.* *

Итак, поставленная геометрическая задача решена. Покажем, что ее можно рассматривать как имеющую и определенное техническое содержание. Вернемся к вопросу о трении в пятах, рассмотренному в n⁰ **189**, 1, но на этот раз займемся случаем не плоской пяты (черт. 495). Будем исходить из предположения, что производимое валом давление P равномерно распределяется на всю поверхность подпятника, так что на единицу площади его повсюду приходится одно и то же давление p, нормальное к его поверхности. ** *Если взять бесконечно малую площадку σ, окружающую точку M, то работа трения в ней (в 1 сек.) будет:*

$$dA = \omega x \cdot \mu p \sigma,$$

* Название это (происходящее от латинского глагола *trahere — влечь, тащить*) связано с следующим механическим фактом: если движущаяся по вертикали точка T при помощи нити TM *тащит* за собой точку M, то последняя будет описывать как раз трактрису.

** Естественнее было бы исходить из предположения, что давление P распределяется равномерно по кольцевой проекции поверхности подпятника; но это предположение равносильно сделанному в тексте.

где μ — коэффициент трения, а ω — угловая скорость вала, так что удельная работа трения (на единицу площади) равна $\mu\omega \cdot px$. Ей пропорционально нормальное (к поверхности) изнашивание подпятника

$$n = k\mu\omega p \cdot x; \qquad (k = \text{пост.})$$

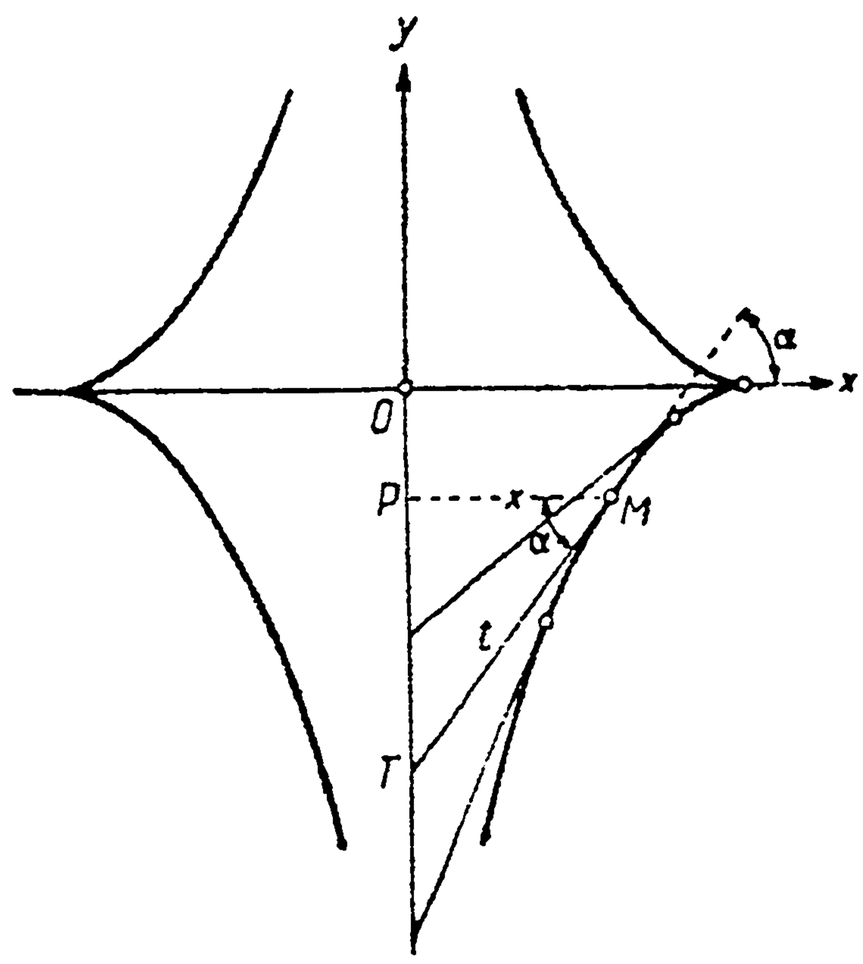
наконец, вертикальное изнашивание h, очевидно (см. чертеж), выражается так:

$$h = \frac{n}{\cos\alpha} = k\mu\omega p \cdot \frac{x}{\cos\alpha},$$

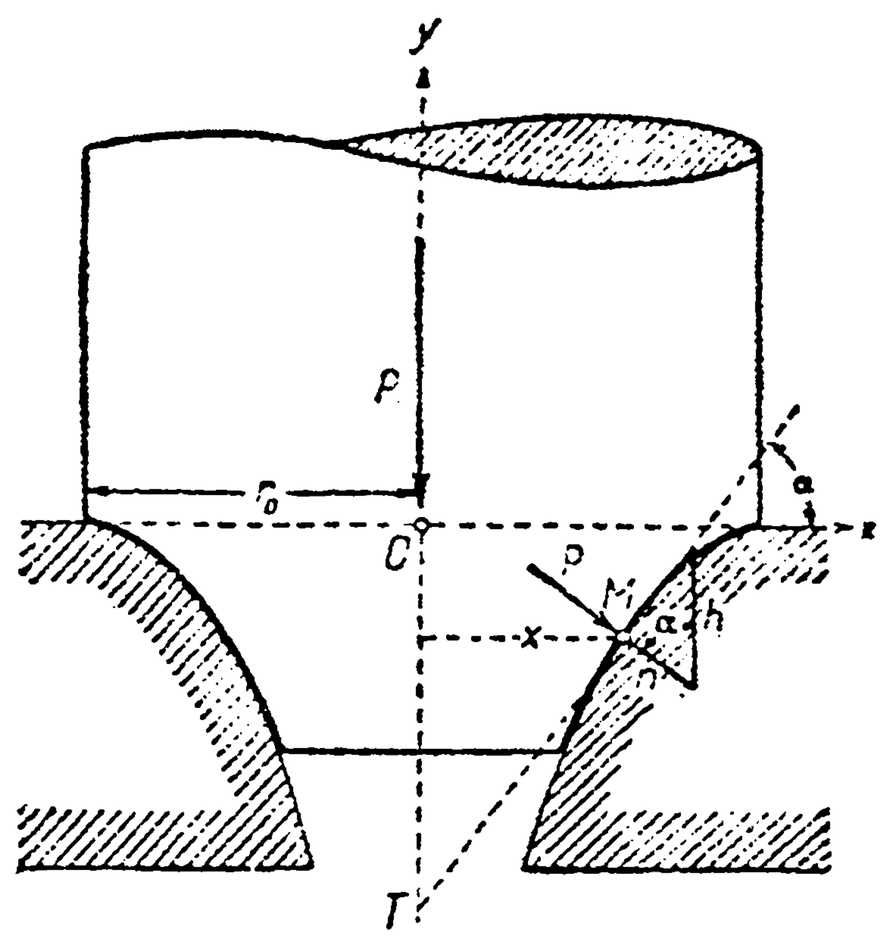
т. е., в виду (21), оказывается пропорциональным отрезку касательной $t = MT$:

$$h = K \cdot t. \qquad (K = k\mu\omega p = \text{пост.})$$

Естественно поставить задачу: разыскать такое меридиональное сечение пяты (и подпятника), чтобы это вертикальное изнашивание было везде одно и то же, ибо тогда поверхность подпятника, равномерно стираясь, не меняла бы своей формы. Мы видим теперь, что этот вопрос приводится к уже разобранному: пята



Черт. 494.



Черт. 495.

должна быть очерчена по трактрисе. Очевидно, надлежит взять ее нижнюю часть, подобрав в уравнении (25) C так, чтобы было: $y = 0$ при $x = r_0$.

Очерченная указанным образом пята была предложена Шиле и получила название „антифрикционной" пяты. Название это нельзя счесть удачным, ибо трение в ней не ослаблено, но лишь уничтожено влияние его на деформацию подпятника. Математически решение задачи безупречно; техническая же его ценность зависит от соответствия действительности основного допущения о равномерном распределении давления. Антифрикционная пята иногда применяется в станках для обработки металлов, именно — в карусельных токарных станках.

262. Диск равного сопротивления. Рассмотрим, в заключение, один более сложный пример. При проектировании паровых турбин приходится иметь дело с расчетом быстро вращающихся дисков, имеющих всегда форму тела вращения. Толщина их обыкновенно мала, сравнительно с диаметром. В этом случае можно предположить, что напряжения, создаваемые центробежной силой, по толщине диска не меняются и зависят лишь от расстояния r от оси диска. Будем обозначать через p и q соответственно напряжения (в кг/см²) в направлении радиуса и в перпендикулярном к нему направлении, а через y — толщину диска на расстоянии r от оси (черт. 496). Выделим из диска *бесконечно малый элемент abcd* двумя меридиональными плоскостями, проходящими через ось под углом $d\theta$ одна к другой, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусов r и $r + dr$. Рассмотрим, какие силы действуют на этот элемент, и установим условие их равновесия. На площадку *ad* действует напряжение p, которое надлежит умножить на величину $r\,d\theta \cdot y$ самой площадки (*считая ее приближенно плоской*), чтобы получить полное усилие

$$dR = pry \cdot d\theta;$$

это усилие направлено по радиусу к центру. Аналогично, на площадку bc в прямо противоположном направлении действует усилие

$$dR' = [pry + d(pry)]\, d\theta. \; *$$

Обратимся теперь к площадкам ab и $cд$, на которые нормально к ним действует напряжение q: *в виду бесконечной малости этих площадок можно пренебречь изменением q в их пределах! Принимаем эти площадки за прямоугольники с основанием dr и высотой y (на самом деле, это—криволинейные трапеции, но мы пренебрегаем бесконечно малыми высших порядков, которыми отличаются площадки названных бесконечно малых фигур!)* Тогда для величины „касательных" усилий, действующих перпендикулярно к радиусам Oa и $Oд$, получим:

$$dT = qy\, dr.$$

Складывая их по правилу параллелограмма (черт. 497), мы получим, очевидно, равнодействующую, направленную по радиусу eO к центру и имеющую величину

$$2\, dT \sin\frac{d\theta}{2},$$

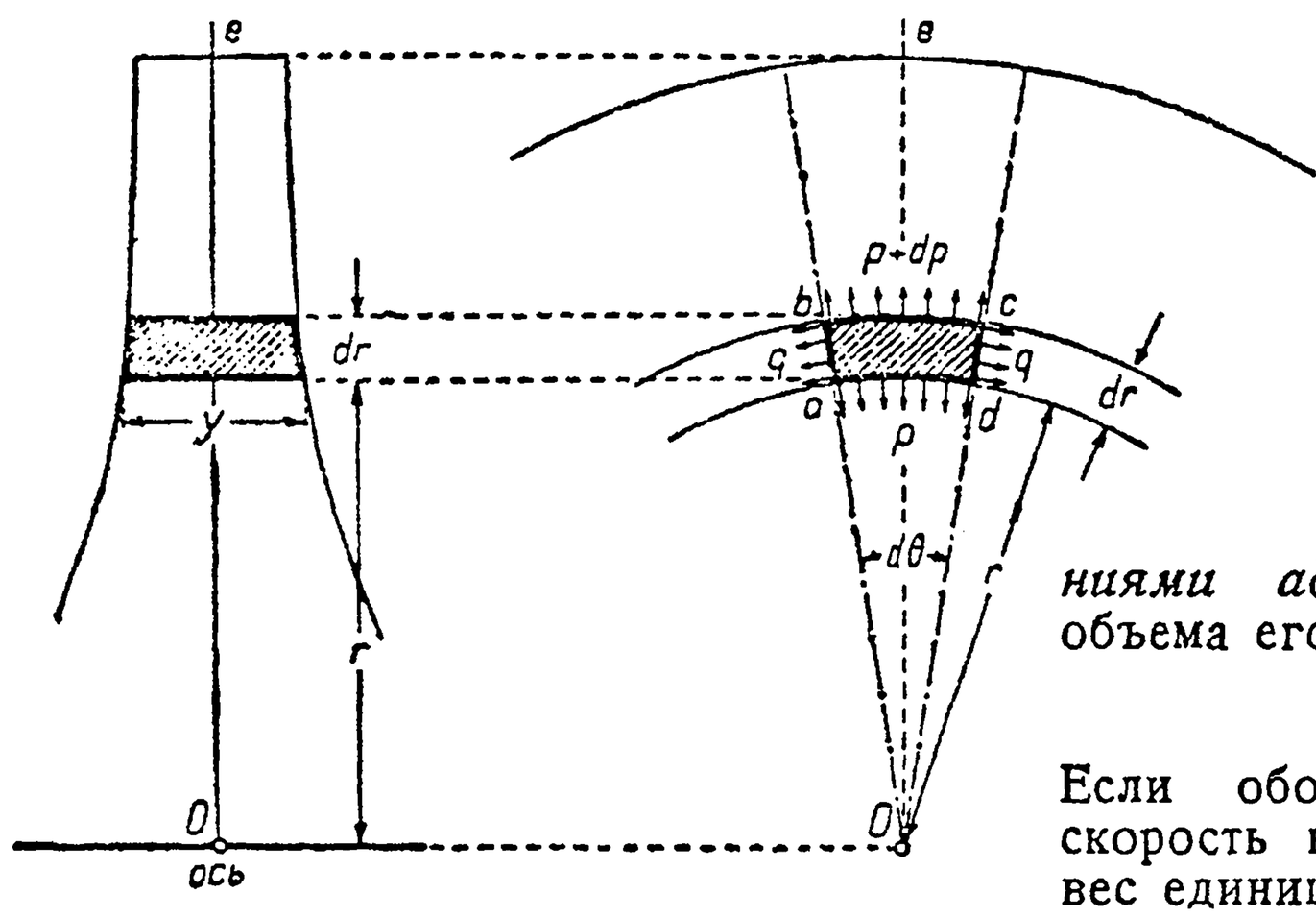
что *можно также написать в виде:*

$$dT \cdot d\theta = qy \cdot dr \cdot d\theta.$$

Остается еще вычислить центробежную силу dZ, действующую на выделенный элемент. *Принимая его за параллелепипед с измерениями* $aд = r\, d\theta$, $ab = dr$ и y, для объема его dV получим выражение

$$dV = ry \cdot dr \cdot d\theta.$$

Если обозначить через ω угловую скорость вращения диска, а через γ — вес единицы объема его, то центробежная сила, направленная по радиусу Oe от центра, выразится так:



Черт. 496.

$$dZ = dm \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{\gamma}{g} dV \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot r^2 y \cdot dr \cdot d\theta.$$

Здесь нам следовало взять расстояние от оси до центра тяжести рассматриваемого элемента (в котором можно считать приложенной центробежную силу), но *мы, пользуясь бесконечной малостью измерений элемента, заменили это расстояние просто через r.*

Условием равновесия всех перечисленных сил, очевидно, будет:

$$dR' - dR - dT \cdot d\theta + dZ = 0$$

или, подставляя полученные выше выражения и деля на $dr \cdot d\theta$:

$$\frac{d(pry)}{dr} - qy + \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2 y = 0. \qquad (26)$$

Впоследствии [288] мы займемся вопросом о распределении напряжений p и q для различных видов меридионального сечения диска. Сейчас же мы поставим себе другую задачу. Очевидно, что материал диска будет наилучше использован, если p и q везде будут достигать одной и той же величины наибольшего допускаемого напряжения σ. Какова при этом должна быть форма меридионального сечения диска, иными словами, какую функцию от радиуса r должна в этом случае представлять толщина диска y?

---

* *Дифференциал вместо приращения!*

При $p = q = \sigma$ из (26) легко получаем:

$$\frac{d(ry)}{dr} - y + \frac{\gamma\omega^2}{g\sigma} r^2 y = 0$$

или — после очевидных упрощений:

$$\frac{dy}{dr} + \frac{\gamma\omega^2}{g\sigma} ry = 0.$$

Это и есть дифференциальное уравнение, определяющее y в функции от r.

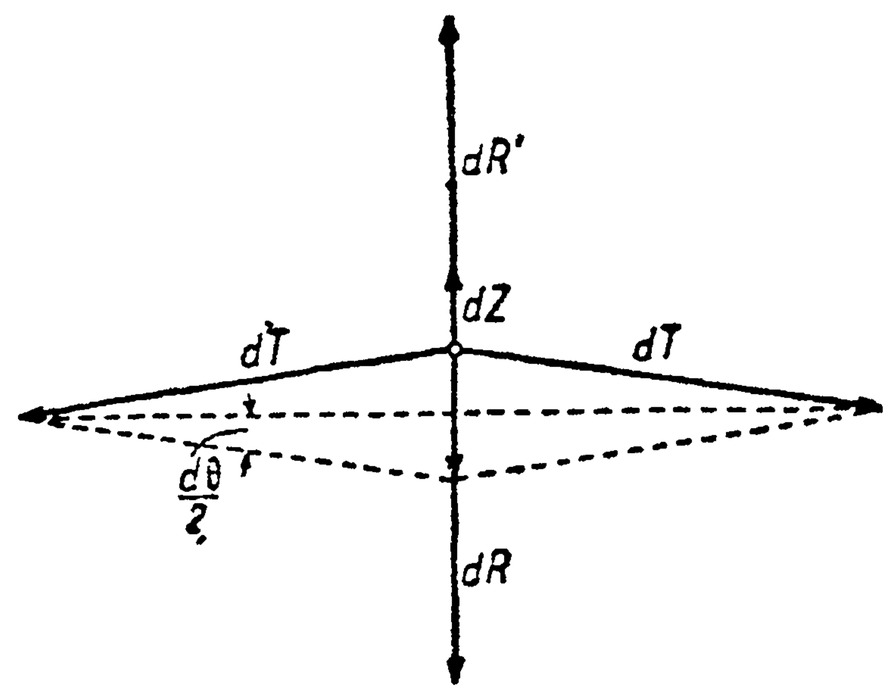
Отделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\gamma\omega^2}{g\sigma} r\,dr,$$

$$\ln y = -\frac{\gamma\omega^2}{2g\sigma} r^2 + \ln C, \ *$$

наконец,

$$y = Ce^{-\frac{\gamma\omega^2}{2g\sigma} r^2}. \qquad (27)$$



Черт. 497.

В такой форме часто и выполняют „диск равного сопротивления", на практике лишь приходится окружать его более широким ободом (черт. 498), к которому прикрепляют лопатки турбины.

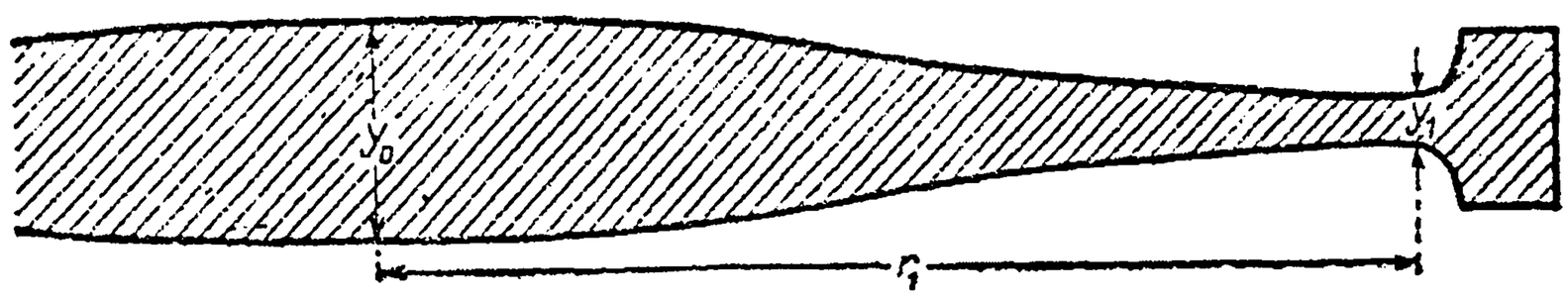
Так как при $r = 0$ из (27) получим $y = C$, то ясно, что C есть не что иное, как толщина y_0 диска по оси вращения. Но обыкновенно из конструктивных соображений задаются наперед толщиной диска y_1 в наиболее тонкой его части, у обода; тогда, полагая в (27) $r = r_1$, получим:

$$y_0 = C = y_1 \cdot e^{\frac{\gamma\omega^2}{2g\sigma} r_1^2}.$$

Пусть, напр., нужно рассчитать диск турбины Лаваля в форме равного сопротивления, причем

$$\gamma = 0{,}008\,\frac{\text{кг}}{\text{см}^3}, \quad n = 10\,000\,\frac{\text{обор.}}{\text{мин.}}, \quad g = 981\,\frac{\text{см}}{\text{сек}^2}$$

$$\sigma = 1800\,\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad r_1 = 35 \text{ см}, \quad y_1 = 0{,}42 \text{ см}.$$



Черт. 498.

Тогда

$$\omega = \frac{10\,000 \cdot \pi}{30} = 1047,$$

$$\frac{\gamma\omega^2}{2g\sigma} = 0{,}002484, \qquad y_0 = 0{,}42 \cdot e^{3{,}0431} = 8{,}81 \text{ (см)}$$

и окончательный закон изменения толщины диска будет таков:

$$y = 8{,}81 \cdot e^{-0{,}002484 r^2}.$$

* См. выноску на стр. 89.

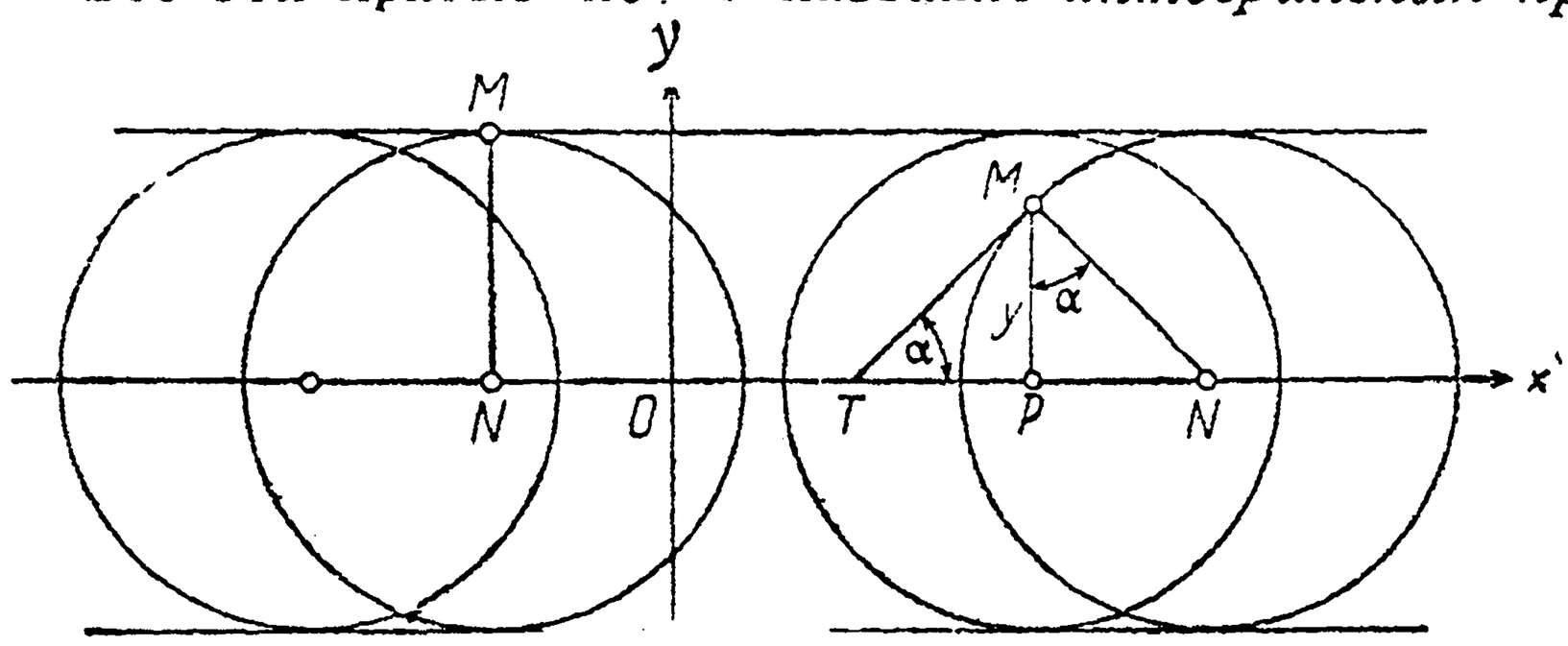
263. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка. Пусть имеем дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{28}$$

и его общий интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{29}$$

Станем рассматривать x, y как прямоугольные координаты точки на плоскости. Тогда какое бы частное значение ни придать постоянной C, уравнение (29) выразит некоторую кривую, являющуюся как бы графиком интересующей нас зависимости между x и y. Изменяя значение C, мы будем получать различные кривые, составляющие в совокупности *семейство кривых, зависящее от одного параметра.** Все эти кривые носят название *интегральных кривых*



Черт. 499.

уравнения (28); про них говорят также, что они *удовлетворяют* дифференциальному уравнению.

В последней задаче n⁰ 261 мы уже имели дело с семейством трактрис с общей асимптотой, которые служили интегральными кривыми для уравнения: $x\sqrt{1+y'^2} = a$, причем сама задача и состояла в нахождении этих кривых. Но даже в том случае, если уравнение не связывалось с геометрическим вопросом, его общий интеграл можно истолковать геометрически. Так, напр., решая в n⁰ 258 уравнение $y^2(1+y'^2) = a^2$, мы получили [см. (10)] общий интеграл

$$(x+C)^2 + y^2 = a^2,$$

который очевидно выражает семейство окружностей постоянного радиуса a, с центрами на оси Ox (черт. 499). ** Формула Пуассона (18), характеризующая адиабатический процесс, также может

* Читателю уже не раз приходилось сталкиваться с „семействами" кривых, зависящих от одного или нескольких „параметров"; вспомним, напр., семейство прямых $y = ax + b$ (два параметра, a и b), семейство парабол $y = ax^2$ (параметр a, черт. 40), $y = x^2 + c$ (параметр c; черт. 47) или $y = x^2 + bx + 1$ (параметр b; черт. 48) и другие семейства, изображенные на черт. 42, 50—52, 54, 55, 57, 60, 63 и 64. Пусть читатель даст себе отчет в том, какие переменные служат для них „параметрами"!

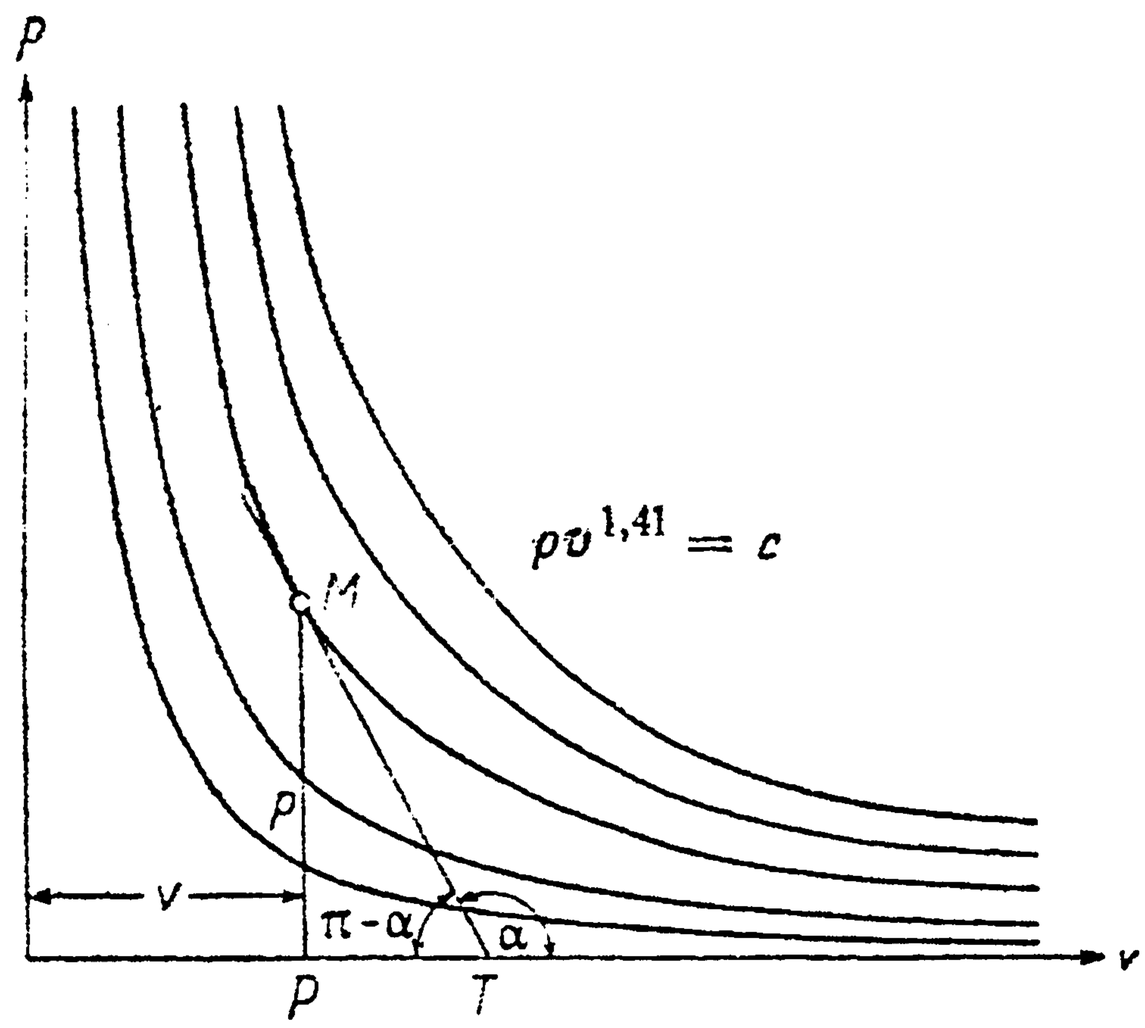
** Заметим, что особенные решения этого уравнения: $y = \pm a$ геометрически представляются двумя прямыми, параллельными оси Ox и касательными ко всем окружностям.

быть истолкована геометрически; если принять, скажем, v за абсциссу, а p за ординату точки, то уравнение (18) выразит семейство кривых гиперболического типа, изображенное на черт. 500. В других случаях, разумеется, могут получиться семейства кривых и более сложной природы.

Какую же роль играет само дифференциальное уравнение (28) по отношению к этим интегральным кривым? В геометрической задаче [261, 5], о которой мы только что упоминали, уравнение

$$x\sqrt{1+y'^2}=a$$

как раз и выражало то геометрическое свойство, которым должны были обладать во всех точках искомые кривые (постоянство отрезка касательной). Но и в других случаях, поскольку x и y рассматриваются как координаты произвольной точки интегральной кривой, производная $y'=\frac{dy}{dx}$ выразит уклон этой кривой, т. е. угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha$, и можно попытаться уравнение (28) истолковать геометрически.



Черт. 500.

Например, уравнение: $y^2(1+y'^2)=a^2$ или $y\sqrt{1+y'^2}=a$, пользуясь формулой (23), можно переписать в виде:

$$\frac{y}{\cos\alpha}=a.$$

Из $\triangle MPN$ (черт. 499) ясно, что выражение слева есть не что иное, как отрезок нормали MN от точки касания M до оси Ox. Итак, оказывается, что наше уравнение выражает требование, чтобы этот отрезок нормали для всех точек кривой сохранял постоянную величину a. Этому требованию и удовлетворяют все интегральные кривые во всех своих точках. *

Чтобы взять еще один пример, вернемся к дифференциальному уравнению

$$\frac{dp}{p}+k\frac{dv}{v}=0,$$

которое привело нас к формуле Пуассона (18); его можно переписать в виде:

$$p\frac{dv}{dp}=-\frac{v}{k}.$$

* Это справедливо и для особенных интегральных кривых.

Очевидно (черт. 500), что $\frac{dv}{dp}$ есть $\operatorname{ctg}\alpha$ и $p\frac{dv}{dp}$ выражает подкасательную TP, в данном случае отрицательную. Таким образом, на этот раз дифференциальное уравнение можно истолковать как налагаемое на интегральные кривые условие, чтобы подкасательная всегда была равна k-ой части абсциссы, но имела противоположное ей направление.

Подобно этому и в общем случае можно сказать, что *дифференциальное уравнение первого порядка* (28) *выражает некоторое „геометрическое свойство“ кривой, определенным образом связывающее положение любой ее точки* (x, y) *с уклоном* y' *кривой в этой точке.* Но, разумеется, нельзя лишь претендовать на то, чтобы это свойство всегда выражалось столь же просто и в геометрических терминах, как в приведенных примерах.

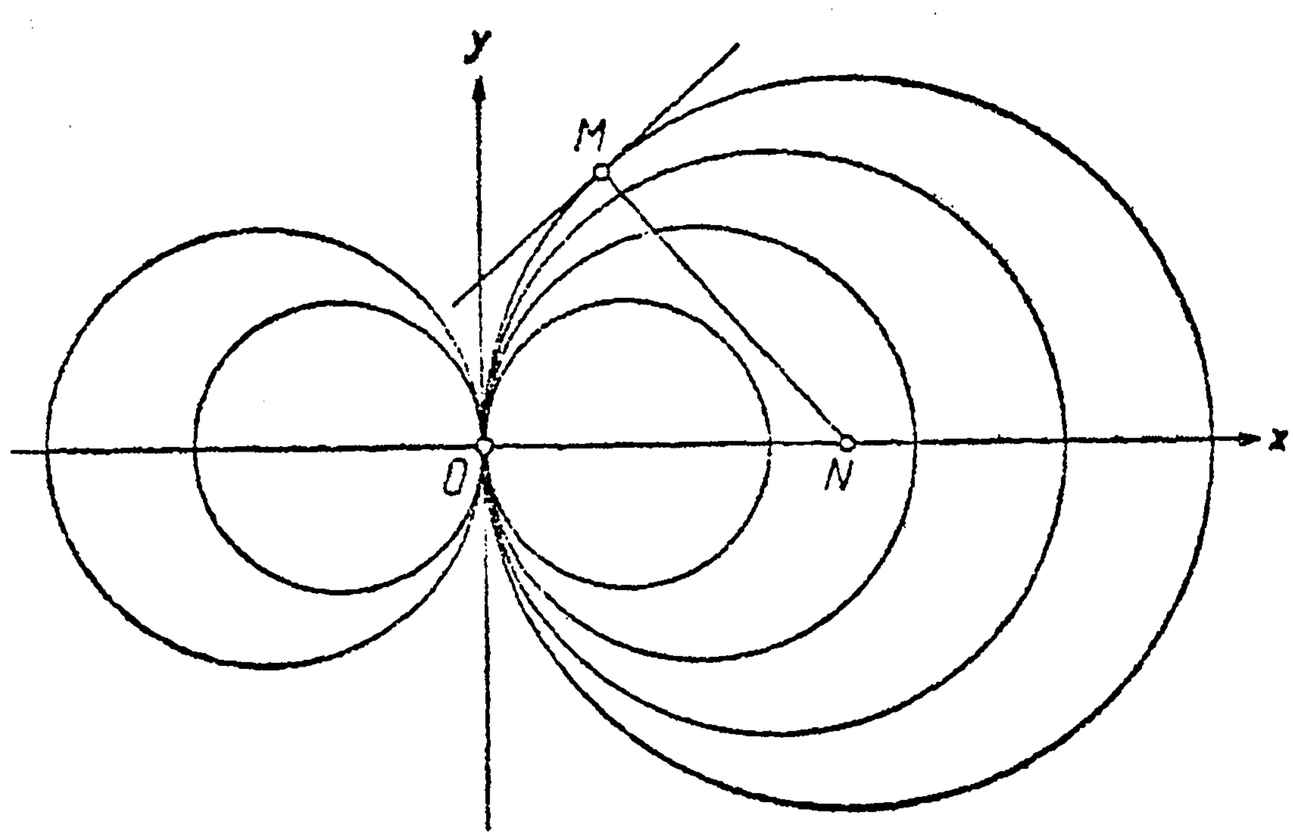
Теперь ясно, что решение дифференциального уравнения геометрически сводится к нахождению всех таких кривых, которые во всех своих точках обладают упомянутым свойством.

Можно поставить и обратную задачу: *дано некоторое семейство кривых, зависящее от одного параметра:*

$$\Phi(x, y, C) = 0;$$

требуется найти дифференциальное уравнение, выражающее свойство, присущее всем этим кривым во всех точках.

Само уравнение семейства не может быть рассматриваемо как выражающее такое свойство, потому что содержит параметр C, который правда имеет постоянное значение для каждой отдельной кривой, но меняется при переходе от одной кривой к другой. Наша задача как раз и состоит в исключении этого параметра C!



Черт. 501.

Начнем с примеров; пусть дано семейство окружностей:

$$(x + C)^2 + y^2 = a^2.$$

Придав C любое значение, будем под y разуметь ту именно функцию от x, которая этим уравнением определяется; в этом предположении наше уравнение обратится в тождество, которое мы продифференцируем по x [ср. **122** и **227**]:

$$2(x + C) + 2y \cdot y' = 0,$$

откуда

$$x + C = -y \cdot y'.$$

Подставляя это выражение вместо $x + C$ в исходное уравнение, получим:

$$y^2(1 + y'^2) = a^2.$$

Мы вернулись к уже знакомому нам уравнению!

Рассмотрим еще семейство окружностей:

$$x^2 + y^2 = 2Cx,$$

имеющих центры на оси Ox и проходящих через начало (это семейство изображено на черт. 501). Поступая, как и только-что, получим после дифференцирования:

$$x + yy' = C;$$

подставляя это в данное уравнение, придем к результату

$$x^2+y^2=2x(x+yy') \quad \text{или} \quad 2xyy'=y^2-x^2. \; *$$

Аналогично и в общем случае продифференцируем по x данное уравнение (29), разумея под y неявную функцию от x [см. 227]. Мы получим:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot y'=0.$$

Исключая C из этого и из данного уравнений (напр., найдя C из одного и подставив его выражение в другое), мы придем к результату вида (28):

$$F(x, y, y')=0,$$

уже не содержащему C. Таким образом дифференциальное уравнение и его общий интеграл могут быть взаимно получены одно из другого, и оба одинаково полно характеризуют отвечающее им семейство кривых.

Теперь посмотрим, какое наглядное истолкование получает определение частного решения по *начальным условиям*. Если мы требуем, чтобы значению $x=x_0$ независимой переменной отвечало значение $y=y_0$ функции и, подставляя эти значения в уравнение (29), определяем постоянную C из условия:

$$\Phi(x_0, y_0, C)=0,$$

то, очевидно, тем самым мы определяем ту интегральную кривую, которая проходит через точку (x_0, y_0). Итак, *начальные условия геометрически сводятся к указанию определенной точки, через которую должна пройти интегральная кривая*. Этим указанием из всего множества интегральных кривых, заполняющих сплошь всю плоскость или известную ее часть, выделяется одна или, в крайнем случае, несколько таких кривых. Обычно, если уравнение дано в разрешенном относительно y' виде, через каждую точку рассматриваемой области проходит только одна интегральная кривая, так что заданием точки кривая определяется вполне.

Можно придать геометрическому истолкованию дифференциального уравнения иную форму, которая во многих случаях представляется более удобной. Предположим для простоты, что уравнение дано в разрешенном относительно y' виде:

$$y'=f(x, y).$$

Если y' рассматривать как уклон некоторого направления, исходящего из точки (x, y), так что каждой точке плоскости (или ее части) отвечает свой уклон, то можно сказать, что дифференциальным уравнением устанавливается некоторое *поле направлений* (черт. 502). Интегральная кривая тогда определяется, как такая кривая, которая в каждой своей точке имеет уклон, совпадающий с соответствующим уклоном поля.

---

* Если последовательно преобразовать это уравнение так:

$$x^2+2xyy'+(yy')^2=y^2+(yy')^2, \qquad (x+yy')^2=y^2(1+y'^2)$$

и наконец:

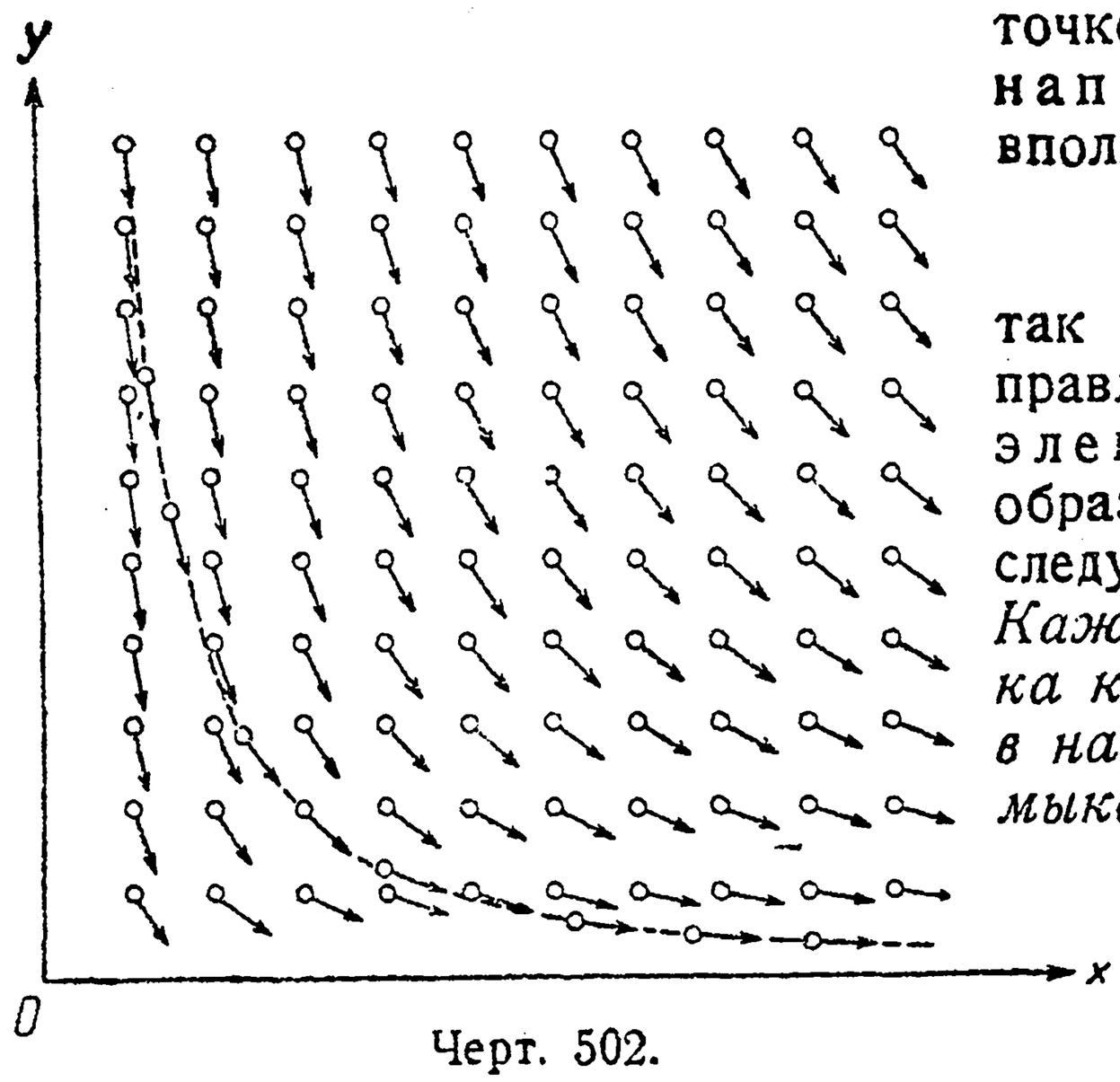
$$x+yy'=y\sqrt{1+y'^2},$$

то можно усмотреть, что оно выражает следующее свойство: отрезок нормали равен абсциссе точки пересечения нормали с осью Ox.

Теперь легко уяснить себе, почему наше дифференциальное уравнение определяет не одну функцию y от x или не одну кривую, а бесчисленное множество их, в то время как по начальным условиям из этого множества выделяется уже одна вполне определенная функция или кривая. Дело в том, что уравнение связывает между собой три величины: x, y и y'; если задать значение одной из них, $x=x_0$, то уравнение еще не может определить соответствующих значений и y, и y', так что значение одной из них, скажем, y также можно взять произвольно: $y=y_0$. Но лишь только это сделано, т. е. точка (x_0, y_0) взята, всякий произвол исчезает. Действительно, этой точке в рассматриваемом поле направлений отвечает уже вполне определенный уклон

$$y_0'=f(x_0, y_0),$$

так что мы знаем, в каком направлении вести начальный элемент кривой. Подобным же образом определяется положение следующего элемента, и т. д. *Каждая уже достигнутая точка кривой позволяет установить в нашем поле направлений примыкающий к ней элемент.* Так, по элементам, восстанавливается и вся кривая!



Черт. 502.

Эти беглые соображения ниже [297] будут развиты подробнее и лягут в основу фактического (приближенного) нахождения интегральных кривых.

264. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Перейдем теперь к рассмотрению дальнейших типов дифференциальных уравнений первого порядка, которые могут быть проинтегрированы *с помощью квадратур*. Среди них важнейшими являются *линейные уравнения:* так называются уравнения, содержащие и неизвестную функцию y, и ее производную y' лишь в первой степени („линейно"). Общий вид линейного уравнения таков:

$$L(x)y'+M(x)y+N(x)=0,$$

где L, M, N суть некоторые функции одной только переменной x. Разделив это уравнение на $L(x)$ и обозначив частные $\frac{M(x)}{L(x)}$ и $\frac{N(x)}{L(x)}$ через $P(x)$ и $-Q(x)$, приведем его к виду:

$$y'+P(x)y=Q(x). \tag{30}$$

В этом уравнении переменные, вообще говоря, не отделяются. * Как следует поступать в подобном случае, мы выясним сначала на примере.

* Исключение представляется лишь в том частном случае, когда $Q(x)$ отличается от $P(x)$ только постоянным множителем.

Пусть же будет дано уравнение:

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Заменим в нем y произведением двух, покуда неизвестных функций u и v от x, которые затем последовательно и определим. Итак, полагаем:

$$y = uv, \; y' = u'v + uv'; \tag{31}$$

подставляя эти выражения вместо y и y' в наше уравнение, получим:

$$u'v + uv' + 2xuv = xe^{-x^2} \text{ или } u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}.$$

Очевидно, выгодно, чтобы выражение в скобках обратилось в нуль, ибо тогда все уравнение значительно упростилось бы. Поэтому мы подбираем одну из введенных нами функций v (которая одна только и входит в упомянутое выражение) так, чтобы $v' + 2xv$ была нулем; иными словами, в качестве v мы берем какое-нибудь частное решение дифференциального уравнения:

$$v' + 2xv = 0 \text{ или } \frac{dv}{dx} + 2xv = 0.$$

Здесь, как видим, переменные отделяются:

$$\frac{dv}{v} = -2x\,dx, \ln v = -x^2, \; v = e^{-x^2}.$$

Произвольной постоянной мы не вводим, так как нам нужно одно частное решение этого вспомогательного уравнения. Итак, пусть $v = e^{-x^2}$; при таком выборе функции v наше уравнение приведется к простому виду: $u'v = xe^{-x^2}$ или — если подставить вместо v найденное выражение: $u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$. Сокращая обе части на e^{-x^2}, окончательно приведем уравнение к виду: $u' = x$. Отсюда

$$u = \frac{x^2}{2} + C.$$

Итак, выбрав вспомогательную функцию v, исходя (в целях упрощения из уравнения $v' + 2xv = 0$, мы затем нашли u с полной общностью из (упрощенного выбором v) нашего дифференциального уравнения. Так как мы положили $y = uv$, то общий интеграл исходного уравнения получаем в виде:

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Повторим те же рассуждения в общем виде для уравнения (30). Пользуясь подстановкой (31), преобразуем уравнение:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \text{ или } u'v + u\,[v' + P(x)v] = Q(x).$$

Вспомогательную функцию v определяем из уравнения:

$$v' + P(x)v = 0 \text{ или } \frac{dv}{dx} + P(x)v = 0.$$

Отделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx, \quad \ln v = -\int P(x)\,dx, \quad v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Если мы именно так выберем функцию v, то выражение, служащее множителем при u, обратится в нуль, и преобразованное уравнение примет вид:

$$u'v = Q(x) \text{ или } u' \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

откуда

$$u' = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}.$$

Интегрируя, находим:

$$u = \int \left[Q(x) e^{\int P(x)dx} \right] dx + C$$

и, наконец,

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left\{ C + \int \left[Q(x) e^{\int P(x)dx} \right] dx \right\}. \tag{32}$$

Таков общий интеграл линейного дифференциального уравнения первого порядка (30). При интегрировании какого-либо частного уравнения этого типа можно либо прибегнуть к той же подстановке (31), либо непосредственно воспользоваться выведенной общей формулой (32), подставив туда лишь, вместо $P(x)$ и $Q(x)$, соответствующие выражения. Читателю рекомендуется поупражняться как в одном, так и в другом приеме.

В некоторых случаях дифференциальное уравнение не-линейное простой подстановкой может быть приведено к линейному виду, после чего интегрируется в квадратурах, как показано.

Пусть, напр., дано уравнение:

$$xy' + y + 2x^3y^2 = 0.$$

Оно, конечно, не линейное, ибо содержит y^2. Разделим его на y^2:

$$x \cdot \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} + 2x^3 = 0.$$

Попробуем принять за новую неизвестную функцию:

$$z = \frac{1}{y}. \tag{33}$$

Дифференцируя ее как сложную функцию, получим:

$$z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' = -\frac{y'}{y^2}.$$

Подставляем теперь в преобразованное уравнение новую функцию z и ее производную:

$$-xz' + z + 2x^3 = 0 \text{ или } z' - \frac{1}{x} z = 2x^2.$$

Для определения z мы получили уже линейное уравнение!

Решим его по формуле (32), полагая $P(x) = -\frac{1}{x}$ и $Q(x) = 2x^2$. Имеем:

$$\int P(x)dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x, \quad e^{-\int P(x)dx} = e^{\ln x} = x, \quad e^{\int P(x)dx} = \frac{1}{x}$$

$$z = x\left\{C + \int 2x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right\} = x(C + x^2).$$

Наконец, возвращаясь к функции y, по формуле (33), найдем:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^3 + Cx}.$$

Легко показать, что подобным приемом приводятся к линейному виду уравнения такого типа:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m,$$

где m — любое число (отличное, конечно, от 0 и 1). Такие уравнения носят название *уравнений Як. Бернулли* (J. Bernoulli). Действительно, разделим уравнение почленно на y^m:

$$y^{-m}y' + P(x) \cdot y^{-(m-1)} = Q(x),$$

и примем за новую неизвестную функцию

$$z = y^{-(m-1)} = \frac{1}{y^{m-1}}.$$

Тогда

$$z' = -(m-1)y^{-m} \cdot y',$$

так что

$$y^{-m}y' = -\frac{1}{m-1}z'.$$

Выполнив подстановку, для определения z получим уже линейное уравнение:

$$-\frac{1}{m-1}z' + P(x)z = Q(x).$$

Найдя отсюда z, вернемся к y по формуле:

$$y = z^{-\frac{1}{m-1}} = z^{\frac{1}{1-m}}.$$

Примеры и задачи. 1. $y' - \frac{n}{x+1}y = e^x(1+x)^n$.

Решение.

$$P(x) = -\frac{n}{x+1}, \quad \int P(x)dx = -n\ln(x+1) = \ln\frac{1}{(1+x)^n},$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln\frac{1}{(1+x)^n}} = \frac{1}{(1+x)^n}, \quad e^{-\int P(x)dx} = (1+x)^n,$$

$$Q(x) = e^x(1+x)^n, \quad \int\left[Q(x)e^{\int P(x)dx}\right]dx = \int e^x\,dx = e^x.$$

Отв. $y = (x+1)^n(C + e^x)$.

2. $y' + y\cos x = \cos x$.

Решение. Пользуясь подстановкой (31), имеем: $u'v + u(v' + v\cos x) = \cos x$

$v' + v\cos x = 0$, $\frac{dv}{v} = -\cos x\,dx$, $\ln v = -\sin x$, $v = e^{-\sin x}$; $u' = e^{\sin x}\cos x$

$$u = \int e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx = e^{\sin x} + C.$$

Отв. $y = 1 + Ce^{-\sin x}$.

3. $y' + ay = e^{mx}$.

Отв. $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{a+m}$.

4. $\sin\theta\cdot\frac{dr}{d\theta} + r = \frac{2\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

Решение. Помимо того, что здесь роль x играет θ, а роль y — r, следует помнить, что формула (32) применима лишь к уравнению, у которого коэффициентом при производной является единица. Итак, делим уравнение почленно на $\sin\theta$, чтобы привести к этому виду:

$$\frac{dr}{d\theta} + \frac{1}{\sin\theta}r = \frac{2}{1+\cos\theta},$$

теперь, по формуле (32):

$$r = e^{-\int\frac{d\theta}{\sin\theta}}\left\{C + \int\left[\frac{2}{1+\cos\theta}\cdot e^{\int\frac{d\theta}{\sin\theta}}\right]d\theta\right\} =$$

$$= e^{-\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\left\{C + \int\frac{2}{1+\cos\theta}e^{\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}\cdot d\theta\right\} = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\left(C + \int\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\cos\theta}d\theta\right)$$

Заметив, что

$$\frac{d\theta}{1+\cos\theta} = \frac{d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = d\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

окончательно получим:

$$r = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot\left(C + \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + C\cdot\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$$

5. $2y' - xy + xy^3 = 0$.

Указание. Уравнение Бернулли; разделить на y^3; подстановка: $z = \frac{1}{y^2}$

Отв. $z = x - 1 + Ce^{-x}$, $y = \frac{1}{\sqrt{x - 1 + Ce^{-x}}}$.

6. $y' - 2y\cos x + 2y^{\frac{3}{2}}\cos x = 0$.

Решение. Это — также уравнение Бернулли. Делим на $y^{\frac{3}{2}}$:

$$y^{-\frac{3}{2}}y' - 2y^{-\frac{1}{2}}\cos x + 2\cos x = 0;$$

подстановка: $z = y^{-\frac{1}{2}}$, $z' = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}y'$, так что $y^{-\frac{3}{2}}y' = -2z'$; результат

$z' + z\cos x = \cos x$. Мы уже знаем (см. зад. 2), что тогда $z = 1 + Ce^{-\sin x}$; теперь легко уже найти

$$y = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(1 + Ce^{-\sin x})^2}.$$

265. Переменный синусоидальный ток. Рассмотрим снова электрическую цепь с сопротивлением R и самоиндукцией L. В n⁰ 261, задача 4, было выведено основное уравнение для силы тока J [см. (20)]:

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{R}{L} J = \frac{V}{L}.$$

Там мы ограничились рассмотрением случая постоянного напряжения V, в котором переменные легко отделяются. Теперь же мы предположим, что в цепь включен источник периодического переменного тока, напр., вращающаяся динамомашина. Принимая, что напряжение V изменяется по синусоидальному закону, выберем за начальный такой момент, когда V обращается в 0; тогда можно положить $V = V_0 \sin \omega t$, где ω — частота [ср. 46]. Уравнение (20) принимает вид:

$$\frac{dJ}{dt} + \frac{R}{L} J = \frac{V_0}{L} \sin \omega t.$$

Это — линейное уравнение (переменные уже не отделяются!).

Решаем его по общей формуле (32):

$$J = e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left\{ C + \int \frac{V_0}{L} \sin \omega t \cdot e^{\int \frac{R}{L} dt} dt \right\} =$$

$$= e^{-\frac{R}{L} t} \left\{ C + \frac{V_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t \, dt \right\}.$$

Воспользовавшись формулой 112, 168, при $a = \frac{R}{L}$, $b = \omega$, перепишем выражение для J следующим образом:

$$J = e^{-\frac{R}{L}} \left\{ C + \frac{V_0}{L} \cdot \frac{\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \cdot e^{\frac{R}{L} t} \right\}$$

$$= C \cdot e^{-\frac{R}{L} t} + V_0 \cdot \frac{R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Постоянную C можно определить, как и в задаче 4, 261, если дано, напр., значение J при $t = 0$; но здесь мы не будем на этом останавливаться. Первый член, как и в случае экстра-тока замыкания, очень быстро делается неощутительным, так что при установившемся режиме сила тока определится формулой:

$$J = V_0 \frac{R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Переписав ее в виде

$$J = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \frac{R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

мы можем, очевидно, принять величины

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \text{ и } \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

сумма квадратов которых равна единице, соответственно, за косинус и синус некоторого угла φ:

$$\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=\cos\varphi, \qquad \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=\sin\varphi.$$

Этот положительный и острый угол φ определяется также равенством:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L}{R}; \tag{34}$$

Теперь выражение для J перепишется так:

$$J=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}(\sin\omega t\cos\varphi-\cos\omega t\sin\varphi)=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t-\varphi). \tag{35}$$

Таким образом, и сила тока также подчиняется синусоидальному закону и имеет тот же период, что и напряжение $V=V_0\sin\omega t$, *но отстает в фазе от напряжения на угол* φ. Максимальное значение J_0 (амплитуда) синусоидальной величины J определится формулой:

$$J_0=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}.$$

Умножая обе части ее на $\frac{1}{\sqrt{2}}$, перейдем к так называемым *действующим* напряжению и силе тока [см. **176**, 8]:

$$J_e=\frac{V_e}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}.$$

Эти формулы напоминают закон Ома; роль сопротивления здесь играет величина $\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$, которая и называется *полным* (или *кажущимся*) сопротивлением; величина $L\omega$ носит название *индуктивного* сопротивления, в отличие от обыкновенного или истинного сопротивления R. При большой частоте слагаемое $(L\omega)^2$ под знаком корня может оказаться значительным, и тогда сила тока J будет на много меньше той силы тока, которая имела бы место при отсутствии самоиндукции.

Пусть, например, для первичной обмотки некоторой индукционной спирали $R=0{,}36$ ома, $L=0{,}02$ генри; если период $T=0{,}02$ сек., т. е. $\omega=\frac{2\pi}{0{,}02}=314$, то кажущееся сопротивление

$$\sqrt{R^2+(\omega L)^2}=\sqrt{0{,}36^2+6{,}28^2}=6{,}3$$

более чем в 17 раз превосходит истинное сопротивление $R=0{,}36$. На этом же примере видим, что угол φ при большой частоте может оказаться близким к прямому. В нашем случае [см. (34)] $\operatorname{tg}\varphi=\frac{6{,}28}{0{,}36}=17{,}4$, так что угол φ в градусной мере выражается числом 86°43′. Как мы видели в **176**, 9, *средняя мощность* тока представляется произведением $V_e J_e\cos\varphi$. Так как $\cos 86°43'=0{,}057$, то в нашем примере, благодаря значительной разности фаз у силы тока и напряжения, средняя мощность достигает лишь 5,7% той мощности, которую имел бы постоянный ток силы J_e при напряжении V_e. Таково влияние самоиндукции.

До сих пор мы предполагали, что напряжение V следует простому синусоидальному закону. Обратимся теперь к общему случаю, когда напряжение хотя и является *периодической* функцией от времени, с прежним периодом $T=\frac{2\pi}{\omega}$, но уже не будет простой синусоидальной величиной. Естественно приходит в голову мысль разложить это напряжение в ряд Фурье [**215**] по гармоническим составляющим, с каждой из которых в отдельности мы справляться уже умеем! Эту плодотворную мысль, которой часто приходится пользоваться при рассмотрении периодических явлений, поясним здесь одним примером.

Пусть напряжение V следует такому закону: в течение первой половины периода оно равно V_0, а в течение второй половины меняет направление и равно $-V_0$. Если воспользоваться разложением nº 217, 3, то, умножая его на $\frac{4V_0}{\pi}$ и заменяя x на ωt, получим:

$$V=\frac{4V_0}{\pi}\left\{\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\omega t}{2n+1}.$$

Слагающая

$$\frac{4V_0}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\omega t$$

напряжения дает при установившемся режиме, как мы уже знаем, ток

$$J_n=\frac{\frac{4V_0}{(2n+1)\pi}}{\sqrt{R^2+[(2n+1)\omega L]^2}}\sin[(2n+1)\omega t-\varphi_n],$$

где смещение фазы φ_n определяется из равенства:

$$\operatorname{tg}\varphi_n=\frac{(2n+1)\omega L}{R}$$

[см. (35), (34)]. Ясно, что теперь эти отдельные токи нужно просуммировать, так что

$$J=\frac{4V_0}{\pi}\left\{\frac{\sin(\omega t-\varphi_0)}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}+\frac{\sin(3\omega t-\varphi_1)}{3\sqrt{R^2+(3\omega L)^2}}+\frac{\sin(5\omega t-\varphi_2)}{5\sqrt{R^2+(5\omega L)^2}}+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\omega t-\varphi_n]}{(2n+1)\sqrt{R^2+[(2n+1)\omega L]^2}}.$$

Так как с возрастанием n члены этого ряда быстро убывают, то — с достаточной точностью — можно ограничиться небольшим их числом.

266. Однородные уравнения. Рассмотрим еще один тип уравнений, в которых возможность отделения переменных достигается простой подстановкой. Мы будем называть *однородными* уравнения вида:

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{36}$$

Для решения такого уравнения, нужно ввести новую неизвестную функцию, взамен y, именно

$$t=\frac{y}{x}, \tag{37}$$

т. е. прибегнуть к подстановке

$$y=tx,\quad y'=t'x+t. \tag{37a}$$

Пусть, напр., дано уравнение

$$y'=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}=1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Пользуясь указанной подстановкой, получим:

$$t'x+t=1+t+t^2 \quad \text{или} \quad t'x=1+t^2$$

Если переписать его в виде:

$$x\frac{dt}{dx}=1+t^2,$$

то сразу видно, что в нем переменные отделяются:

$$\frac{dt}{1+t^2}=\frac{dx}{x};$$

отсюда:

$$\operatorname{arctg} t=\ln x+C, \quad t=\operatorname{tg}(\ln x+C)$$

или, возвращаясь к функции y, по формуле (37a):

$$y=x\cdot\operatorname{tg}(\ln x+C).$$

Аналогично, и в случае общего уравнения (36), с помощью подстановки (37a), приведем его к виду:

$$t'x+t=\varphi(t) \quad \text{или} \quad x\frac{dt}{dx}=\varphi(t)-t,$$

в котором переменные уже отделяются:

$$\frac{dt}{t-\varphi(t)}+\frac{dx}{x}=0, \qquad \int\frac{dt}{t-\varphi(t)}+\ln x=C.$$

Если выполнить на самом деле квадратуру (что мы и сделали, когда имели дело с конкретной функцией φ), то мы и получим общий интеграл преобразованного уравнения в виде:

$$\Phi(t)+\ln x=C;$$

подставляя сюда, наконец, вместо t, его выражение (37), найдем таким образом и общий интеграл исходного уравнения (36).

Нужно заметить, что однородное уравнение редко получается непосредственно в виде (36) и полезно запомнить те типы уравнений, которые легко к такому виду приводятся. Это будет, прежде всего, тот случай, когда в уравнении

$$y'=f(x, y)$$

правая часть представляет собою *частное двух однородных* многочленов одной и той же степени*. Легко показать, действительно, что такое частное может быть представлено в виде функции от одного отношения $\frac{y}{x}$. Мы видели это и на приведенном примере, где простого деления числителя на знаменатель было достаточно для указанной

* Напомним, что *однородным* называется такой многочлен, целый относительно x и y (в нашем случае!), все члены которого будут *одного и того же измерения* или *одной и той же степени* относительно этих переменных. Напр., $x^3-2x^2y+xy^2+4y^3$ будет однородным многочленом третьей степени; $x^2y^2-2xy^3+y^4$ — однородным многочленом четвертой степени; и т. д.

цели. В более сложном случае пришлось бы и числитель, и знаменатель разделить на одну и ту же степень x, напр.,

$$\frac{x^2-2xy+3y^2}{xy-2y^2}=\frac{1-2\cdot\frac{y}{x}+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-2\left(\frac{y}{x}\right)^2}\quad\text{(деление на } x^2\text{)},$$

$$\frac{x^3+y^3}{2x^2y-xy^2+3y^3}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2+3\left(\frac{y}{x}\right)^3}\quad\text{(деление на } x^3\text{)},$$

и т. п. Вместо частного двух однородных многочленов одной и той же степени можно было бы рассмотреть и более сложные выражения, *заменяя любой из них (или часть любого из них) корнем квадратным из однородного же многочлена вдвое более высокой степени*:

$$\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{2x+y}=\frac{\sqrt{1+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{2+\frac{y}{x}}\quad\text{(деление на } x\text{)},$$

$$\frac{xy+\sqrt{x^4-y^4}}{x^2+3y^2}=\frac{\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^4}}{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}\quad\text{(деление на } x^2\text{)}.$$

Наконец, очевидно к числу уравнений, непосредственно приводящихся к виду (36), относятся уравнения вида

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0, \tag{38}$$

если P и Q суть однородные многочлены одной и той же степени, ибо, представив уравнение в форме:

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

вернемся к рассмотренному случаю. И здесь можно было бы, вместо многочленов, взять более сложные выражения только что указанного типа. Все подобные уравнения также называются *однородными*.*

---

* Понятие об однородном многочлене степени m в математике обобщают на случай функции любой природы следующим образом: функцию $P(x, y)$ называют *однородной функцией степени m*, если в результате замены ее аргументов x и y через kx и ky получается та же функция, но умноженная на k^m, т. е. если

$$P(kx, ky)=k^m\cdot P(x, y),$$

Пусть имеем, напр., уравнение:

$$(x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy=0.$$

Так как здесь коэффициенты при dx и dy представляют собой однородные многочлены второй степени, то можно заранее быть уверенным в том, что уравнение приводимо к виду (36):

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\cdot\frac{y}{x}}.$$

Преобразуем его с помощью подстановки (37a):

$$t'x+t=\frac{t^2-1}{2t},\quad x\frac{dt}{dx}=\frac{t^2-1}{2t}-t=-\frac{t^2+1}{2t}.$$

Отделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{2t\cdot dt}{1+t^2}+\frac{dx}{x}=0,\quad \ln(1+t^2)+\ln x=\ln C$$

или

$$x(1+t^2)=C.$$

Остается лишь вернуться к функции y:

$$x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=C \quad \text{или} \quad x^2+y^2=Cx.$$

Мы получили то семейство окружностей, о котором уже была речь в n⁰ 263 (см. черт. 501).

Заметим, наконец, что для интегрирования уравнения (38), если оно принадлежит к указанному классу, вовсе нет надобности фактически приводить его наперед к виду (36); проще непосредственно к нему применить подстановку (37a), которую напишем в виде:

$$y=tx,\quad dy=x\,dt+t\,dx. \tag{37b}$$

Если сделать это в только что рассмотренном примере, то получим:

$$(x^2-x^2t^2)\,dx+2x^2t\,(x\,dt+t\,dx)=0$$

и, после сокращения на x^2 и приведения,

$$(1+t^2)\,dx+2tx\,dt=0$$

и т. д., как и выше.

каково бы ни было число k. При этом определении, например $\sqrt{x^2+xy+y^2}$ будет однородной функцией первой степени, ибо

$$\sqrt{(kx)^2+(kx)(ky)+(ky)^2}=k\sqrt{x^2+xy+y^2}$$

Теперь можно сказать, что уравнение (38) называется *однородным*, если P и Q будут *однородными функциями* одной степени; этим объясняется самый термин: „однородное" уравнение. Для технических приложений, повидимому, достаточно указаний в тексте.

Примеры. 1. $y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$.

Решение.

$$t'x + t = t(1 + \ln t), \quad x\frac{dt}{dx} = t\ln t, \quad \frac{dt}{t\ln t} = \frac{dx}{x}, \quad \ln\ln t = \ln x + \ln C,$$

$$\ln t = Cx, \quad y = xe^{Cx}$$

2. $(x - 2y)\,dx + y\,dy = 0$.

Решение.

$$x(1 - 2t)\,dx + tx(t\,dx + x\,dt) = 0, \quad (t^2 - 2t + 1)\,dx + tx\,dt = 0, \quad \frac{dx}{x} + \frac{t\,dt}{(t-1)^2} = 0,$$

$$\ln x + \ln(t - 1) - \frac{1}{t-1} = \ln C, \quad (y - x)\,e^{\frac{x}{x-y}} = C.$$

3. $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$.

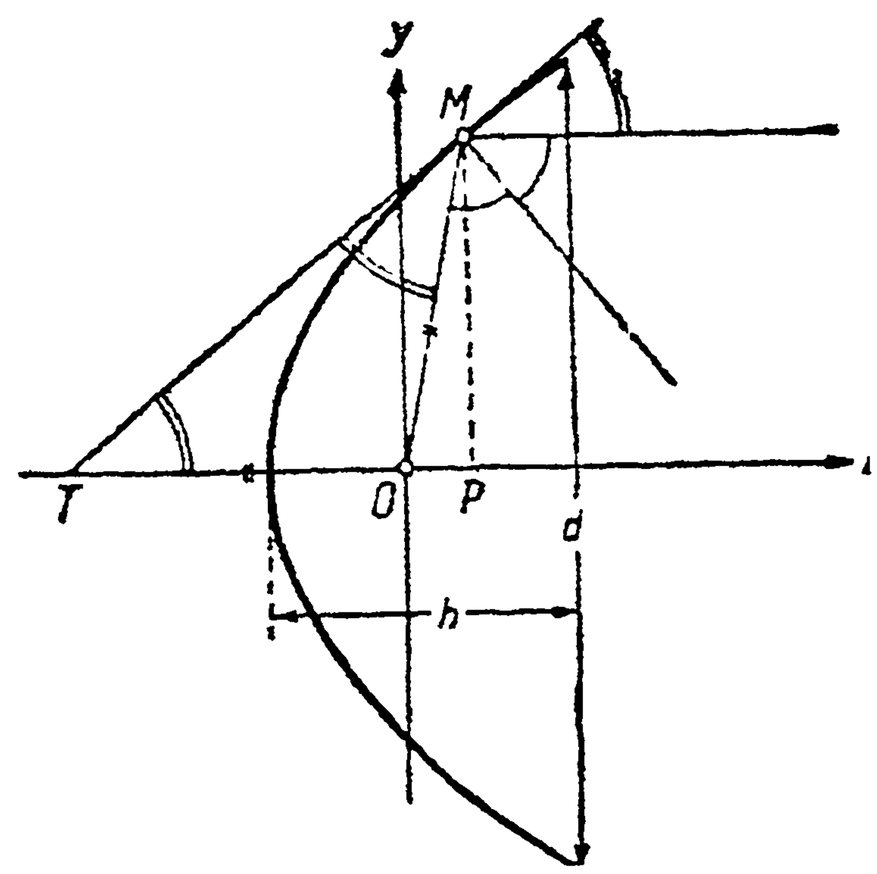
Отв. $y^2 - x^2 = Cx$ (семейство гипербол).

4. По какой поверхности вращения надлежит отшлифовать зеркало рефлектора, чтобы все лучи, исходящие из помещенного в определенной точке O на оси вращения источника света, отражались от зеркала параллельно этой оси?

Пусть кривая на черт. 503 представляет искомое меридианальное сечение поверхности. Выбрав ось вращения за ось Ox, а точку O за начало, мы видим, что — по закону отражения — должны быть равны отмеченные углы, откуда вытекает, что $\triangle MTO$ — равнобедренный, так что

$$TO = OM.$$

Но отрезок TO равен разности между подкасательной $TP = \frac{y}{y'}$ и абсциссой $OP = x$ рассматриваемой точки M; отрезок же OM, очевидно, равен $\sqrt{x^2 + y^2}$. Итак, условие задачи выражается дифференциальным уравнением:



Черт. 503.

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2},$$

которое можно переписать в виде:

$$y\,dx = (x + \sqrt{x^2 + y^2})\,dy.$$

Чтобы проинтегрировать полученное однородное уравнение, прибегнем к подстановке

$$x = ty, \quad dx = t\,dy + y\,dt$$

(ведь переменные x, y можно и обменять ролями, а нам выгоднее не усложнять выражения для dy, ибо при нем и без того сложный коэффициент!). Мы получим:

$$y(t\,dy + y\,dt) = y(t + \sqrt{1 + t^2})\,dy, \quad y\,dt = \sqrt{1 + t^2}\,dy,$$

$$\ln y = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) + \ln C, \quad y = C(t + \sqrt{1 + t^2}), \quad C(x + \sqrt{x^2 + y^2}) = y^2.$$

Этот результат можно следующим образом упростить, избавившись от иррациональности:

$$C\sqrt{x^2 + y^2} = y^2 - Cx, \quad C^2(x^2 + y^2) = y^4 - 2Cxy^2 + C^2x^2,$$

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{1}{2}C\right). \tag{39}$$

Мы получили, очевидно, семейство *парабол*, имеющих своей осью ось Ox. Параметром параболы (39) будет $2C$, а вершина лежит на расстояние $\frac{1}{2}C$ влево от начала; отсюда ясно, что точка O будет общим фокусом всех этих парабол [ср. 125, 2].

Если мы желаем, чтобы диаметр зеркала был равен d, а глубина его — h, то надлежит в уравнении (39) положить:

$$x+\frac{1}{2}C=h,\quad y=\frac{d}{2};$$

это даст нам значение C:

$$C=\frac{d^2}{8h}.$$

267. Уравнения в полных дифференциалах. Остановимся, наконец, еще на одном типе дифференциальных уравнений первого порядка, который допускает решение в квадратурах (даже без использования отделения переменных, к которому до сих пор мы сводили всякое интегрирование). Если уравнение взято в форме (38), то может оказаться, что *выражение слева представляет собою точный (полный) дифференциал* некоторой функции $\varphi(x, y)$ от двух переменных:

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=d\varphi(x, y).$$

Согласно уравнению (38), тогда этот дифференциал равен нулю, а следовательно функция $\varphi(x, y)$ должна сохранять постоянное значение:

$$\varphi(x, y)=C,$$

что и доставляет нам сразу общий интеграл исходного уравнения [в форме (4*b*)]. *

Например, замечая, что левая часть уравнения

$$2xy\,dx+x^2dy=0 \tag{40}$$

представляет точный дифференциал $d(x^2y)$, заключаем, что

$$x^2y=C$$

и будет общим интегралом уравнения.

Во избежание возможных недоразумений, мы подчеркиваем здесь, что функция $\varphi(x, y)$ (в нашем примере: x^2y) отнюдь не сводится к постоянной *тождественно*, но лишь *в силу дифференциального уравнения*. Понимать это надо так, что покуда x и y изменяются *независимо* одна от другой, функция $\varphi(x, y)$ вообще *не постоянна*; но лишь только x и y оказываются *связанными* дифференциальным уравнением, т. е. y является *функцией от x, удовлетворяющей дифференциальному уравнению*, то тогда функция $\varphi(x, y)$ обращается в постоянную. Иными словами, когда точка (x, y) передвигается вдоль интегральной кривой, функция $\varphi(x, y)$ сохраняет постоянное значение, но это значение меняется от одной кривой к другой. В нашем примере интегральными кривыми служат кривые

$$y=\frac{C}{x^2};$$

* Можно сказать, что уравнение вида (6), *с отделенными переменными*, представляет частный случай уравнения, о котором речь в тексте, ибо левая часть его, как и указывалось в 258, представляет точный дифференциал.

вдоль каждой из них функция x^2y, конечно, постоянна, но вдоль кривой $y=\frac{1}{x^2}$ ее постоянное значение равно 1, а вдоль кривой $y=\frac{2}{x^2}$ ее значение равно 2, и т. д.

Теперь естественно встают два вопроса. Во-первых, как узнать, представляет ли левая часть уравнения (38) точный дифференциал или нет? И, во-вторых, в случае если она является полным дифференциалом от некоторой функции, то как найти эту функцию? Эти вопросы для нас уже не новы, мы рассматривали их, в связи с криволинейными интегралами, в n⁰ 248, куда и отсылаем читателя за подробностями. Напомним лишь, что условие, при котором выражение $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ представляет полный дифференциал, имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{41}$$

[248, (22)]. При выполнении его, нахождение самой функции $\varphi(x, y)$, для которой это выражение служит полным дифференциалом, приводится, как мы видели, к квадратурам.

Возвращаясь к примеру (40), рассмотренному выше, отметим, что „сократив" уравнение на x, мы „испортили" бы наш полный дифференциал: в новом уравнении

$$2y\,dx+x\,dy=0 \tag{42}$$

условие (41) уже нарушено, так что полного дифференциала здесь нет! Наоборот, если бы уравнение дано было сразу в виде (42), можно было бы, умножив его левую часть на x, привести ее к виду полного дифференциала. Подобный множитель, от умножения на который левая часть уравнения (38) становится полным дифференциалом, называется его *интегрирующим множителем*. Знание интегрирующего множителя уже заведомо сводит интегрирование уравнения к квадратурам. Нужно сказать, что *каждое уравнение вида (38) имеет интегрирующий множитель*, и даже бесконечное множество их. Напр., для уравнения (42), кроме множителя x, существует еще множитель $\frac{1}{xy}$:

$$2\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=d\ln(x^2y)$$

множитель $\frac{1}{2\sqrt{y}}$:

$$\sqrt{y}\,dx+\frac{x}{2\sqrt{y}}\,dy=d(x\sqrt{y})$$

и т. д. Все они приводят, разумеется, к *равносильным* между собою общим интегралам:

$$x^2y=C,\quad \ln(x^2y)=C_1,\quad x\sqrt{y}=\sqrt{x^2y}=C_2,\ldots$$

Однако, общих приемов для разыскивания интегрирующих множителей нет, а отдельные частные приемы редко находят применение, и мы их касаться не станем. Исключение мы сделаем лишь для линейного уравнения (30). Если его переписать в виде:

$$[P(x)\cdot y - Q(x)]\,dx + dy = 0,$$

то легко проверить, что выражение

$$e^{\int P\,dx} \tag{43}$$

будет для него интегрирующим множителем; действительно,

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{\int P\,dx}[P\cdot y - Q] = P\cdot e^{\int P\,dx} = \frac{\partial}{\partial x} e^{\int P\,dx}.$$

Впрочем, можно (и это проще!) умножить на множитель (43) непосредственно обе части уравнения (30):

$$y'\cdot e^{\int P\,dx} + y\cdot P\cdot e^{\int P\,dx} = Q\cdot e^{\int P\,dx}.$$

Левая часть явно представляет собою производную от произведения:

$$\left(y\cdot e^{\int P\,dx}\right)' = Q\cdot e^{\int P\,dx}.$$

Еще одна квадратура:

$$y\cdot e^{\int P\,dx} = C + \int\left[Q\cdot e^{\int P\,dx}\right]dx$$

— и мы возвращаемся к формуле (32):

$$y = e^{-\int P\,dx}\left\{C + \int\left[Q\cdot e^{\int P\,dx}\right]dx\right\},$$

уже раньше полученной другим путем.

Если запомнить вид множителя (43), то решение линейного уравнения с его помощью представляется, пожалуй, наиболее практичным.

Примеры. 1. Предлагается для следующих уравнений проверить выполнение условий (41) и найти их общие интегралы:

$$a)\ (6xy - 2y^2 + 1)\,dx + (3x^2 - 4xy - 6y)\,dy = 0;$$

$$b)\ \frac{3y^2 - x^2}{x^4 y}\,dx - \frac{x^2 + y^2}{x^3 y^2}\,dy = 0;$$

$$c)\ (2xy - \ln y)\,dx + \left(x^2 + 1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0;$$

$$d)\ \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dy = 0.$$

Указ. См. п° 248, в частности, прием, указанный в примере 3.

a) Отв. $3x^2y - 2xy^2 + x - 3y^2 = C$; *b) Реш.* $\int\left(\frac{3y}{x^4} - \frac{1}{x^2 y}\right)dx = \frac{1}{xy} - \frac{y}{x^3}$,

$\int\left(-\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{x^3}\right)dy=\frac{1}{xy}-\frac{y}{x^3}$; $\frac{1}{xy}-\frac{y}{x^3}=C$; *c) Реш.* $\int(2xy-\ln y)\,dx=$ $=x^2y-x\ln y+g(y)$; $x^2-\frac{x}{y}+g'(y)=x^2+1-\frac{x}{y}$, $g'(y)=1$, $g(y)=y$; $x^2y-x\ln y+y=C$; *д) Отв.* $x+\sqrt{x^2+y^2}=C$.

2. Установить, что для уравнения

$$y\,dx-x\,dy=0$$

все четыре выражения:

$$\frac{1}{xy},\quad \frac{1}{y^2},\quad \frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{x^2+y^2}$$

будут интегрирующими множителями, и проверить равносильность получающихся отсюда общих интегралов. *Указ.* Общие интегралы: $\ln\frac{x}{y}=C$, $\frac{x}{y}=C_1$, $-\frac{y}{x}=C_2$, $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=C_3$.

3. Применить метод интегрирующего множителя к линейным уравнениям, решенным в n⁰ 264.

Этим мы заканчиваем обзор различных типов дифференциальных уравнений первого порядка, поддающихся сведению к квадратурам, и переходим к уравнениям второго порядка.

268. Дифференциальные уравнения второго порядка. Уравнения вида $y''=f(x)$. Общий вид дифференциального уравнения второго порядка:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0;$$

обыкновенно его рассматривают уже разрешенным относительно второй производной y'' (которая обязательно входит в уравнение):

$$y''=f(x,\ y,\ y'). \tag{44}$$

Те или иные из величин x, y, y' могут фактически в уравнении отсутствовать, и эти именно частные случаи и представляются простейшими. *Общее решение* или *общий интеграл* уравнения (44) имеет вид:

$$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2) \tag{45}$$

или — в неявной форме —

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2)=0. \tag{45a}$$

Здесь фигурируют уже две произвольные постоянные, в соответствии с порядком уравнения. При частных, численных их значениях мы получаем *частное решение*, или *частный интеграл* уравнения.

Самое интегрирование дифференциального уравнения (44) иной раз проводится в два приема. Сначала пытаются, исходя из данного уравнения, получить соотношение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию y, ее первую производную y', и одну произвольную постоянную. Такое соотношение, имеющее вид:

$$G(x,\ y,\ y',\ C_1)=0 \text{ или } y'=g(x,\ y,\ C_1),$$

называют *первым интегралом* данного уравнения второго порядка. Получение его служит как бы ступенью к нахождению общего ин-

теграла („второго"), уже не содержащего y', но зато вводящего вторую произвольную постоянную. *

Если требуется, чтобы, при *начальном* значении независимой переменной $x = x_0$, *начальное* значение функции y было y_0, то этому требованию можно удовлетворить бесчисленным множеством способов, ибо для определения двух постоянных мы имеем лишь одно уравнение:

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \quad \text{или} \quad \Phi(x_0, y_0, C_1, C_2) = 0.$$

Для полного определения постоянных обыкновенно устанавливается еще *начальное* значение y_0' производной неизвестной функции. Если продифференцировать уравнение (45) или (45*a*) по x и подставить, вместо x, y, y', их начальные значения:

$$y_0' = \varphi_x'(x_0, C_1, C_2)$$

или, соответственно [см. 225, (14)]:

$$\Phi_x'(x_0, y_0, C_1, C_2) + \Phi_y'(x_0, y_0, C_1, C_2) \cdot y_0' = 0,$$

то, действительно, получим недостававшее нам второе условие для определения C_1, C_2. Итак, в случае уравнения второго порядка *начальные условия* имеют вид

$$\text{при } x = x_0 \text{ должно быть: } y = y_0,\ y' = y_0'. \tag{46}$$

Часто, впрочем, вместо начального значения производной, задается еще одно значение самой функции $y = y_1$, отвечающее другому („*конечному*") значению $x = x_1$ независимой переменной; это условие также доставляет еще одно уравнение:

$$y_1 = \varphi(x_1, C_1, C_2) \quad \text{или} \quad \Phi(x_1, y_1, C_1, C_2) = 0$$

для определения постоянных. Так как значения $x = x_0$ и $x = x_1$ обыкновенно отвечают концам рассматриваемого геометрического образа, то в этом случае (вместо начальных условий) говорят о *предельных условиях* **

$$\left.\begin{array}{r} \text{при } x = x_0 \text{ должно быть: } y = y_0, \\ \text{а при } x = x_1 \text{ должно быть: } y = y_1. \end{array}\right\} \tag{47}$$

Само собою разумеется, что все эти условия непосредственно доставляются той же конкретной задачей, которая привела и к дифференциальному уравнению.

Если стать на геометрическую точку зрения [263], то можно сказать, что в рассматриваемом случае *интегральные кривые образуют семейство, зависящее от двух параметров*. Что касается роли самого

* Не следует думать однако, что такой путь для нахождения общего интеграла обязателен. Во многих случаях [см. ниже, nn° 281—284] удается непосредственно от дифференциального уравнения перейти к общему интегралу, минуя первый интеграл.

** Ниже [278, зад. 4, 280, зад. 2, 286, зад. 4] мы встретимся с предельными условиями другой формы.

дифференциального уравнения, то — поскольку вторая производная y'' связана простым соотношением с кривизной [134, (49)]

$$k = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

— ясно, что и здесь *дифференциальное уравнение выражает общее всем интегральным кривым во всех их точках геометрическое свойство, состоящее в определенной зависимости между положением точки, уклоном и кривизной кривой в этой точке.*

Можно было бы поставить здесь также и обратную задачу — об исключении параметров из уравнения (45) или (45*a*) семейства кривых и о получении таким путем дифференциального уравнения второго порядка; но мы на этом останавливаться не будем.

Наконец, *начальные условия* (46) геометрически истолковываются, как указание не только *точки* (x_0, y_0), через которую должна пройти интегральная кривая, но и *уклона* y_0', который она в этой точке должна иметь. Семейство кривых, зависящее от двух параметров, настолько „богато" кривыми, что теперь через каждую точку рассматриваемой области проходит бесчисленное множество кривых, во всевозможных направлениях. Если же указывается и уклон кривой, то этим уже устанавливается определенная кривая (или, в крайнем случае, несколько таких кривых). Такую же роль играют и *предельные условия* (47), требующие, чтобы кривая проходила через две заданные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1).

После этих общих замечаний, которые — как читатель видит — совершенно аналогичны сказанному в 257, 263 об уравнениях первого порядка, мы переходим к рассмотрению простейших частных типов уравнений второго порядка, наиболее часто встречающихся в приложениях.

На первом месте естественно стоит уравнение вида:

$$y'' = f(x), \tag{48}$$

которое получается из общего уравнения (44) в предположении, что правая часть не содержит ни y, ни y'. Здесь вторая производная неизвестной функции непосредственно выражена через независимую переменную. Если переписать наше уравнение в виде: $(y')' = f(x)$, то сразу ясно, что одна квадратура восстанавливает значение первой производной:

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1,$$

причем вводится произвольная постоянная C_1; это и есть первый интеграл нашего уравнения. Вторая квадратура дает нам общее выражение для искомой функции:

$$y = \int dx \left[\int f(x)\,dx\right] + C_1 x + C_2, \tag{49}$$

которое, как и следовало ожидать, содержит уже две произвольные постоянные.

Типическим вопросом, приводящим к уравнению рассматриваемого вида, является механическая задача об определении положения движу-

щейся по прямой точки в зависимости от времени t, когда сила, действующая на точку, задана также в функции от времени: $F=f(t)$; при этом время отсчитывается от некоторого момента, условно принимаемого за *начальный*. Пусть s означает пройденный путь, отсчитываемый от некоторой точки; тогда скорость выразится первой производной s_t', а ускорение — второй производной s_t'' [52, 63]. Закон Ньютона, устанавливающий связь между силой и ускорением, запишется тогда так (если через m обозначить массу точки):

$$ms_t''=f(t) \quad \text{или} \quad s''=\frac{1}{m}f(t).$$

Получилось дифференциальное уравнение вида (48); лишь независимая переменная обозначена здесь через t (вместо x), а искомая функция — через s (вместо y).

Первое интегрирование дает выражение для скорости:

$$v=s_t'=\int\frac{1}{m}f(t)\,dt+C_1=\varphi(t)+C_1, \tag{50}$$

второе — проводит к выражению для пути:

$$s=\int\varphi(t)\,dt+C_1t+C_2=\psi(t)+C_1t+C_2. \tag{50a}$$

Если задано начальное состояние точки, т. е. начальные значения (при $t=0$) пути $s=s_0$ и скорости $v=v_0$, то этим вполне определяются постоянные C_1 и C_2. В самом деле, из (50) при $t=0$ будем тогда иметь:

$$v_0=\varphi(0)+C_1,$$

чем определяется постоянная C_1. Полагая затем в (50a) $t=0$, получим:

$$s_0=\psi(0)+C_2,$$

откуда определяется и C_2. Этот процесс уже был проделан нами в простейшем случае постоянной силы [74, 4, речь шла там о силе тяжести].

В следующих пп° мы рассмотрим другие важные примеры использования уравнения указанного простейшего вида.

269. Задача о веревочной кривой. Поставим себе задачей установить форму равновесия гибкой нерастяжимой нити, укрепленной концами в двух данных точках $K(x_0, y_0)$ и $L(x_1, y_1)$ (черт. 504 a), под действием непрерывно распределенной нагрузки. Нагрузка задана так называемой *грузовой площадью* $AA'B'B$; ордината $q=D'D$ *грузовой линии* AB дает *интенсивность нагрузки* в соответствующей точке M нити, т. е. нагрузку, приходящуюся на *единицу длины проекции нити* на ось Ox. Полная нагрузка всей нити выражается, таким образом, площадью $AA'B'B$; аналогично выражается и нагрузка, приходящаяся на любой участок нити.

Рассмотрим теперь бесконечно малый элемент нити MN, отвечающий бесконечно малому приращению dx абсциссы x, и выясним действующие на него силы. Прежде всего, в каждой точке нити существует определенное натяжение S, действующее (в двух противоположных направлениях) по касательной к кривой; его можно разложить (черт. 504 b) на горизонтальную составляющую H и вертикальную составляющую V. Таким образом, на элемент MN действует натяжение $-S$ в точке M и $S+dS$ в точке N, с горизонтальными составляющими $-H$ и $H+dH$

и вертикальными — V и $V+dV$. Кроме них, действует еще вертикально вниз элементарная нагрузка, величина которой (выражаемая площадью $DD'E'E$) *может быть принята равной* $q\,dx$. Условия равновесия требуют, чтобы суммы проекций этих сил на горизонтальную и вертикальную оси были нулями, т. е. чтобы было

$$dH=0,\quad dV-q\,dx=0.$$

Первое условие приводит к весьма важному заключению: *горизонтальное натяжение H постоянно во всех точках*:

$$H=\text{пост.} \tag{51}$$

Из второго же имеем:

$$\frac{dV}{dx}=q. \tag{52}$$

Если принять во внимание, что (черт. 504 *b*)

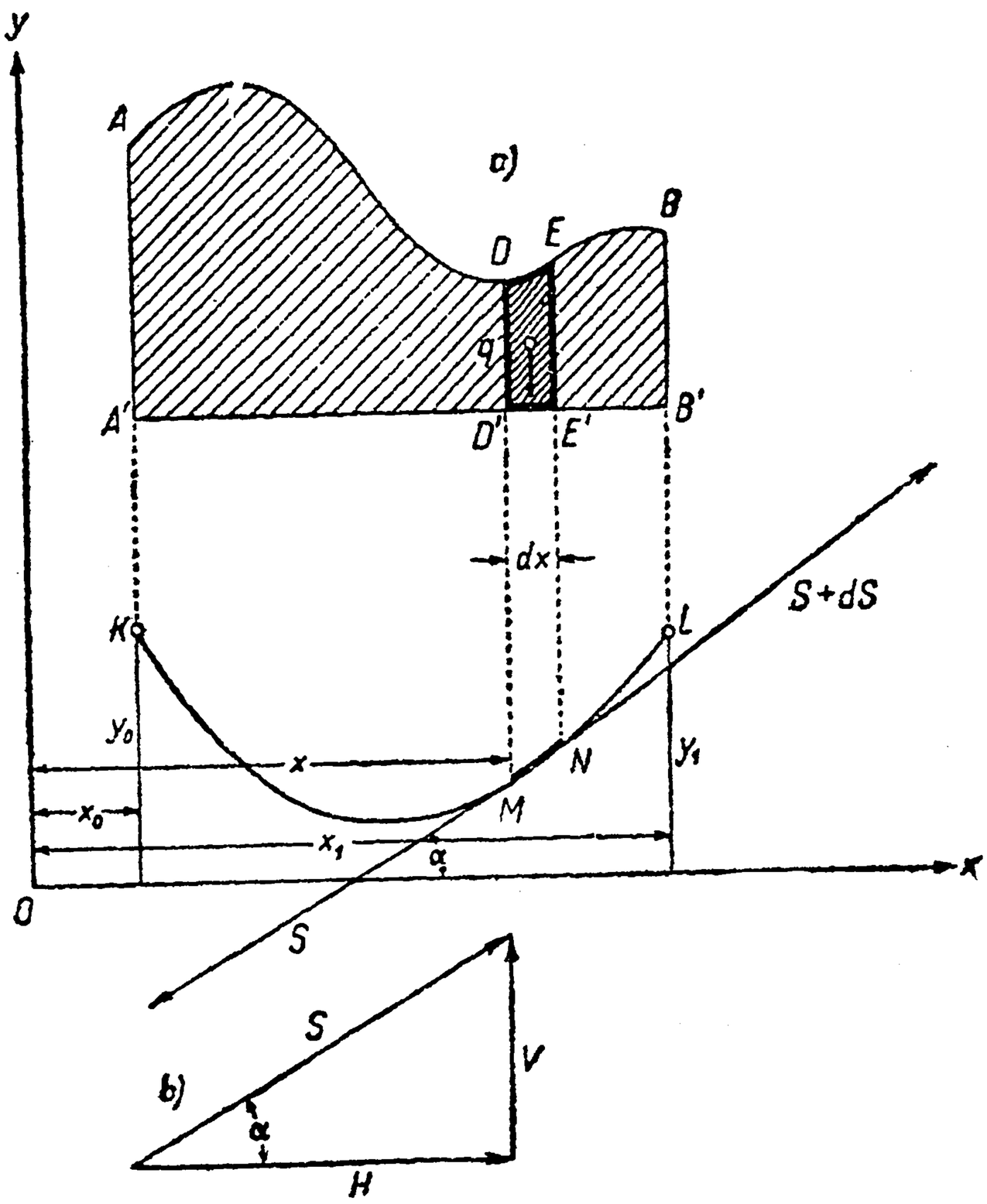
$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{V}{H},$$

то, дифференцируя это соотношение, в виду (51) и (52) получим, наконец, дифференциальное уравнение искомой линии:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{q}{H}. \tag{53}$$

Интегрируя его, по формуле (49), найдем:

$$y=\frac{1}{H}\int dx\left[\int q\,dx\right]+$$
$$+C_1x+C_2=\varphi(x)+$$
$$+C_1x+C_2 \tag{54}$$



Черт. 504.

[если через $\varphi(x)$ обозначить интеграл]. Вспоминая теперь о том, что наша кривая должна пройти через точки K и L, получаем предельные условия:

$$\varphi(x_0)+C_1x_0+C_2=y_0,\quad \varphi(x_1)+C_1x_1+C_2=y_1,$$

откуда вполне однозначно определятся обе постоянные.

Найденная кривая и носит название *веревочной кривой*, соответствующей заданной нагрузке. В частном случае равномерно распределенной нагрузки ($q=$ пост.) мы уже имели с ней дело в n⁰ **105** (парабола).

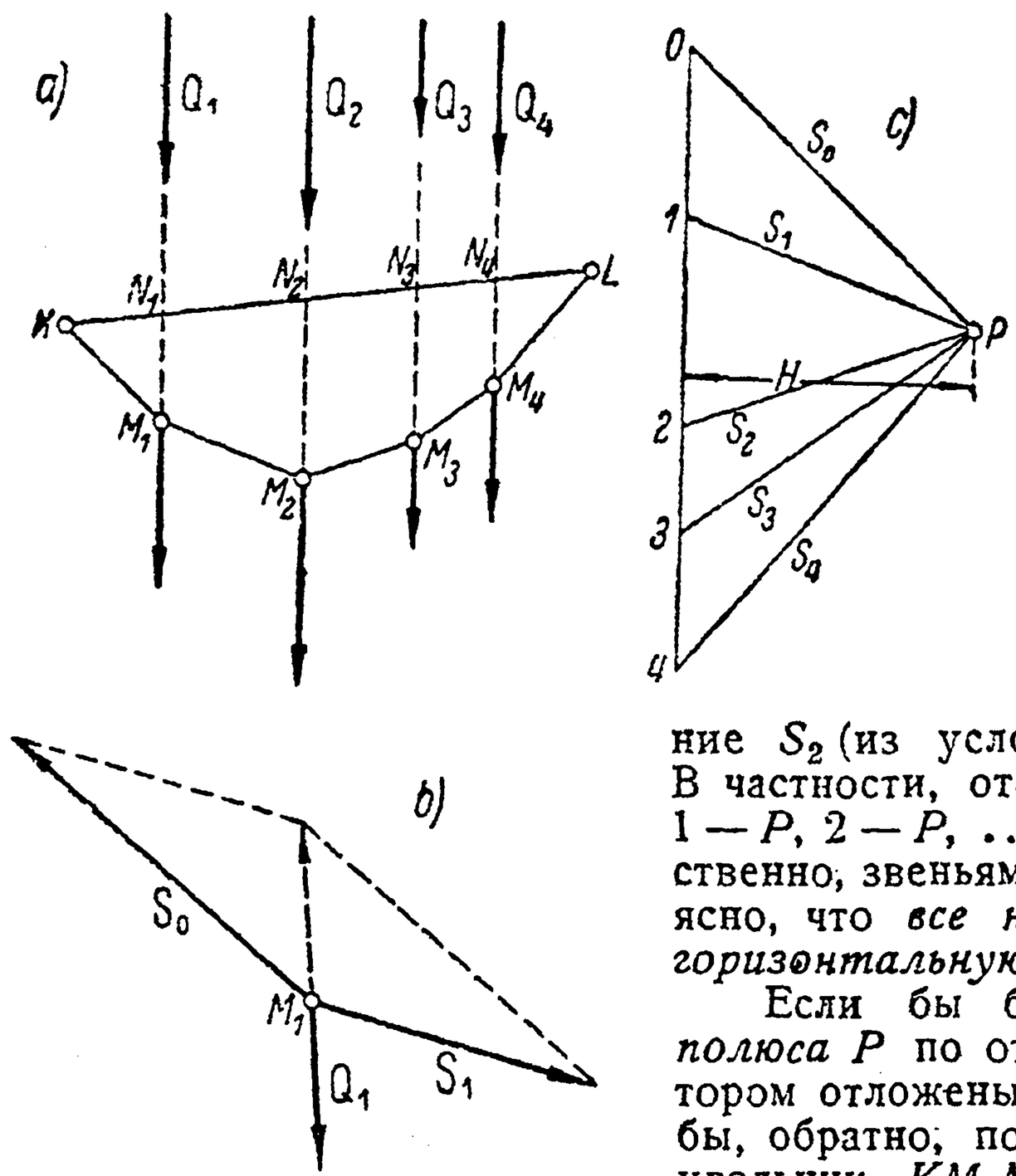
В технике часто применяется приближенное графическое построение веревочной кривой, которое, как выяснится ниже, имеет значение и для других важных задач. Для того чтобы дать о нем представление, мы должны сначала остановиться на задаче о так называемом *веревочном многоугольнике*.

270. Задача о веревочном многоугольнике. Задача эта (сходная с рассмотренной выше) состоит в следующем:* найти форму равновесия гибкой нерастяжимой нити, укрепленной концами в двух данных точках K и L, под действием конечного числа вертикальных сил Q_1, Q_2, Q_3... При этом обусловлено, что точки приложения этих сил (*узлы* веревочного многоугольника) лежат на заданных по положению вертикальных прямых (черт. 505 *a*).

Предположим, что нить расположится по изображенной на чертеже лома-

* Мы ограничиваемся рассмотрением одного частного случая этой задачи, который нам непосредственно нужен. В статике читателю наверно уже приходилось иметь дело с задачей о веревочном многоугольнике в общей форме.

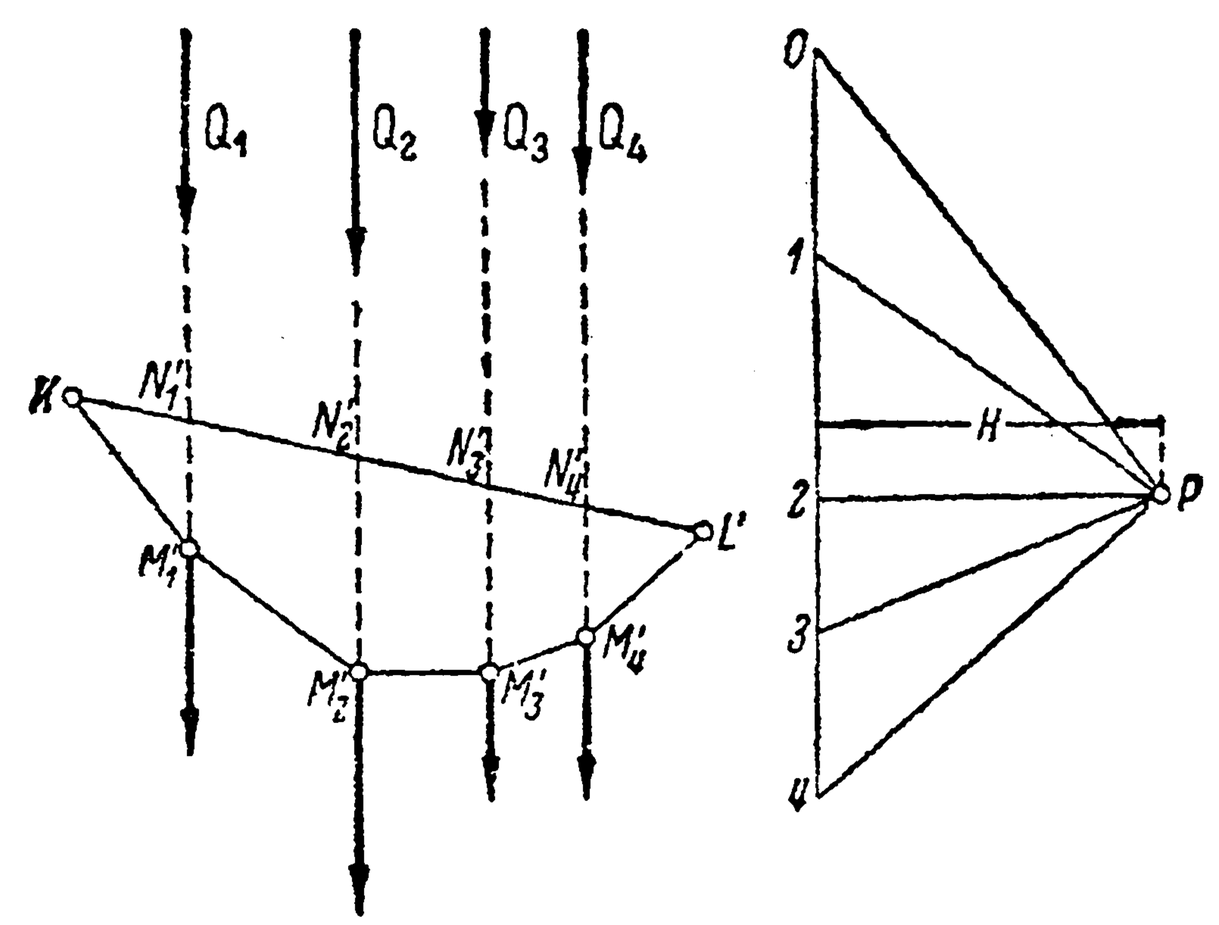
ной $KM_1M_2 \ldots L$. В каждом ее звене создается определенное натяжение; обозначим эти натяжения, по порядку, через S_0 (в звене KM_1), S_1 (в звене M_1M_2), ... На точку M_1 действуют три силы: натяжение S_0 влево, натяжение S_1 вправо, наконец, сила Q_1 вертикально вниз; так как точка M_1 находится в покое, то эти три силы должны взаимно уравновешиваться (черт. 505 *b*). То же относится и к другим точкам. Это служит основанием для следующего построения.



Черт. 505.

Отложим по вертикали (чертеж 505 *c*) по порядку отрезки 0 — 1, 1 — 2, 2 — 3, ..., изображающие в известном масштабе силы Q_1, Q_2, Q_3, ..., затем построим отрезок 0 — *P*, изображающий по величине (в том же масштабе) и по направлению натяжение S_0; тогда отрезок 1 — *P*, замыкающий ломаную 1 — 0 — *P*, необходимо представляет натяжение S_1 (вспомните условия равновесия точки M_1!). Аналогично установим, что отрезок 2 — *P* необходимо представляет натяжение S_2 (из условий равновесия точки M_2) и т. д. В частности, отсюда вытекает, что отрезки 0 — *P*, 1 — *P*, 2 — *P*, ... необходимо параллельны, соответственно, звеньям KM_1, M_1M_2, M_2M_3, ... Кроме того, ясно, что *все натяжения имеют одну и ту же горизонтальную составляющую H* [ср. (51)!].

Если бы было известно наперед положение *полюса P* по отношению к отрезку 0 — 4, на котором отложены *данные* силы, то отсюда легко было бы, обратно, построить и самый веревочный многоугольник $KM_1M_2 \ldots L$. Для этого достаточно соединить точки 0, 1, 2,... с полюсом и провести $KM_1 \parallel 0 - P$ до пересечения с направлением силы Q_1, затем $M_1M_2 \parallel 1 - P$ до пересечения с направлением силы Q_2, и т. д. Зададимся произвольно величиной горизонтального натяжения *H* и, взяв наудачу полюс *P* на расстоянии *H* от отрезка 0 — 4 (см. черт. 506), произведем, исходя от точки *K*, указанное построение. Мы получим ломаную $KM_1'M_2' \ldots L'$, которая также представляет одно из возможных положений равновесия нашей нити, но заканчивается не в той точке *L*, которая была задана! Чтобы получить нужный нам многоугольник, мы воспользуемся одним утверждением, на доказательстве которого не будем останавливаться: если в двух положениях равновесия, изображенных на черт. 505 и 506, провести прямые *KL* и *KL'*, то имеет место равенство соответственных вертикальных расстояний:



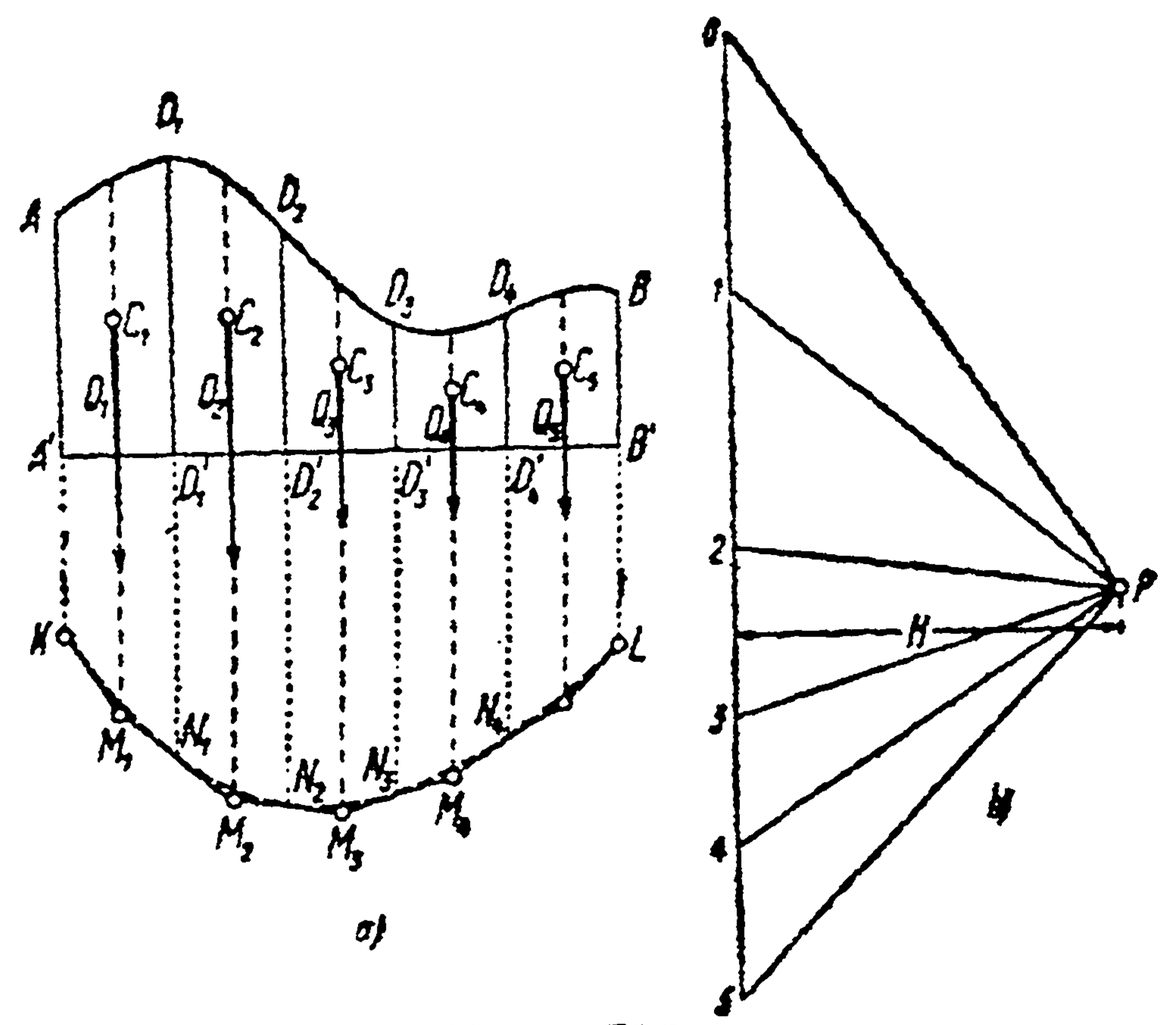
Черт. 506.

$$M_1N_1 = M_1'N_1', \quad M_2N_2 = M_2'N_2', \ldots *$$

* Эти отрезки имеют простой механический смысл, именно, они выражают односторонние моменты, т. е. моменты относительно соответствующих точек M_1, M_2, .. (или M_1', M_2', ...) всех сил, приложенных с одной стороны от них. К числу сил нужно лишь отнести также две вертикальные силы через *K* и *L* (*L'*) (реакции точек закрепления).

Теперь уже ясно, что, построив с помощью *силового многоугольника* P—1—2—3—4 *какое-нибудь* положение равновесия, по нему легко восстановить веревочный многоугольник *с заданными концами* K и L, путем откладывания вниз от точек $N_1, N_2, \ldots$ известных уже отрезков.

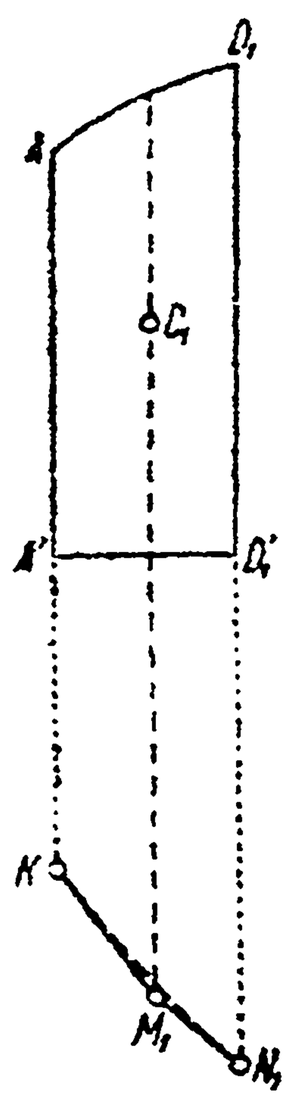
271. Графическое интегрирование уравнения $y'' = f(x)$. Итак, мы умеем просто строить веревочный многоугольник с заданными концами, по наперед заданным (по величине и положению) силам $Q_1, Q_2, \ldots$ и горизонтальному натяжению H. Этим построением мы воспользуемся теперь, чтобы приближенно построить веревочную кривую, о которой была речь вначале. Разложим грузовую площадь $AA'B'B$ (черт. 507) вертикальными прямыми D_1D_1', D_2D_2', ... на ряд полосок $AA'D_1'D_1$, $D_1D_1'D_2'D_2$, ... Нагрузку, выражаемую, напр., первой полоской $AA'D_1'D_1$ заменим равнодействующей, т. е. одной силой Q_1, равной площади этой полоски и приложенной в ее центре тяжести C_1 (или на соответственной вертикали); так же поступим и с остальными полосками. По этим силам $Q_1, Q_2, \ldots$ (и горизонтальному натяжению H) построим веревочный многоугольник, который приближенно и воспроизведет нужную нам веревочную кривую.



Черт. 507.

Можно даже показать, что стороны веревочного многоугольника *касаются* веревочной кривой в точках K и L, а также в тех точках $N_1, N_2, \ldots$, в которых их пересекают продолжения отрезков D_1D_1', D_2D_2', ...; тогда построение от руки веревочной кривой, которую нужно лишь *впасать* в построенную ломаную, становится совсем легким делом!

Для того чтобы установить упомянутый факт, мы пойдем обратным путем; именно, рассмотрим наперед описанный около веревочной кривой веревочный многоугольник $KM_1M_2\ldots$, с касанием в точках $K, N_1, N_2, \ldots$ и покажем, что 1) под действием сил $Q_1, Q_2, \ldots$, приложенных в точках $M_1, M_2, \ldots$, этот многоугольник будет в равновесии и 2) горизонтальная составляющая натяжений в его звеньях равна H. Так как этими данными веревочный многоугольник определяется однозначно, то вновь построенный описанный многоугольник должен будет совпасть с построенным раньше, что и докажет наше утверждение.



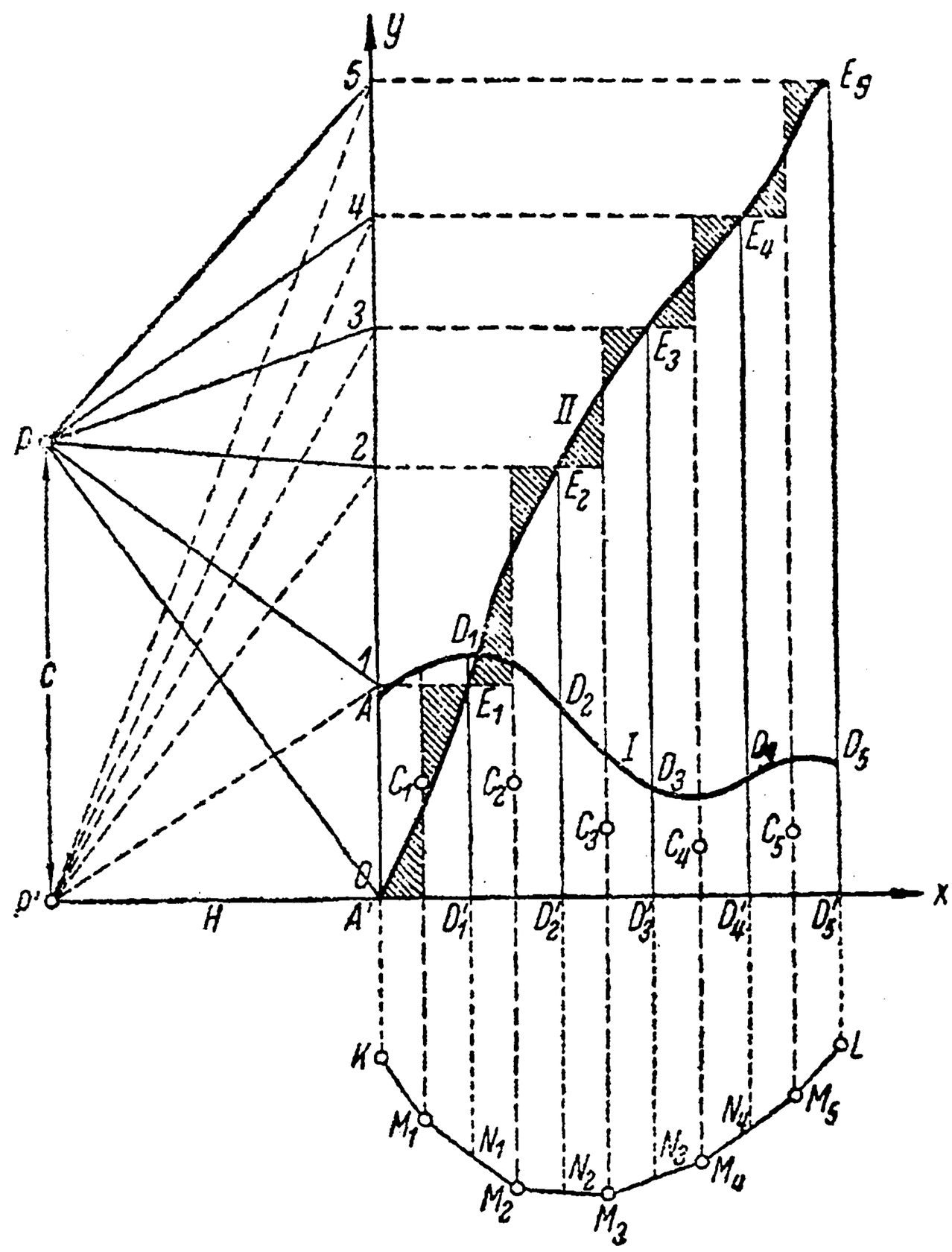
Черт. 508.

Возьмем какую-нибудь из полосок грузовой площади, напр., первую (в увеличенном масштабе она изображена на черт. 508) и соответствующие ей части KN_1 веревочной кривой и KM_1N_1 описанного многоугольника. Дуга KN_1 находится в равновесии; но на нее действует натяжение S_0 нити в точке K, по направлению M_1K, затем — натяжение S_1 нити в точке N_1, по направлению M_1N_1, и наконец, нагрузка, которую можно заменить* равнодействующей силой Q_1. Эти три силы, следовательно, уравновешиваются. Если предположить, что в звеньях KM_1 и M_1M_2 описанного веревочного многоугольника действуют натяжения S_0 и S_1 (горизонтальные составляющие которых равны H), а в точке M_1 приложена сила Q_1, то этот узел многоугольника будет в равновесии. Аналогично исчерпывается вопрос и об остальных узлах.

Значение указанного приближенного метода выходит за пределы задачи,

* Рассматривая дугу KN_1 как бы „затвердевшей", что не отразится на ее состоянии равновесия.

которая к нему привела. Действительно, из него получается *общий метод приближенного интегрирования всякого уравнения вида (48)*, если истолковать решение этого уравнения как построение веревочной кривой при $H = 1$ и интенсивности нагрузки $q = f(x)$. При построении „силового" многоугольника лишь следует иметь в виду, что площади, выражающие „силы", должны откладываться в том же масштабе, что и „горизонтальное натяжение" $H = 1$. Взяв положение полюса P произвольно, мы получим график одной из функций, удовлетворяющих нашему уравнению. Остальные, как явствует из (49), получаются из нее прибавлением *произвольной линейной функции*. Впрочем, можно достигнуть того же результата графически, если отсчитывать ординаты построенного графика не от оси абсцисс, но от *произвольно расположенной прямой*. Действительно, так как ордината точки этой прямой представляет линейную функцию от абсциссы, то, ведя отсчет от прямой, мы тем самым отнимаем от прежних ординат упомянутую линейную функцию.



Черт. 509.

Если построение центров тяжести и определение площадей отдельных полосок, на которые разбивается „грузовая площадь", представляет затруднения, или если нет нужды в большой точности, можно каждую полоску заменить приближенно прямоугольником. Если к тому же основания всех полосок равны, то за отрезки, выражающие площади этих прямоугольников, можно попросту брать их высоты, которые только и нужно откладывать при построении „силового" многоугольника; конечно, это связано с соответствующим изменением масштаба.

Интересно теперь сопоставить изложенный выше способ интегрирования уравнения (53), с помощью „веревочного многоугольника" и метод графического интегрирования, о котором была речь в nn⁰ 197—199.

Так как уравнение (53) требует двух квадратур, то его решение естественно может быть получено двукратным графическим интегрированием. Первое интегрирование по графику функции $q(x)$ (см. кривую I на черт. 509) дает (конечно, с приближением) график интегральной функции

$$\int_0^x q(x)\,dx$$

(кривая II на черт. 509). Обозначим через μ_1 и μ_2 масштабы, в которых откладываются, соответственно, значения x и этой интегральной функции, т. е. отрезки, изображающие единицу длины и единицу силы. Если взять полюсное расстояние $P'A'$ равным

$$\lambda = H\mu_2$$

(„горизонтальное натяжение" H, в масштабе силы), то в результате второго интегрирования, примененного к кривой II, получится график второй интегральной функции

$$\int_0^x dx \int_0^x q(x)\,dx$$

в масштабе

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda} = \frac{\mu_1}{H}$$

или — что то же — график функции

$$\frac{1}{H} \int_0^x dx \int_0^x q(x)\,dx$$

в масштабе μ_1, т. е. в масштабе длины. Этот график и решает задачу об интегрировании уравнения (53), с точностью до произвольной линейной функции [см. (54)].

Можно было бы переместить полюс по вертикали в любое положение P (см. чертеж). Это равносильно уменьшению всех ординат кривой II на постоянную $P'P = c$, а ординат окончательной кривой — на линейную функцию cx, что в нашем случае допустимо. Второе графическое интегрирование (по методу n⁰ 198) на черт. 509 проведено полностью, и именно исходя из полюса P.

При пользовании методом „веревочного многоугольника" — первое интегрирование явно не фигурирует. Но неявно оно все же выполняется, поскольку (в большей или меньшей степени „на-глаз") строятся площади

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots \tag{55}$$

„криволинейных трапеций" $AA'D_1'D_1$, $D_1D_1'D_2'D_2$, ..., ограниченных кривой I. Откладывая же отрезки (55) последовательно по вертикали (на черт. 507 *b*), мы в сущности строим отдельные ординаты

$$Q_1 = D_1'E_1,\quad Q_1 + Q_2 = D_2'E_2,\ \ldots$$

кривой II. За графическим интегрированием — преимущество точности.

Что же касается второго графического интегрирования, то оно полностью проводится, в слегка измененной форме, и в способе „веревочного многоугольника". Фигура, составленная исходящими из полюса P лучами на черт. 509 в точности воспроизводит „силовой многоугольник" на черт. 507 *b*) лишь в положении, повернутом на 180°. Направления лучей $0 - P$, $1 - P$, ... остались прежними, так что и ломаная KL в обоих случаях получается одна и та же.

Еще одна подробность: при графическом интегрировании [по способу n⁰ 198] приходится в отдельных „криволинейных трапециях" $A'E_1D_1'$, $E_1D_1'D_2'E_2$, ... проводить „средние линии", параллельные оси ординат, и именно на этих линиях лежат вершины ломаной линии. В способе же „веревочного многоугольника" ту же роль играют вертикали, проходящие через центры тяжести C_1, C_2, ... „криволинейных трапеций" $AA'D_1'D_1$, $D_1D_1'D_2'D_2$, ... Но из замечания, сделанного в n⁰ 199, мы уже знаем, что те и другие линии соответственно совпадают! Очевидно однако, что практически проводить „средние линии" все же легче, и это проведение может быть выполнено точнее.

Подводя итоги сказанному, приходится признать, что — несмотря на огромное распространение в инженерной практике способа „веревочного многоугольника" — во многих случаях ему следует предпочесть двукратное графическое интегрирование, ибо оно дает результат точнее и, в общем, проще.

272. Изгиб балок. Дифференциальное уравнение изогнутой оси. С этой задачей мы уже имели дело в **186**. Исходя из некоторых простейших предположений, мы пришли там к основному соотношению (48), которое можно переписать в виде:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{EI} M. \tag{56}$$

Как мы помним, E и I здесь являются постоянными (E — модуль упругости, зависящий от материала, из которого изготовлена балка, а I — момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной линии, зависящей от формы этого сечения); произведение EI характеризует жесткость балки. Далее, $\frac{1}{R}$ есть

кривизна изогнутой оси балки в рассматриваемой ее точке A, а M — изгибающий момент, соответствующий этой точке; иными словами, M есть момент внешних сил, приложенных к балке слева (или справа) от точки A, относительно нейтральной линии сечения, проходящего через эту точку. Обыкновенно силы считаются приложенными в вертикальной плоскости, проведенной через ось, и тогда моменты их можно брать просто относительно точки A.

Возьмем ось Ox параллельно оси балки, а ось Oy направим вертикально вверх (см. ниже черт. 510, 513, 514). Тогда, если известны изгибающие балку силы, как-то: собственный вес ее, нагрузка, распределенная по длине балки или сосредоточенная в отдельных точках, реакции точек опоры или закрепления, то изгибающий момент M будет известной же функцией от положения точки A на оси, т. е. от ее абсциссы x: $M(x)$. С другой стороны, мы знаем [134, (49)], что

$$\frac{1}{R}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где y есть ордината точки изогнутой оси балки, соответствующая абсциссе x. Подставляя это выражение в (56), мы получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{EI}M, \tag{57}$$

из которого, зная функцию $M=M(x)$, и надлежит найти неизвестную функцию y от x и тем установить вид *изогнутой оси* балки (называемой иногда *упругой линией*). Его точное решение, однако, затруднительно, и обыкновенно его заменяют другим, приближенным, но значительно более простым уравнением. Именно, в виду того, что прогиб балок весьма мал, сравнительно с их длиной (иначе их нельзя было бы применять в строительном деле!), упругая линия имеет пологую форму, и угловой коэффициент касательной y' настолько мал, что его квадратом, сравнительно с единицей, можно в знаменателе пренебречь, и тогда уравнение (57) примет простой вид:

$$y''=\frac{1}{EI}M. \tag{58}$$

Это — уравнение как раз рассматриваемого нами теперь типа!

Нам уже приходилось, по разным поводам, вычислять изгибающий момент; в следующих nn°, применительно к основным случаям, мы доведем до конца интегрирование уравнения (58) и найдем соответствующие этим случаям упругие линии.

Сейчас же установим правило, которым надлежит руководствоваться при определении знака изгибающего момента. Дело в том, что вторая производная y'' в левой части уравнения (58) может быть как положительной, так и отрицательной; для того чтобы это уравнение имело место всегда, надо знак правой части выбирать в соответствии с знаком левой. Если ось Oy, как мы условились, направлять всегда вверх, то производная y'' будет положительна или отрицательна, в зависимости от того, направлена ли в рассматриваемой точке упругая линия вогнутостью вверх или вниз [128]. С другой стороны, ясно, что вогнутость упругой линии будет направлена вверх, если момент внешних сил, действующих — безразлично — на правую или на левую часть балки, стремится поднять эту часть балки или опустить рассматриваемую точку; наоборот, вогнутость будет направлена вниз, если момент стремится опустить обе части балки или поднять нашу точку. Остается поэтому приписать в первом случае моменту знак (+), а во втором — знак (—), чтобы соответствие знаков в обеих частях уравнения (58) было обеспечено.

Можно это условие выразить и так:

момент внешних сил, приложенных к левой части балки, относительно нейтральной линии взятого сечения, считается положительным, если вращает по часовой стрелке, и отрицательным — в противном случае; для момента сил, приложенных к правой части балки, действует обратное правило: он положителен, если вращает против часовой стрелки, и отрицателен — в противном случае.

273. Изгиб балки с одним заделанным, другим свободным концом. 1°. Рассмотрим балку длины l, которая одним концом наглухо заделана в стену; предположим, что к другому концу приложена сосредоточенная сила P. Ось балки изогнется и примет вид, указанный на черт. 510. Так как заделанный конец балки не может поворачиваться, то касательная к упругой линии в ее левом конце должна быть горизонтальна.

Если оси выбраны так, как указано на чертеже, то, рассекая балку в точке A (абсцисса которой есть x), видим, что на правую часть балки действует сила P, имеющая относительно A момент $P(l-x)$, который следует взять со знаком (—), согласно правилу, формулированному в предыдущем п°. Уравнение (58) примет вид:

$$y'' = \frac{P}{EI}(x-l)$$

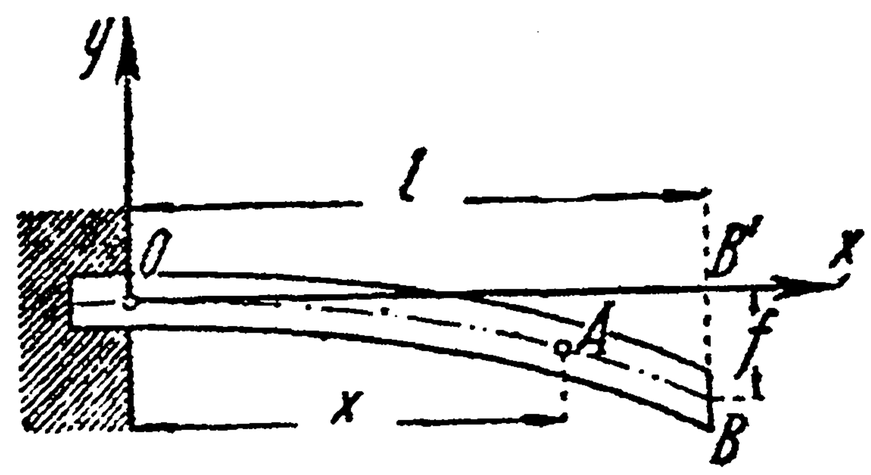
Интегрируя, для первой производной y' получим выражение:

$$y' = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - lx\right) + C_1,$$

где C_1 — постоянная интегрирования Интегрируя еще раз, найдем:

$$y = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right) + C_1x + C_2,$$

где C_2 — также постоянная интегрирования. Так как при $x=0$ (в точке закрепления) касательная горизонтальна ($y'=0$) и нет прогиба ($y=0$), то из этих начальных условий сразу заключаем, что $C_1 = C_2 = 0$. Итак, мы нашли уравнение изогнутой оси:



Черт. 510.

$$y = \frac{Pl^3}{6EI}\left(\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2}\right). \tag{59}$$

Для определения стрелы прогиба $f = B'B$, полагаем здесь $x = l$ и отбрасываем знак, что дает:

$$f = \frac{P}{EI}\cdot\frac{l^3}{3}. \tag{60}$$

2°. Пусть теперь, при тех же условиях закрепления, на балку действует равномерно распределенная по длине сплошная нагрузка. Величину этой нагрузки, приходящуюся на единицу длины балки, обозначим через q; таким образом, величина всей нагрузки есть $Q = ql$. На часть AB балки действует нагрузка $q(l-x)$, которую (при вычислении моментов) можно заменить силой, приложенной в середине отрезка AB. Ее момент относительно A будет $q(l-x)\cdot\frac{l-x}{2}$, так что дифференциальное уравнение упругой линии в этом случае будет:

$$y'' = -\frac{q}{2EI}(x-l)^2 = -\frac{q}{2EI}(x^2 - 2lx + l^2).$$

Интегрируя дважды, последовательно получим:

$$y' = -\frac{q}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - lx^2 + l^2x\right) + C_1,$$

$$y = -\frac{q}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{3} + \frac{l^2x^2}{2}\right) + C_1x + C_2.$$

Как и раньше, убеждаемся в том, что $C_1 = C_2 = 0$. Уравнение упругой линии:

$$y = -\frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x^4}{l^4} - 4\frac{x^3}{l^3} + 6\frac{x^2}{l^2}\right) = -\frac{Ql^3}{24EI}\left(\frac{x^4}{l^4} - 4\frac{x^3}{l^3} + 6\frac{x^2}{l^2}\right). \tag{61}$$

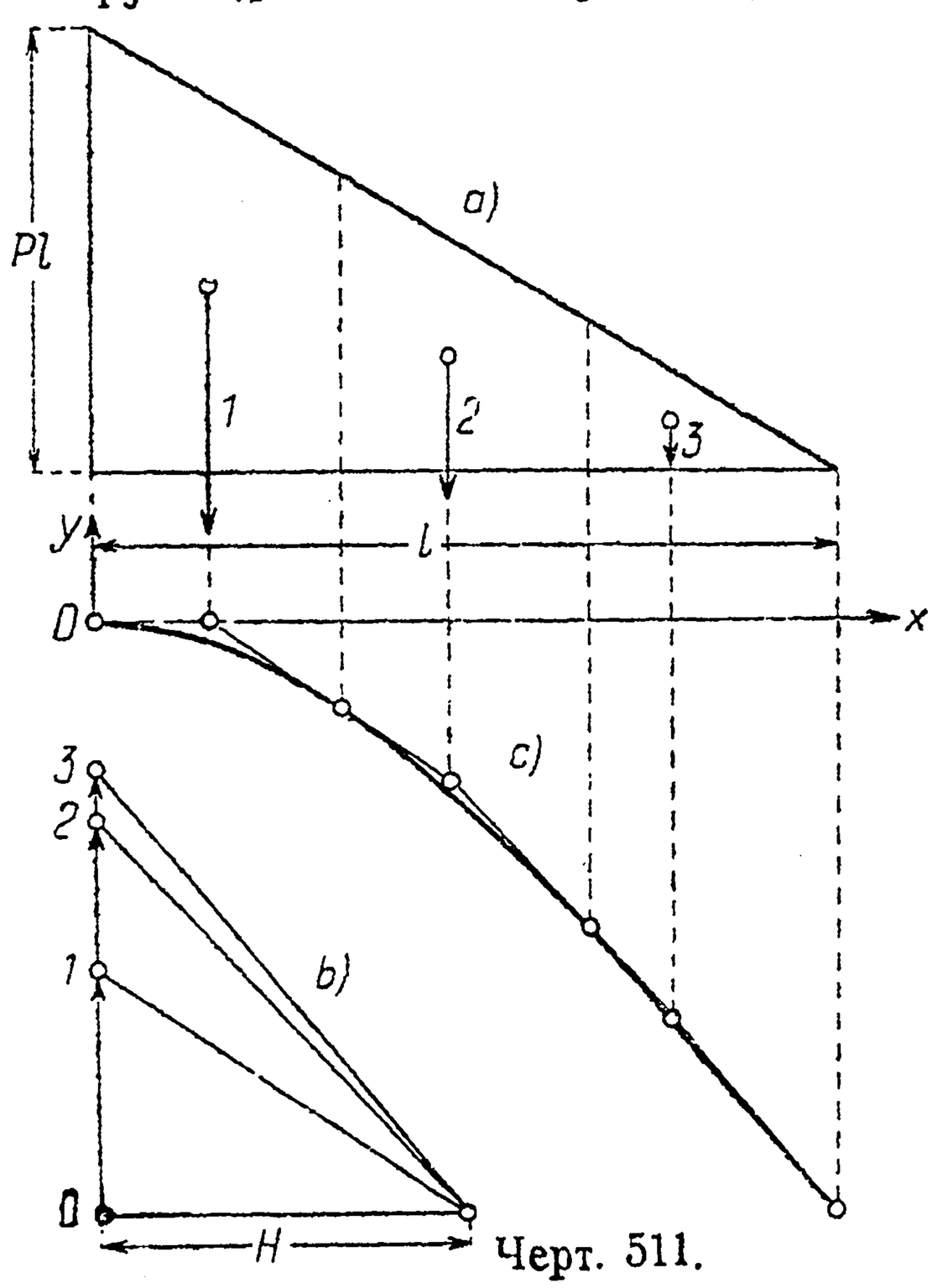
Наибольший прогиб получается при $x = l$; для стрелы прогиба имеем выражение

$$f = \frac{Q}{EI} \cdot \frac{l^3}{8}. \tag{62}$$

Сравнивая со стрелой прогиба в первом случае [см. (60)], видим, что если одна и та же нагрузка $P = Q$ сосредоточена на конце балки, либо распределена равномерно по всей балке, то стрела прогиба во втором случае составит лишь $\frac{3}{8}$ стрелы прогиба в первом.

3⁰. Предположим, наконец, что на балку действует одновременно сплошная нагрузка (q кг на единицу длины) и сила P, приложенная на свободном конце балки, причем направление этой силы может быть как вниз, так и вверх. Не трудно сообразить, что для вычисления момента $M(x)$ можно воспользоваться моментами, вычисленными в случаях 1⁰ и 2⁰ (лишь если сила P действует вверх, в первом надлежит изменить знак), а затем сложить их

В соответствии с этим, и уравнение упругой линии в рассматриваемом случае получается просто путем складывания (если сила P попрежнему действует вниз) или вычитания (если она изменила направление) правых частей уравнений (59) и (61).



Черт. 511.

274. Графическое построение упругой линии. Возвращаясь к задаче 1, покажем на этом простом примере построение упругой линии, как *веревочной кривой* [271]. Так как уравнения веревочной кривой

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}$$

и упругой линии

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

отождествляются, очевидно, если положить

$$H = EI \quad \text{и} \quad q = M(x),$$

то остается принять эпюру изгибающего момента (которая в нашем примере имеет вид треугольника, черт. 511 *a*) за „грузовую площадь", а величину EI — за „горизонтальное натяжение" и построить соответствующую веревочную кривую.

Это построение и выполнено на черт. 511, причем „грузовая площадь" разбита на три части, каждая из которых заменена одной „силой", приложенной в ее центре тяжести. Впрочем, так как момент в нашем случае — отрицательный, то и „силы" следовало направить в противоположную сторону, т. е. вверх, это и учтено при построении „силового многоугольника" (черт. 511 *b*).

Полюсное расстояние следовало бы взять равным жесткости EI, в тех же единицах, в каких отложены „силы"; но тогда полученную веревочную кривую трудно было бы использовать для измерения прогибов, в виду их незначительности, сравнительно с длиной балки. Для того чтобы прогибы оказались отложенными в увеличенном масштабе, по сравнению с длиной балки, обыкновенно берут полюсное расстояние в соответствующее число раз меньшим. Построения на чертеже отвечают следующим данным:

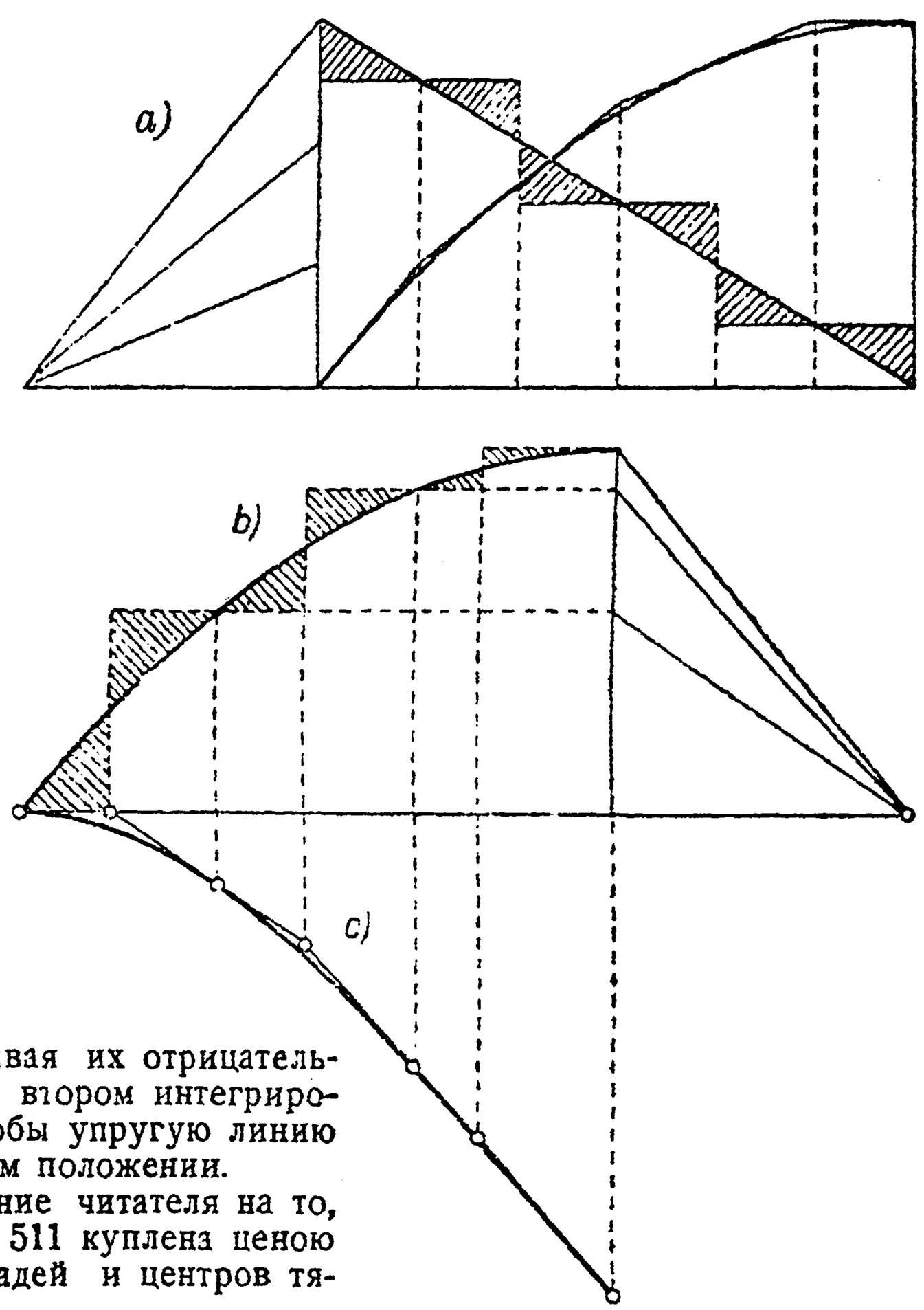
$$l = 200 \text{ см}, \quad I = 500 \text{ см}^4, \quad E = 2\,000\,000 \text{ кг/см}^2, \quad P = 300 \text{ кг},$$

причем масштаб длин: 1 см = 40 см, масштаб моментов: 1 см = 20 000 кг-см, масштаб фиктивных „сил": 1 см = 2 000 000 кг-см²; полюсное расстояние взято

равным 2,5 см, т. е. в 200 раз меньшим, чем следовало бы по масштабу (500 см!), поэтому и прогибы получились в 200-кратном масштабе, по сравнению с длиной балки (так что 1 см представляет 0,2 см фактического прогиба). Наибольший прогиб (на черт. — 4 см) оказывается равным 0,8 см; то же получается и по формуле (60)!

Полюс взят на высоте точки 0, для того чтобы начальный элемент веревочной кривой оказался горизонтальным, как это должно иметь место для упругой линии по условиям закрепления балки; таким образом, не только принято в расчет дифференциальное уравнение, но и наперед учтены начальные условия, вследствие чего сразу получается именно искомая кривая.

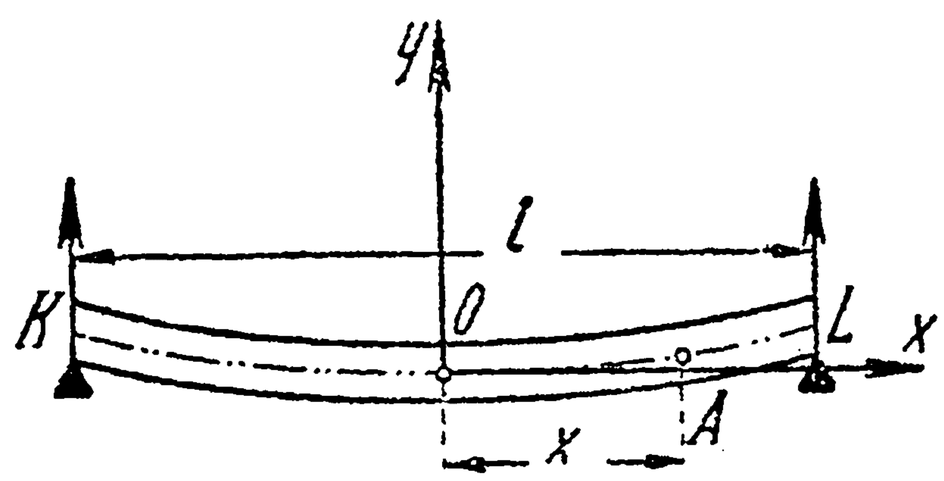
Для сравнения мы приводим на черт. 512 построение упругой линии с помощью двукратного графического интегрирования. Для большей отчетливости мы эти интегрирования выполнили раздельно; практически, конечно, можно было бы чертежи *a*) и *b*) совместить. Так как эпюру моментов мы строим, не учитывая их отрицательного знака, то пришлось при втором интегрировании полюс взять справа, чтобы упругую линию все же получить в правильном положении.



Черт. 512.

Еще раз обращаем внимание читателя на то, что кажущаяся простота черт. 511 куплена ценою определения „на-глаз" площадей и центров тяжести!

275. Изгиб балки с опертыми концами. 1°. Рассмотрим балку длины l, концы которой K и L покоятся на опорах (черт. 513), так что они не могут опуститься, но могут поворачиваться. Пусть на балку действует нагрузка Q, равномерно распределенная по всей длине балки (по q на единицу длины). Из соображений симметрии ясно, что наинизшая точка изогнутой балки придется посередине, так что в ней касательная будет горизонтальна. В этой точке и возьмем начало координат, направив оси так, как указано на чертеже.



Черт. 513.

Нагрузка Q, как ясно также из соображений симметрии, распределится поровну между опорами K и L, вызвав в них реакции величины $\frac{Q}{2}$ и направленные вверх.

Вычислим теперь изгибающий момент $M(x)$ для сечения, соответствующего абсциссе $x > 0$ (т. е. проведенного через точку A). На правую часть балки AL действует, во-первых, реакция опоры L, момент которой относительно

точки A будет $+\frac{Q}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)$. Затем, на ту же часть действует нагрузка $q\left(\frac{l}{2}-x\right)$ которая может быть заменена одной силой, приложенной в середине отрезка AL; ее момент относительно A равен

$$-\frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}-x\right)^2.$$

Таким образом,

$$M(x)=\frac{Q}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)-\frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)^2=\frac{q}{2}\left(\frac{l}{2}-x\right)\left[l-\left(\frac{l}{2}-x\right)\right]=$$

$$=\frac{q}{2}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2-x^2\right],$$

так что

$$y''=\frac{q}{2EI}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right).$$

Интегрируя (и отбрасывая произвольную постоянную, ибо $y'=0$ при $x=0$) получим:

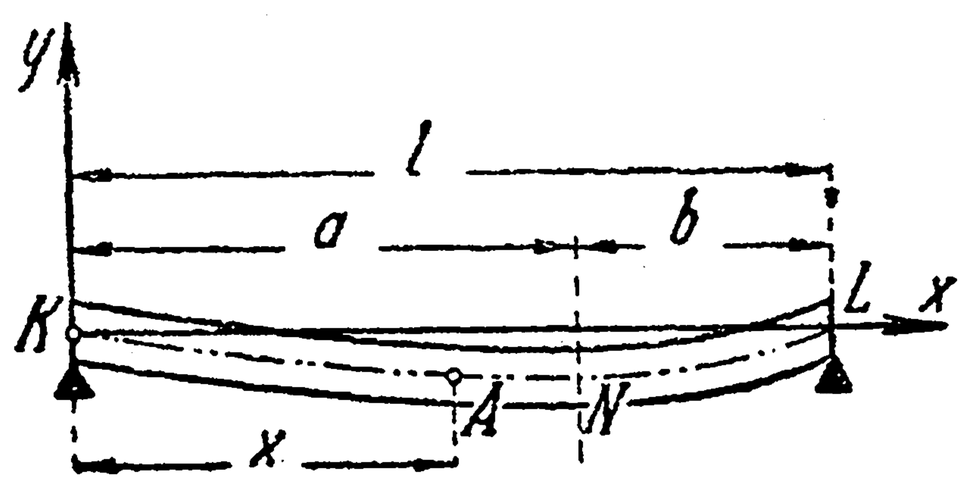
$$y'=\frac{q}{2EI}\left(\frac{l^2}{4}x-\frac{x^3}{3}\right),$$

наконец, еще раз интегрируем (причем снова постоянная равна 0, так как $y=0$ при $x=0$):

$$y=\frac{q}{2EI}\left(\frac{l^2x^2}{8}-\frac{x^4}{12}\right)=-\frac{Ql^3}{24EI}\left(\frac{x^4}{l^4}-\frac{3}{2}\frac{x^2}{l^2}\right);$$

это и есть уравнение изогнутой оси балки, справедливое, в виду симметрии, и для левой ее половины. Для получения стрелы f прогиба, очевидно, достаточно вычислить ординату конца балки, т. е. положить здесь $x=\frac{l}{2}$:

$$f=\frac{5}{8}\cdot\frac{Ql^3}{48EI}. \tag{63}$$



Черт. 514.

В рассматриваемом случае прогиб составляет лишь $\frac{5}{48}$, т. е. 10,4% прогиба, который получился бы, если бы та же балка была одним концом заделана в стену [см. (62)].

2°. Предположим теперь, что на балку KL, при тех же условиях закрепления концов, действует сосредоточенная сила P, приложенная в точке N на расстоянии a от левого конца (черт. 514). Если положить $b=l-a$, то, разлагая силу P на две составляющие, приложенные в точках K и L, для величин этих составляющих будем иметь, как известно из элементов статики, выражения:

$$P_1=\frac{b}{l}P,\qquad P_2=\frac{a}{l}P.$$

Таковы же будут и соответствующие реакции опор, направленные вверх. Вычисляя для точки $A(x)$ изгибающий момент, нам придется особо рассмотреть части KN и NL балки.

Итак, пусть $x<a$; тогда единственной внешней силой, действующей на левую часть балки, будет реакция P_1. Ее момент равен

$$M(x)=P_1x, \tag{64}$$

так что

$$y''=\frac{P_1}{EI}x,\quad y'=\frac{P_1}{EI}\frac{x^2}{2}+C_1,\quad y=\frac{P_1}{EI}\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2.$$

Так как при $x=0$ и $y=0$, то $C_2=0$. Уравнение упругой линии

$$y=\frac{P_1}{EI}\frac{x^3}{6}+C_1x \tag{65}$$

(где C_1 пока остается неизвестной) имеет место лишь для части KN.

Пусть теперь $x>a$, так что точка A лежит правее точки N приложения силы P. Тогда на левую же часть балки, кроме реакции P_1, действует и сама сила P, момент которой относительно A есть $-P(x-a)$. Поэтому в настоящем случае

$$M(x)=P_1x-P(x-a) \tag{64 a}$$

и

$$y''=\frac{P_1}{EI}x-\frac{P}{EI}(x-a).$$

Результат интегрирования можно написать в виде:

$$y'=\frac{P_1}{EI}\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{P}{EI}\frac{(x-a)^2}{2}+C',\ *$$

где C' — постоянная интегрирования. Аналогично, второе интегрирование даст:

$$y=\frac{P_1}{EI}\frac{x^3}{6}-\frac{P}{EI}\cdot\frac{(x-a)^3}{6}+C'x+C'',\ * \tag{65 a}$$

где C'' — также постоянная. Это уравнение выражает часть NL упругой линии.

Замечательно здесь, что упругая линия в разных частях выражается с помощью различных аналитических выражений! Тем не менее в точке N (т. е. при $x=a$) не только оба уравнения (65) и (65 a) должны дать одно и то же значение ординаты y точки N, но и оба уравнения, выражающие угловой коэффициент касательной y', должны также дать для этого коэффициента при $x=a$ одно и то же числовое значение (в теории сопротивления материалов предполагается, что упругая линия не может *иметь угла*, который образовался бы, если бы в точке N касательные справа и слева имели разные угловые коэффициенты). Итак:

$$\frac{P_1}{EI}\frac{a^2}{2}+C_1=\frac{P_1}{EI}\frac{a^2}{2}+C'$$

$\left[\text{ибо член } \frac{P}{EI}(x-a)^2 \text{ обратится в нуль!}\right]$ и, аналогично,

$$\frac{P_1}{EI}\frac{a^3}{6}+C_1a=\frac{P_1}{EI}\frac{a^3}{6}+C'a+C''.$$

---

* При интегрировании членов $-\frac{P}{EI}(x-a)$, $-\frac{P}{EI}\frac{(x-a)^2}{2}$ следует ввести новую переменную $t=x-a$. Это делается для того, чтобы сохранить множитель $x-a$ (обращающийся в 0 в точке N!) и после интегрирования, что значительно облегчает определение произвольных постоянных: постоянные для левой и для правой части балки оказываются теми же! Замечание это принадлежит Клебшу (Clebsch).

У учащихся, в связи с этим, часто возникают сомнения в тождественности результатов, полученных непосредственным почленным интегрированием и интегрированием в только что указанной форме. Возьмем, для примера, двумя способами интеграл от $x-a$. Имеем:

$$1)\ \int(x-a)\,dx=\frac{x^2}{2}-ax+C_1,\quad 2)\ \int(x-a)\,dx=\frac{(x-a)^2}{2}+C_2.$$

Раскрывая второе выражение, получим:

$$\frac{x^2}{2}-ax+\left(\frac{a^2}{4}+C_2\right),$$

это совпадает с первым выражением, если положить $C_1=\frac{a^2}{4}+C_2$. Таким образом, лишь произвольные постоянные, фигурирующие в обоих выражениях, оказываются неравными, и ту постоянную, которая встречается во втором — определить легче.

Из первого тождества $C' = C_1$, а тогда из второго $C'' = 0$. Единственная еще не определенная постоянная C' найдется из условия неподвижности точки L: уравнение (65 a) при $x = l$ должно дать нулевое значение для y:

$$\frac{P_1}{EI}\,\frac{l^3}{6} - \frac{P}{EI}\cdot\frac{(l-a)^3}{6} + C'l = 0,$$

откуда

$$C_1 = C' = \frac{P}{EI}\cdot\frac{b^3}{6l} - \frac{P}{EI}\cdot\frac{bl^2}{6l} = -\frac{Pb}{6EIl}(l^2 - b^2).$$

Определение постоянных в этой задаче также своеобразно!

Предположим теперь, что $a \geqslant b$ и найдем точку наибольшего прогиба. Ограничивая значения x промежутком $(0, a)$, приравняем нулю соответственно первое выражение для производной:

$$\frac{P_1}{EI}\,\frac{x^2}{2} + C_1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{Pb}{2EIl}x^2 - \frac{Pb}{6EIl}(l^2 - b^2) = 0,$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}.$$

Но $l^2 - b^2 = (l-b)(l+b) = a(a+2b) \leqslant 3a^2$, так что это значение $< a$, если $a > b$, и равно a в случае равенства $a = b$. Так как $y'' = \frac{P_1}{EI}x > 0$, то, в первом предположении, найденное значение x, действительно, доставляет функции y наименьшую (а по абсолютному значению — наибольшую) величину, для промежутка $(0, a)$ значений x. Однако, как легко показать, в промежутке (a, l) наименьшее значение (при $a \geqslant b$) всегда достигается на конце $x = a$; поэтому найденная выше точка будет точкой наибольшего прогиба всей вообще балки. Величина стрелы прогиба

$$f = \frac{bP}{3lEI}\left(\frac{l^2 - b^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{66}$$

Если же $a = b$, т. е. сила P приложена в середине балки, то там, разумеется, и будет наибольший прогиб. Выражение для f упрощается в этом случае, ибо $l^2 - b^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4}$, так что

$$f = \frac{P}{EI}\cdot\frac{l^3}{48}. \tag{66 a}$$

Интересно сопоставить это число с величиной стрелы прогиба в предыдущей задаче [см. (63)], если положить $Q = P$: равномерно распределенная нагрузка дает стрелу, которая составляет лишь $\frac{5}{8}$ стрелы, соответствующей такой же по величине силе, но сосредоточенной в середине балки.

Итак, если сила приложена не в середине балки ($a > b$), то наибольший прогиб будет не в точке приложения силы и не в середине балки, а между ними. Однако, расстояние этой точки от середины балки очень мало, где бы ни была приложена сила. В самом деле, это расстояние увеличивается с уменьшением b, но даже в пределе, при $b \to 0$, абсцисса точки наибольшего прогиба достигает лишь значения

$$\sqrt{\frac{l^2}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}58\,l,$$

так что упомянутое расстояние никогда не превосходит $0{,}08\,l$!

3°. Рассмотрим численный пример. Пусть имеем круглую балку из сварочного железа, диаметра $d = 22$ см и длины $l = 300$ см, опертую по концам и несущую посередине груз $P = 12\,000$ кг [о ней была речь в 186, зад. 1]. Полагая в формуле (66 a) $I = \frac{\pi d^4}{64} = 11\,500$ см^4, $E = 2\,000\,000$ кг/см^2, получим: $f = 0{,}3$ см, т. е. лишь

1‰ всего пролета. Наибольший уклон упругая линия имеет, очевидно, по концам. Полагая $x=0$ в выражении для y', найдем: $|y_0'|=|C_1|=\frac{Pl^2}{16EI}=0{,}0293$; это отвечает углу в 1°41′. Таким образом, эти выкладки косвенно подтверждают то предположение о пологости упругой кривой, на котором была построена вся теория.

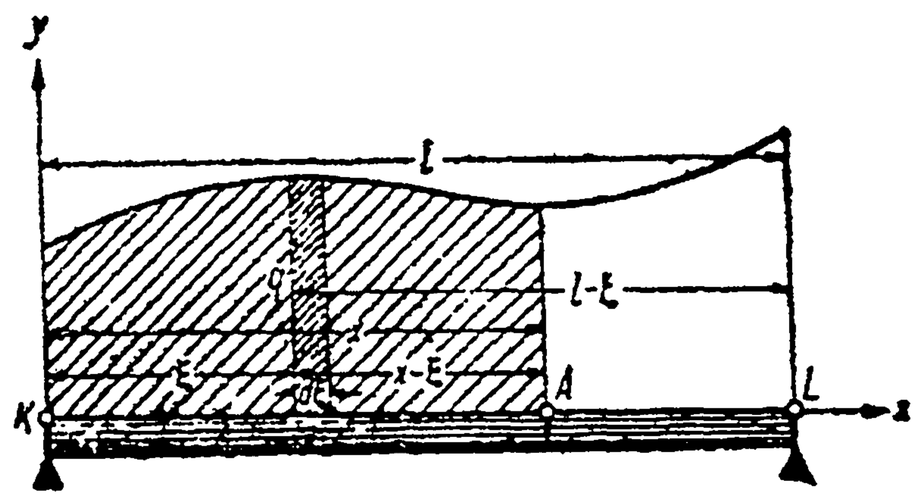
276. Общий случай непрерывно распределенной нагрузки. Пусть попрежнему имеем балку KL с опертыми концами, но предположим на этот раз, что на нее действует непрерывно (но вообще — не равномерно) распределенная нагрузка интенсивности $q=q(x)$, характеризуемая изображенной на черт. 515 „грузовой площадью". Если взять на расстоянии ξ от точки K элемент $d\xi$ балки, то действующая на него элементарная нагрузка $q(\xi)\,d\xi$ окажет на опоры K и L, соответственно, давления:

$$\frac{l-\xi}{l}q\,d\xi \quad \text{и} \quad \frac{\xi}{l}q\,d\xi,$$

вызывая со стороны опор равные, но противоположно направленные реакции. Полные реакции опор, очевидно, будут:

$$Q_1=\frac{1}{l}\int_0^l (l-\xi)\cdot q(\xi)\,d\xi \quad \text{и} \quad Q_2=\frac{1}{l}\int_0^l \xi\cdot q(\xi)\,d\xi. \tag{67}$$

Переходя теперь к вычислению изгибающего момента в сечении, соответствующем абсциссе x, остановимся на левой части балки, KA. Элементарная нагрузка $q\,d\xi$, о которой уже была речь, создает момент $-(x-\xi)\cdot q\,d\xi$; суммируя и принимая в расчет момент реакции Q_1, получим:



Черт. 515.

$$M(x)=Q_1x-\int_0^x (x-\xi)\cdot q(\xi)\,d\xi. \tag{68}$$

Предположим, напр., что нагрузка определяется таким законом:

$$q(x)=\frac{k}{l}x,$$

так что интенсивность ее возрастает от 0 до k, пропорционально x, и грузовая площадь имеет вид треугольника. Тогда, по первой из формул (67):

$$Q_1=\frac{1}{l}\cdot\frac{k}{l}\int_0^l (l-\xi)\cdot\xi\,d\xi=\frac{kl}{6},$$

а по формуле (68):

$$M(x)=\frac{kl}{6}x-\frac{k}{l}\int_0^x (x-\xi)\cdot\xi\,d\xi=\frac{kl}{6}x-\frac{k}{6l}x^3=\frac{k}{6l}(l^2x-x^3).$$

Затем, как обычно,

$$y''=\frac{k}{6lEI}(l^2x-x^3),\quad y'=\frac{k}{6lEI}\left(\frac{l^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)+C_1,$$

и, наконец,

$$y=\frac{k}{6lEI}\left(\frac{l^2x^3}{6}-\frac{x^5}{20}\right)+C_1x+C_2=\frac{kl^4}{120EI}\left(\frac{10}{3}\frac{x^3}{l^3}-\frac{x^5}{l^5}\right)+C_1x+C_2.$$

Постоянные определятся из предельных условий: при $x=0$ и при $x=l$ должны иметь $y=0$; это даст

$$C_2=0,\quad C_1=-\frac{7}{3}\cdot\frac{kl^3}{120EI}.$$

Если ввести еще величину $Q = \frac{kl}{2}$ полной нагрузки, то уравнение упругой линии окончательно примет вид:

$$y = -\frac{Ql^3}{60EI}\left(\frac{x^5}{l^5} - \frac{10}{3}\frac{x^3}{l^3} + \frac{7}{3}\frac{x}{l}\right).$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что наибольший прогиб

$$f \doteq 0{,}013\,\frac{Ql^3}{EI}$$

достигается при $x \doteq 0{,}519\,l$. Точно также читатель легко установит, что изгибающий момент получает наибольшую величину при $x = \frac{l}{\sqrt{3}} \doteq 0{,}577\,l$ („опасное сечение").

Итак, мы умеем теперь устанавливать влияние на балку как отдельных сосредоточенных сил, так и непрерывно распределенной нагрузки. Если бы на балку одновременно действовали и сосредоточенные силы, и непрерывная нагрузка, то оставалось бы лишь просуммировать их действие.

В заключение, сделаем ряд важных замечаний, которые нам понадобятся впоследствии.

Сумма всех сил, действующих на балку с одной стороны от рассматриваемого сечения, называется *перерезывающим усилием* в этом сечении; при этом, если речь идет о левой части балки, то положительными считаются силы, направленные вверх. Не трудно показать, что *перерезывающее усилие $S(x)$ равно производной от изгибающего момента:*

$$\frac{dM(x)}{dx} = S(x). \tag{69}$$

Для случая одной сосредоточенной силы это сразу устанавливается дифференцированием формул (64) и (64 *a*), **275**. Действительно, таким путем получим:

$$\frac{dM}{dx} = P_1, \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < a$$

и

$$\frac{dM}{dx} = P_1 - P, \quad \text{при} \quad a < x \leqslant b.$$

Сила P_1 (для $x < a$) или $P_1 - P$ (для $x > a$) как раз и представляет перерезывающее усилие; это усилие, таким образом, в точке приложения сосредоточенной силы изменяется *скачком*, сохраняя *постоянное значение* в промежутке, где нет сосредоточенных сил.

Обращаясь к случаю непрерывно распределенной нагрузки, продифференцируем формулу (68), которую перепишем в виде:

$$M(x) = Q_1 \cdot x - x \cdot \int_0^x q(\xi)\,d\xi + \int_0^x \xi \cdot q(\xi)\,d\xi.$$

Мы найдем [дифференцируя второе слагаемое как произведение и пользуясь тем, что производной интеграла является подинтегральная функция]:

$$\frac{dM}{dx} = Q_1 - \int_0^x q(\xi)\,d\xi - x \cdot q(x) + x \cdot q(x) = Q_1 - \int_0^x q(\xi)\,d\xi; \tag{70}$$

но Q_1 есть реакция левой опоры (действующая вверх), а интеграл выражает как раз нагрузку, приходящуюся на левую часть балки, так что мы снова получили именно перерезывающее усилие.

Так как более сложные случаи нагрузки приводятся к рассмотренным, то можно считать формулу (69) доказанной для всех случаев.

Если продифференцировать еще раз формулу (70), то получим весьма важный результат:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x), \tag{71}$$

так что *второй производной от изгибающего момента является — с точностью до знака — интенсивность непрерывно распределенной нагрузки.* Таким образом, по грузовой площади можно построить эпюру моментов как веревочную кривую [271], с тем чтобы затем, приняв эту эпюру за фиктивную „грузовую площадь", тем же приемом построить упругую линию.

Наличие, кроме непрерывно распределенной нагрузки, еще и отдельных сосредоточенных сил, не нарушает равенства (71), ибо, как мы видели, к первой производной $\frac{dM}{dx}=S(x)$ при этом присоединяются лишь постоянные слагаемые, которые исчезнут при вторичном дифференцировании.

Полученные результаты распространяются и на другие случаи закрепления концов балки.

277. Дифференциальные уравнения вида: $y''=f(y')$ или $y''=f(x,y')$. Другим частным случаем дифференциального уравнения второго порядка (44), допускающим интегрирование в квадратурах, будет тот, когда фактически правая часть его не содержит ни x, ни y и зависит только от y'. Итак, предположим, что дано уравнение вида:

$$y''=f(y'). \tag{72}$$

Пользуясь тем, что сама неизвестная функция y непосредственно в уравнение не входит, мы возьмем, в качестве новой неизвестной функции, производную y', обозначив ее для удобства через z. Очевидно, тогда $y''=z'$, и уравнение (72) перепишется так:

$$z'=f(z) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx}=f(z).$$

В этом уравнении первого порядка переменные отделяются; в результате интегрирования получим

$$\int\frac{dz}{f(z)}=x+C_1.$$

Одна постоянная, C_1, уже появилась! Найденное соотношение, связывающее x, $z=y'$ и C_1, очевидно, является первым интегралом предложенного уравнения. Выразив отсюда z через x, придем к соотношению вида:

$$z=g(x+C_1).$$

Вспомнив, что $z=y'$, из уравнения

$$y'=g(x+C_1)$$

второй квадратурой сразу получаем искомый общий интеграл

$$y=\int g(x+C_1)\,dx+C_2,$$

с двумя произвольными постоянными.

В том случае, когда уравнение (44) хотя не содержит y, но содержит x, т. е. имеет вид:

$$y''=f(x,y'), \tag{73}$$

подстановка $z=y'$ также выгодна. Она приведет наше уравнение к уравнению первого порядка:

$$z'=f(x,z). \tag{73a}$$

Это *понижение порядка* представляет, во всяком случае, шаг вперед. Теперь уже от вида получившегося уравнения первого порядка зависит, сможем ли мы свести все интегрирование к квадратурам. Допустим, что нам удалось, решив уравнение (73 *a*), получить общее выражение для z:

$$z = g(x, C_1),$$

содержащее (как и должно быть) произвольную постоянную (первый интеграл!) Тогда имеем, как и выше,

$$y' = g(x, C_1)$$

и, наконец,

$$y = \int g(x, C_1)\, dx + C_2.$$

Примеры. 1. $y'' = ay'$.
Решение.

$$z' = az; \quad \frac{dz}{z} = a\,dx; \quad \ln z = ax + \ln c_1; \quad y' = z = c_1 e^{ax}; \quad y = \frac{c_1}{a} e^{ax} + C_2.$$

Если положить $\frac{c_1}{a} = C_1$, то, окончательно:

$$y = C_1 e^{ax} + C_2.$$

2. $y'' = \frac{1}{a}(1 + y'^2)$.

Решение.

$$z' = \frac{1+z^2}{a}; \quad \frac{dz}{1+z^2} = \frac{dx}{a}; \quad \operatorname{arctg} z = \frac{1}{a}(x + C_1); \quad y' = z = \operatorname{tg}\frac{x + C_1}{a}:$$

$$y = -a \ln \cos \frac{x + C_1}{a} + C_2. \ *$$

3. $y'' = \frac{1}{R}(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$ (R = пост.).

Решение.

$$Rz' = (1 + z^2)^{\frac{3}{2}}; \quad R\frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = dx; \quad \frac{Rz}{\sqrt{1+z^2}} = x + C_1;$$

определяем отсюда z и интегрируем:

$$y' = z = \mp \frac{x + C_1}{\sqrt{R^2 - (x + C_1)^2}}; \quad y + C_2 = \pm\sqrt{R^2 - (x + C_1)^2}.$$

Наконец, избавляясь от радикала, можно представить полученный общий интеграл в виде:

$$(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = R^2.$$

Это уравнение, очевидно, выражает семейство всевозможных окружностей данного радиуса R.

Если переписать данное уравнение в виде:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R},$$

* Заметим, что полученное уравнение выражает так называемую *цепную линию равного сопротивления*, т. е. форму равновесия гибкой нерастяжимой тяжелой нити, сечение которой изменяется с таким расчетом, чтобы напряжение во всех сечениях было одинаково.

то легко заметить, что левая его часть выражает кривизну [134, (49)]. Таким образом, мы, в сущности, решали геометрическую задачу: *найти кривые, у которых кривизна постоянно равна* $\frac{1}{R}$ (или — радиус кривизны равен R), и убедились в том, что единственными такими кривыми являются окружности радиуса R (как и следовало ожидать!).

4. К уравнениям рассматриваемого типа (72) относятся и первоначально полученное нами уравнение изогнутой оси балки:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{EI}M(x).$$

[272, (57)], которое мы затем упростили, отбросив слева знаменатель. Как мы знаем теперь, и это более точное уравнение разрешимо в квадратурах. Нужно сказать, однако, что даже в простых случаях изгиба, квадратуры, к которым приводит его решение, не выполняются в конечном виде; напр., первый же случай, рассмотренный в n⁰ 273, приводит сразу к эллиптическим интегралам.

5. $y''=1+\frac{x(y'-x)}{1-x^2}$.

Решение:

$$z'=1+\frac{x(z-x)}{1-x^2} \quad \text{или} \quad z'-\frac{x}{1-x^2}z=\frac{1-2x^2}{1-x^2};$$

интегрирующий множитель для этого линейного уравнения будет [267, (43)]:

$$e^{\int -\frac{x\,dx}{1-x^2}}=e^{\ln\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2};$$

с его помощью уравнение преобразуется к виду;

$$z'\sqrt{1-x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}z=(z\cdot\sqrt{1-x^2})'=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

откуда [см. формулу 63, 168]:

$$z\sqrt{1-x^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-2\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+C_1=x\sqrt{1-x^2}+C_1,$$

$$z=y'=x+\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}$$

и, наконец,

$$y=\frac{1}{2}x^2+C_1\arcsin x+C_2.$$

6. $y''=2x(x^2-y')$.

Отв.

$$z=x^2-1+C_1e^{-x^2},\quad y=\frac{1}{3}x^3-x+C_1\int e^{-x^2}dx+C_2.$$

Уравнение разрешено в квадратурах, но последняя из них не берется в конечном виде!

278. Задачи. 1. *Задача о цепной линии.* Требуется найти положение равновесия гибкой нерастяжимой нити, укрепленной концами в двух данных точках $K(x_0, y_0)$ и $L(x_1, y_1)$, под действием нагрузки (в том числе — собственной тяжести), *равномерно распределенной по ее длине.* Существенная разница по сравнению с задачей n⁰ 269 о веревочной кривой состоит именно в том, что там нагрузка (по тому или иному закону) распределялась по проекции нити, а здесь распределяется по ее длине. Пусть q будет интенсивность нагрузки, т. е. удельная нагрузка, приходящаяся на единицу длины нити.

Рассмотрим, как и в 269, элемент кривой и действующие на него силы (черт. 516).

Сохраняя за буквами S, H и V их прежние значения и выражая нагрузку элемента через $q\,ds$ (ds — элемент дуги), получим условия равновесия в виде:

$$dH = 0, \quad dV - qds = 0. \tag{74}$$

Таким образом, и здесь $H =$ пост. [ср. (51)]. С другой же стороны,

$$\frac{dV}{dx} = q\,\frac{ds}{dx},$$

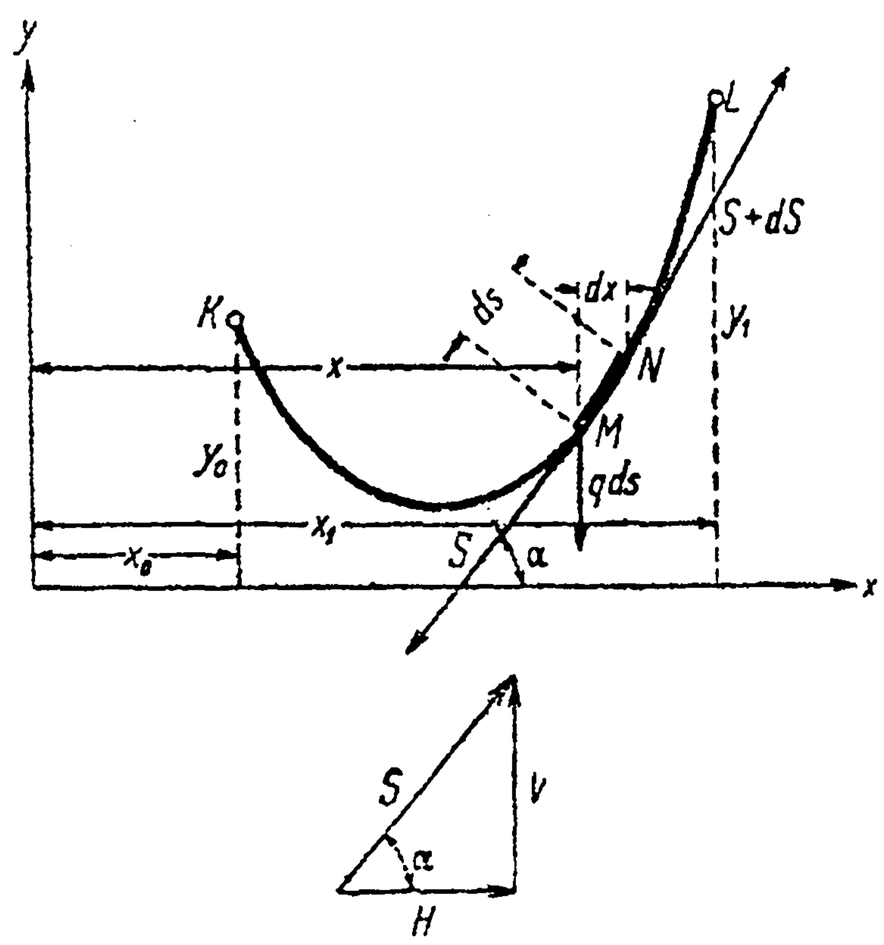
так что, дифференцируя очевидное соотношение

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{V}{H}, \tag{75}$$

на этот раз получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}\cdot\frac{ds}{dx}.$$

[ср. (53)]. Заменяя производную дуги по известной формуле [**130**, (32)], окончательно придем к такому дифференциальному уравнению искомой линии:



Черт. 516.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{76}$$

или

$$y'' = \frac{q}{H}\sqrt{1+y'^2}.$$

Оно имеет вид (72). Решая его, как указано в предыдущем п⁰, положим $z = y'$, $z' = y'$ и последовательно получим:

$$z' = \frac{q}{H}\sqrt{1+z^2}; \quad \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{q}{H}\,dx;$$

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = \frac{q}{H}(x+c_1),$$

$$z+\sqrt{1+z^2} = e^{\frac{q}{H}(x+C_1)}.$$

Отсюда нужно определить $z = y'$; проще всего это сделать, если тождество

$$\left(\sqrt{1+z^2}\right)^2 - z^2 = 1$$

разделить на предыдущее равенство:

$$\sqrt{1+z^2} - z = e^{-\frac{q}{H}(x+C_1)}$$

и этот результат из него же вычесть:

$$y' = z = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{q}{H}(x+C_1)} - e^{-\frac{q}{H}(x+C_1)}\right).$$

Наконец, интегрируя полученное равенство, придем к такому общему интегралу уравнения (76):

$$y + C_2 = \frac{H}{2q}\left(e^{\frac{q}{H}(x+C_1)} + e^{-\frac{q}{H}(x+C_1)}\right).$$

Если постоянные C_1, C_2 подобрать так, чтобы удовлетворялись предельные условия

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0$$
$$y = y_1 \text{ при } x = x_1,$$

то это уравнение и выразит искомую линию. Для упрощения его, перенесем оси координат параллельно самим себе, взяв за новое начало точку $(-C_1, -C_2)$; если

за новыми координатами сохранить прежние обозначения, то уравнение примет вид:

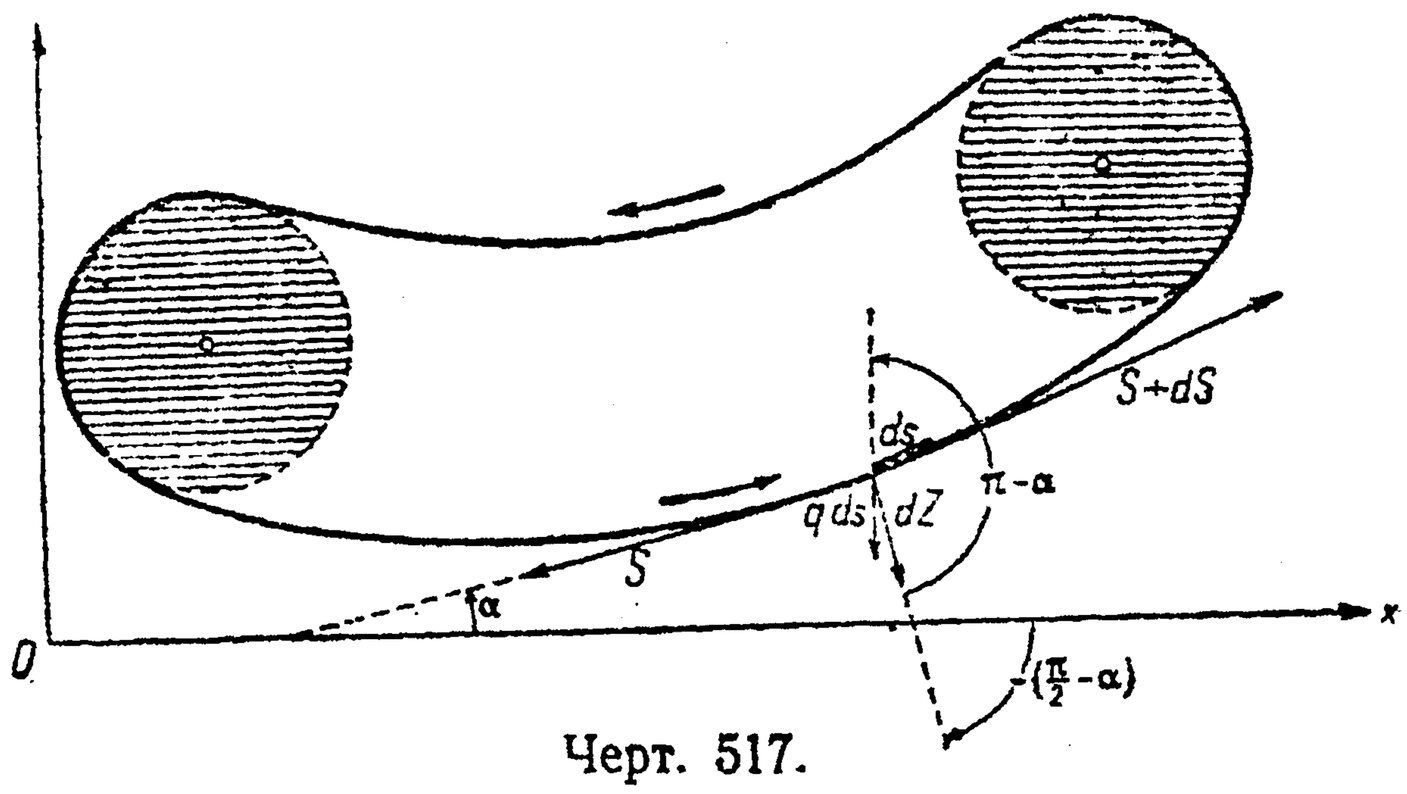
$$y=\frac{H}{2q}\left(e^{\frac{q}{H}x}+e^{-\frac{q}{H}x}\right)$$

или, если положить $\frac{H}{q}=a$:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

— и мы узнаем часто уже встречавшееся нам уравнение *цепной линии*. Лишь теперь самое название это получило надлежащее оправдание!

2. *Провисание движущегося каната.* В тесной связи с решенной задачей находится следующий вопрос: по какой кривой провисает канат (или ремень), натянутый между двумя шкивами (черт. 517) и *движущийся равномерно с некоторой скоростью* v. * В виду криволинейности траектории развивается некоторая центробежная сила, которая действует совместно с натяжением и весом каната и может повлиять на форму кривой.



Черт. 517.

Пусть q теперь будет вес погонной единицы каната; тогда масса его элемента ds будет $dm=\frac{q\,ds}{g}$, а соответствующая центробежная сила [244],

$$dZ=\frac{dm\cdot v^2}{R}=\frac{qv^2}{g}\cdot\frac{ds}{R},$$

где R — радиус кривизны в точке M. Так как [135, (52)] $R=\frac{ds}{d\alpha}$, то для центробежной силы получим окончательно выражение

$$dZ=\frac{qv^2}{g}\,d\alpha.$$

Эта сила действует по нормали к рассматриваемому элементу, вниз, составляя с осями координат, соответственно, углы $-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ (с осью Ox) и $\pi-\alpha$ (с осью Oy), так что проекции ее на эти оси таковы

$$\frac{qv^2}{g}\,d\alpha\cdot\sin\alpha \quad \text{и} \quad -\frac{qv^2}{g}\,d\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Проектируя теперь на оси все силы, действующие на рассматриваемый элемент, вместо условий (74), получим следующие:

$$0=dH+\frac{qv^2}{g}\sin\alpha\cdot d\alpha=d\left(H-\frac{qv^2}{g}\cos\alpha\right)$$

* При этом движение считается установившимся, так что линия провисания сохраняется неизменной и совпадает, таким образом, с траекторией каждой точки каната.

и

$$q\,ds = dV - \frac{qv^2}{g}\cos\alpha\cdot d\alpha = d\left(V - \frac{qv^2}{g}\sin\alpha\right). \tag{77}$$

Из первого немедленно заключаем, что

$$H - \frac{qv^2}{g}\cos\alpha = \text{пост.} = K; \tag{78}$$

если через H_0 обозначить натяжение в самом низшем элементе провисающего каната, то, полагая здесь $\alpha = 0$, видим, что постоянная K определяется равенством:

$$K = H_0 - \frac{qv^2}{g}. \tag{79}$$

Умножая соотношение (78) на $\operatorname{tg}\alpha$ и принимая во внимание, что $H\cdot\operatorname{tg}\alpha = V$ [см. (75)], найдем:

$$V - \frac{qv^2}{g}\sin\alpha = K\operatorname{tg}\alpha = K\cdot\frac{dy}{dx}.$$

А тогда (77) перепишется так:

$$K\cdot d\frac{dy}{dx} = q\,ds$$

или, наконец:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{K}\cdot\frac{ds}{dx} = \frac{q}{K}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Полученное уравнение совершенно тождественно с (76) — лишь постоянная H заменена постоянной K, определяемой из (79). Следовательно, и в случае движения канат все же провисает по *цепной линии*!

3. *Падение тяжелого тела в сопротивляющейся среде.* Рассмотрим случай свободного падения (без начальной скорости) тяжелой материальной точки массы m, скажем, в воздухе. Сопротивление воздуха направлено против движения и зависит от скорости точки v. При $v < 200 - 300\,\frac{\text{м}}{\text{сек}}$ с достаточной точностью можно принять, что это сопротивление пропорционально квадрату скорости:

$$R = a^2v^2,$$

где a^2 — постоянный коэффициент. Для простоты, время t будем отсчитывать от начала падения, а путь s — по вертикали вниз, от начального положения точки. Так как на точку действует сила тяжести вниз и сопротивление воздуха вверх, то по закону Ньютона дифференциальное уравнение движения напишется так:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - a^2v^2 = mg - a^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2; \tag{80}$$

оно также принадлежит тому частному типу (72), которым мы занимались в предыдущем n⁰. Для интегрирования его вернемся к обозначению v для скорости и заменим $\frac{d^2s}{dt^2}$ через $\frac{dv}{dt}$; тогда, разделив на m и положив для удобства:

$$a^2 = \frac{mg}{k^2} \text{ или } k^2 = \frac{mg}{a^2},$$

представим уравнение (80) в виде:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{k^2}(k^2 - v^2).$$

Отделим переменные и разложим получающуюся справа дробь для упрощения интегрирования на простые дроби,

$$dt = \frac{k^2}{g}\cdot\frac{dv}{k^2 - v^2} = \frac{k}{2g}\left(\frac{dv}{k-v} - \frac{dv}{k+v}\right);$$

наконец, „просуммируем" эти выражения для t — от 0 до t, а для v — от 0 до v:

$$t = \frac{k}{2g} \ln \frac{k+v}{k-v}. \tag{81}$$

Решая это уравнение относительно v, получим (если $\frac{g}{k}$ обозначить через α):

$$v = k\frac{e^{2\alpha t}-1}{e^{2\alpha t}+1} = k\frac{1-e^{-2\alpha t}}{1+e^{-2\alpha t}}. \tag{82}$$

Отсюда вытекает, между прочим, следующий весьма замечательный факт: *скорость v всегда остается меньше определенной границы „k", к которой „асимптотически" приближается при $t \to \infty$*:

$$v < v_\infty = k.$$

Переписав уравнение (82) в виде:

$$ds = k\frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}\,dt,$$

„суммируем" еще раз слева — от 0 до s, справа от 0 до t [числитель, с точностью до множителя, есть производная знаменателя!]:

$$s = \frac{k}{\alpha}\ln(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}) - \frac{k}{\alpha}\ln 2,$$

так что окончательно

$$s = \frac{k^2}{g}\ln\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}. \quad \left(\alpha = \frac{g}{k}\right)$$

В полученном выражении не содержится произвольных постоянных, потому что мы в самом процессе решения уже учитывали начальные условия:

$$s = 0 \text{ и } v = \frac{ds}{dt} = 0 \text{ при } t = 0.$$

Можно отсюда и t выразить через s:

$$t = \frac{k}{g}\ln\left(e^{\frac{gs}{k^2}} + \sqrt{e^{\frac{2gs}{k^2}}-1}\right).$$

Полученные результаты применимы и к паденню тяжелого тела в воздухе. Коэфициент a^2 в этом случае имеет вид:

$$a^2 = \psi \cdot \frac{g}{\gamma} \cdot F,$$

где γ — вес 1 м³ воздуха, F — площадь сечения тела, перпендикулярного движению (в м²), а ψ — числовой множитель, зависящий только от формы тела и получающийся из опыта. Если через Q обозначить вес mg тела, то

$$v_\infty = k = \sqrt{\frac{Qg}{\psi\gamma F}}.$$

Для парашюта (полусфера, отверстием вниз) $\psi = 0{,}664$; подставляя еще $g = 9{,}81$ (м/сек²), $\gamma = 1{,}225$ (кг/м³) и полагая $F = \pi r^2$, получим:

$$v_\infty = 1{,}96\frac{\sqrt{Q}}{r}.$$

Если, напр., вес парашюта с пассажиром принять равным 100 кг, а предельную скорость v_∞ установить в 5 м/сек, то отсюда можно подсчитать необходимый радиус парашюта: $r = 3{,}9$ м.*

* Фактически положение несколько усложняется тем обстоятельством, что парашют раскрывается не сразу, так что начальная скорость v_0 не нуль. Пусть читатель сам разберется в общем случае.

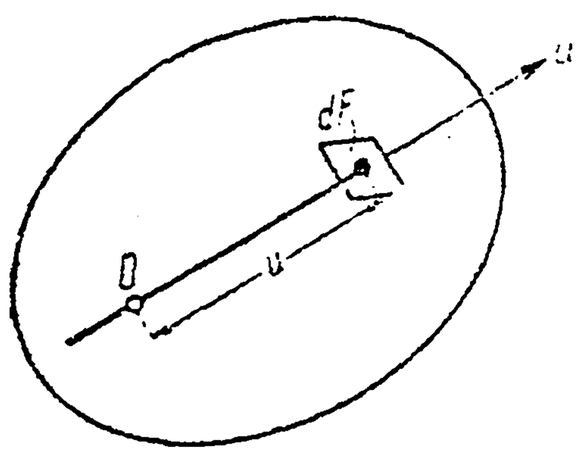
При падении тяжелых тел в воде имеет место положение вещей, вполне аналогичное падению в воздухе, и наше исследование в существенном сохраняет силу. Его результаты, надлежаще приспособленные, приобретают интерес в теории процессов отсадки, при мокром обогащении полезных ископаемых.

Предоставляем читателю разобрать вопрос о движении материальной точки в воздухе вверх; так как сопротивление воздуха тогда будет действовать вниз, то уравнение (80) заменится таким:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg + a^2v^2 = mg + a^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

и приведет к формулам совсем другой формы, чем полученные нами.

4. *Теплопередача через трубу.* Желая решить одну задачу, относящуюся к теории *теплопроводности*, сформулируем сначала основное положение, которое служит отправной точкой во всех вопросах этого рода.



Черт. 518.

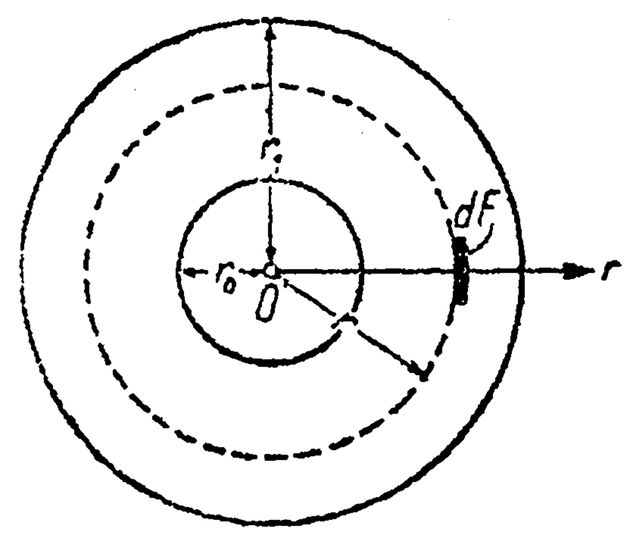
Рассмотрим некоторое тело в определенный момент времени t: температура θ в нем будет „функцией точки". Возьмем какую-нибудь ось Ou (черт. 518) и перпендикулярную к ней элементарную площадку dF, содержащуюся в пределах тела. Тогда *количество тепла q, проходящее через эту площадку (в направлении Ou) за бесконечно малый промежуток времени dt, будет пропорционально площади dF, промежутку dt и скорости падения температуры в направлении Ou*, т. е.

$$q = -\lambda \cdot dF \cdot \frac{d\theta}{du} \cdot dt, \tag{83}$$

Здесь λ — „коэффициент теплопроводности", зависящий от вещества рассматриваемого тела. Знак (—) объясняется тем, что теплота переходит от менее нагретых частей тела к более нагретым, так что $q > 0$ в том именно случае, когда температура θ в направлении Ou падает, т. е. когда $\frac{d\theta}{du} < 0$, и наоборот $q < 0$ (т. е. фактически теплота течет в обратном направлении), когда $\frac{d\theta}{du} > 0$.

[Если теплоту измерять в б. калориях, длины — в метрах, температуру — в °C а время — в часах, то размерность величины λ будет $\frac{\text{Кал.}}{\text{м} \cdot {}^\circ\text{C} \cdot \text{час}}$].

Возьмем теперь трубу, с внутренним радиусом r_0 и наружным r_1, и рассмотрим вопрос о передаче через нее тепла, изнутри наружу. Ограничимся предположением, что *тепловое состояние трубы установилось*, т. е. что *температура θ ее точек не зависит от времени.* Естественно также принять, что она будет одной и той же для точек, лежащих на одном расстоянии r от оси трубы, и меняется только с этим расстоянием; итак, θ есть (искомая) функция от r.



Черт. 519.

Рассмотрим внутри трубы некоторую цилиндрическую поверхность радиуса r ($r_0 < r < r_1$) (черт. 519). Для какого-нибудь элемента dF этой поверхности напишем формулу, аналогичную (83):

$$q = -\lambda \cdot dF \cdot \frac{d\theta}{dr} \cdot dt.$$

Так как в нашем случае $\frac{d\theta}{dr}$ не зависит ни от элемента dF, ни от промежутка времени dt, то, просуммировав выражения подобного типа, получим следующее выражение для полного количества тепла Q, протекающего в 1 час через всю поверхность F:

$$Q = -\lambda \cdot F \cdot \frac{d\theta}{dr}.$$

Если длину трубы обозначить через l, то $F = 2\pi r \cdot l$, так что окончательно

$$Q = -2\pi l \lambda \cdot r \frac{d\theta}{dr}. \tag{84}$$

Так как мы исследуем установившийся процесс, при котором температура не меняется со временем, то тепло не может ни в какой части трубы ни накопляться, ни убывать; а отсюда следует, что фактически величина Q не зависит от r, т. е. через любые цилиндрические поверхности внутри трубы, равно как через внутреннюю и наружную ее поверхности, в час пройдет одно и то же количество тепла. Этот факт можно выразить уравнением:

$$\frac{dQ}{dr} = 0,$$

что в развернутом виде и даст уравнение второго порядка вида (73):

$$r\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{d\theta}{dr} = 0.$$

Здесь, пожалуй, и не стоит вводить особое обозначение для $\frac{d\theta}{dr}$, так как по самому способу получения этого уравнения ясно, что левая часть его есть производная от $r\frac{d\theta}{dr}$,* так что

$$r \cdot \frac{d\theta}{dr} = A = \text{пост.},^{**} \tag{85}$$

откуда

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{A}{r} \text{ и } \theta = A \ln r + B. \tag{86}$$

Из (84) и (85) получаем выражение для количества теплоты, проходящего через трубу в 1 час:

$$Q = -2\pi l \lambda \cdot A. \tag{87}$$

Весь интерес задачи теперь сосредоточивается в определении постоянных A и B.

Если просто предположить, что известны температуры θ_0 и θ_1 внутренней и наружной поверхностей трубы, то эти предельные условия приводят к уравнениям:

$$\theta_0 = A \ln r_0 + B, \ \theta_1 = A \ln r_1 + B,$$

из которых

$$A = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\ln r_1 - \ln r_0}, \qquad B = \frac{\theta_0 \ln r_1 - \theta_1 \ln r_0}{\ln r_1 - \ln r_0};$$

подставляя выражение A в формулу (87), получим, что в 1 час через трубу протекает такое количество теплоты (в б. калориях):

$$Q = \frac{2\pi l}{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_1}{r_0}} (\theta_0 - \theta_1).$$

Однако в действительности чаще оказываются данными не эти температуры, температура Θ_0 вещества (пара, воды и т. п.), заполняющего внутренность трубы равно как и температура Θ_1 среды (воздуха), окружающей трубу.

---

* Если бы мы все же положили $\frac{d\theta}{dr} = u$, то для определения u получили бы уравнение первого порядка:

$$r\frac{du}{dr} + u = 0 \text{ или } r\,du + u\,dr = 0,$$

левая часть которого представляет собою полный дифференциал.

** Собственно, постоянство величины Q дает здесь сразу первый интеграл (85) даже без составления дифференциального уравнения, но лучше все же через него пройти, чтобы уяснить себе происхождение двух произвольных постоянных и способы их определения.

Для теплообмена со средой обыкновенно принимают закон охлаждения Ньютона. Согласно этому закону, *количество тепла q', которое элемент dF поверхности, при температуре θ, отдает среде, имеющей температуру Θ, за время dt, пропорционально площади dF, времени dt и температурной разности $\theta - \Theta$:*

$$q' = \alpha \cdot dF \cdot (\theta - \Theta) \cdot dt. \tag{88}$$

Коэффициент пропорциональности α называется „коэффициентом теплопередачи" и определяется из опыта. [При указанных выше единицах его размерность будет $\left[\frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \cdot \text{час.}}\right]$.

В таком случае, возвращаясь к нашей трубе, количество тепла, полученного за час внутренней поверхностью трубы, выразится так (если через α_0 обозначить соответствующий коэффициент теплопередачи):

$$\alpha_0 \cdot 2\pi r_0 l \cdot (\Theta_0 - \theta_0);$$

с другой стороны, за то же время, через эту поверхность внутрь трубы должно пройти тепло [см. (84)]:

$$-2\pi l \lambda \cdot r_0 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_0.$$

При установившемся процессе оба выражения, очевидно, должны быть равны отсюда получается условие:

$$\alpha_0 (\Theta_0 - \theta_0) = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_0. \tag{89}$$

Совершенно аналогично, рассматривая наружную поверхность трубы, установим условие (где α_1 — новый коэффициент теплопередачи):

$$\alpha_1 (\theta_1 - \Theta_1) = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dr}\right)_1. \tag{89 a}$$

Эти условия представляют собой разновидность предельных условий; вместо того чтобы непосредственно предписывать значения для θ или $\frac{d\theta}{dr}$, при предельных значениях независимой переменной r, здесь устанавливаются лишь некоторые соотношения, которым эти значения должны удовлетворять.

Впрочем, определение произвольных постоянных от этого не становится более трудным; если воспользоваться выражениями (86), в которых следует положить, соответственно, $r = r_0$ и $r = r_1$, то условия (89) и (89 *a*) могут быть переписаны в виде:

$$\left(\ln r_0 - \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0}\right) A + B = \Theta_0,$$

$$\left(\ln r_1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 r_1}\right) A + B = \Theta_1.$$

Отсюда сразу и находятся искомые постоянные; напр., для A получаем значение

$$A = \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} + \ln \frac{r_1}{r_0}}.$$

Подставляя это значение в (87), приходим к практически важной формуле:

$$Q = \frac{2\pi l}{\frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \frac{1}{\alpha_0 r_0} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_1}{r_0}} (\Theta_0 - \Theta_1), \tag{90}$$

дающей часовую потерю тепла через трубу при указанных обстоятельствах.

Пусть, напр., имеем паропровод диаметра 70/76 мм и требуется определить часовую потерю тепла на 1 погонный метр трубы, если температура пара $\Theta_0 = 160°$ C,

а температура воздуха 20° С. При $l = 1$, $r_0 = 0{,}035$, $r_1 = 0{,}038$, $\alpha_0 = 10\,000$, $\alpha_1 = 15{,}1$, $\lambda = 50$, по формуле (90) найдем: $Q \doteq 795 \frac{\text{кал.}}{\text{м} \cdot \text{час}}$.

Нетрудно было бы подсчитать потерю тепла и для случая, когда труба окружена изоляцией, и т. п.

279. Дифференциальные уравнения вида: $y'' = f(y)$. Предположим теперь, что левая часть дифференциального уравнения второго порядка (44) на деле не зависит от x и y' и содержит только y:

$$y'' = f(y). \tag{91}$$

Умножив обе части его на $y'\,dx = dy$, представим его в виде:

$$(y')'\,y'\,dx = y' \cdot dy' = f(y)\,dy.$$

Интегрируя (причем слева рассматриваем y' как переменную независимую, а справа y), получим первый интеграл

$$y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C_1,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = y' = \sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}\,.$$

Отделяем переменные и снова интегрируем:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}} = x + C_2.$$

Таков общий интеграл, с двумя произвольными постоянными.

Примеры. 1. $y'' = -a^2 y$. *

Решение. Итак, по намеченному плану сначала умножаем обе части уравнения на $y'\,dx = dy$:

$$y' \cdot y''\,dx = -a^2 \cdot y\,dy, \text{ откуда: } 2y' \cdot dy' = -a^2 \cdot 2y\,dy,$$

затем интегрируем, беря произвольную постоянную в виде $c_1^2 a^2$:**

$$y'^2 = a^2(c_1^2 - y^2).$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = y' = \pm a\sqrt{c_1^2 - y^2}.$$

Отделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{\sqrt{c_1^2 - y^2}} = \pm a \cdot dx, \quad \arcsin\frac{y}{c_1} = \pm(ax + c_2).$$

---

* Примеры 1 и 2 имеют важность как для приложений, так и для дальнейшего изложения; поэтому мы обращаем на них внимание читателя.

** Это сделать можно потому, что постоянная эта необходимо положительна; иначе правая часть равенства была бы отрицательна, в то время как левая положительна!

Наконец, определяем y:

$$y = \pm c_1 \sin(ax + c_2).$$

Так как знак $\pm$ можно включить в постоянную c_1, то общий интеграл напишется в виде:

$$y = c_1 \cdot \sin(ax + c_2). \tag{92}$$

Разлагая синус суммы по известной формуле, преобразуем его дальше:

$$y = c_1 \cos c_2 \cdot \sin ax + c_1 \sin c_2 \cdot \cos ax.$$

Вводя новые постоянные

$$C_1 = c_1 \cos c_2, \quad C_2 = c_1 \sin c_2,$$

можно наконец придать общему интегралу (92) еще и такую форму:

$$y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax, \tag{92a}$$

2. $y'' = a^2 y$.

Решение.

$$2y' \cdot dy' = a^2 \cdot 2y\, dy; \quad y'^2 = a^2(y^2 + c_1)$$

[произвольную постоянную берем в виде $a^2 c_1$]. Затем,

$$\frac{dy}{dx} = y' = \pm a\sqrt{y^2 + c_1};$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 + c_1}} = \pm a \cdot dx; \quad \ln(y + \sqrt{y^2 + c_1}) = \pm ax + \ln c_2;$$

$$y + \sqrt{y^2 + c_1} = c_2 \cdot e^{\pm ax}.$$

Отсюда можно найти выражение для y:

$$y = \frac{c_2}{2} e^{\pm ax} - \frac{c_1}{2c_2} e^{\mp ax}.$$

Останавливаясь на случае верхних знаков, положим:

$$\frac{c_2}{2} = C_1, \quad -\frac{c_1}{2c_2} = C_2,$$

что позволит написать общий интеграл в форме

$$y = C_1 \cdot e^{ax} + C_2 \cdot e^{-ax}. \tag{93}$$

То же получится и при нижних знаках.

Отметим, что формуле (93) можно придать вид, сближающий ее с формулой (92a). Именно, легко проверить тождество:

$$C_1 e^{ax} + C_2 \cdot e^{-ax} = (C_1 + C_2) \cdot \operatorname{ch} ax + (C_1 - C_2) \cdot \operatorname{sh} ax.$$

Если ввести новые постоянные, положив:

$$c_1 = C_1 - C_2, \quad c_2 = C_1 + C_2,$$

то формулу (93) можно будет переписать так:

$$y = c_1 \cdot \operatorname{sh} ax + c_2 \cdot \operatorname{ch} ax. \tag{93a}$$

В этой форме она часто оказывается более удобной (в смысле определения произвольных постоянных).

3. В качестве третьего примера рассмотрим такую геометрическую задачу: найти все кривые, у которых радиус кривизны пропорционален кубу отрезка нормали (от точки касания до оси Ox).

Вспомнив выражение для радиуса кривизны [**135**, (53)]:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

и не раз встречавшееся выражение для отрезка нормали:

$$n = y\sqrt{1+y'^2},$$

можно записать условие задачи в виде дифференциального уравнения

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = -\frac{1}{k}\cdot y^3(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

или — после упрощений —

$$y'' = -\frac{k}{y^3}.$$

[Мы взяли множитель пропорциональности под видом $-\frac{1}{k}$, чем общность не нарушена, ибо k — число любого знака.] Отсюда, как и выше,

$$2y'dy' = -\frac{2k\cdot dy}{y^3}; \quad y'^2 = c_1 + \frac{k}{y^2} = \frac{c_1y^2+k}{y^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \pm\frac{\sqrt{c_1y^2+k}}{y}; \quad \pm\frac{y\,dy}{\sqrt{c_1y^2+k}} = dx. \tag{94}$$

Предполагая, что $c_1 \neq 0$, умножаем обе части этого уравнения на c_1 и интегрируем:

$$\pm\sqrt{c_1y^2+k} = c_1(x+c_2)$$

(беря вторую постоянную в форме c_1c_2). Наконец, упрощаем, возводя в квадрат:

$$c_1y^2 + k = c_1^2(x+c_2)^2. \tag{95}$$

Так как прибавление к x постоянного слагаемого равносильно передвиганию кривой параллельно оси Ox, то для выяснения типа полученных кривых можно взять $c_2 = 0$; тогда уравнение можно привести к виду:

$$\frac{x^2}{\frac{k}{c_1^2}} - \frac{y^2}{\frac{k}{c_1}} = 1$$

и усмотреть, что при всевозможных комбинациях знаков и изменении величин k и c_1 получаются всевозможные *эллипсы* и *гиперболы*, имеющие одной из своих осей — ось Ox. Это согласуется с известными нам свойствами этих кривых [**137**, II].

Читателя должно поразить отсутствие *парабол* среди полученных кривых, несмотря на то, что и параболы, имеющие ось Ox своею осью, также удовлетворяют требованию задачи. Где мы их пропустили? Очевидно, предполагая $c_1 \neq 0$ (что мы существенно использовали при интегрировании!). Если же, *в частности*, взять $c_1 = 0$, то из (94) будем иметь:

$$2y\,dy = \pm 2\sqrt{k}\,dx, \quad y^2 = \pm 2\sqrt{k}(x+c),$$

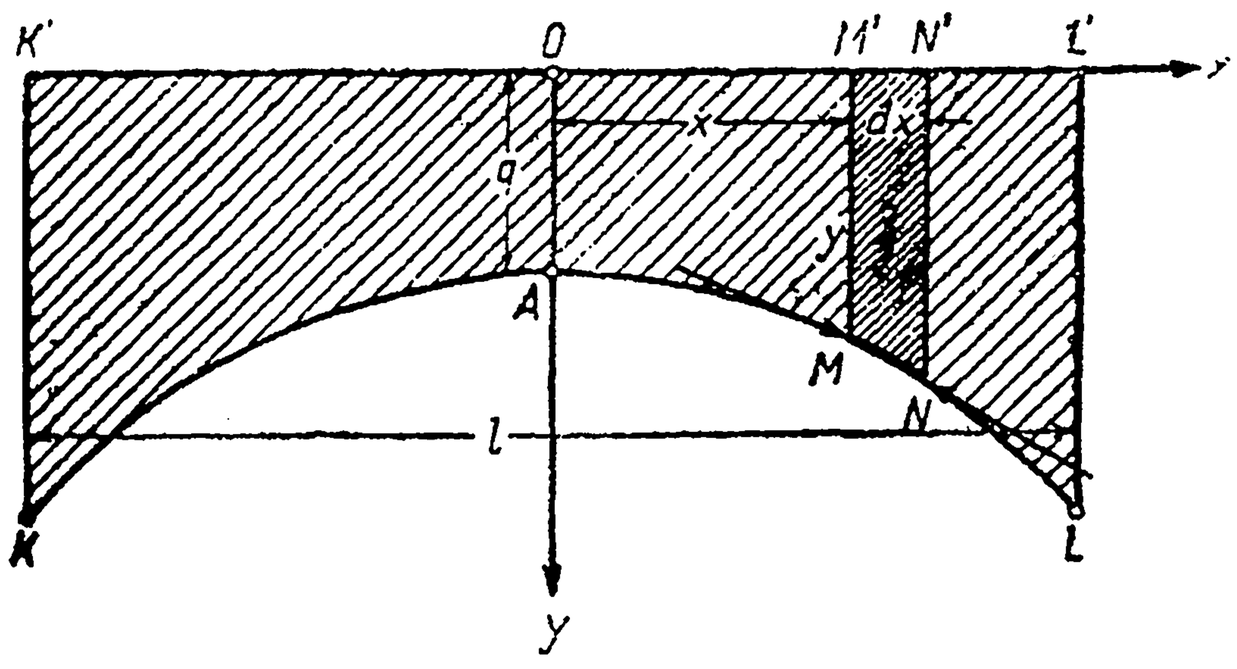
т. е. как раз и восстановим пропущенные параболы!

Эти решения не входят в общий интеграл (95); они являются *особенными* решениями данного дифференциального уравнения [ср. **258**, 3]. Отметим вскользь,

что, в то время как для уравнения первого порядка может быть одно или несколько особенных решений, для уравнения второго порядка особенные решения, как видим, могут даже образовать семейство, зависящее от одного параметра. Впрочем, как мы уже упоминали, для технических приложений математики эти вопросы лишены значения.

Обратимся теперь к изложению некоторых задач технического и механического характера, которые приводятся к дифференциальным уравнениям именно вида (91).

280. Задачи. 1. *Свод с горизонтально ограниченной нагрузкой.* Рассмотрим „бесконечно тонкий" цилиндрический свод, среднее сечение которого представлено на черт. 520 линией KL; для простоты длину свода по оси (перпендикулярно к плоскости чертежа) примем равной 1 м. Нагрузка, которую несет на себе свод, изображена в виде „грузовой площади", снизу ограниченной самой линией KL, а сверху — горизонтальной линией $K'L'$. Задача состоит в определении вида линии KL. Ничего по существу не меняя, мы можем предположить все действующие силы сосредоточенными в плоскости чертежа и рассматривать линию KL как арку.



Черт. 520.

Расположим оси координат, как указано на чертеже, и рассмотрим проекции на них всех сил, действующих на элемент MN арки. Так как положение вещей здесь совершенно аналогично тому, какое мы имели при рассмотрении вопроса о веревочной кривой [269] — лишь „натяжение" заменяется „давлением", — то мы предоставляем читателю самому установить, что *горизонтальный распор* H имеет одно и то же значение во всех точках, и вывести дифференциальное уравнение искомой линии:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{H}y.$$

Общий интеграл этого уравнения нам уже известен [279, зад. 2; в формуле (93a) надлежит взять $a=\frac{1}{\sqrt{H}}$].

$$y=c_1\cdot\operatorname{sh}\frac{x}{\sqrt{H}}+c_2\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{H}}.$$

Предположим, что точки K и L расположены на одной высоте, так что при $x=\frac{l}{2}$ и $x=-\frac{l}{2}$ эта формула должна давать равные ординаты. В виду нечетности функции sh и четности функции ch, отсюда сразу находим, что $c_1=0$. Если к тому же задана интенсивность нагрузки q в замке свода, при $x=0$, то, очевидно, $c_2=q$ и окончательно будем иметь уравнение:

$$y=q\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{H}}.$$

Сопоставляя его с уравнением цепной линии:

$$y=\sqrt{H}\cdot\operatorname{ch}\frac{x}{\sqrt{H}},$$

видим, что наша кривая получается из нее удлинением или укорочением всех ее ординат в одном и том же отношении $\frac{q}{\sqrt{H}}$. Подобная кривая получила название

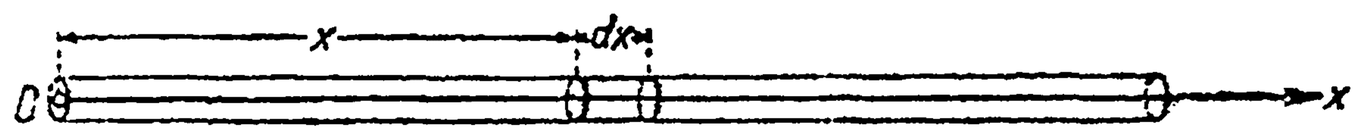
катеноиды * и играет важную роль при проектировании реальных сводов, поскольку эту задачу стараются свести — в некотором смысле — к только что рассмотренной.

2. *Теплоотдача стержня*. Пусть имеем стержень длины l (м) и поперечного сечения σ (м²); один конец его поддерживается при температуре θ_0, в то время как среда, окружающая стержень, имеет температуру Θ. Требуется определить полную теплоотдачу стержня, *предполагая тепловой процесс установившимся*.

При решении этой задачи мы будем пользоваться соображениями, вполне аналогичными тем, которые были развиты при решении задачи 4 n⁰ 278.

Если поперечные размеры стержня незначительны, по сравнению с его длиной, то естественно принять, что во всех точках сечения стержня температура θ одна и та же и зависит, таким образом, только от расстояния x этого сечения от начала стержня.

Выделим (черт. 521) элемент стержня, содержащийся между двумя бесконечно близкими его сечениями, с абсциссами x и $x+dx$. Согласно основному допущеную теории теплопроводности [278, (83)] через первое сечение в течение бесконечно малого промежутка времени dt пройдет количество тепла:



Черт. 521.

$$q = -\lambda\sigma \frac{d\theta}{dx} dt;$$

так как мы предположили тепловое состояние стержня установившимся, так что θ $\left(\text{а с нею и } \frac{d\theta}{dx}\right)$ не зависит от времени, то отсюда легко получить количество тепла, протекающего в течение 1 часа:

$$Q = -\lambda\sigma \frac{d\theta}{dx}. \tag{96}$$

Через второе сечение за то же время пройдет количество $Q+dQ$ тепла, так что в выделенном элементе, не будь теплоотдачи в среду, задержалось бы тепла:

$$-dQ = \lambda\sigma \cdot d\left(\frac{d\theta}{dx}\right). \tag{97}$$

Теперь учтем теплообмен этого элемента со средой. Если обозначить через ρ периметр сечения стержня, то боковая поверхность элемента $dF = \rho\, dx$ и, пользуясь законом Ньютона [278, (88)], не трудно установить часовую отдачу тепла в среду:

$$q' = \alpha \cdot \rho\, dx \cdot (\theta - \Theta). \tag{98}$$

При установившемся состоянии, величины (97) и (98) должны быть равны:

$$\lambda\sigma \cdot d\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = \alpha\rho(\theta - \Theta) \cdot dx$$

или

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \beta^2(\theta - \Theta),$$

если, для краткости, положить:

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha\rho}{\lambda\sigma}}. \tag{99}$$

Итак, распределение температуры в стержне определяется дифференциальным уравнением рассматриваемого типа. Так как нас все время интересует превышение температуры стержня над температурой среды:

$$\tau = \theta - \Theta,$$

* К сожалению, распространен термин „катеноид", представляющий плохую передачу французского термина „la caténoïde". „Катеноидом" математики называют совсем другой образ, именно, поверхность, полученную от вращения цепной линии

то естественно ввести эту величину в качестве неизвестной функции, что кстати и упростит само уравнение:

$$\frac{d^2\tau}{dx^2} = \beta^2\tau.$$

Снова получили то же уравнение (с точностью до обозначений), что и в предыдущей задаче!

Его общий интеграл и здесь удобнее взять в форме (93 *a*):

$$\theta - \Theta = \tau = c_1 \cdot \operatorname{sh}\beta x + c_2 \cdot \operatorname{ch}\beta x. \tag{100}$$

Займемся определением постоянных. Так как при $x = 0$ должны иметь: $\tau = \theta_0 - \Theta$, то из этого предельного условия сразу находим:

$$c_2 = \theta_0 - \Theta = \tau_0. \tag{101}$$

Затем, количество подводимой к концу стержня ($x = l$) теплоты:

$$Q_1 = -\lambda\sigma\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_1$$

(значком 1 мы отмечаем величины, относящиеся к концу стержня) должно быть равно количеству тепла, отдаваемого среде:

$$q_1 = \alpha_1\sigma(\theta_1 - \Theta) = \alpha_1\sigma\tau_1.$$

Это соображение дает второе предельное условие:

$$\alpha_1(\theta_1 - \Theta) + \lambda\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_1 = 0. \tag{102}$$

Продифференцировав уравнение (100):

$$\frac{d\theta}{dx} = \beta c_1 \cdot \operatorname{ch}\beta x + \beta c_2 \cdot \operatorname{sh}\beta x. \tag{103}$$

и полагая в обоих равенствах $x = l$, найдем выражения для θ_1 и $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_1$. Подставив эти выражения в условие (102), перепишем его в виде:

$$\alpha_1(c_1 \cdot \operatorname{sh}\beta l + c_2 \cdot \operatorname{ch}\beta l) + \lambda\beta(c_1 \cdot \operatorname{ch}\beta l + c_2 \cdot \operatorname{sh}\beta l) = 0. \tag{102 a}$$

Зная c_2 из (101), легко отсюда получить значение c_1.

Обыкновенно пренебрегают теплоотдачей оконечности стержня, которая ничтожна по сравнению с теплоотдачей через боковую поверхность. Это равносильно тому, чтобы в условии (102 *a*) положить $\alpha_1 = 0$, что сразу дает:

$$c_1 \cdot \operatorname{ch}\beta l + c_2 \cdot \operatorname{sh}\beta l = 0,$$

так что [см. (101)]

$$c_1 = -c_2 \cdot \operatorname{th}\beta l = -(\theta_0 - \Theta) \cdot \operatorname{th}\beta l. \tag{101 a}$$

Отданное в течение часа тепло, очевидно, равно тому теплу, которое пройде за это время через начальное сечение стержня [см. (103), (101 *a*)]:

$$Q_0 = -\lambda\sigma\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_0 = -\lambda\sigma\beta \cdot c_1 = \lambda\sigma\beta\,(\theta_0 - \Theta) \cdot \operatorname{th}\beta l.$$

[Впрочем, последний множитель обыкновенно настолько близок к 1, что им можно пренебречь, как бы предполагая стержень „бесконечно длинным“].

Пусть, напр., в подшипнике вала развивается такое тепло, что в установившемся состоянии температура соответствующего конца вала на 60° С превосходит температуру воздуха. Полагая длину $l = 1$ м, а диаметр вала $d = 6$ см, так что $\sigma = 0{,}0028$ м², а $\rho = 0{,}189$ м, и принимая

$$\alpha = 6\,\frac{\text{Кал.}}{\text{м}^2 \cdot {}^\circ\text{C} \cdot \text{час}},\quad \lambda = 50\,\frac{\text{Кал.}}{\text{м} \cdot {}^\circ\text{C} \cdot \text{час}},$$

получим, по формуле (99),

$$\beta = 2{,}85\,\frac{1}{\text{м}},$$

так что часовое количество тепла, отводимого вдоль вала, будет:

$$Q_0 = 50 \cdot 0{,}0028 \cdot 2{,}85 \cdot 60 \cdot 0{,}9933 \doteq 24 \frac{\text{Кал.}}{\text{час}}.$$

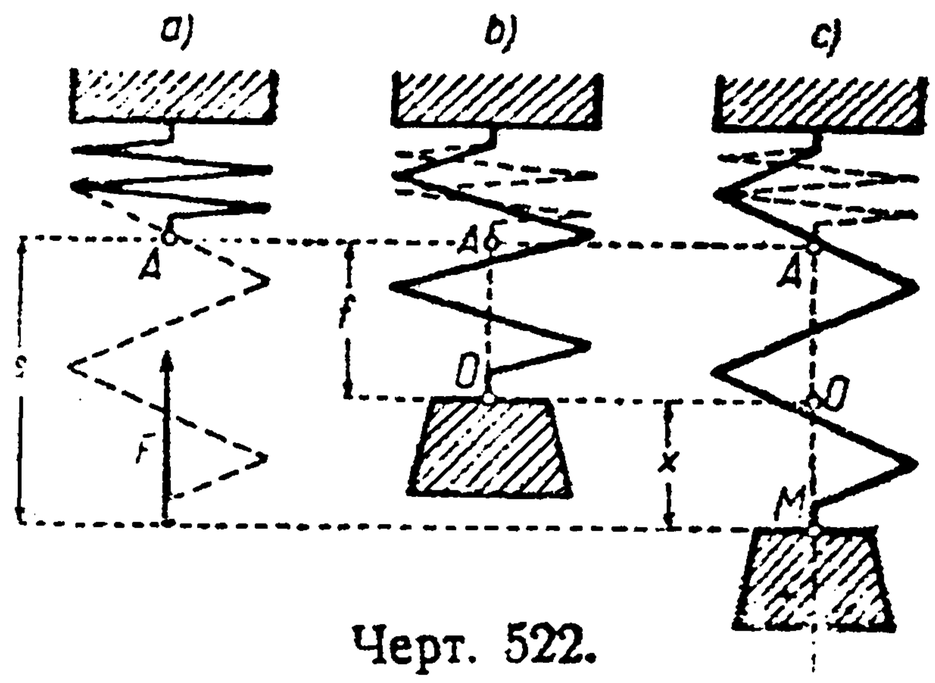
3. *Гармоническое колебательное движение.* Нам многократно уже приходилось говорить о гармоническом колебательном движении [см. напр., 46; 62, 2], и мы знаем даже, что при наличии такого движения на материальную точку необходимо действует *сила, направленная к некоторому определенному центру и прямо пропорциональная расстоянию точки от этого центра* [63, 3]. Теперь мы поставим обратный вопрос, именно: предположим, что на материальную точку действует именно такая сила, и постараемся установить характер движения точки. Такая постановка вопроса больше отвечает реальному положению вещей, когда в первую голову и составляется представление о действующей силе.

Для того чтобы иметь дело с конкретной задачей, рассмотрим пружину, расположенную вертикально и неподвижно укрепленную своим верхним концом (черт. 522 *a*). Если эту пружину растянуть (или сжать) на отрезок s, то упругое сопротивление пружины выразится формулой

$$F = c \cdot s, \tag{104}$$

где c — жесткость пружины. Представим себе, что на пружине подвешено некоторое тело массы m (черт. 522 *b*), находящееся в равновесии в точке O; растяжение $f = AO$ пружины, очевидно, определится из равенства

$$mg = c \cdot f, \tag{104a}$$



Черт. 522.

где mg — вес тела. Если вывести тело из положения равновесия, сообщив ему перемещение или скорость в вертикальном направлении, то оно начнет колебаться около положения равновесия; исследуем же характер этих колебаний.

В положении M, на расстоянии $x = OM$ от точки O (черт. 522 *c*), на тело будут действовать две силы: 1) его вес mg и 2) упругая сила пружины $-cs = -c(f+x)$ [см. (104)], если и расстояния, и силы считать вниз — положительными, а вверх отрицательными. Результирующая сила, во внимание к (104 *a*), будет очевидно равна

$$R = mg - c(f+x) = cf - c(f+x) = -cx,$$

т. е. пропорциональна удалению x от положения равновесия и направлена всегда в сторону Q.

По закону Ньютона, если массой самой пружины пренебречь, уравнение движения нашего тела представится в виде:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -cx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \tag{105}$$

если положить для простоты

$$\omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Для этого уравнения общий интеграл нам также уже известен [см. (92)]:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi), \tag{106}$$

где A и φ — постоянные,* определяемые из начальных условий. Движение, действительно, оказывается гармоническим колебанием!

* Читателю ясно, что в формуле (92) мы произвели просто замену букв:

x	y	a	c_1	c_2
t	x	ω	A	φ

Отметим, что период полного колебания будет:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \tag{107}$$

и зависит только от упругих свойств и массы системы (но не от начального состояния тела!). Что же касается амплитуды A и начальной фазы φ, то для определения их положим $t=0$ в равенстве (106) и в другом равенстве, полученном из него дифференцированием:

$$x' = A\omega\cos(\omega t + \varphi).$$

Мы придем к системе уравнений:

$$x_0 = A\sin\varphi, \quad x_0' = A\omega\cos\varphi,$$

из которых

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_0\omega}{x_0'}, \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{\omega^2}}. \tag{108}$$

Таким образом, величины A и φ зависят существенно и от начального состояния тела.

Само собою разумеется, что все сказанное выше остается справедливым и при других расположениях пружины, как в случае вагонных рессор, буферов и т. п.

Жесткость пружины c в (103) легко устанавливается, если известно смещение s конца пружины под действием одной определенной силы F. Для примера рассмотрим пружину индикатора паровой машины. Обозначим через F площадь поршня индикатора (см²), через σ — масштаб индикатора, т. е. величину перемещения пишущего штифта (мм), отвечающего давлению в 1 кг/см², наконец, через q — передаточное число, дающее отношение перемещения штифта к перемещению поршня. Тогда давлению в 1 кг/см², т. е. силе F кг отвечает перемещение штифта σ мм $= \frac{\sigma}{1\,000}$ м, а следовательно, перемещение поршня, а с ним и подвижного конца пружины, $s = \frac{\sigma}{1000\,q}$ м. Поэтому

$$c = F : s = \frac{1000\,Fq}{\sigma}.$$

Если положить $F = 1{,}602$ (см²), $q = 4$, $\sigma = 2{,}37$ $\left(\text{мм}: \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}\right)$, то $c = 2710$ (кг/м). Для определения периода колебаний системы, состоящей (не считая пружины) из поршня и всех связанных с ним подвижных частей пишущего аппарата, нужно знать еще массу m. Пусть $m = 0{,}00626$ (кг); тогда, по формуле (107):

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}00626}{2710}} = 0{,}0095 \text{ сек.},$$

что отвечает примерно 105 колебаниям в 1 сек., или 6300 — в 1 мин.

Если известно „статическое" смещение пружины f под действием веса тела, mg, то вычислить период можно еще проще. В силу (104 a), отношение $\frac{m}{c}$ в формуле (107) может быть заменено равным ему отношением $\frac{f}{g}$, что дает:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}}. \tag{107a}$$

Например, если замечено, что прогиб рессор груженого товарного вагона $f = 9$ см, то полный период колебаний системы, состоящей из нагруженного кузова вагона и рессор (пренебрегая массой последних) будет:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{9}{981}} = 0{,}63 \text{ сек.}$$

Возьмем другой случай реального осуществления гармонического колебания. Пусть балка, опертая по концам, несет, скажем, по середине груз P; как мы знаем [см. 275, (66a)], соответствующий прогиб выразится так:

$$f = \frac{l^3}{48\,EI} \cdot P.$$

Очевидно, P есть в то же время величина упругого противодействия изогнувшейся балки; рассматривая его как функцию от смещения f середины балки, видим, что эта упругая сила направлена против смещения и пропорциональна ему:

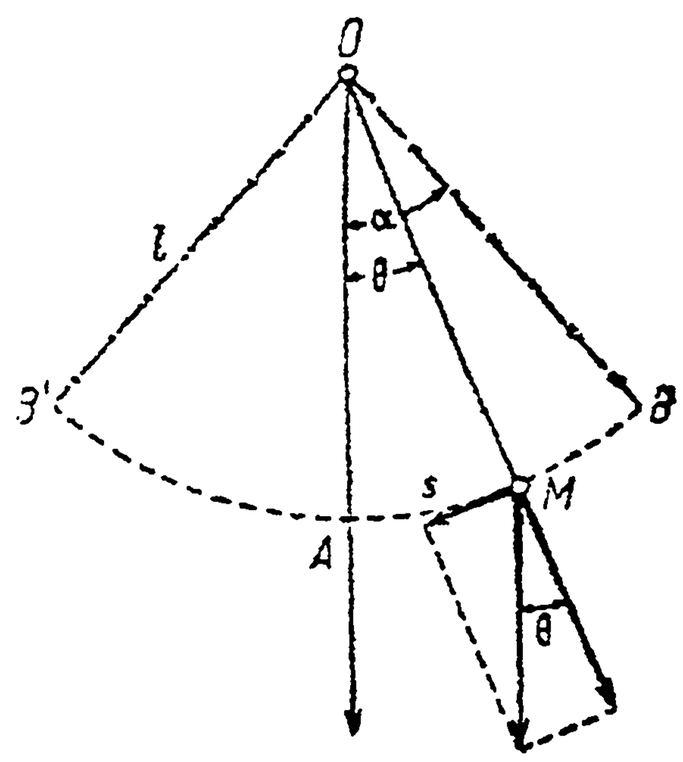
$$P = \frac{48EI}{l^3} \cdot f.$$

Мы имеем здесь точно такое же положение вещей, как и в случае пружины или рессоры! Если подвешенный груз P вывести из положения равновесия, то он будет производить гармоническое колебание с периодом [см. (107a)]

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{Pl^3}{48EIg}}. \qquad (107\,b)$$

При этом предполагается, что весом самой балки, сравнительно с грузом, можно пренебречь.

Обобщая приведенные примеры, можно сказать, что в широком классе случаев упругие противодействия малым деформациям тел оказываются пропорциональными этим деформациям (*закон Гука*) и порождают гармонические колебания. При этом, вместо линейных смещений, иной раз приходится рассматривать углы поворота или закручивания, как например, в случае крутильных колебаний [см. также ниже, задачу 4]. Впоследствии выяснится, как важно, для обеспечения прочности машин и сооружений, уметь устанавливать периоды всех этих колебаний [285, 2].



Черт. 523.

4. *Математический маятник.* Пусть материальная точка массы m подвешена на нерастяжимой нити или стержне (весом которых пренебрегаем) так, что может двигаться по дуге окружности (черт. 523). Эта система и составляет то, что называют математическим маятником. Выведя маятник из положения равновесия OA в положение OB $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, предоставим маятник самому себе. Каков же будет характер его качаний?

Положение маятника будем определять углом $\theta = \sphericalangle AOM$ (положительным — вправо и отрицательным — влево) или дугой $s = \smile AM = l\theta$ (которую также считаем положительной вправо от A и отрицательной влево). Разлагая силу тяжести mg, действующую на точку, как указано на чертеже, видим, что ее касательная составляющая равна $mg \cdot \sin\theta$ и действует в сторону уменьшения s. Поэтому, по закону Ньютона, имеем:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \cdot \sin\theta$$

или, заменяя s через $l\theta$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta. \qquad (109)$$

Если размахи маятника настолько малы, что можно принять $\sin\theta = \theta$, то уравнение примет уже знакомый нам вид:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta,$$

и мы сразу можем написать, пользуясь формулой (92 *a*):

$$\theta = C_1 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + C_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t. \tag{110}$$

Угловая скорость, очевидно, будет

$$\frac{d\theta}{dt} = C_1 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t - C_2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t. \tag{111}$$

Если время t отсчитывать от того момента, когда маятник находился в крайнем положении OB, то начальные условия будут следующие:

$$\theta = \alpha, \ \frac{d\theta}{dt} = 0 \text{ при } t = 0. \tag{112}$$

Подставляя эти значения в формулы (110) и (111), получим, что $C_1 = 0$, $C_2 = \alpha$. Таким образом, окончательно,

$$\theta = \alpha \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

или, умножая на l и полагая $\smile AB = l\alpha = a$,

$$s = a \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

В этом случае точка M производит гармонические колебания по дуге окружности! Продолжительность одного размаха, очевидно, будет

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{113}$$

Отсюда, напр., можно определить длину *секундного маятника*, делающего по одному размаху в 1 секунду; полагая $\tau_0 = 1$, найдем:

$$l = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}994 \text{ м}.$$

Наоборот, подыскав длину секундного маятника, можно установить ускорение силы тяжести, и т. д.

Если угол α уже не мал или если нужна бо́льшая точность, то приходится иметь дело с исходным уравнением (109). Означая штрихом производную по t, перепишем его в виде:

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta,$$

и умножим обе части на $2\theta'\, dt = 2\, d\theta$. Мы получим:

$$2\theta'\, d\theta' = -\frac{2g}{l} \sin \theta\, d\theta$$

или, интегрируя:

$$\theta'^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta + C_1).$$

Начальные условия (112) непосредственно дают: $C_1 = -\cos \alpha$, так что

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = -\sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}.$$

Знак (—) объясняется тем, что с возрастанием времени t угол θ убывает. Отделяем переменные:

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}}.$$

и „суммируем" слева от 0 до t, а справа — от α до θ:

$$t=-\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\alpha}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\theta}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}.$$

Оказывается, однако, что эта квадратура не выполнима в конечном виде, ибо интеграл будет эллиптическим [170]!

Продожительность одного размаха в этом случае определится формулой

$$\tau_0=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\alpha)}}$$

Заменяя оба косинуса по формуле: $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, приведем это выражение к виду:

$$\tau_0=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Если обозначить $\sin\frac{\alpha}{2}$ через k и ввести новую переменную интегрирования φ, полагая:

$$\sin\frac{\theta}{2}=k\sin\varphi,\quad \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=k\cos\varphi\,d\varphi,$$

то окончательно получим:

$$\tau_0=2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=2\sqrt{\frac{l}{g}}\,\mathrm{K},$$

т. е. полный эллиптический интеграл первого рода. Подставим вместо K известное уже нам [208, 5] разложение его по степеням $k=\sin\frac{\alpha}{2}$:

$$\tau_0=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\cdots\right\}.$$

Таким образом, на деле, продолжительность размаха маятника зависит от угла α, и формула (113) получается лишь как первое приближение.

281. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка без последнего члена. Уравнения вида:

$$K(x)y''+L(x)y'+M(x)y=N(x),$$

где $K(x)$, $L(x)$, $M(x)$, $N(x)$ суть некоторые функции от x, называются *линейными*; название это мотивируется тем, что сама неизвестная функция и ее производные все входят в уравнение *линейно*, т. е. в первой степени [ср. 264]. Линейные уравнения второго порядка играют в технике особенно важную роль [в сущности, мы уже встречались с ними в nn° 269—275; 278, 4; 280, 1, 2, 3].

Разделив обе части уравнения на коэффициент $K(x)$ при y'', можно привести его к виду

$$y''+P(x)\,y'+Q(x)\,y=R(x). \tag{114}$$

Наиболее простым будет случай, когда $R(x)=0$:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0. \tag{115}$$

В этом случае уравнение называется *уравнением без последнего члена*; наоборот, уравнение (114), при $R(x)\neq 0$, носит название *уравнения с последним членом*. Иногда уравнение (115) называют также *однородным*, ибо все его члены первой степени относительно y, y', y'', а уравнение (114) — *неоднородным*, так как последний член оказывается нулевой степени относительно указанных переменных. Следует отметить, что здесь словом „однородный" подчеркиваются совсем другие особенности уравнения, нежели в n° 266. Во избежание смешения мы здесь термина „однородный" не будем применять.

Остановим сейчас свое внимание на уравнениях вида (115), без последнего члена. Пусть имеем два частных решения уравнения (115), т. е. какие-нибудь две функции y_1 и y_2 от x, которые ему удовлетворяют, так что

$$y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1=0 \text{ и } y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2=0. \tag{116}$$

Если умножить эти функции на произвольные постоянные множители C_1 и C_2 и произведения сложить, то составится новая функция

$$y=C_1y_1+C_2y_2, \tag{117}$$

про которую легко показать, что она также удовлетворяет уравнению (115). Действительно, из (117) путем дифференцирования получим:

$$y'=C_1y_1'+C_2y_2', \quad y''=C_1y_1''+C_2y_2''. \tag{118}$$

Подставляя вместо y, y' и y'' в левую часть уравнения (115) эти выражения (117), (118), найдем, что

$$\begin{aligned} &y''+P\cdot y'+Q\cdot y= \\ &=(C_1y_1''+C_2y_2'')+P\cdot(C_1y_1'+C_2y_2')+Q\cdot(C_1y_1+C_2y_2)= \\ &=C_1(y_1''+P\cdot y_1'+Q\cdot y_1)+C_2(y_2''+P\cdot y_2'+Q\cdot y_2). \end{aligned}$$

Результат же этот равен нулю, так как последние скобки, в силу (116), будут нулями.

Например, если дано уравнение

$$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0, \tag{119}$$

то непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции $y_1=x$ и $y_2=\frac{1}{x}$ будут его решениями. А тогда по доказанному только что ясно, что и выражение

$$y=C_1x+\frac{C_2}{x} \tag{120}$$

будет удовлетворять уравнению (119), каковы бы ни были значения постоянных C_1, C_2.

Итак, имея два решения уравнения (115), y_1 и y_2, можно по фор-

муле (117) получить бесчисленное множество решений — стоит лишь менять по произволу значения постоянных. Возникает вопрос, можно ли таким образом получить все решения уравнения (115)? Вопрос этот тем более естественен, что выражение (117), удовлетворяющее этому уравнению, содержит две произвольных постоянных, и можно ждать, что оно и даст общий интеграл нашего уравнения.

На деле так оно и будет, но лишь в том случае, если найденные частные решения y_1, y_2 удовлетворяют некоторым, впрочем, почти самоочевидным условиям. Прежде всего, *ни одно из них не должно сводиться к нулю* (который всегда служит „очевидным" решением любого линейного уравнения без последнего члена!). Затем, *эти решения не должны разниться одно от другого лишь постоянным множителем*, или — другими словами — отношение их не должно оставаться постоянным. Два решения, удовлетворяющие этим требованиям, будем называть *независимыми*. Напр., решения x и $\frac{1}{x}$ уравнения (119) будут независимыми, а решения x и, скажем, $2x$ — нет. Итак:

если имеем два независимых решения y_1 и y_2 уравнения (115) *без последнего члена, то равенство* (117) *дает его общий интеграл и охватывает все его решения.*

Таким образом, равенство (120), например, доставляет общий интеграл уравнения (119). На *зависимых* же решениях x и $2x$, разумеется, построить общего интеграла нельзя: выражение

$$y = C_1 x + C_2 \cdot 2x = (C_1 + 2C_2)\, x,$$

хотя и удовлетворяет нашему уравнению, но в сущности содержит лишь одну постоянную $C = C_1 + 2C_2$ и не охватывает всех решений, например, не содержит решений $\frac{1}{x}$, $x + \frac{1}{x}$ и т. д.

Высказанное утверждение представляет замечательнейшее свойство линейного уравнения без последнего члена, ибо сводит нахождение его общего интеграла к нахождению двух (независимых!) частных решений. Как находить эти решения, мы покажем в следующем n⁰ для того простейшего (и важнейшего) частного случая, когда коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ уравнения (115) оказываются постоянными. Попутно, собственно, будет дано и доказательство приведенного выше утверждения, применительно к этому случаю.

282. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, без последнего члена. Предполагая теперь функции $P(x)$ и $Q(x)$ в уравнении (115) постоянными, мы обозначим их просто через p и q, так что уравнение перепишется так:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{121}$$

С некоторыми частными случаями этого уравнения, когда $p = 0$, мы уже имели дело. Остановимся сначала на них.

I. Пусть и q одновременно с p будет нулем, так что уравнение имеет вид:

$$y'' = 0.$$

Непосредственно ясно, что общий интеграл будет

$$y = C_1 x + C_2.$$

II. Если $q \neq 0$, то оно может быть либо положительным, либо отрицательным. Пусть $q = a^2 > 0$, т. е. уравнение дано в виде:

$$y'' + a^2 y = 0 \text{ или } y'' = -a^2 y.$$

Его общий интеграл нам известен [279, (92a)]:

$$y = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax.$$

III. Наконец, если $q = -a^2 < 0$ и уравнение имеет вид:

$$y'' - a^2 y = 0 \text{ или } y'' = a^2 y,$$

то его общий интеграл будет таков [279, (93)]:

$$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax},$$

или же [279, (93 a)]:

$$y = c_1 \cdot \operatorname{sh} ax + c_2 \cdot \operatorname{ch} ax.$$

Легко усмотреть, на каких частных решениях построен общий интеграл в этих случаях. Это будут: x и 1 — в I случае, $\sin ax$ и $\cos ax$ — во II, e^{ax} и e^{-ax} или $\operatorname{sh} ax$ и $\operatorname{ch} ax$ — в III.*

Покажем теперь, что общее уравнение (121), при $p \neq 0$, приводится к одному из этих простых частных случаев.

Для этого прибегнем снова к подстановке Бернулли:

$$y = uv,$$

которою мы выше пользовались для решения линейного уравнения первого порядка [264]; при этом роль новой неизвестной функции, взамен y, пусть играет u, а v означает вспомогательную функцию, выбор которой мы впоследствии произведем именно так, чтобы уравнение для определения u упростилось.

Последовательно дифференцируя, получим:

$$y' = u'v + uv', \quad y'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$

Теперь подставим в уравнение (121):

$$u''v + 2u'v' + uv'' + p(u'v + uv') + quv = 0$$

или

$$u''v + u'(2v' + pv) + u(v'' + pv' + qv) = 0.$$

Для того чтобы свести это уравнение к уже изученному случаю, нужно положить

$$2v' + pv = 0;$$

отсюда легко и определяется вспомогательная функция v:

$$v = e^{-\frac{p}{2}x}. \tag{122}$$

* Что эти выражения сами по себе, действительно, будут частными решениями, можно усмотреть, напр., из того, что они получаются из соответствующего общего интеграла при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ либо $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

Очевидно.

$$v' = -\frac{p}{2} e^{-\frac{p}{2}x}, \quad v'' = \frac{p^2}{4} e^{-\frac{p}{2}x};$$

подставляя теперь в полученное уравнение все эти выражения, по сокращении на показательный множитель (общий всем членам), придем к уравнению:

$$u'' - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) u = 0, \tag{123}$$

уже не содержащему первой производной!

Рассмотрим теперь три возможности:

a) Если $\frac{p^2}{4} - q > 0$, то мы имеем случай III, при $a^2 = \frac{p^2}{4} - q$. Общий интеграл уравнения (123) будет:

$$u = C_1 e^{\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \cdot x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \cdot x},$$

следовательно, в виду (122), общий интеграл уравнения (121) представится в виде:

$$y = C_1 e^{\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)x} + C_2 e^{\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)x}. \tag{124a}$$

b) Если $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то перед нами случай I. В этом случае

$$u = C_1 x + C_2$$

и общий интеграл исходного уравнения получится в форме:

$$y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{p}{2}x}. \tag{124 b}$$

c) Наконец, при $\frac{p^2}{4} - q < 0$, полагая $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, имеем случай II. Общий интеграл уравнения (123):

$$z = C_1 \sin \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x + C_2 \cos \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x,$$

а уравнения (121):

$$y = C_1 e^{-\frac{p}{2}x} \sin \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x + C_2 e^{-\frac{p}{2}x} \cos \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, x. \tag{124 c}$$

Для лучшего запоминания и различения этих случаев полезно параллельно с дифференциальным уравнением (121) рассмотреть вспомогательное алгебраическое уравнение:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{125}$$

с теми же коэффициентами.

В случае a) это уравнение имеет два вещественных различных корня:

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

и, как видим из (124 a), общий интеграл уравнения (121) может быть написан в простой форме:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{126 a}$$

В случае b) корни уравнения (125) совпадают:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}.$$

Обозначая их просто через λ, можем переписать общий интеграл (124 b) так:

$$y = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x}. \tag{126 b}$$

Наконец, в случае c) корни уравнения (125) будут *мнимыми*:

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{-1} \cdot \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Если для простоты, положив

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

написать эти корни в виде:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

то и общий интеграл (124 c) можно написать в более удобной для запоминания форме:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x. \tag{126 c}$$

Итак, теперь мы в состоянии написать общий интеграл уравнения (121) в любом случае. Ясно, что этот общий интеграл в случае a) оказывается построенным на частных решениях:

$$e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}, \tag{127 a}$$

в случае b) — на решениях:

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \tag{127 b}$$

а в случае c) — на решениях:

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad e^{\alpha x} \cos \beta x. \tag{127 c}$$

Вспомогательное уравнение (125), столь значительно облегчающее составление общего интеграла дифференциального уравнения (121), называется его *характеристическим уравнением*.

Итак, если дано уравнение вида (121), нужно прежде всего соста-

вить и решить его характеристическое уравнение, а затем, смотря по тому, будут ли корни последнего вещественными различными, совпадающими или мнимыми, писать прямо общий интеграл в соответствующей из форм (126 *a*), (126 *b*) или (126 *c*).

Например, для уравнения

$$y'' - 3y' + 2{,}25y = 0$$

характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2{,}25 = 0$$

имеет равные корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1{,}5$; поэтому общий интеграл [см. (126 *b*)]:

$$y = (C_1 x + C_2) e^{1{,}5x}.$$

Уравнение

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} + 1{,}2\frac{dr}{d\theta} + r = 0$$

приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + 1{,}2\lambda + 1 = 0,$$

которое имеет мнимые корни:

$$\lambda = -0{,}6 \pm \sqrt{0{,}36 - 1} = -0{,}6 \pm 0{,}8\sqrt{-1}.$$

Следовательно, общий интеграл:

$$r = C_1 e^{-0{,}6\theta} \sin 0{,}8\theta + C_2 e^{-0{,}6\theta} \cos 0{,}8\theta.$$

Если читатель более или менее освоился с мнимыми числами [140—142] и с формулами Эйлера [203, (40) и (40 *a*)], то к решению дифференциального уравнения (121) можно подойти и иначе, минуя раньше рассмотренные частные случаи. Попробуем подставить в левую часть этого уравнения показательное выражение:

$$y = e^{\lambda x}, \tag{128}$$

оставляя пока множитель λ неопределенным. Дифференцирование даст нам:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

так что, подставляя, получим:

$$y'' + py' + qy = e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q).$$

Теперь ясно, что для того чтобы выражение (128) удовлетворяло уравнению нужно, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль, т. е. чтобы множитель λ был корнем характеристического уравнения (125). Таким образом характеристическое уравнение появляется совершенно естественно!

Если характеристическое уравнение имеет два неравных корня, λ_1 и λ_2, вещественных или мнимых — безразлично, то, подставляя в выражение (128), вместо λ, поочередно эти корни, получим, очевидно, два частных решения нашего уравнения вида (127 *a*). Эти решения будут независимыми, ибо их отношение $e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$, в виду неравенства чисел λ_1 и λ_2, не будет постоянным. В таком случае на этих двух решениях может быть построен общий интеграл, в форме (126 *a*).

Если же уравнение (125) имеет два совпадающих корня $\lambda_1 = -\frac{p}{2}$ и $\lambda_2 = -\frac{p}{2}$, которые мы будем обозначать одной буквой λ, то два решения (127 *a*)

теперь сливаются в одно: $e^{\lambda x}$. Его не хватает уже для построения общего интеграла! Но в этом случае, как можно проверить непосредственной подстановкой, решением будет и выражение $x e^{\lambda x}$. Действительно, полагая в левой части уравнения (121):

$$y = x e^{\lambda x}, \quad y' = e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x}, \quad y'' = 2\lambda e^{\lambda x} + \lambda^2 x e^{\lambda x},$$

по сокращении на $e^{\lambda x}$ получим:

$$(2\lambda + \lambda^2 x) + p(1 + \lambda x) + qx = (\lambda^2 + p\lambda + q)x + (2\lambda + p).$$

Коэффициент при x равен нулю, так как λ удовлетворяет характеристическому уравнению; свободный же член будет нулем, ибо $\lambda = -\frac{p}{2}$. Решения (127 *b*) явно независимы (их отношение равно x!), так что на них может быть построен общий интеграл в форме (126 *b*).

Для случая, когда уравнение (125) имеет мнимые (необходимо сопряженные) корни $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, мы получили общий интеграл в форме:

$$y = C_1 e^{(\alpha + \beta i)x} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)x}, \tag{129}$$

построенный на мнимых частных решениях:

$$e^{(\alpha + \beta i)x} \quad \text{и} \quad e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

Если желательно избежать мнимости, то, преобразуя эти выражения по формулам (40) и (40 *a*), 206:

$$e^{(\alpha \pm \beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x \pm i \sin \beta x),$$

можно в общем интеграле

$$y = C_1 e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

отдельно сгруппировать члены, содержащие $\sin \beta x$ и $\cos \beta x$:

$$y = (C_1 + C_2) e^{\alpha x} \cos \beta x + i (C_1 - C_2) e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Если ввести теперь новые произвольные постоянные:

$$c_1 = C_1 + C_2, \quad c_2 = i(C_1 - C_2),$$

то общий интеграл примет „вещественную форму“:

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \tag{130}$$

построенную на частных решениях (127 *c*).

Таким образом, мы наново получили все раньше установленные результаты.

Примеры. 1. Найти общий интеграл уравнения:

1) $y'' + y' + 0{,}25y = 0$; 2) $8y'' + 2y' - 3y = 0$; 3) $\frac{d^2s}{dt^2} - 3\frac{ds}{dt} + 2{,}5s = 0$;

4) $r_\theta'' + 5r = 0$; 5) $\frac{d^2v}{du^2} - 1{,}1\frac{dv}{du} - 3{,}1v = 0$; 6) $\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{dp}{dx} + p = 0$;

7) $9q_y'' - 12q_y' + 4q = 0$; 8) $\frac{d^2s}{dx^2} + 2{,}4\frac{ds}{dx} = 0$.

Решение. 1) характ. ур.: $\lambda^2 + \lambda + 0{,}25 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -0{,}5$, $y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{x}{2}}$ [по формуле (126 *b*)]; 2) $8\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$, $y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{3}{4}x}$ [(126 *a*)]; 3) $\lambda^2 - 3\lambda + 2{,}5 = 0$, $\lambda = 1{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{-1}$,

$s = e^{1,5t}\left(C_1 \sin\frac{t}{2} + C_2 \cos\frac{t}{2}\right)$ [(126 c)]; 4) $\lambda^2 + 5 = 0$, $\lambda = \pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{-1}$,

$r = C_1 \sin\sqrt{5}\,\theta + C_2 \cos\sqrt{5}\,\theta$ [126 c) или 279, (92 a)]; 5) $\lambda^2 - 1,1\lambda - 3,1 = 0$,

$\lambda_1 \doteq 2,4$, $\lambda_2 \doteq -1,3$, $v = C_1 e^{2,4u} + C_2 e^{-1,3u}$ [(126 a)]; 6) $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$,

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$, $p = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ [(126 c)];

7) $9\lambda^2 - 12\lambda + 4 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{3}$, $q = (C_1 y + C_2)\, e^{\frac{2}{3}y}$ [(126 b)]; 8) $\lambda^2 + 2,4\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2,4$, $s = C_1 + C_2 e^{-2,4x}$ [(126 a)].

2. Найти решение уравнения $1,13\frac{d^2\theta}{dt^2} + 10,4\frac{d\theta}{dt} + 14\,\theta = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $\theta = 1,2$ и $\frac{d\theta}{dt} = 0,2$ при $t = 0$.

Решение. $1,13\lambda^2 + 10,4\lambda + 14 = 0$, $\lambda_1 = -0,92$, $\lambda_2 = -4,27$; общий интеграл: $\theta = C_1 e^{-0,92t} + C_2 e^{-4,27t}$, дифференцируем: $\frac{d\theta}{dt} = -0,92\,C_1 e^{-0,92t} - 4,27\,C_2 e^{-4,27t}$; подставляя $t = 0$, для определения постоянных получаем систему уравнений $C_1 + C_2 = 1,2$, $-0,92\,C_1 - 4,27\,C_2 = 0,2$, откуда $C_1 \doteq 1,6$, $C_2 \doteq -0,4$. Итак, окончательно, $\theta = 1,6\,e^{-0,92t} - 0,4\,e^{-4,27t}$.

3. Найти решение уравнения $s''_x + 2,4\,s'_x + 4,75\,s = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $s = 3,3$ и $s'_x = -2,52$ при $x = 0$.

Решение. $\lambda^2 + 2,4\lambda + 4,75 = 0$, $\lambda \doteq -1,2 \pm 1,8\sqrt{-1}$; общий интеграл $s = e^{-1,2x}(C_1 \sin 1,8\,x + C_2 \cos 1,8\,x)$; дифференцируем:
$s'_x = -1,2\,e^{-1,2x}(C_1 \sin 1,8x + C_2 \cos 1,8x) + e^{-1,2x}(1,8\,C_1 \cos 1,8x - 1,8\,C_2 \sin 1,8\,x)$; полагая здесь $x = 0$, получаем такие уравнения для определения постоянных: $C_2 = 3,3$ и $-1,2C_2 + 1,8C_1 = -2,52$, откуда $C_1 = 0,8$, $C_2 = 3,3$. Поэтому $s = e^{-1,2x}(0,8 \sin 1,8x + 3,3 \cos 1,8x)$, что можно также представить в виде: $s = 3,4\,e^{-1,2x} \sin(1,8x + 1,33)$.

283. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с последним членом. Вернемся к уравнению (114) с последним членом, и представим себе, что нам известно какое-нибудь его частное решение $\bar{y}$, а требуется найти его общий интеграл. С этой целью введем, взамен y, новую неизвестную функцию z, полагая

$$y = \bar{y} + z. \tag{131}$$

Эту функцию z иногда называют *дополнительной функцией*; если известно самое общее ее выражение, то, прибавив его к частному интегралу $\bar{y}$, мы и получим самое общее выражение для y. Дифференцируем дважды равенство (131):

$$y' = \bar{y}' + z', \quad y'' = \bar{y}'' + z'', \tag{132}$$

подставим выражения (131) и (132) в наше уравнение (114). Мы получим:

$$(\bar{y}'' + z'') + P\cdot(\bar{y}' + z') + Q\cdot(\bar{y} + z) = R$$

или

$$(z'' + P\cdot z' + Q\cdot z) + (\bar{y}'' + P\cdot\bar{y}' + Q\cdot\bar{y}) = R.$$

Но

$$\bar{y}'' + P \cdot \bar{y}' + Q \cdot \bar{y} = R$$

тождественно, ибо $\bar{y}$ ведь есть решение уравнения (114). Следовательно, для определения дополнительной функции z получаем уравнение

$$z'' + P(x) \cdot z' + Q(x) \cdot z = 0, \tag{133}$$

которое имеет ту же левую часть, что и уравнение (114) — если отвлечься от другого обозначения неизвестной функции, — но уже не имеет последнего члена. По отношению к уравнению (114), это уравнение называют „соответствующим уравнением без последнего члена".

Теперь ясно, что *для получения общего интеграла уравнения (114) с последним членом нужно к частному его решению прибавить дополнительную функцию в виде общего интеграла соответствующего уравнения без последнего члена.*

Если бы, например, было дано уравнение

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 3,$$

для которого частным решением будет $\bar{y} = x^2$ (проверьте!), то для определения дополнительной функции надлежало бы решить уравнение

$$z'' + \frac{1}{x} z' - \frac{1}{x^2} z = 0.$$

Его общий интеграл нам уже известен [ср. (119) и (120)]:

$$z = C_1 x + \frac{C_2}{x},$$

следовательно, общий интеграл исходного уравнения будет

$$y = x^2 + C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

Итак, полное решение уравнения (114) требует уменья производить две операции: 1) находить его частное решение и 2) находить общее решение соответствующего уравнения без последнего члена.

По отношению к уравнению с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = R(x) \tag{134}$$

мы вторую операцию производить умеем [282]. В следующем n⁰ мы покажем, как производить первую операцию, по крайней мере в простейших случаях, важных для приложений.

Отметим еще одно общее положение, справедливое для любых линейных дифференциальных уравнений. Если последний член уравнения (114) представляется в виде суммы двух членов:

$$R(x) = R_1(x) + R_2(x),$$

то достаточно найти частные решения $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ для уравнений

$$y'' + P \cdot y' + Qy = R_1 \quad \text{и} \quad y'' + P \cdot y' + Q \cdot y = R_2$$

порознь, чтобы их сумма $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ дала нам частное решение для уравнения (114). Предоставляем убедиться в этом читателю. Обобщение на случай любого числа слагаемых очевидно.

284. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, с последним членом. I. Если последний член представляется постоянной:

$$R(x) = A,$$

то не трудно подыскать постоянную же B, которая „удовлетворяла" бы уравнению. Так как, при $\bar{y} = B$, очевидно, $\bar{y}' = \bar{y}'' = 0$, то нужно лишь чтобы выполнялось равенство

$$qB = A, \tag{135}$$

откуда $B = \frac{A}{q}$.

Впрочем, все это так лишь при условии, что $q \neq 0$ (мы делили на q!). Если же $q = 0$, то, как видно из (135), частного решения в форме постоянной не существует. В этом случае его следует искать в форме:

$$\bar{y} = Bx.$$

Действительно, продифференцировав, получим:

$$\bar{y}' = B, \quad \bar{y}'' = 0;$$

подстановка в уравнение

$$y'' + py' = A$$

(ведь $q = 0$!) даст нам:

$$pB = A,$$

откуда $B = \frac{A}{p}$, предполагая, конечно, что $p \neq 0$. [Случай, когда и $q = 0$, и $p = 0$, неинтересен: тогда не было бы надобности в частных решениях.]

Например, для уравнения $y'' + 3y' = -2$ частное решение будет $\bar{y} = -\frac{2}{3}x$; так как дополнительная функция в данном случае равна $z = C_1 + C_2 e^{-3x}$, то общий интеграл получается в виде:

$$y = -\frac{2}{3}x + C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

II. Предположим теперь, что $R(x)$ представляет собой целый полином m-ой степени:

$$R(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots$$

(который в частности может свестись и к одному члену!). Здесь также следует различать случай, когда $q \neq 0$ и когда $q = 0$.

Если $q \neq 0$, то существует частное решение в форме полинома той же степени m:

$$\bar{y} = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots$$

Для нахождения этого полинома пользуются *методом неопределенных коэффициентов* [ср. 144, 162], т. е. пишут этот полином с буквенными коэффициентами, дважды дифференцируют, подставляют в уравнение (134) и, наконец, приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. Всего лучше читатель уяснит себе эту процедуру из примера.

Пусть будет дано уравнение:

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x.$$

Так как $q = 2 \neq 0$ и справа полином второй степени, то и частное решение мы попробуем отыскать в форме полинома второй же степени:

$$\bar{y} = b_0 x^2 + b_1 x + b_2.$$

Дифференцируем дважды:

$$\bar{y}' = 2b_0 x + b_1, \quad \bar{y}'' = 2b_0$$

и подставляем в данное уравнение:

$$2b_0 - 3(2b_0 x + b_1) + 2(b_0 x^2 + b_1 x + b_2) = x^2 + 3x$$

или, располагая слева по степеням x:

$$2b_0 \cdot x^2 + (2b_1 - 6b_0)x + (2b_2 - 3b_1 + 2b_0) = x^2 + 3x.$$

Для того чтобы это равенство, действительно, выполнялось, нужно, чтобы равны были коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой его частях, т. е. чтобы было:

$$2b_0 = 1, \quad 2b_1 - 6b_0 = 3; \quad 2b_2 - 3b_1 + 2b_0 = 0.$$

Таким образом составляется система уравнений, из которых последовательно (это характерно для рассматриваемой задачи!) определяются неизвестные коэффициенты: из первого имеем $b_0 = \frac{1}{2}$, подставляя во второе, находим $b_1 = 3$, наконец, подставляя значения обоих найденных коэффициентов в третье уравнение, получаем $b_2 = 4$. Итак,

$$\bar{y} = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4.$$

Дополнительная функция в нашем случае будет $z = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, так что общий интеграл имеет вид:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 + C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Если же $q=0$, то частное решение следует искать в форме:

$$\bar{y}=x(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m)$$
$$=b_0x^{m+1}+b_1x^m+\ldots+b_mx,$$

т. е. в форме полинома на единицу высшей степени, нежели правая часть уравнения, но без свободного члена.

Напр., в случае уравнения

$$y''+3y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4},$$

решение ищем в виде:

$$\bar{y}=x(b_0x+b_1)=b_0x^2+b_1x.$$

Имеем:

$$\bar{y}'=2b_0x+b_1,\quad \bar{y}''=2b_0,$$

$$2b_0+3(2b_0x+b_1)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4},$$

$$6b_0=\frac{1}{2},\quad 3b_1+2b_0=-\frac{1}{4},$$

откуда:

$$b_0=\frac{1}{12},\quad b_1=-\frac{5}{36},$$

так что

$$\bar{y}=\frac{1}{12}x^2-\frac{5}{36}x,$$

наконец,

$$y=\frac{1}{12}x^2-\frac{5}{36}x+C_1+C_2e^{-3x}.$$

III. Рассмотрим, далее, случай:

$$R(x)=Ae^{kx}.$$

Тут следует сначала установить, имеется ли подобный член (с тем же k) в составе дополнительной функции или нет (т. е. является ли k корнем характеристического уравнения, или нет). Остановимся сначала на предположении, что такого члена в разложении дополнительной функции нет. Тогда частное решение существует в аналогичной форме:

$$\bar{y}=Be^{kx}.$$

Чтобы найти постоянную B, продифференцируем дважды:

$$\bar{y}'=Bke^{kx},\quad \bar{y}''=Bk^2e^{kx}$$

и подставим в уравнение:

$$Bk^2e^{kx}+p\cdot Bke^{kx}+q\cdot Be^{kx}=Ae^{kx}.$$

По сокращении на e^{kx} получим:

$$B(k^2+pk+q)=A,$$

откуда

$$B=\frac{A}{k^2+pk+q}. \tag{136}$$

Знаменатель здесь не нуль именно потому, что *k не корень* характеристического уравнения.

Например, если дано уравнение

$$y''-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=3e^{\frac{1}{2}x},$$

то так как в составе дополнительной функции

$$z=C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}x}$$

нет члена с $e^{\frac{1}{2}x}$, то сразу пишем по формуле (136)

$$B=\frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=-6,$$

и окончательно

$$y=-6e^{\frac{1}{2}x}+C_1e^x+C_2e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Если же в составе дополнительной функции член с e^{kx} встречается однажды или дважды, то частное решение ищется в форме (соответственно)

$$\bar{y}=Bxe^{kx} \quad \text{или} \quad \bar{y}=Bx^2e^{kx}.$$

Впрочем, и здесь легко получить общие формулы для B:

$$B=\frac{A}{2k+p} \quad \text{или} \quad B=\frac{A}{2}. \tag{137}$$

Знаменатель первой дроби не нуль, ибо в соответствующем случае k является одним из двух неравных корней $-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ характеристического уравнения и следовательно отлично от $-\frac{p}{2}$.*

IV. Пусть теперь

$$R(x)=A_1\sin lx+A_2\cos lx$$

(очень важный случай!).

* Иначе говоря, так как k — простой корень полинома $\lambda^2+p\lambda+q$, то не обращает в нуль его производной $2\lambda+p$ [145].

Снова устанавливаем, имеется ли подобная группа членов (с тем же l) в составе дополнительной функции, или нет*. Если нет, то частное решение ищется в подобной же форме:

$$\bar{y} = B_1 \sin lx + B_2 \cos lx,$$

если же имеется, то в форме

$$\bar{y} = x\,(B_1 \sin lx + B_2 \cos lx).$$

Выражение указанной формы с неопределенными, буквенными, коэффициентами подставляется в уравнение, приравниваются коэффициенты при $\sin lx$ и $\cos lx$ слева и справа, и т. д.

Пример:

$$y'' - 2y' + 5y = -3 \sin 2x.$$

Дополнительная функция:

$$z = C_1 e^x \sin 2x + C_2 e^x \cos 2x.$$

Здесь легко было бы впасть в заблуждение, подумав, что налицо члены, подобные правой части; на деле этого нет, так как в дополнительной функции члены с синусом и косинусом имеют еще и показательный множитель! Полагаем далее:

$$\bar{y} = B_1 \sin 2x + B_2 \cos 2x, \quad \bar{y}' = 2B_1 \cos 2x - 2B_2 \sin 2x,$$
$$\bar{y}'' = -4B_1 \sin 2x - 4B_2 \cos 2x;$$

подставляем в уравнение:

$$(B_1 + 4B_2) \sin 2x + (-4B_1 + B_2) \cos 2x = -3 \sin 2x.$$

Приравнивая $B_1 + 4B_2$ числу -3, а $-4B_1 + B_2$ *нулю* (ибо справа члена с косинусом вовсе нет), найдем из составленных таким путем уравнений:

$$B_1 = -\frac{3}{17}, \quad B = -\frac{12}{17}.$$

Общий интеграл.

$$y = -\frac{3}{17} \sin 2x - \frac{12}{17} \cos 2x + e^x (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x).$$

Интересно отметить, что в частное решение входят и синус и косинус, несмотря на то, что в правой части предложенного уравнения фигурирует только синус; таким образом, было бы ошибкой искать в этом случае частное решение в форме: $\bar{y} = B \sin 2x$.

Если бы мы все же попробовали это сделать, то второй член левой части уравнения, $-2y'$, дал бы нам член с косинусом, $-4B \cos 2x$; так как справа такого члена нет, то пришлось бы положить $B = 0$, и мы вернулись бы к неинтересному решению 0! Другое дело — если в уравнении слева отсутствует член с пер-

* Т. е. являются ли $\pm l\sqrt{-1}$ корнями характеристического уравнения или нет.

вой производной y'; тогда при $R(x) = A_1 \sin lx$ или $R(x) = A_2 \cos lx$ (если только подобных членов нет в составе дополнительной функции) частное решение можно искать в аналогичной форме: $\bar{y} = B_1 \sin lx$ или, соответственно, $\bar{y} = B_2 \cos lx$. Например, для уравнения

$$y'' + 6y = -3 \sin 2x,$$

подставляя

$$\bar{y} = B \sin 2x, \quad \bar{y}'' = -4B \sin 2x,$$

получим

$$-4B \sin 2x + 6 \cdot B \sin 2x = -3 \sin 2x,$$

откуда: $B = -\frac{3}{2}$, так что частное решение в этом случае будет: $\bar{y} = -\frac{3}{2} \sin 2x$.

Мы уже знаем, что выражение вида $B_1 \sin lx + B_2 \cos lx$ может быть представлено в форме: $B \sin(lx + \alpha)$. Иногда выгоднее искать частное решение сразу в этой форме. Вернемся для примера к уравнению

$$y'' - 2y' + 5y = -3 \sin 2x$$

и подставим в него

$$\bar{y} = B \sin(2x + \alpha), \quad \bar{y}' = 2B \cos(2x + \alpha), \quad \bar{y}'' = -4B \sin(2x + \alpha),$$

так что должно выполняться тождество:

$$B \sin(2x + \alpha) - 4B \cos(2x + \alpha) = -3 \sin 2x.$$

Для определения постоянных B и α проще всего поступить так. Положим в написанном тождестве $2x + \alpha = \frac{\pi}{2}$ или $2x = \frac{\pi}{2} - \alpha$, так что синус обратится в 1, а косинус — в 0, и мы получим:

$$B = -3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -3 \cos \alpha \quad \text{или} \quad \cos \alpha = -\frac{1}{3} B.$$

Положим теперь $2x + \alpha = 0$ или $2x = -\alpha$, так что на этот раз синус равен 0, а косинус равен 1:

$$-4B = -3 \sin(-\alpha) = 3 \sin \alpha \quad \text{или} \quad \sin \alpha = -\frac{4}{3} B.$$

Деля полученные равенства одно на другое, найдем, что

$$\operatorname{tg} \alpha = 4,$$

откуда (если считать $B > 0$, то угол α очевидно лежит в третьей четверти)

$$\alpha = 256^\circ = 4{,}47 \text{ радиана};$$

если же возвести их в квадрат и сложить, то получим:

$$\frac{1}{9} B^2 + \frac{16}{9} B^2 = 1, \quad \text{откуда} \quad B = \frac{3}{\sqrt{17}} \doteq 0{,}73.$$

Окончательно:

$$\bar{y} = 0{,}73 \sin(2x + 4{,}47).$$

Если раскрыть это выражение по формуле для синуса суммы, то вернемся (в пределах точности вычислений) к прежнему выражению для $\bar{y}$.

V. Наконец, рассмотрим еще такой последний член:

$$R(x) = e^{kx}(A_1 \sin lx + A_2 \cos lx).$$

Если подобная группа членов не фигурирует в выражении дополнительной функции, то частное решение ищется в форме, сходной с самим последним членом:

$$\bar{y} = e^{kx}(B_1 \sin lx + B_2 \cos lx).$$

Наоборот, если дополнительная функция содержит такую же группу членов (с теми же k и l), то присоединяют еще множитель x:

$$\bar{y} = x e^{kx} (B_1 \sin lx + B_2 \cos lx).$$

Коэффициенты B_1 и B_2 определяются, как и выше; правда, выкладки здесь несколько сложнее.

Примеры. 1. Найти общий интеграл уравнения: $y'' - 4y = 3x + 5$.

Решение. $z = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$; $\bar{y} = ax + b$ (обозначение коэффициентов безразлично!), $y'' = 0$; $-4(ax + b) = 3x + 5$, $a = -\frac{3}{4}$, $b = -\frac{5}{4}$

Отв. $y = -\frac{3x+5}{4} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

2. То же для уравнения: $4y'' - 4y' + y = 8 e^{\frac{x}{2}}$.

Решение. $z = (C_1 x + C_2) e^{\frac{x}{2}}$; $\bar{y} = ax^2 e^{\frac{x}{2}}$; $\bar{y}' = 2ax e^{\frac{x}{2}} + \frac{a}{2} x^2 e^{\frac{x}{2}}$, $y'' = 2a e^{\frac{x}{2}} + 2ax e^{\frac{x}{2}} + \frac{a}{4} x^2 e^{\frac{x}{2}}$; $4\left(2a + 2ax + \frac{a}{4} x^2\right) e^{\frac{x}{2}} - 4\left(2ax + \frac{a}{2} x^2\right) e^{\frac{x}{2}} + ax^2 e^{\frac{x}{2}} = 8 e^{\frac{x}{2}}$; $8a = 8$, $a = 1$. Можно было и непосредственно воспользоваться второй формулой (137), конечно, разделив предварительно уравнение на 4.

Отв. $y = (x^2 + C_1 x + C_2) e^{\frac{x}{2}}$.

3. То же для уравнения: $y'' + y = \sin x + \cos x$.

Решение. $z = C_1 \sin x + C_2 \cos x$; $\bar{y} = ax \sin x + bx \cos x$, $\bar{y}'' = 2a \cos x - ax \sin x - 2b \sin x - bx \cos x$; $2a \cos x - 2b \sin x = \sin x + \cos x$; $a = \frac{1}{2}$. $b = -\frac{1}{2}$. *Отв.* $y = \frac{\sin x - \cos x}{2} x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

4. То же для уравнения: $y'' + y' + y = e^x \cos \frac{x}{2}$.

Решение. $z = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$; $\bar{y} = ae^x \sin \frac{x}{2} + be^x \cos \frac{x}{2}$, $\bar{y}' = ae^x \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} a e^x \cos \frac{x}{2} + b e^x \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} b e^x \sin \frac{x}{2}$, $\bar{y}'' = \frac{3}{4} a e^x \sin \frac{x}{2} + ae^x \cos \frac{x}{2} + \frac{3}{4} b e^x \cos \frac{x}{2} - b e^x \sin \frac{x}{2}$; подставляя, сокращаем на e^x:

$$\left(\frac{11}{4} a - \frac{3}{2} b\right) \sin \frac{x}{2} + \left(\frac{11}{4} b + \frac{3}{2} a\right) \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2};$$

$$\frac{11}{4} a - \frac{3}{2} b = 0, \quad \frac{11}{4} b + \frac{3}{2} a = 1; \quad a = \frac{24}{157}, \quad b = \frac{44}{157}.$$

Отв. $y = e^x \left(\frac{24}{157} \sin \frac{x}{2} + \frac{44}{157} \cos \frac{x}{2}\right) + e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$.

5. Найти частное решение уравнения: $y'' - 4y = 2e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям: $y = \frac{1}{2}$ и $y' = \frac{3}{2}$ при $x = 0$.

Решение. $z = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$; $\bar{y} = Bx e^{2x}$, причем B сразу определяется по первой формуле (137): $B = \frac{2}{2 \cdot 2 + 0} = \frac{1}{2}$. Общий интеграл:

$$y = \left(\frac{1}{2} x + C_1\right) e^{2x} + C_2 e^{-2x}; \; y' = \left(\frac{1}{2} + x + 2C_1\right) e^{2x} - 2C_2 e^{-2x}.$$

Полагая $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $y' = \frac{3}{2}$, получим уравнения: $C_1 + C_2 = \frac{1}{2}$, $2C_1 - 2C_2 = 1$, откуда $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = 0$. *Отв.* $y = \frac{1}{2}(x+1) e^{2x}$.

285. Колебательные явления. Превосходное применение изложенной теории линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами дает исследование механических и электрических колебаний. Мы сосредоточим внимание исключительно на первых.

1. *Колебания в сопротивляющейся среде.* Вернемся к задаче [рассмотренной в **280**, 3] о колебании тела массы m под влиянием центральной силы, пропорциональной удалению точки от центра, напр., упругой силы пружины (черт. 522). Предположим теперь, однако, что движение тела встречает со стороны среды (воздух, масло) сопротивление, которое — при небольших скоростях — можно считать пропорциональным скорости:

$$W = -c_1 v = -c_1 \frac{dx}{dt}$$

(мы сохраняем прежние обозначения). В таком случае уравнение движения (105) в правой части получит добавочный член:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - c_1 \frac{dx}{dt}.$$

Разделив на m и положив для простоты

$$\frac{c}{m} = \omega^2, \qquad \frac{c_1}{m} = 2k,$$

можно представить его в виде:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{138}$$

— типичное уравнение с постоянными коэффициентами без последнего члена!

Характер движения точки M всецело определится тем, будут ли корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0$$

мнимыми или нет, а это, как известно, зависит от знака разности $k^2 - \omega^2$.

Наиболее важным для техники случаем является тот, когда сопротивление среды невелико, так что $k^2 - \omega^2 < 0$. Тогда корни характеристического уравнения будут мнимыми; именно, если положить для удобства $k^2 - \omega^2 = -\omega_1^2$,

$$\lambda = -k \pm \omega_1 \sqrt{-1}.$$

В этом случае общий интеграл нашего уравнения будет таков:

$$x = e^{-kt}(C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t)$$

[см. (126 *c*)], или — если заменить выражение в скобках, как мы уже много раз делали, одной синусоидальной величиной:

$$x = Ae^{-kt} \sin(\omega_1 t + \varphi_1). \tag{139}$$

Мы узнаем в этом уравнении уже знакомое нам *затухающее колебание* [81, черт. 107]. Как видим, частота колебаний $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - k^2}$ меньше, чем была в от-

сутствие сопротивления; она зависит, как и тогда, только от общих условий движения тела, но не от начального его состояния. Наоборот, постоянные A и φ определяются по начальным условиям; предоставляем читателю установить для рассматриваемого случая формулы, аналогичные формулам (108).

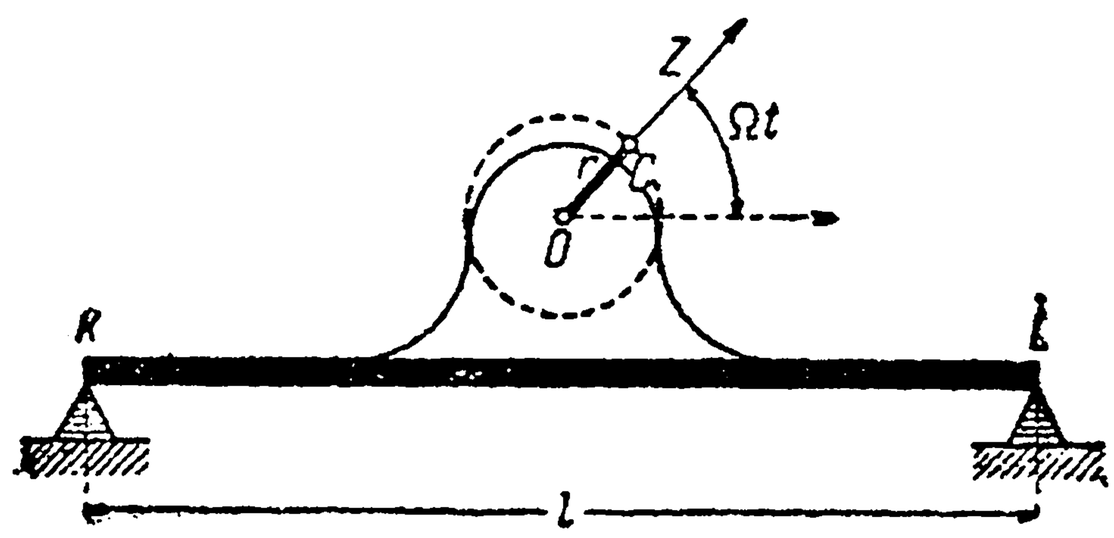
Если сопротивление среды настолько сильно, что разность $k^2 - \omega^2$ оказывается положительной: $k^2 - \omega^2 = h^2$, то корни характеристического уравнения будут вещественными и различными:

$$\lambda = -k \mp h = -(k \pm h)$$

и притом—оба отрицательными ($h < k$). Общий интеграл уравнения (138) тогда напишется по образцу (126 a):

$$x = C_1 e^{-(k+h)t} + C_2 e^{-(k-h)t},$$

при чем постоянные C_1, C_2 определятся из начальных условий. Движение уже не имеет периодического, колебательного характера. Можно показать, что в этом случае точка M либо просто постепенно „асимптотически" приближается к своему по-



Черт. 524.

ложению равновесия, либо же один раз через него переходит и при обратном движении к нему уже „асимптотически" приближается.

Подобное же положение вещей имеет место и в промежуточном случае, когда $k^2 - \omega^2 = 0$; общий интеграл [по формуле (126 b)]:

$$x = (C_1 t + C_2) e^{-kt}.$$

2. *Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления.* Если на тело M массы m, кроме „восстанавливающей" упругой силы, пропорциональной его удалению x от некоторого положения равновесия, действует еще некоторая *зависящая лишь от времени* (скажем, *периодическая*), внешняя сила $\Phi(t)$, то уравнение движения будет иметь вид [ср. (105)]:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx + \Phi(t),$$

или—если снова положить

$$\frac{c}{m} = \omega^2 \text{ и } \frac{1}{m}\Phi(t) = f(t),$$

окончательно:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t). \tag{140}$$

Это—линейное уравнение с постоянными коэффициентами, но уже с последним членом.

Наиболее простым случаем будет тот, когда функция $f(t)$ оказывается *синусоидальной величиной*. К нему приводит, напр., такая конкретная задача. На балке, свободно лежащей на двух опорах, установлен посредине двигатель (черт. 524), маховик которого (веса G) насажен на вал с небольшим эксцентриситетом r (который на чертеже преувеличен). Тогда на вал, при постоянной угловой скорости его вращения—Ω, будет действовать центробежная сила

$$Z = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{G}{g} \Omega^2 r,$$

неизменная по величине, но периодически меняющая свое направление. Нас интересует лишь вертикальная составляющая этой силы, так как именно она вызывает поперечные колебания балки. Если для простоты принять, что в начальный момент $t=0$ радиус, соединяющий ось вращения O с центром тяжести C маховика, имел горизонтальное положение, то за промежуток t он опишет угол Ωt, так что упомянутая вертикальная составляющая центробежной силы как раз и будет иметь требуемый вид:

$$\Phi(t) = Z \sin \Omega t.$$

Следовательно, в этом случае сила $f(t)$, приходящаяся на единицу массы двигателя, будет:

$$f(t) = \frac{Z}{m} \sin \Omega t = H \sin \Omega t$$

и колебание центра тяжести балки около положения равновесия (если ее собственной массой пренебречь) выразится уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = H \sin \Omega t. \tag{141}$$

Самое общее решение его представится [283] в виде суммы некоторого частного его решения $\bar{x}$ и дополнительной функции $A \sin(\omega t + \varphi)$, которая является общим интегралом соответствующего уравнения без последнего члена. Колебание, выражаемое отклонением $\bar{x}$ и есть так называемое *вынужденное колебание*, созданное присутствием *возмущающей силы* $H \sin \Omega t$; оно как бы налагается на *собственное* или *свободное* колебание, выражаемое дополнительной функцией и обусловленное лишь силами упругости.

Из 284, IV, мы знаем, что частное решение x уравнения (141), *если только* $\Omega \neq \omega$, *т. е. частота возмущающей силы не совпадает с частотой свободного колебания*, следует искать в форме:

$$\bar{x} = B \sin \Omega t; \tag{142}$$

в виду отсутствия члена с первой производной, мы ограничиваемся одним лишь членом с синусом! Подставляя, для амплитуды B получим выражение:

$$B = \frac{H}{\omega^2 - \Omega^2}. \tag{143}$$

Итак, вынужденное колебание имеет тот же период, что и возмущающая сила и совпадает с нею в фазе (или прямо противоположна по фазе, если $B < 0$).

Из выражения (143) амплитуды вынужденного колебания мы видим, что при близости обеих частот ω и Ω или соответствующих им периодов

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \text{ и } T = \frac{2\pi}{\Omega},$$

эта амплитуда может достичь сколь угодно больших размеров. *Если обе частоты совпадают, т. е.* $\Omega = \omega$, то частное решение уравнения (141). уже нельзя искать в прежней форме, а нужно ввести множителем t:

$$\bar{x} = Bt \sin \omega t + B't \cos \omega t.$$

При подстановке окажется, что

$$B = 0, \quad B' = -\frac{H}{2\omega},$$

так что, окончательно,

$$x = -\frac{H}{2\omega} t \cos \omega t.$$

С возрастанием t размахи должны безгранично увеличиваться!

Описанное явление и носит название *резонанса*. Понятно, его следует всячески избегать: совпадение и даже только близость периодов τ и T (в нашем примере— периода собственных колебаний балки и периода вращения двигателя) составляет серьезную угрозу прочности всего сооружения. Угловая скорость ω называется *критической скоростью* для двигателя.

Выяснив вопрос о резонансе на простом примере, нужно сказать, что почти никогда нельзя поручиться за то, что возмущающая сила представляется в точности синусоидальной величиной. И в рассмотренной задаче фактически действие неуравновешенных масс машины на опорную балку всегда гораздо сложнее и сводится к силе $f_1(t)$, изменяющейся хотя и периодически, но не по синусоидальному закону.

В этом случае [как и в n⁰ 265] снова приходит на помощь разложение периодической функции в ряд Фурье [215]:

$$f(t) = H_1 \sin(\Omega t + \delta_1) + H_2 \sin(2\Omega t + \delta_2) + H_3 \sin(3\Omega t + \delta_3) + \ldots =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} H_m \sin(m\Omega t + \delta_m).$$

Возмущающая сила, таким образом, разлагается на ряд отдельных гармонических составляющих, действие каждой из которых нами уже выяснено; вынужденное колебание, очевидно [283], составится из колебаний, вызванных этими элементарными силами, т. е. [см. (142) и (143)]

$$\bar{x} = \frac{H_1}{\omega^2 - \Omega^2} \sin(\Omega t + \delta_1) + \frac{H_2}{\omega^2 - (2\Omega)^2} \sin(2\Omega t + \delta_2) + \frac{H_3}{\omega^2 - (3\Omega)^2} \sin(3\Omega t + \delta_3) + \ldots =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m}{\omega^2 - (m\Omega)^2} \sin(m\Omega t + \delta_m).^* \qquad (144)$$

Конечно, мы предполагаем, что ни одно из чисел

$$\Omega,\ 2\Omega,\ 3\Omega,\ \ldots,\ m\Omega,\ \ldots$$

не совпадает с ω, или — если угодно, что Ω не совпадает ни с одним из чисел:

$$\omega,\ \frac{1}{2}\omega,\ \frac{1}{3}\omega,\ \ldots,\ \frac{1}{m}\omega,\ \ldots \qquad (145)$$

Легко написать $\bar{x}$ и для исключенных случаев. Теперь ясно, что явление *резонанса* наступает не только при приближении Ω к ω, но и при приближении к любым числам ряда (145), которые все представляют *критические угловые скорости* для двигателя. Впрочем, в виду убывания амплитуд H_m и, особенно, в виду наличия в знаменателе общего члена ряда (144) множителя m^2—влияние далеких членов скоро становится неощутимым.

Заметим, что часто, вместо угловой скорости ω, вводят число колебаний в минуту: $N = \frac{\omega}{2\pi} \cdot 60$, и тогда говорят о *критических числах оборотов*:

$$N,\ \frac{1}{2}N,\ \frac{1}{3}N,\ \ldots,\ \frac{1}{m}N,\ \ldots. \qquad (145a)$$

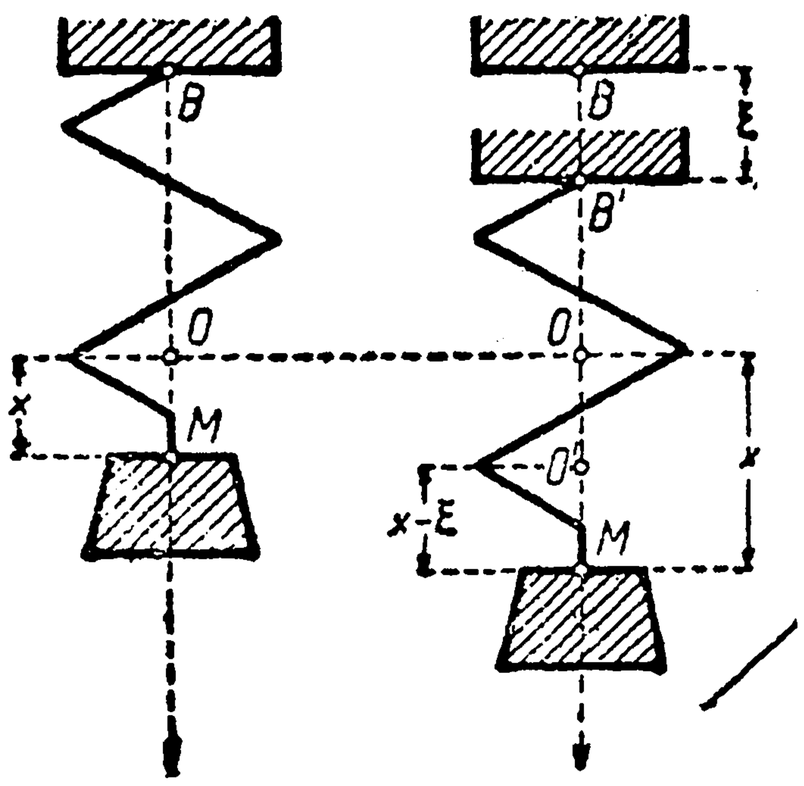
Для примера предположим, что машина весом $2P = 4000$ кг, делающая 250 обор./мин. должна быть установлена на двух балках, перекрывающих пролет $l = 2{,}5$ м. Годятся ли для этой цели (с динамической точки зрения!) I-ые балки № 20?

По таблицам для них $I_x = 2014$ см⁴. Полагая в формуле (107*b*) $P = \frac{1}{2}\,4000 = 2000$ кг, $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см², $g = 981$ см/сек², получим период собственных коле-

* Присутствие „начальных фаз" $\delta_1, \delta_2 \ldots$ не мешает воспользоваться прежним результатом, нужно лишь эти же фазы ввести и в колебания, которые, как помним, всегда в одинаковых (или прямо противоположных) фазах с вызывающими силами.

баний $\tau = 0{,}0807$ сек., так что число колебаний в минуту $N = 744$. Итак, по (145 *a*) критическими числами оборотов будут: 744, 372, *248*,... Ввиду близости числа оборотов машины к третьему из них, налицо резонанс, и следует изменить либо размеры балки, либо число оборотов.*

Аналогично этому, если индикатор, о котором была речь в n⁰ 280, 3, используется для определения периодически изменяющегося давления (это и есть „возмущающая сила") в цилиндре газового двигателя, то при числе оборотов, близком к 6300, 3150, 2100, ..., показания индикатора будут искажены благодаря резонансу.



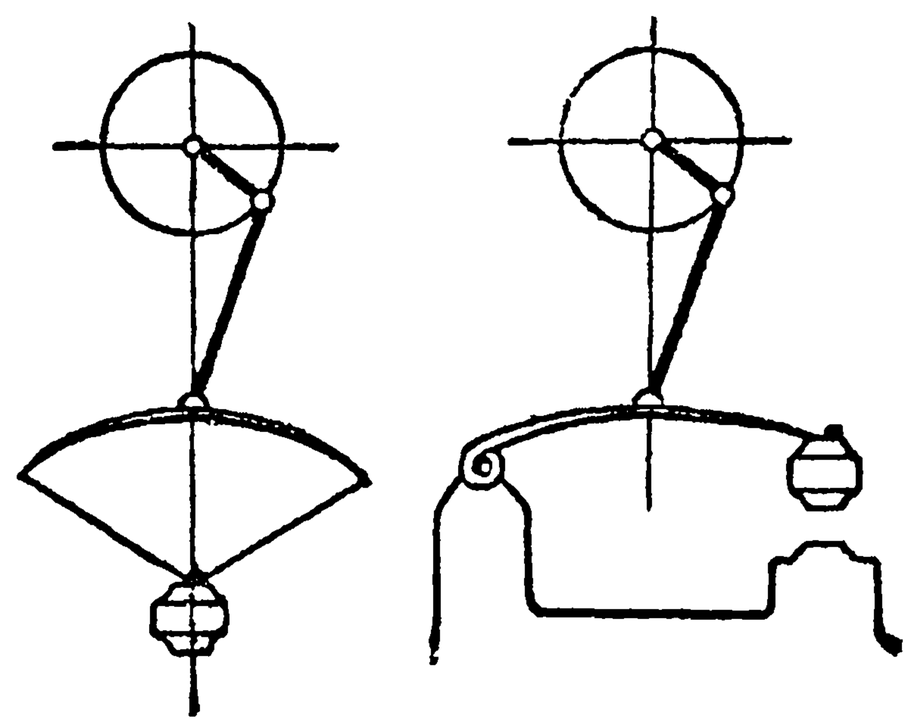
Черт. 525.

Отметим, что возбуждение вынужденных колебаний можно было бы представить себе и иначе, чем мы это делали до сих пор. Вернемся к подвешенному на пружине телу M и предположим теперь, что сама точка подвеса пружины производит в вертикальном направлении колебательное движение около некоторой неподвижной точки B; посмотрим, как это должно отразится на движении точки M. Пусть $BB' = \xi$ (черт. 525) есть перемещение точки подвеса к моменту t; точка O при этом переместится в O'; через x попрежнему обозначим расстояние точки M от точки O (а не от O'). Очевидно, теперь восстанавливающую силу придется выразить через $-c(x-\xi)$, вместо $-cx$, так что уравнение движения точки M напишется так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c(x-\xi) \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \omega^2 \xi.$$

Так как $\omega^2\xi$ есть некоторая функция от t, $f(t)$, то мы в сущности вновь получили уравнение (140)! Таким образом колебание точки подвеса равносильно появлению „возмущающей силы" $\omega^2\xi$, и все относящиеся к вынужденным колебаниям соображения (в частности, и все сказанное о резонансе) остаются в полной силе.

Реальное осуществление указанной возможности появления вынужденных колебаний мы видим, напр., в механизме пружинного молота (черт. 526) для обработки металлов. Точка подвеса пружины (которая может быть выполнена в различных формах) приводится в колебательное движение, напр., с помощью кривошипношатунного механизма.



Черт. 526.

3. *Вынужденные колебания при наличии сопротивления.* В предшествующем изложении, для упрощения общей картины резонанса, мы отвлеклись от сопротивления среды, которое в действительности всегда имеет место. Теперь мы посмотрим, как отразится на этой картине наличие сопротивления.

Если сохранить все прежние обозначения, то теперь, вместо (140), придется рассматривать уравнение [ср. (138)]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t).$$

Как мы видели, в известном смысле вопрос всегда можно свести к случаю, когда $f(t)$—синусоидальная величина; поэтому мы ограничимся уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = H\sin\Omega t. \qquad (146)$$

Кроме того (что отвечает и действительности), предположим сопротивление среды небольшим и $k^2 - \omega^2 < 0$.

* На деле нужно было бы еще ввести поправку на вес балки (62,6 кг), чего мы для простоты не сделали.

Дополнительная функция в этом случае имеет вид (139), так что собственные колебания будут затухающими и скоро становятся мало ощутимыми. Поэтому весь интерес сосредоточивается на вынужденном колебании, выражаемом частным решением $\bar{x}$ уравнения (146).

Станем искать это частное решение в форме [284, IV]:

$$\bar{x} = B \sin(\Omega t - \delta).$$

Дифференцируем:

$$\bar{x}' = B\Omega \cos(\Omega t - \delta), \quad \bar{x}'' = -B\Omega^2 \sin(\Omega t - \delta)$$

и подставляем в уравнение. Для того чтобы из полученного в результате тождества (относительно t):

$$B(\omega^2 - \Omega^2) \cdot \sin(\Omega t - \delta) + 2kB\Omega \cdot \cos(\Omega t - \delta) = H \cdot \sin \Omega t$$

определить амплитуду B и отставание в фазе δ, мы поступим следующим образом. Положим в этом тождестве сначала $\Omega t - \delta = \frac{\pi}{2}$ (или, что то же, $\Omega t = \frac{\pi}{2} + \delta$), а затем $\Omega t - \delta = 0$ ($\Omega t = \delta$):

$$B(\omega^2 - \Omega^2) = H \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = H \cdot \cos\delta, \quad 2kB\Omega = H \cdot \sin\delta.$$

Отсюда:

$$\sin\delta = \frac{2k\Omega}{H} \cdot B, \quad \cos\delta = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{H} \cdot B.$$

Если считать $B > 0$, то и $\sin\delta > 0$, так что угол δ лежит в I или II четверти и легко определяется по тангенсу:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2k\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \tag{147}$$

Возводя же эти равенства в квадрат и складывая, получим

$$1 = \frac{4k^2\Omega^2 + (\omega^2 - \Omega^2)^2}{H^2} \cdot B^2,$$

откуда

$$B = \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4k^2\Omega^2}} \tag{148}$$

Очень важно теперь уяснить зависимость между амплитудой B вынужденного колебания и отношением

$$q = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\tau}{T}$$

периодов свободного (без сопротивления) и вынужденного колебаний Элементарное преобразование выражения (148) для B даст нам:

$$B = \frac{H}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\Omega^2}{\omega^2}}} = \frac{H}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \alpha^2 q^2}},$$

если положить еще

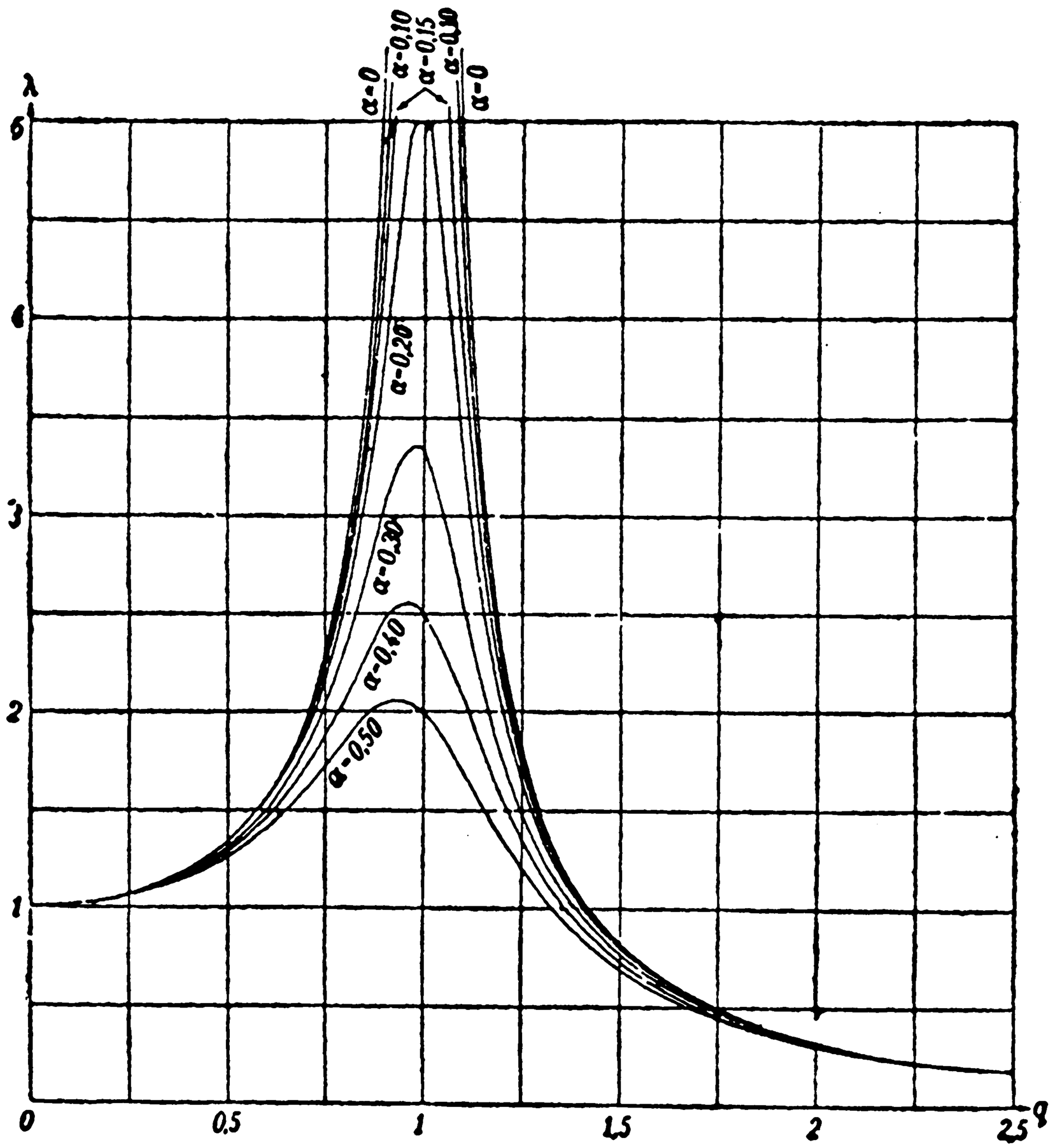
$$\frac{2k}{\omega} = \alpha.$$

Выражение

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1 - q^2)^2 + \alpha^2 q^2}}$$

мы уже подвергали исследованию в n⁰ 82, и видели, что при приближении q к 1 $\left(\text{точнее—к значению } \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2}}, \text{ мало отличающемуся от } 1\right)$, т. е. при сближении

периодов T и τ, происходит резкое повышение амплитуды колебаний, тем более сильное, чем меньше *коэффициент успокоения* α. Это повышение наглядно характеризуется графиками функции λ от q (при различных α), которые мы вновь воспроизводим на черт. 527. В этом и состоит явление *резонанса* при наличии сопротивления.*



Черт. 527.

Из формулы (147), которую легко представить в виде:

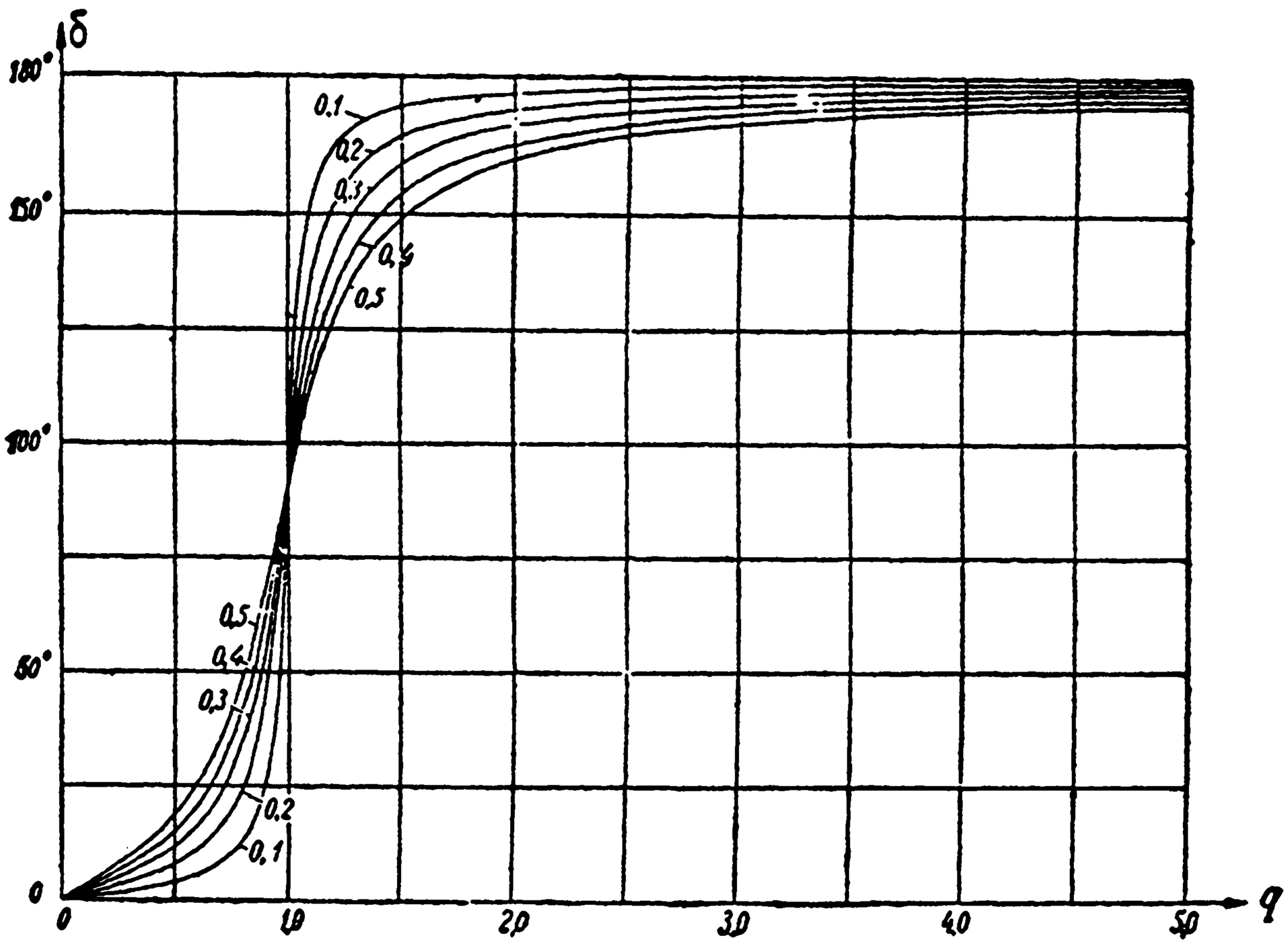
$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\frac{2k}{\omega}\cdot\frac{\Omega}{\omega}}{1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}} = \frac{\alpha q}{1-q^2},$$

явствует, что при приближении q к 1 отставание в фазе δ приближается к прямому углу. Графики зависимости δ от q (при различных α) представлены на черт. 528.

В заключение сделаем следующее, принципиально и практически важное замечание. По отношению к упругим силам, вызываемым деформациями, мы пользова-

* При очень больших частотах Ω возмущающей силы, наоборот, амплитуда B становится ничтожной, так что точка M почти неподвижна. Обстоятельство это используется при конструировании некоторых приборов для записи колебаний.

лись некоторыми простыми положениями, устанавливаемыми в сопротивлении материалов *при определенном предположении, что эти деформации малы*. И, однако, построенные на этих положениях соображения привели к заключению, что в случаях резонанса *деформации становятся большими*. К ним, следовательно, нельзя применять прежних законов действия упругих сил; но опорачивает ли это само заключение? Очевидно, нет, ибо *малыми* оставаться колебания во всяком случае не могли: рассуждения, исходящие из наличия *малых* колебаний, приводят к *большим* колебаниям, т. е. к противоречию! Следовательно, самый факт наличия *больших* колебаний установлен безупречно, а это всего важнее; зато с количественной стороны вопрос освещен, конечно, недостаточно, и к формулам, выражающим самую амплитуду колебаний при резонансе, нужно относиться с осторожностью, ибо они могут оказаться не вполне точными.



Черт. 528.

286. Задача о продольном изгибе. 1. На опыте установлено, что если длинный и тонкий призматический стержень сжимается продольно двумя направленными по оси стержня силами P, то — при увеличении этих сил и приближении их к некоторой границе P_k — стержень выпучивается и ломается, несмотря на то, что сжимающие напряжения при этом часто оказываются намного ниже допустимых. В предположении, что концы стержня могут свободно поворачиваться, но должны лежать на постоянной прямой (черт. 529), Эйлер дал для величины „критической" или „ломающей" силы P_k следующую формулу:

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \text{ (кг)}, \tag{149}$$

где l — длина стержня (см), E — модуль упругости (кг/см²), наконец, I — наименьший из главных центральных моментов инерции поперечного сечения стержня (см⁴).

Для того чтобы установить эту важную формулу, мы поставим задачу так: существуют ли для стержня, поставленного в указанные условия (черт. 529), кроме прямолинейной, еще какие-либо другие, криволинейные, *формы равновесия*.

Предположив, что на чертеже изображена именно такая форма, для аналитического

определения ее воспользуемся основным уравнением (58), 272; изгибающий момент в сечении, отвечающем точке A, очевидно будет

$$M = -Py.$$

Подставляя это выражение в упомянутое уравнение, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}y,^* \tag{150}$$

что можно переписать, если положить

$$\omega^2 = \frac{P}{EI} \tag{151}$$

в привычном уже для нас виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0.$$

Общий интеграл нам известен:

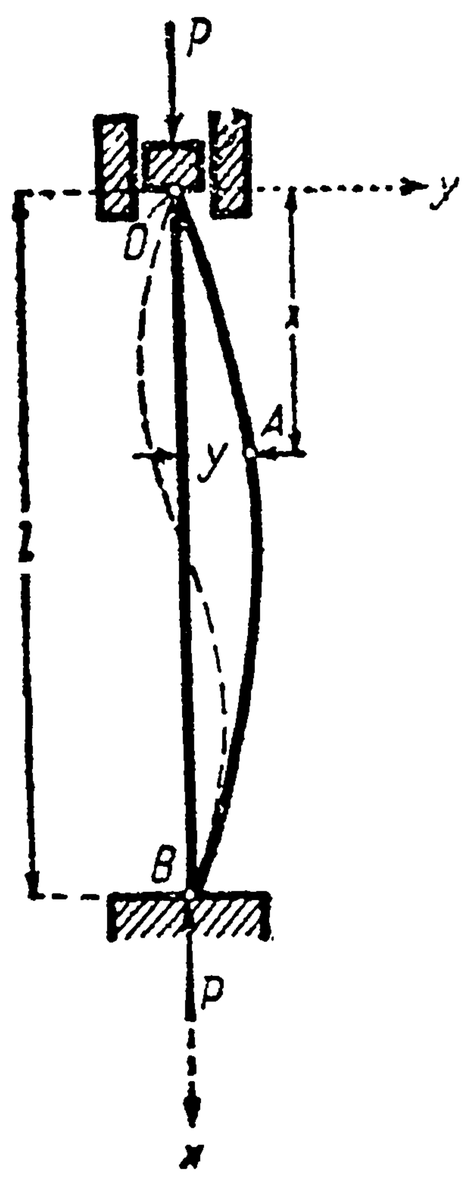
$$y = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x. \tag{152}$$

Обратимся к предельным условиям: при $x = 0$ и при $x = l$ должно быть $y = 0$; при подстановке это даст нам:

$$C_2 = 0 \text{ и } C_1 \sin \omega l = 0.$$

Второму из этих равенств легко удовлетворить, положив и $C_1 = 0$, но это приведет к нулевому решению, $y = 0$, выражающему очевидную прямолинейную форму равновесия. Откидывая это допущение (так что отныне $C_1 \neq 0$), остается принять, что

$$\sin \omega l = 0;$$



Черт. 529.

это равенство может иметь место лишь при условии, что

$$\omega l = n\pi,$$

где n—какое-либо натуральное число. Отсюда уже, если принять во внимание (151), определяется и сила P:

$$P = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Таким образом, мы нашли ряд отдельных значений для силы P:

$$\frac{\pi^2 EI}{l^2},\ 4\frac{\pi^2 EI}{l^2},\ 9\frac{\pi^2 EI}{l^2}, \ldots, \tag{153}$$

при которых оказывается возможной и криволинейная форма равновесия стержня:

$$y = C_1 \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{154}$$

Наименьшей из этих сил и является Эйлерова сила (149) ей отвечает форма равновесия:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi x}{l},$$

изображенная жирной линией; для второй по величине силы получаем кривую:

$$y = C_1 \sin \frac{2\pi x}{l},$$

изображенную пунктиром, и т. д.

Итак, при $P = P_k$ прямолинейная форма перестает быть **единственной** формой равновесия, становятся возможными другие, **сколь угодно к ней близкие** формы (ибо C_1 осталась в нашем рассуждении произвольной!). Доста-

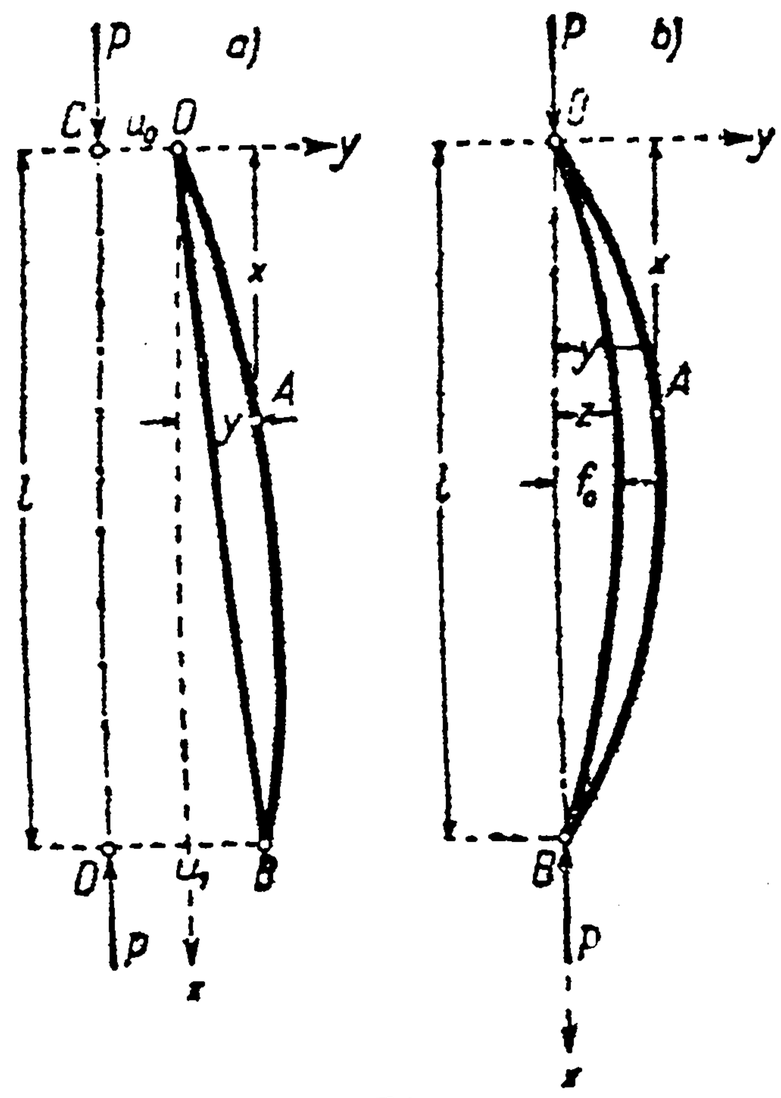
* Изгиб, если произошел, то конечно в плоскости „наименьшей жесткости"; понятно поэтому, что под I нам и надлежит разуметь **наименьший** из моментов инерции.

точно ничтожной причины, чтобы стержень изменил своей прямолинейной форме, и началось разрушение.

С математической точки зрения, изложенная задача содержит много поучительного, так как на ней выявляется особая роль *предельных условий*, по сравнению с *начальными*. Если имеем, скажем, линейное дифференциальное уравнение второго порядка типа (114), то задание начальных значений y_0 и y'_0 искомой функции и ее производной, отвечающих какому-либо начальному значению $x = x_0$, *вполне однозначно* определяют искомую функцию; иными словами, через заданную точку (x_0, y_0) проходит всегда одна вполне определенная интегральная кривая с заданным уклоном. Если же мы попробуем определить функцию предельными условиями, т. е. зададим значения функции y_0 и y_1, отвечающие двум предельным значениям x_0 и x_1 независимой переменной, то положение вещей может быть и иным. Часто оказывается, что—обыкновенно, при некоторых определенных значениях входящего в уравнение „параметра" — предельным условиям удовлетворяет *не одна, а даже бесчисленное множество функций*; или, говоря геометрически, через две заданные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) проходит не одна, а бесчисленное множество интегральных кривых. В нашем примере (150) роль параметра играла сила P; оказалось, что, при некоторых особых ее значениях (153), предельным условиям

$$y = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и при } x = l,$$

кроме очевидного решения: 0, удовлетворяет еще бесчисленное множество функций вида (154), при произвольном C_1; иными словами, в указанных случаях, через точки O и B, кроме отрезка оси Ox, проходит бесчисленное множество интегральных кривых!



Черт. 530.

В некоторых технических вопросах, в роде рассмотренного выше, как раз наличие этой множественности решений и играет существеннейшую роль.

2. Для того чтобы лучше уяснить вопрос о „критической" силе Эйлера мы подойдем к нему с другой стороны. Реально *не* осуществима та обстановка в которой мы только что рассматривали действие на стержень продольных сил P: эти силы не могут быть приложены точно в центрах тяжести крайних сечений, точно по направлению оси, да и сама ось стержня не может быть точно прямой, и т. д. Возможны, конечно, и многообразные другие отступления от „идеального" положения вещей, которое мы рассматривали, но мы ограничимся изучением лишь указанных, да и то порознь.

Предположим сначала, что силы приложены эксцентрично на расстоянии u_0 и u_1 (черт. 530 *a*) от соответствующих концов O и B оси стержня, причем u_0 и u_1 могут быть и неравны, так что направление сил может несколько отличаться от направления оси стержня. Мы будем считать все эти отклонения совершенно ничтожными, и лишь на чертеже они резко преувеличены для большей отчетливости. Пусть, для простоты, направления сил и оси лежат в одной плоскости; тогда в той же плоскости произойдет и изгиб оси стержня.

При обозначениях чертежа, изгибающий момент в сечении через точку A будет:

$$M = -P(u_0 + y),$$

так что дифференциальное уравнение изогнутой оси напишется так:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}(u_0 + y)^* \tag{155}$$

* Так как изогнутую ось мы считаем очень пологой, а направление OB ничтожно разнится от вертикального, то уклон оси, y', и здесь будет настолько мал, что дифференциальное уравнение изогнутой оси можно писать в обычной, упрощенной форме [ср. 272, (57) и (58)].

или [см. (151)]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = -\omega^2 u_0.$$

Здесь очевидны и частное решение: $y = -u_0$ и дополнительная функция: $z = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$, так что [283] общий интеграл в этом случае будет:

$$y = -u_0 + C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x.$$

Предельные условия:

$$y = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } y = u_1 - u_0 \text{ при } x = l$$

непосредственно дают значения постоянных:

$$C_2 = u_0, \quad C_1 = \frac{u_1 - u_0 \cos \omega l}{\sin \omega l}$$

(если предположить $P < P_k$, так что $\omega l < \pi$!). Окончательно уравнение изогнутой оси будет иметь вид:

$$y = \frac{u_1 - u_0 \cos \omega l}{\sin \omega l} \sin \omega x - u_0 (1 - \cos \omega x).$$

Еще раз отметим, что u_0 и u_1 мы считаем ничтожно малыми величинами. И тем не менее, когда сила P станет приближаться к ее критическому значению (149), ωl будет стремиться к π, а $\sin \omega l$—к нулю, так что коэффициент при $\sin \omega x$, а с ним и стрела прогиба, будет бесконечно возрастать! Впрочем, здесь можно было бы повторить замечания, которыми мы закончили предыдущий n⁰: наше уравнение (155) построено на предположении небольших деформаций и не может служить основой для точной количественной оценки значительных деформаций, но самый факт появления больших деформаций (влекущих за собой разрушение стержня) при приближении силы P к P_k можно считать установленным. И это — как бы ни были ничтожны отклонения u_0 и u_1, от величины которых критическая сила вовсе и не зависит!

3. Допустим теперь, что силы приложены точно в центрах тяжести конечных сечений стержня, но зато ось его первоначально уже была, хотя бы весьма незначительно, искривлена (черт. 530 *b*), напр., по синусоиде: $z = f_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$ (при ничтожной величине стрелы f_0). Так как изгибающий момент $M = -Py$ должен создать лишь дополнительный прогиб $y - z$, то в уравнение упругой линии надлежит, вместо y, подставить $y - z$:*

$$\frac{d^2 (y - z)}{dx^2} = -\frac{P}{EI} y$$

или

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = \frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} f_0 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Частное решение; в виду отсутствия слева члена с y', ищем в форме [284, IV]

$$\bar{y} = A \sin \frac{\pi x}{l}$$

и легко находим:

$$A = \frac{f_0}{1 - \left(\frac{l\omega}{\pi}\right)^2},$$

в предположении, конечно, что $l\omega < \pi$, т. е. что $P < P_k$. Общий интеграл:

$$y = \frac{f_0}{1 - \left(\frac{l\omega}{\pi}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{l} + C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x.$$

* Чтобы не задерживаться, мы не вдаемся в доказательство этого утверждения, справедливого лишь при условии, что обе рассматриваемые кривые пологи.

Так как $\bar{y}=0$ как при $x=0$, так и при $x=l$, т. е. удовлетворяет как раз тем же предельным условиям, что и y, то (при упомянутом предположении) легко заключить, что $C_1=C_2=0$. Таким образом, ось стержня расположится по синусоиде, подобной исходной:

$$y=\frac{f_0}{1-\left(\frac{l\omega}{\pi}\right)^2}\cdot\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Новая стрела прогиба f, если принять во внимание (149) и (151), может быть представлена в виде:

$$f=\frac{f_0}{1-\frac{P}{P_k}}.$$

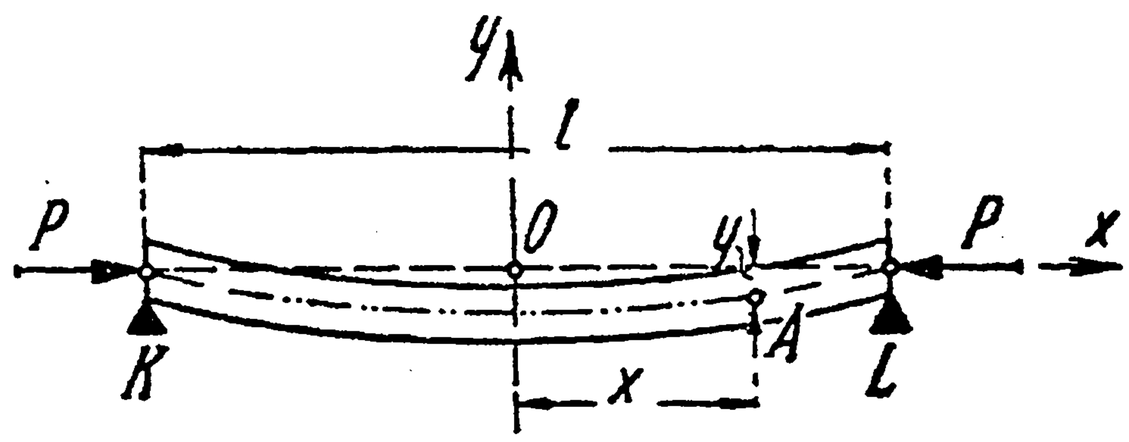
И здесь ясно, что при приближении P к P_k стрела прогиба f бесконечно возрастает, как бы мал ни был первоначальный прогиб f_0!

Всеми этими соображениями вопрос о критической силе P_k приводится к полной ясности.

Заметим еще, что мы все время молчаливо предполагали, что давление P не создает в стержне напряжения сжатия, выходя цего за предел пропорциональности. Поэтому формула Эйлера (149) годится во всяком случае лишь для достаточно длинных, сравнительно с поперечными размерами, стержней или стоек. Для более коротких пользуются эмпирическими формулами.

Если, напр., взять железную круглую стойку длины $l=100$ см и диаметра $d=1$ см, то, полагая $E=2\cdot10^6$ кг/см² и $I=\frac{\pi}{64}d^4\doteq0{,}05$ см⁴, будем иметь по формуле Эйлера: $P_k=98{,}7$ кг; этот результат годится, ибо соответствующее напряжение сжатия $\frac{P_k}{\frac{\pi d^2}{4}}\doteq126\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$ лежит гораздо ниже предела пропорциональности, который можно принять равным 2000 кг/см². При диаметре $d=5$ см, результат $P_k=62\,000$ кг, получаемый по формуле Эйлера, был бы недостоверен, ибо соответствующее напряжение 3150 кг/см² уже больше этого предела.

Мы ограничились рассмотрением одного лишь случая закрепления концов стержня; на практике встречаются и другие случаи, для которых критическая сила имеет другое значение. Так как эти случаи математически не дают ничего нового, то мы на них уже не останавливаемся.



Черт. 531.

4. Рассмотрим, в заключение, случай, когда на балку одновременно действуют и продольная и поперечная нагрузки. Пусть балка KL (черт. 531), лежащая на опорах, несет, напр., равномерно распределенную нагрузку интенсивности q и, кроме того, сдавливается по оси силами P. Повторяя рассуждения n⁰ 275, 1, найдем, что под действием поперечной нагрузки в точке A с абсциссой x создастся изгибающий момент

$$M_1=\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right);$$

продольные силы, очевидно, дадут момент ($y<0$!)

$$M_2=-Py.$$

Таким образом, полный изгибающий момент равен

$$M=M_1+M_2=-Py+\frac{q}{2}\left(\frac{l^2}{4}-x^2\right)$$

и уравнение изогнутой оси балки напишется в виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{EI}y + \frac{q}{2EI}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right),$$

или, если воспользоваться обозначением (151), в виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = \frac{ql^2}{8EI} - \frac{q}{2EI}x^2.$$

Дополнительная функция известна, см. (152); частное же решение легко найдется по способу неопределенных коэффициентов [284, II]

$$\bar{y} = \frac{ql^2}{8EI\omega^2} + \frac{q}{EI\omega^4} - \frac{qx^2}{2EI\omega^2}.$$

Поэтому

$$y = \frac{ql^2}{8EI\omega^2} + \frac{q}{EI\omega^4} - \frac{qx^2}{2EI\omega^2} + C_1 \sin\omega x + C_2 \cos\omega x.$$

Из условий

$$y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad y = 0 \quad \text{при} \quad x = \frac{l}{2}\,*$$

[ср. 275, 1], найдем (в предположении, что $l\omega < \pi$, т. е. $P < P_k$):

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{\cos\frac{l\omega}{2}} \cdot \frac{q}{EI\omega^4}.$$

Окончательно, получим уравнение:

$$y = \frac{q}{2EI\omega^2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) + \frac{q}{EI\omega^4}\left(1 - \frac{\cos\omega x}{\cos\frac{l\omega}{2}}\right),$$

которое, в виду симметрии, годится и для левой части балки.

287. Уравнение Эйлера. Из уравнений второго порядка с переменными коэффициентами мы рассмотрим лишь уравнения вида:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + px\frac{dy}{dx} + qy = R(x), \tag{156}$$

где p и q — постоянные числа, а $R(x)$ — какая-либо функция от x. Подобного вида уравнения (независимо от их порядка) носят название *уравнений Эйлера*. Мы сейчас покажем, что простой подстановкой

$$x = e^t, \quad t = \ln x$$

уравнение Эйлера приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Заметив, что

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t},$$

и рассматривая y как сложную функцию от x через посредство t, по правилу дифференцирования сложной функции будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}, \tag{157}$$

* Отметим своеобразную форму этих предельных условий: в одно из них входит значение y, а в другое — значение y'!

Продифференцируем это равенство еще раз по x, причем от правой части сначала возьмем производную по t и умножим ее на производную от t по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cdot e^{-t}-\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)\cdot e^{-t}$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\cdot e^{-2t}. \tag{158}$$

Умножим теперь обе части равенства (157) на $x=e^t$, а обе части равенства (158) на $x^2=e^{2t}$:

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt},\qquad x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение (156), преобразуем его к виду:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=R(e^t). \tag{159}$$

Здесь коэффициенты при y и ее производных уже постоянны!

Остановимся сначала на случае, когда уравнение лишено последнего члена, т. е. предположим, что нам дано уравнение

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+px\frac{dy}{dx}+qy=0, \tag{160}$$

которое мы указанной подстановкой привели к виду:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=0. \tag{161}$$

Составим характеристическое уравнение [282]:

$$\lambda^2+(p-1)\lambda+q=0. \tag{162}$$

Если оно имеет различные вещественные корни λ_1 и λ_2, то общий интеграл уравнения (161) будет [282, (126 a)]:

$$y=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}=C_1\cdot(e^t)^{\lambda_1}+C_2\cdot(e^t)^{\lambda_2};$$

возвращаясь к переменной $x=e^t$, получим для уравнения (160) общий интеграл в виде:

$$y=C_1x^{\lambda_1}+C_2x^{\lambda_2}. \tag{163 a}$$

Затем, если уравнение (162) имеет равные корни $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, так что общий интеграл уравнения (161) будет [см. (126 b)]

$$y=(C_1t+C_2)\,e^{\lambda t},$$

то для уравнения (160) получим:

$$y=(C_1\ln x+C_2)\cdot x^{\lambda}. \tag{163 b}$$

Наконец, в случае мнимых корней: $\lambda = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, будем иметь [см. (126 *c*)] для уравнения (161):

$$y = C_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + C_2 e^{\alpha t} \cos \beta t$$

и, соответственно, для уравнения (160):

$$y = C_1 x^{\alpha} \sin(\beta \ln x) + C_2 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x). \qquad (163\,c)$$

Общий интеграл уравнения (160) можно получить и минуя уравнение (161). Попробуем подставить в уравнение (160) степенную функцию $y = x^{\lambda}$ и установим, при каком показателе λ она будет этому уравнению удовлетворять. Мы будем иметь:

$$y = x^{\lambda}, \quad y' = \lambda x^{\lambda - 1}, \quad y'' = \lambda(\lambda - 1) x^{\lambda - 2}$$

$$x^2 \cdot \lambda(\lambda - 1) x^{\lambda - 2} + px \cdot \lambda x^{\lambda - 1} + q \cdot x^{\lambda} = 0$$

или, по сокращении на x^{λ},

$$\lambda(\lambda - 1) + p\lambda + q = 0. \qquad (162\,a)$$

Этому уравнению, которое, очевидно, тождественно с (162), и должен удовлетворять показатель λ, чтобы степень $y = x^{\lambda}$ была решением уравнения (160).

Если уравнение (162) имеет два различных корня, λ_1 и λ_2, то по двум независимым частным решениям x^{λ_1} и x^{λ_2} сразу строится общий интеграл (163 *a*).

Если же корни λ_1 и λ_2 совпадают, то, обозначив их общее значение $\left(\text{равное } -\frac{p-1}{2}\right)$ через λ, легко непосредственной поверкой установить, что, кроме степени x^{λ}, уравнению (160) будет удовлетворять и функция $x^{\lambda} \cdot \ln x$. На этих частных решениях строится общий интеграл (163 *b*).

В случае мнимых корней, сохраняет силу интеграл (163 *a*); можно затем избавиться от мнимости — но на этом уж останавливаться не будем.

Возвращаясь к уравнению (156) с последним членом и к полученному из него уравнению (160), мы видим, что **дополнительную функцию**, т. е. общий интеграл соответствующего уравнения без последнего члена мы уже умеем строить. Остается лишь найти **частное решение** уравнения (156) или — что то же — уравнения (159). Если функция $R(e^t)$ принадлежит к числу рассмотренных в n° 284, в одной из рубрик I—V, то для последнего уравнения мы частное решение найдем без труда; подставив в него $\ln x$, вместо t, получим и частное решение для исходного уравнения (156).

Примеры. 1. Исследование деформаций в толстостенной полой сфере, подвергнутой внутреннему давлению, приводит к уравнению:

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + 2x \cdot \frac{du}{dx} - 2u = 0.$$

Решить его.

Решение. Можно сразу написать характеристическое уравнение по форме (162) $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Общий интеграл, по формуле (163 *a*):

$$u = C_1 x + \frac{C_2}{x^2}.$$

2. Дифференциальное уравнение изгиба круглой пластинки, под действием сосредоточенной силы в ее центре, имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\varphi}{x^2}=\frac{k}{x} \qquad (k=\text{пост.}).$$

Решение. Преобразованное уравнение (с помощью подстановки $x=e^t$):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\varphi=ke^t.$$

Корни характеристического уравнения: ± 1. Частное решение, по первой формуле (137), 284, $\bar{\varphi}=\frac{k}{2}te^t$. Общий интеграл предложенного уравнения:

$$\varphi=\frac{k}{2}x\ln x+C_1x+\frac{C_2}{x}.$$

3. Решить уравнение:

$$x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}-x\cdot\frac{dy}{dx}=\ln x+1.$$

Решение. Преобразованное уравнение:

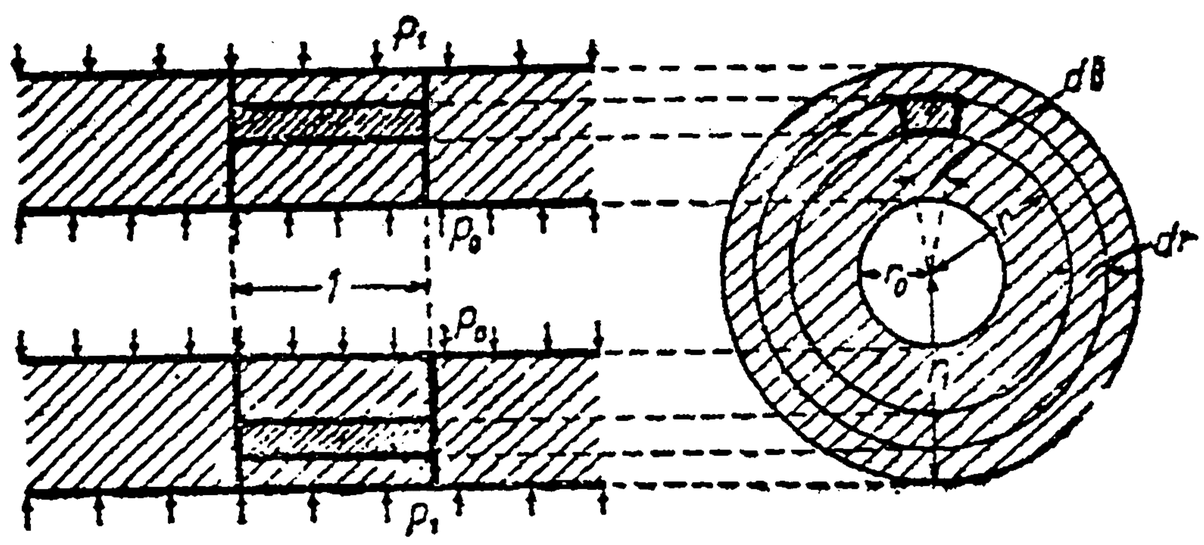
$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}=t+1.$$

Корни характеристического уравнения: 0, 2. Частное решение ищем в форме $\bar{y}=t(at+b)$ (так как $q=0$!); $a=-\frac{1}{4}$, $b=-\frac{3}{4}$. Окончательно:

$$y=-\frac{1}{4}\ln^2x-\frac{3}{4}\ln x+C_1+C_2x^2.$$

Предлагается наново решить то же уравнение, введя в качестве неизвестной функции $z=\frac{dy}{dx}$.

288. Задачи. 1. *Деформация толстостенной трубы.* Рассмотрим толстостенный цилиндр, подвергнутый как внутреннему, так и внешнему давлению, и поставим себе задачей установить распределение напряжений в его стенках. При этом напряжения, параллельные оси, мы оставляем без рассмотрения, и считаем, что в любой точке цилиндра радиальное напряжение p и касательное (перпендикулярное к радиусу) напряжение q зависят только от радиуса r (черт. 532). Для однообразия рассуждений мы будем пока все напряжения считать растягивающими; если в результате выкладок какое-либо них окажется отрицательным, то это и покажет, что на самом деле оно является сжимающим.



Черт. 532.

Возьмем отрезок трубы, длины 1, и выделим из него бесконечно малый элемент двумя цилиндрическими поверхностями, радиусов r и $r+dr$, и двумя плоскостями, проведенными через ось под углом $d\theta$ одна к другой (черт. 532; ср. черт. 496 и 497). Рассуждая совершенно так же, как в n° 232, и лишь опуская все сказанное там о центробежной силе, мы установим условие равновесия выделенного элемента (в прежних обозначениях):

$$dR'-dR-dT\cdot d\theta=0,$$

которое легко преобразуется к виду:

$$\frac{d(pr)}{dr}-q=0. \qquad (164)$$

Это уравнение собственно получается из (26), если положить там $y=1$ и $\omega=0$!

Больше, чем уравнение (164), статика нам дать не может, а его явно недостаточно для определения обоих напряжений, p и q. Приходится поэтому использовать упругие свойства нашего цилиндра и рассмотреть его деформацию.

Обозначим через ρ удлинение радиуса r; очевидно, ρ будет функцией от r, которую нам и предстоит определить. Радиусу $r+dr$ отвечает удлинение $\rho+d\rho$, так что отрезок dr удлиняется на $d\rho$. Поэтому *относительное удлинение в радиальном направлении* будет

$$e_r=\frac{d\rho}{dr}. \tag{165}$$

Для установления *относительного удлинения в касательном направлении* e_t, соображаем, что окружность радиуса r заменится окружностью радиуса $r+\rho$, так что очевидно,

$$e_t=\frac{2\pi(r+\rho)-2\pi r}{2\pi r}=\frac{\rho}{r}. \tag{166}$$

Подсчитаем теперь, с другой стороны, те же относительные удлинения, исходя из напряжений p и q. Известно, что радиальное напряжение p создает не только относительное удлинение $\frac{p}{E}$ в радиальном направлении, но и относительное сжатие $m\frac{p}{E}$ * в перпендикулярном, касательном направлении. Точно так же касательное напряжение q, на ряду с относительным удлинением $\frac{q}{E}$ в касательном направлении, вызывает относительное сжатие $m\frac{q}{E}$ в радиальном направлении. Таким образом, в результате:

$$e_r=\frac{p-mq}{E},\qquad e_t=\frac{q-mp}{E},$$

откуда, в свою очередь,

$$p=\frac{E}{1-m^2}(e_r+me_t),\quad q=\frac{E}{1-m^2}(e_t+me_r).$$

Подставляя сюда, вместо e_r и e_t, их выражения (165), (166), получим основные соотношения, связывающие напряжения p и q с удлинением ρ:

$$p=\frac{E}{1-m^2}\left(\frac{d\rho}{dr}+m\frac{\rho}{r}\right),\qquad q=\frac{E}{1-m^2}\left(\frac{\rho}{r}+m\frac{d\rho}{dr}\right). \tag{167}$$

Если, наконец, эти выражения подставить в ранее выведенное уравнение (164), то — после очевидных упрощений — получим уравнение (типа Эйлера):

$$r^2\frac{d^2\rho}{dr^2}+r\frac{d\rho}{dr}-\rho=0, \tag{168}$$

из которого и определится искомая функция ρ от r. Соответствующее характеристическое уравнение будет: $\lambda^2-1=0$, его корни: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, так что общий интеграл [по формуле (163 *a*)] напишется так:

$$\rho=C_1r+\frac{C_2}{r}.^{**}$$

---

* Коэффициент m есть так называемое *Пуассоново отношение*. Для железа и стали можно принять $m=0{,}3$.

** Тот же результат можно получить и проще, если, разделив на r^2, представить уравнение (168) в виде:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\rho}{dr}+\frac{\rho}{r}\right)=0\quad\text{или}\quad\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(r\rho)}{dr}\right]=0.$$

Так, иной раз частные особенности уравнения позволяют избегнуть громоздкого общего метода!

Отсюда:

$$\frac{d\rho}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^3}.$$

Пользуясь этими выражениями для ρ и ее производной, можно из (167) получить и окончательные выражения для напряжений p и q в функции от r:

$$p = \frac{EC_1}{1-m} - \frac{EC_2}{1+m} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad q = \frac{EC_1}{1-m} + \frac{EC_2}{1+m} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Полагая, для упрощения,

$$\frac{EC_1}{1-m} = c_1, \quad \frac{EC_2}{1+m} = c_2, \tag{169}$$

перепишем эти выражения в виде:

$$p = c_1 - \frac{c_2}{r^2}, \quad q = c_1 + \frac{c_2}{r^2}. \tag{170}$$

Теперь остается лишь определить постоянные c_1 и c_2. Остановимся, для примера, на случае, когда внутреннее давление p_0 настолько велико, что по сравнению с ним наружным давлением (напр., атмосферным) можно пренебречь и просто принять его равным нулю. Если обозначить через r_0 и r_1, соответственно, внутренний и наружный радиусы трубы, то предельные условия будут таковы:

$$p = -p_0 \text{ при } r = r_0, \quad p = 0 \text{ при } r = r_1;$$

так как давление p_0 создает напряжение сжатия, то этим и объясняется отрицательный знак. Подставляя эти значения в формулы (170), получим для определения постоянных два уравнения, из которых:

$$c_1 = \frac{r_0^2 p_0}{r_1^2 - r_0^2}, \quad c_2 = \frac{r_0^2 r_1^2 p_0}{r_1^2 - r_0^2}. \tag{171}$$

Обе постоянные оказываются положительными; в таком случае из (170) ясно, что q всегда > 0, т. е. касательные напряжения всегда растягивающие. Наоборот, p всегда < 0, ибо достигает при $r = r_1$ своего алгебраически наибольшего значения 0; таким образом, на деле радиальные напряжения оказываются сжимающими. Так как из формул (170) следует, что p по абсолютной величине всегда меньше q, то при расчетах на прочность обращают внимание лишь на касательные напряжения q. Наибольшей величины q достигает при $r = r_0$; пользуясь найденными значениями (171) постоянных, легко подсчитать, что

$$q_{\text{макс.}} = \frac{r_1^2 + r_0^2}{r_1^2 - r_0^2} p_0. \tag{172}$$

Решим с помощью этой формулы, напр., такую задачу. Диаметр штампа гидравлического пресса равен 360 мм, диаметр его цилиндра равен 400 мм; спрашивается, какой толщины должны быть стенки цилиндра, чтобы при силе в 250 т напряжение нигде не превосходило 750 кг/см².

Силе в 250 т = 250 000 кг отвечает удельное давление

$$p_0 = \frac{250\,000}{\frac{\pi \cdot 36^2}{4}} \doteq 246 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2};$$

подставляя это значение в формулу (172) и, кроме того, полагая в ней $q_{\text{макс.}} = 750$ (кг/см²) и $r_0 = 20$ (см), получим уравнение:

$$750 = \frac{r_1^2 + 400}{r_1^2 - 400} \cdot 246,$$

откуда $r_1 = 28{,}1$ см, так что толщина цилиндра должна быть 81 мм.

2. *Напряжения в быстро вращающихся дисках.* Вернемся теперь к вопросу, который мы рассматривали в п° 262. При произвольном законе изменения толщины y

диска в зависимости от расстояния r от центра мы получили там уравнение (26):

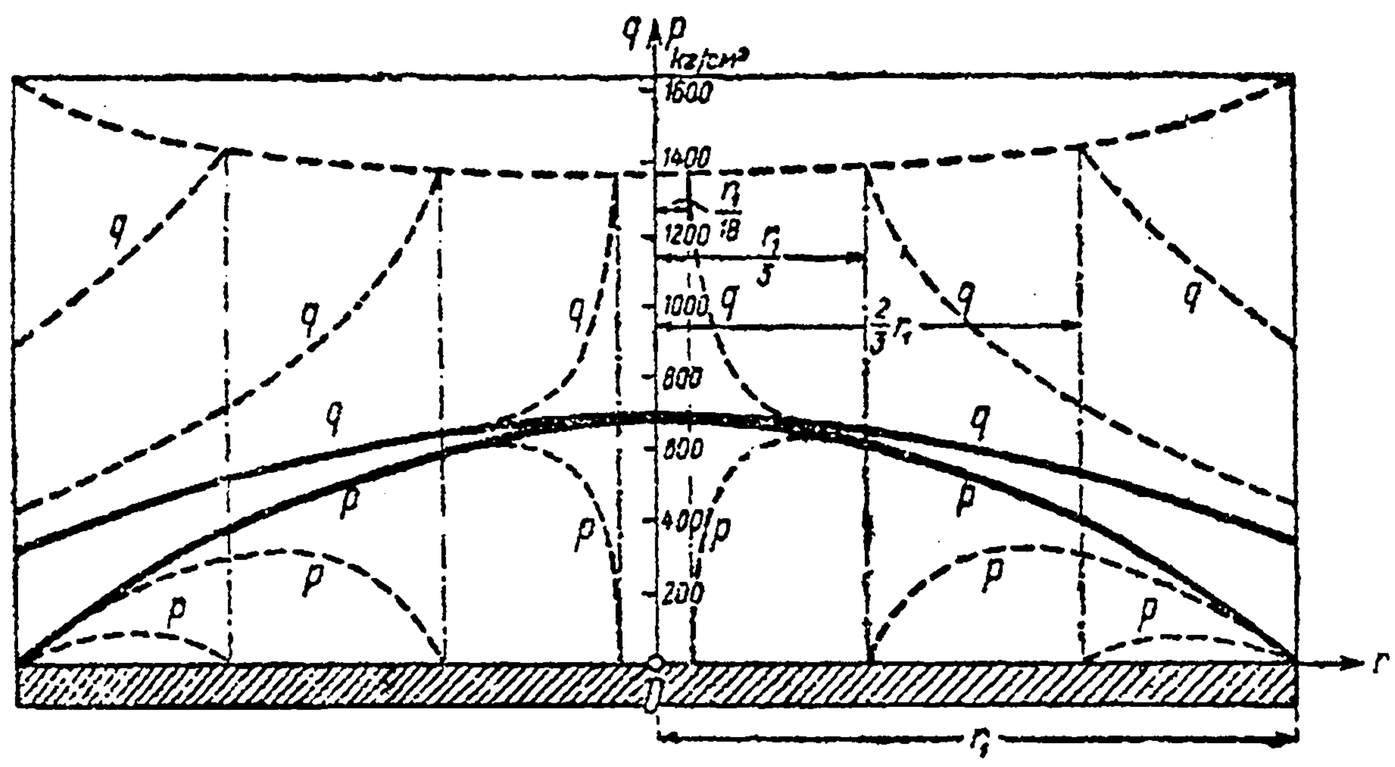
$$\frac{d(pry)}{dr} - qy + \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2 y = 0,$$

связывающее радиальное и касательное напряжения, p и q. Раньше мы, задавшись определенными предположениями относительно этих напряжений, искали соответствующую им формулу диска. Здесь же мы, наоборот, зададимся наперед той или иной формой диска и станем искать соответствующее ей распределение напряжений.

Рассмотрим, прежде всего, диск постоянной толщины h (точильный камень, аждачный круг и т. п.); полагая в уравнении (18) $y = h$ и сокращая, получим:

$$\frac{d(pr)}{dr} - q + \frac{\gamma\omega^2}{g} r^2 = 0. \tag{173}$$

И здесь нам также придется рассматривать удлинение ρ радиуса r, как и в предыдущей задаче; воспользовавшись выведенными там формулами (167), мы из уравнения (173) получим уравнение, определяющее ρ:



Черт. 533.

$$r^2 \frac{d^2\rho}{dr^2} + r\frac{d\rho}{dr} - \rho = ar^3, \text{ *}$$

где

$$a = -\frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot \frac{1-m^2}{E}. \tag{174}$$

Оно отличается от уравнения (168), к которому мы пришли в предыдущей задаче, только наличием последнего члена (связанного с центробежной силой!). Итак, дополнительную функцию мы уже знаем; не трудно также найти и частное решение: $\rho = \frac{a}{8} r^3$, так что общий интеграл имеет вид:

$$\rho = \frac{a}{8} r^3 + C_1 r + \frac{C_2}{r}.$$

Отсюда, с помощью (167), как и выше, получим выражения для p и q:

$$p = -br^2 + c_1 - \frac{c_2}{r^2}, \quad q = -b \cdot \frac{1+3m}{3+m} r^2 + c_1 + \frac{c_2}{r^2},$$

где постоянные c_1 и c_2 связаны с C_1 и C_2 прежними соотношениями (169), а

$$b = \frac{\gamma\omega^2}{8g}(3+m).$$

Если в центре диска есть отверстие (для вала) радиуса r_0, в то время как наружный радиус диска есть r_1, то предельные условия будут в этом случае:

$$p = 0 \quad \text{как при } r = r_0, \text{ так и при } r = r_1.$$

Эти условия приведут к таким значениям постоянных:

$$c_1 = b\left(r_0^2 + r_1^2\right), \qquad c_2 = b r_0^2 r_1^2;$$

так что

$$p = b\left(r_0^2 + r_1^2 - r^2 - \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}\right), \quad q = b\left(r_0^2 + r_1^2 - \frac{1+3m}{3+m} r^2 + \frac{r_0^2 r_1^2}{r^2}\right).$$

* Любопытно, что точно такое же уравнение получается при исследовании вопроса об изгибании равномерно нагруженной круглой пластинки.

Здесь и p, и q всегда >0 (растяжения) — лишь по краям $p=0$; кроме того, очевидно, $p<q$. Так как с возрастанием r величина q убывает, то наибольшего значения q достигает у отверстия, при $r=r_0$:

$$q_{\text{макс.}}=2b\left(\frac{1-m}{3+m}r_0^2+r_1^2\right).$$

Пусть, напр., для наждачного круга

$$r_0=2{,}5\ \text{см},\quad r_1=25\ \text{см},\quad \gamma=0{,}0029\ \frac{\text{кг}}{\text{см}^3},\quad m=0{,}25$$

и число оборотов в минуту $n=1150$, тогда

$$q_{\text{макс.}}=\frac{0{,}0029}{4\cdot 981}\left(\frac{1150\cdot 2\pi}{60}\right)^2\cdot 3{,}25\cdot\left(\frac{0{,}75\cdot 6{,}25}{3{,}25}+625\right)\doteq 22\ \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Если диск будет без всякой выточки (диск турбины Лаваля), то предельные условия иные:

$$p=0\ \text{при}\ r=r_1\ \text{и}\ p=0\ \text{при}\ r=0.$$

Второе условие возможно лишь при $C_2=c_2=0$. Предлагаем читателю найти выражения для p и q и убедиться в том, что

$$p_{\text{макс.}}=q_{\text{макс.}}=br_1^2,$$

т. е. по крайней мере, вдвое меньше, чем при наличии отверстия, как бы мало оно ни было!

На черт. 533 представлены графики зависимости напряжений p и q от r как для случая сплошного диска (сплошные линии), так и для случаев отверстий, диаметры которых составляют, соответственно, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ от наружного диаметра (пунктир). В основу положены следующие данные:

$$r_1=91{,}4\ \text{см},\quad \gamma=0{,}0078\ \frac{\text{кг}}{\text{см}^3},\quad m=0{,}3\ \text{и}\ n=3000\ \frac{\text{обор.}}{\text{мин.}}.$$

Очень часто профили турбинных дисков очерчивают по закону:

$$y=c\cdot r^{-2\alpha}.$$

Подставляя эту функцию в основное уравнение (26), 262, получим:

$$r\frac{dp}{dr}-(2\alpha-1)p-q+\frac{\gamma\omega^2}{g}r^3=0.$$

В соответствии с этим для ρ получится уравнение:

$$r^2\frac{d^2\rho}{dr^2}-(2\alpha-1)r\frac{d\rho}{dr}-(2\alpha m+1)\rho=ar^3,$$

где a имеет прежнее значение [см. (174)].

Его общий интеграл имеет вид:

$$\rho=\frac{a}{8-2\alpha(m+3)}r^3+C_1r^{\lambda_1}+C_2r^{\lambda_2},$$

где λ_1 и λ_2 суть корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2-2\alpha\cdot\lambda-(2\alpha m+1)=0.$$

Не трудно видеть, что эти корни всегда вещественны (свободный член отрицателен!), причем один из них — положительный, а другой — отрицательный.

Ясно, что теперь можно получить и выражения для p и q, и т. д.

Глава XVII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

289. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Из дифференциальных уравнений порядков выше второго мы упомянем лишь о *линейных* уравнениях, с которыми иной раз приходится сталкиваться в технических вопросах. Линейное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$L_0(x)y^{(n)}+L_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+L_{n-1}(x)y'+L_n(x)y=M(x)$$

или—если разделить на коэффициент $L_0(x)$:

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=R(x); \qquad (1)$$

L, M, P, R—функции от x.

Эти уравнения обладают свойствами, вполне аналогичными свойствам линейных уравнений второго порядка [281—283]. Перечислим их вкратце.

Рассмотрим сначала уравнение *без последнего члена*:

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=0. \qquad (2)$$

Если имеем n частных решений y_1, y_2,..., y_n уравнения (2), то и составленное из них выражение

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$$

также будет его решением, каковы бы ни были значения постоянных C_1, C_2,..., C_n. Это выражение будет даже *общим интегралом* уравнения (2), т. е. охватит все его решения, если только положенные в основу частные решения будут *независимы* между собой. Последнее требование означает, что мы *исключаем* возможность линейных соотношений между самими частными решениями, в роде таких, напр.:

$$y_3=2y_1, \quad y_2=3y_1-5y_3, \quad \text{и т. п.}$$

В случае уравнения (1) с последним членом достаточно найти одно какое-нибудь его частное решение $\bar{y}$ и прибавить к нему общий интеграл *соответствующего* уравнения без последнего члена (*дополнительную функцию*), чтобы получить и его общий интеграл.

Наиболее простым (и важным) случаем уравнений (1) и (2) будет тот, когда все коэффициенты $P_1(x)$,..., $P_n(x)$ будут постоянными числами; обозначим их в этом предположении просто через p_1, p_2,...p_n.

Решение дифференциального уравнения n-го порядка:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=0 \tag{3}$$

без последнего члена производится так же просто, как и в случае уравнения второго порядка, основываясь на решении вспомогательного алгебраического уравнения n-ой степени:

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_{n-1}\lambda+p_n=0 \tag{4}$$

с теми же коэффициентами (*характеристическое уравнение*).

Это уравнение имеет всегда n корней [143], если каждый корень считать по степени его кратности. Каждый простой корень λ доставляет одно решение уравнения (2), именно $e^{\lambda x}$; если уравнение (4) имеет n простых корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то общий интеграл уравнения (2) сразу может быть написан в виде:

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+\ \ldots\ +C_ne^{\lambda_nx}.$$

(Решения, отвечающие разным корням, между собой независимы!)

Конечно, в числе этих корней могут быть и мнимые, так что в составе общего интеграла окажутся выражения с мнимыми показателями. Избежать этого можно буквально так же, как и в случае уравнения второго порядка: пользуясь тем, что на ряду с мнимым корнем $\lambda_1=\alpha+\beta i$ непременно найдется и сопряженный с ним $\lambda_2=\alpha-\beta i$ [145], мы, как и в n⁰ 282, просто заменяем группу членов (129) группой членов (130), уже не содержащих мнимых величин.

Если k корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ $(k\leqslant n)$ оказываются равными, так что, вместо k разных решений, они доставляют только одно решение:

$$e^{\lambda_1x}=e^{\lambda_2x}=\ldots=e^{\lambda_kx},$$

то недостающие решения найдутся в форме

$$xe^{\lambda_1x},\quad x^2e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_1x}.$$

Иначе говоря, корню $\lambda=\lambda_1$ k-ой кратности в общем интеграле отвечает группа членов:

$$\left(C_1x^{k-1}+C_2x^{k-2}+\ldots+C_k\right)e^{\lambda_1x}$$

[ср. 282, (126 b)].

Такой же многочлен $(k-1)$-ой степени присоединяется в виде множителя к каждому из решений $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, отвечающих паре сопряженных мнимых корней, если эти корни оказываются k-ой кратности.

Далее, упомянем (уже не входя в подробности), что на уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами, имеющие последний член $R(x)$ какой-либо из изученных в n⁰ 284 форм, распространяются изложенные там приемы для нахождения частных решений.

Точно так же, само собою разумеется, что как понятие об *уравнении Эйлера*, так и метод его сведения к уравнению с постоянными коэффициентами распространяются на случай уравнения любого порядка.

Наконец, скажем несколько слов об определении n постоянных, входящих в общий интеграл уравнения (1). Для этого служат, как всегда, *начальные* или *предельные условия*, которые доставляются самой задачей, приведшей к дифференциальному уравнению. Эти условия обыкновенно сводятся к тому, что при каком-либо одном начальном значении независимой переменной или же при двух ее пре-

дельных значениях задаются наперед соответствующие значения самой функции y или ее производных (не выше $n-1$-го порядка). Число условий должно равняться числу произвольных постоянных, т. е. — порядку уравнения.

Примеры. 1. Пусть дано уравнение:

$$y''' - y'' + y' - y = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Замечая, что левая часть его может быть представлена в виде $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$, находим его корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$.
Общий интеграл:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{ix} + C_3 e^{-ix} \text{ или } y = C_1 e^x + c_2 \sin x + c_3 \cos x.$$

2. Решить уравнение:

$$y'''' - 2y'' + y = e^{2x}.$$

Решение. Частное решение ищем в форме: $\bar{y} = Ae^{2x}$ и находим: $A = \frac{1}{9}$.

Для соответствующего уравнения без последнего члена:

$$z'''' - 2z'' + z = 0$$

характеристическое уравнение имеет вид: $(\lambda^2 - 1)^2 = 0$, так что $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$.
Дополнительная функция:

$$z = (C_1 x + C_2)e^x + (C_3 x + C_4)e^{-x}.$$

Теперь уже легко построить и общий интеграл.

3. Решить уравнение:

$$y'''' + 2y''' - y' - 2y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$$

имеет корни

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Общий интеграл:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

290. Задачи. 1. *Изгибание вращающегося вала.* При вращении сравнительно тонких, длинных валов наблюдается явление своеобразного *резонанса.* Если постепенно увеличивать угловую скорость вращения ω, то при достижении ею некоторого значения ω_1 вал искривляется и начинает „бить"; лишь только эта *критическая скорость* перейдена, вал снова принимает прямолинейную форму и вращается спокойно, но при достижении следующей критической скорости ω_2 опять начинает „бить" и т. д.

При этом величины критических скоростей, разумеется, зависят от нагрузки вала и способов закрепления его концов.

Для объяснения указанного явления рассмотрим простейший случай: пусть цилиндрический вал вращается в шаровых подшипниках, так что концы его можно считать опертыми. Поставим вопрос о *формах равновесия* такого вала, вращающегося с настолько большой угловой скоростью ω, что действием собственного веса вала можно пренебречь по сравнению с развивающейся при его вращении центробежной силой.

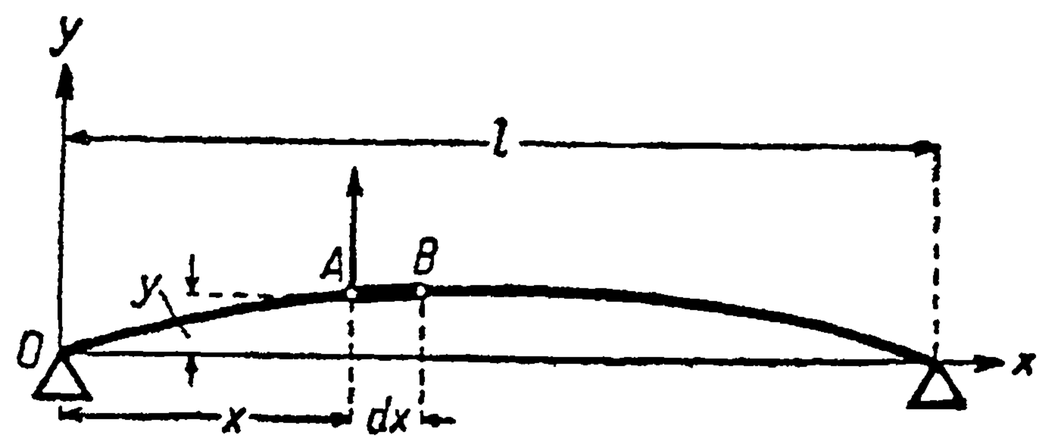
Выбрав оси, как указано на черт. 534, возьмем какую-либо точку A вала, на расстоянии x от левого конца, и примыкающий к ней бесконечно малый элемент AB длины dx. Если обозначить через y прогиб вала в точке A, а через γ — вес погонной единицы вала, * то действующая на выделенный элемент центробежная сила будет иметь величину

$$\frac{\gamma\, dx}{g}\,\omega^2 \cdot y = \frac{\gamma\omega^2}{g} y \cdot dx.$$

Центробежная сила играет, таким образом, как бы роль непрерывно распределенной нагрузки, с интенсивностью

$$q = -\frac{\gamma\omega^2}{g}\, y.$$

Отрицательный знак в выражении для q объясняется тем, что при указанном на чертеже положении точки A — центробежная сила действует вверх, в то время как говоря о непрерывно распределенной нагрузке в n⁰ 276 мы считали ее интенсивность q положительной, когда нагрузка действовала вниз.



Черт. 534.

В таком случае, в силу (71), 276, для изгибающего момента M в точке A имеем соотношение:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{\gamma\omega^2}{g} y; \qquad (5)$$

с другой стороны, известно основное уравнение изгиба балки:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI} M$$

[272, (58)]. Если дважды продифференцировать его и воспользоваться только что полученным равенством (5), то придем к уравнению четвертого порядка:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{1}{EI}\,\frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot y.$$

Этим уравнением и определяются искомые формы равновесия.

Полагая

$$\alpha^4 = \frac{1}{EI} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \quad \text{или} \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\gamma\omega^2}{EIg}}, \qquad (6)$$

перепишем его в виде:

$$y^{(4)} - \alpha^4 \cdot y = 0. \qquad (7)$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda^4 - \alpha^4 = (\lambda^2 - \alpha^2)(\lambda^2 + \alpha^2) = 0;$$

оно имеет, очевидно, корни

$$\lambda_1 = \alpha, \quad \lambda_2 = -\alpha, \quad \lambda_3 = \alpha i, \quad \lambda_4 = -\alpha i.$$

Сообразно с этим, общий интеграл нашего уравнения (7) будет таков:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x.$$

Впрочем для упрощения определения произвольных постоянных удобнее вместо показательных функций в первых двух членах ввести гиперболические функции [на подобие того как в n⁰ 279 мы от формулы (93) перешли к формуле (93*a*)] и взять этот интеграл в виде:

$$y = C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x + C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x \qquad (8)$$

* Если на вал насажены в большом числе диски, равномерно распределенные по длине вала, то можно их массу присоединить к массе вала, увеличив γ на общий их вес, разделенный на длину вала.

(мы сохранили те же обозначения для первых двух произвольных постоянных, но значения их, разумеется, вообще говоря, будут другие).

Обратимся теперь к предельным условиям. На концах вала, прежде всего, нет прогиба; кроме того, там должен обращаться в нуль и изгибающий момент. $M = EI \cdot y''$. Таким образом, имеем:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y'' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и при} \quad x = l.$$

Подставляя эти значения x в выражение (8) и в его вторую производную

$$y'' = \alpha^2 [C_1 \operatorname{sh} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x - C_3 \sin \alpha x - C_4 \cos \alpha x],$$

получим четыре уравнения:

$$C_2 + C_4 = 0, \qquad C_2 - C_4 = 0,$$
$$C_1 \operatorname{sh} \alpha l + C_2 \operatorname{ch} \alpha l + C_3 \sin \alpha l + C_4 \cos \alpha l = 0,$$
$$C_1 \operatorname{sh} \alpha l + C_2 \operatorname{ch} \alpha l - C_3 \sin \alpha l - C_4 \cos \alpha l = 0.$$

Первые два сразу дают: $C_2 = C_4 = 0$, а последние два, которые перепишутся теперь так:

$$C_1 \operatorname{sh} \alpha l + C_3 \sin \alpha l = 0, \qquad C_1 \operatorname{sh} \alpha l - C_3 \sin \alpha l = 0,$$

в свою очередь приводят к равенствам:

$$C_1 \operatorname{sh} \alpha l = 0, \qquad C_3 \sin \alpha l = 0, \tag{9}$$

Но $\operatorname{sh} \alpha l \neq 0$, так что необходимо и $C_1 = 0$, т. е. уже три постоянные равны нулю. Очевидно, если положить и $C_3 = 0$, то предельные условия окажутся выполненными, но тогда $y = 0$ при всех значениях x, и мы получаем прямолинейную форму равновесия. Криволинейная форма равновесия возможна лишь в том случае, если второе из равенств (9) удовлетворяется и при отличном от нуля C_3, а это будет тогда, когда

$$\sin \alpha l = 0. \tag{10}$$

Если это условие выполнено, то постоянная $C_3 = C$ может принимать любое значение, и в этом случае криволинейная форма динамического равновесия вала существует в виде простой синусоиды:

$$y = C \sin \alpha x.$$

Условие (10) требует, чтобы αl было равно целому кратному π:

$$\alpha l = n\pi; \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

если принять во внимание выражение (6) для α, то отсюда

$$\omega = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma}}.$$

Таким образом, только при угловых скоростях:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma}}, \quad \omega_2 = 4\omega_1, \quad \omega_3 = 9\omega_1, \ \ldots \tag{11}$$

вал под действием центробежной силы может иметь и криволинейные формы равновесия (первые четыре из них изображены на черт. 535). Понятно, что ничтожнейшей причины тогда достаточно, чтобы вал, изменив своей первоначально прямолинейной форме, начал „бить". Ряд (11) дает последовательные *критические скорости* вала.

Читатель легко заметит, что постановка вопроса в рассматриваемой задаче совершенно та же, что и в задаче Эйлера о продольном изгибе; даже формы равновесия оказываются теми же. И здесь так же, как и в n⁰ 286, 2, 3, можно было бы исследовать влияние отдельных отклонений от „идеального" положения вещей (напр., чуть эксцентричного расположения масс цилиндра или насаженных на него

дисков) и убедиться в том, что, при наличии таких—хотя бы самых ничтожных!— отклонений, с приближением угловой скорости ω к одному из критических значений (11), прогибы (теоретически) должны бесконечно возрастать, и т. д.

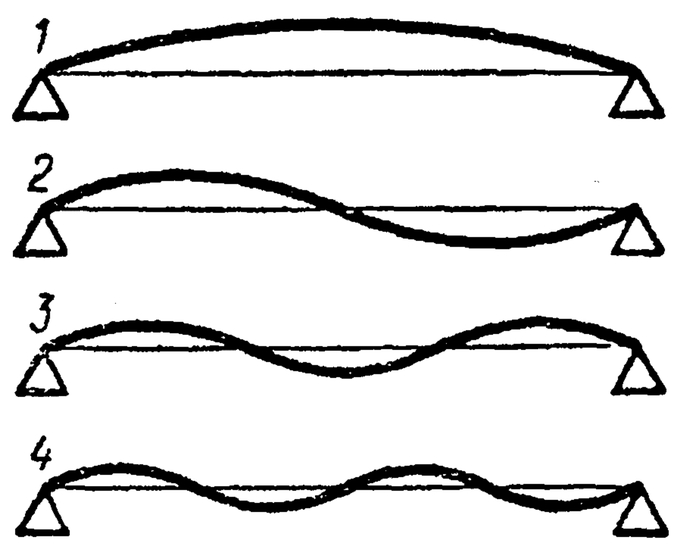
Обращаем внимание читателя на то, что и в рассматриваемом случае решающую роль сыграла способность предельных условий определять искомую функцию неоднозначно, и именно при некоторых особенных значениях входящего в уравнение параметра (в данном случае — угловой скорости ω).

2. *Изгиб балки, лежащей на упругом основании.* Рассмотрим балку KL (черт. 536), лежащую на упругом основании, так что изгиб балки вызывает реакцию со стороны этого основания, в виде давления на балку. Будем считать, что интенсивность этого давления p (т. е. давление, рассчитанное *на погонную единицу длины* балки) пропорциональна прогибу y в соответствующей точке:

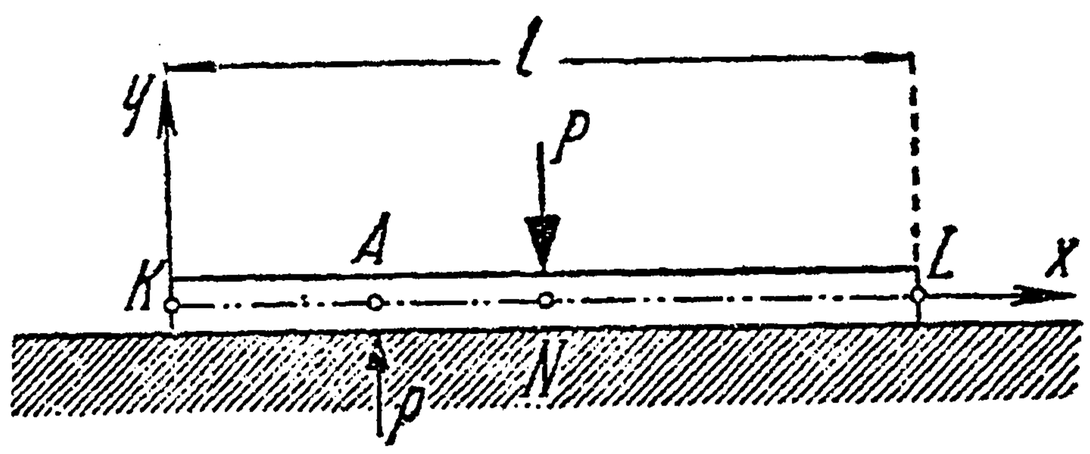
$$p = ky. \tag{12}$$

[При выбранном направлении оси Oy по этой формуле прогибу балки вниз, т. е. отрицательному y отвечает и отрицательное p, как и должно быть, ибо давление на балку направлено вверх.]

Если на балку действует еще непрерывно распределенная нагрузка интенсивности $q = q(x)$ (и ряд отдельных сосредоточенных сил), то, в силу того же соотно-



Черт. 535.



Черт. 536.

шения (71), 276, которым мы пользовались в предыдущей задаче, будем иметь вообще:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -(ky + q),$$

где M — изгибающий момент в рассматриваемом сечении. Снова пользуясь основным дифференциальным уравнением изогнутой оси балки, получим и на этот раз для ее определения уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{1}{EI}(ky + q).$$

Наличие сосредоточенных сил на этом уравнении никак не отразилось, но они будут играть основную роль как в выборе тех промежутков, для которых в отдельности надлежит искать решение уравнения [ср 275, 2], так и при установлении предельных условий.

Мы как раз и разберем подробно случай балки, длины l, к которой в ее середине приложена сосредоточенная сила P (при отсутствии непрерывно распределенной нагрузки, кроме собственного веса балки, которым можно пренебречь). В этом случае, полагая

$$4\beta^4 = \frac{k}{EI} \text{ или } \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}, \tag{13}$$

можно переписать дифференциальное уравнение в виде

$$y^{(4)} + 4\beta^4 y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 4\beta^4 = 0;$$

если заметить, что

$$\lambda^4 + 4\beta^4 = (\lambda^4 + 4\beta^2\lambda^2 + 4\beta^4) - 4\beta^2\lambda^2 = (\lambda^2 + 2\beta^2)^2 - (2\beta\lambda)^2 =$$
$$= (\lambda^2 - 2\beta\lambda + 2\beta^2)\cdot(\lambda^2 + 2\beta\lambda + 2\beta^2),$$

то легко найти его корни:

$$\lambda_1 = \beta + \beta i,\ \lambda_2 = \beta - \beta i,\ \lambda_3 = -\beta + \beta i,\ \lambda_4 = -\beta - \beta i.$$

Поэтому общий интеграл будет

$$y = e^{\beta x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \sin\beta x + C_4 \cos\beta x). \qquad (14)$$

Теперь мы определенно условимся вести речь о левой половине балки, т. е. изменять x от 0 до $\frac{l}{2}$; симметрия позволит распространить полученные результаты и на правую часть балки, но постоянные C для нее будут иметь другие значения! Выясним же предельные условия. На левом конце балки должны обратиться в нуль и изгибающий момент

$$M = EI\cdot y'',$$

и перерезывающее усилие [276, (69)]

$$S = \frac{dM}{dx} = EI\cdot y'''.$$

В середине же N балки, в виду симметрии, касательная горизонтальна, т. е. ее угловой коэффициент y' обращается в нуль. Наконец, так как сила P со стороны упругого основания вызывает в общем реакцию также величины P (направленную вверх), из которой на долю левой части приходится $\frac{P}{2}$, то перерезывающее усилие S непосредственно слева от точки N (т. е. сумма всех действующих на балку слева от N сил) должно быть равно $\frac{P}{2}$. Итак, имеем:

$$y'' = 0,\ y''' = 0 \text{ при } x = 0 \quad \text{и} \quad y' = 0',\ y''' = \frac{P}{2\,EI} \text{ при } x = \frac{l}{2}.$$

Для удобства, выпишем полные выражения производных функции (14), не боясь их несколько громоздкого вида:

$$y' = \beta\{C_1(e^{\beta x}\sin\beta x + e^{\beta x}\cos\beta x) + C_2(e^{\beta x}\cos\beta x - e^{\beta x}\sin\beta x) +$$
$$+ C_3(-e^{-\beta x}\sin\beta x + e^{-\beta x}\cos\beta x) + C_4(-e^{-\beta x}\cos\beta x - e^{-\beta x}\sin\beta x)\},$$
$$y'' = 2\beta^2\{C_1 e^{\beta x}\cos\beta x - C_2 e^{\beta x}\sin\beta x - C_3 e^{-\beta x}\cos\beta x + C_4 e^{-\beta x}\sin\beta x\},$$
$$y''' = 2\beta^3\{C_1(e^{\beta x}\cos\beta x - e^{\beta x}\sin\beta x) - C_2(e^{\beta x}\sin\beta x + e^{\beta x}\cos\beta x) +$$
$$+ C_3(e^{-\beta x}\cos\beta x + e^{-\beta x}\sin\beta x) + C_4(-e^{-\beta x}\sin\beta x + e^{-\beta x}\cos\beta x)\}.$$

Первые два предельные условия дают уравнения:

$$C_1 - C_3 = 0, \quad C_1 - C_2 + C_3 + C_4 = 0. \qquad (15)$$

Переходя к последним двум условиям, введем сокращенные обозначения:

$$e^{\frac{\beta l}{2}}\sin\frac{\beta l}{2} = m_1, \quad e^{\frac{\beta l}{2}}\cos\frac{\beta l}{2} = m_2, \quad e^{-\frac{\beta l}{2}}\sin\frac{\beta l}{2} = m_3, \quad e^{-\frac{\beta l}{2}}\cos\frac{\beta l}{2} = m_4,$$

с их помощью, эти условия запишутся в виде уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C_1(m_1 + m_2) + C_2(m_2 - m_1) + C_3(m_4 - m_3) - C_4(m_3 + m_4) &= 0 \\ C_1(m_2 - m_1) - C_2(m_1 + m_2) + C_3(m_3 + m_4) + C_4(m_4 - m_3) &= \frac{P}{4\,EI\beta^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (15\,a)$$

Мы имеем, таким образом, систему из четырех линейных уравнений, из которых и определятся постоянные C_1, C_2, C_3, C_4.

Возьмем конкретный пример. Предположим, что балка литого железа длиною $l = 80$ см, с квадратным сечением в 6×6 см, лежит плотно на земляном грунте и несет по середине груз $P = 1000$ кг. Требуется определить давление балки на грунт на концах и в середине балки, если дано, что при удельном давлении в 1 кг/см² осадка грунта достигает 0,25 мм.

Прежде всего, положим $E = 22 \cdot 10^5$ (кг/см²) и $I = \frac{bh^3}{12} = 108$ (см⁴). Для определения коэффициента k в формуле (11) заметим, что удельное давление 1 кг/см² отвечает давлению в 6 кг на 1 см длины стержня, так что

$$k = \frac{6}{0{,}025} = 240 \left(\frac{\text{кг}}{\text{см}^2}\right).$$

В таком случае, по формуле (13), $\beta = 0{,}0224$ (1/см); затем, $\frac{\beta l}{2} = 0{,}896$ и

$$m_1 = 1{,}912,\ m_2 = 1{,}530,\ m_3 = 0{,}319,\ m_4 = 0{,}255.$$

Наконец, из уравнений (15) и (15 a), которые теперь напишутся так:

$$C_1 - C_3 = 0,\ C_1 - C_2 + C_3 + C_4 = 0,$$
$$3{,}442\ C_1 - 0{,}382\ C_2 - 0{,}064\ C_3 - 0{,}574\ C_4 = 0,$$
$$-0{,}382\ C_1 - 3{,}442\ C_2 + 0{,}574\ C_3 - 0{,}064\ C_4 = 0{,}0936,$$

получим численные значения всех четырех постоянных:

$$C_1 = C_3 = -0{,}0057,\ C_2 = -0{,}0270,\ C_4 = -0{,}0156.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (14) и полагая в ней $x = 0$ и $x = 40$ найдем (пользуясь приведенными выше значениями $m_1, \ldots, m_4$), что прогиб балки в точках K и N, соответственно, будет 0,043 см и 0,058 см. Отсюда давление со стороны балки на грунт в этих точках равно $0{,}043 \cdot 240 \doteq 10{,}3$ кг/см. и $0{,}058 \cdot 240 \doteq 13{,}9$ кг/см. *

В нашем примере, как не трудно проверить, для y получаются отрицательные значения вдоль всей балки, так что между балкой и грунтом всегда осуществляются сжимающие усилия. Если бы балка была значительно длиннее, то могло бы оказаться, что формула (14) давала бы для y на отдельных участках и положительные значения, так что балка в соответствующих местах должна была бы приподняться. Верность нашей формулы и в этих случаях обусловливается предположением, что балка скреплена с основанием так, что между ними возможны и растягивающие усилия.

291. Системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы. До сих пор мы занимались вопросом об определении одной неизвестной функции (от рассматриваемой независимой переменной) из одного дифференциального уравнения. Некоторые технические задачи, особенно из области динамики, приводят к необходимости определить сразу несколько функций (от одной и той же независимой переменной), исходя из системы дифференциальных уравнений (в числе, равном числу неизвестных функций). Мы остановимся сначала на том простейшем случае, когда уравнения содержат лишь первые производные этих функций.

Если ограничиться, для простоты, тремя функциями y, z, u от независимой переменной x и представить себе, что уравнения разрешены относительно производных $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$, то система напишется в виде:

* На практике, при решении подобных задач, пользуются (по особым схемам) заранее составленными таблицами, графическими приемами и т. п.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=f(x,\ y,\ z,\ u),\\ \frac{dz}{dx}&=g(x,\ y,\ z,\ u),\\ \frac{du}{dx}&=h(x,\ y,\ z,\ u).\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

Подобного рода система дифференциальных уравнений первого порядка носит название нормальной системы.

Вот пример такой системы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=-2y+3z+4u-3x,\\ \frac{dz}{dx}&=-6y+7z+6u-7x+1,\\ \frac{du}{dx}&=\quad y-z+u+x.\end{aligned}\right\}\qquad(16\,a)$$

Решение системы (16) приводится, вообще, к решению одного уравнения, но высшего порядка, равного числу уравнений системы.

Поясним, как это делается, сначала на нашем примере. Продифференцируем первое из данных уравнений по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\frac{dy}{dx}+3\frac{dz}{dx}+4\frac{du}{dx}-3$$

и заменим в результате каждую из производных соответствующим из выражений (16 a):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2\ (-2y+3z+4u-3x)+$$
$$+3(-6y+7z+6u-7x+1)+4\ (y-z+u+x)-3=$$
$$=-10y+11z+14u-11x.$$

Повторим еще раз дифференцирование, снова заменяя производные их выражениями:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-10\frac{dy}{dx}+11\frac{dz}{dx}+14\frac{du}{dx}-11=$$
$$=-10\ (-2y+3z+4u-3x)+11\ (-6y+7z+6u-7x+1)+$$
$$+14\ (y-z+u-x)-11=-32y+33z+40u-33x.$$

Таким путем мы составляем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=-2y+3z+4u-3x,\\ \frac{d^2y}{dx^2}&=-10y+11z+14u-11x,\\ \frac{d^3y}{dx^3}&=-32y+33z+40u-33x.\end{aligned}\right\}\qquad(17\,a)$$

Мы постараемся исключить из них функции z, u, чтобы притти к уравнению, содержащему одну лишь неизвестную функцию y. С этой целью определим z и u из первых двух уравнений (17 a):

$$\left.\begin{aligned} z &= 2\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 6y + x, \\ u &= -\frac{3}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{11}{2}\frac{dy}{dx} - 4y, \end{aligned}\right\}. \qquad (18\,a)$$

и подставим полученные выражения в последнее из уравнений (17 a). Мы придем к линейному дифференциальному уравнению третьего порядка относительно y:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Решая его по правилам n⁰ 289, составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0;$$

так как корни его будут $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, то

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Отсюда:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{3x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + 9C_3 e^{3x}.$$

Подставляя, наконец, полученные выражения для y и ее производных в формулы (18 a), найдем:

$$z = C_1 e^x + 3C_3 e^{3x} + x, \quad u = C_2 e^{2x} - C_3 e^{3x}.$$

Эти общие выражения для искомых функций y, z, u содержат, в совокупности, три произвольных постоянных: они составляют общий интеграл нашей системы.

Аналогично этому и в общем случае (16) дифференцируют последовательно какое-либо из данных уравнений, например первое, причем всякий раз, когда при дифференцировании появляется производная $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ или $\frac{du}{dx}$, ее тотчас же заменяют соответствующим из выражений (16). Получив систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z, u), \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \varphi(x, y, z, u), \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \psi(x, y, z, u), \end{aligned}\right\}. \qquad (17)$$

мы из первых двух определим z и u:

$$z = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right), \; u = G\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right), \qquad (18)$$

а затем подставим эти выражения в третье уравнение, что приведет нас к дифференциальному уравнению третьего порядка относительно y.

В важных для техники случаях система (16) обыкновенно оказывается линейной (т. е. содержит неизвестные функции линейно) и притом с постоянными коэффициентами. Легко видеть, что тогда и уравнение относительно y, к которому она приводится, будет линейным и тоже с постоянными коэффициентами.

Найдя обычным путем общее выражение для y, содержащее три произвольных постоянных, для определения z и u пользуются ранее полученными для них выражениями (18).

Число произвольных постоянных в полученном общем интеграле в точности отвечает числу неизвестных функций или числу уравнений исходной системы.

Заметим, что произвольные постоянные могут быть определены из начальных условий, как и в случае одного уравнения. В случае системы (16 a), напр., если установлено, что

$$y=0,\ z=-\frac{1}{2},\ u=0 \text{ при } x=0,$$

то, подставляя эти значения в равенства, определяющие искомые функции, найдем:

$$C_1+C_2+C_3=0,\quad C_1+3C_3=-\frac{1}{2},\ C_2-C_3=0,$$

откуда

$$C_1=1,\ C_2=C_3=-\frac{1}{2}.$$

Замечание. Хотя решение одного уравнения, даже высшего порядка, вообще есть более простая вещь, чем решение системы, но иной раз все же представляется выгодным свести решение одного уравнения к решению нормальной системы [см., напр., ниже пп° 298, 303].

Пусть имеем, скажем, уравнение третьего порядка:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Положив

$$\frac{dy}{dx}=z,\quad \frac{dz}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=u,$$

введем эти производные в качестве новых искомых функций, на ряду с y. Так как, очевидно,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{du}{dx},$$

то данное уравнение перепишется теперь так:

$$\frac{du}{dx}=f\ (x,\ y,\ z,\ u).$$

Окончательно, можно считать, что три неизвестные функции y, z, u определяются нормальной системой:

$$\frac{dy}{dx}=z, \quad \frac{dz}{dx}=u, \quad \frac{du}{dx}=f(x, y, z, u).$$

Примеры и задачи. 1. Пусть требуется определить функции y и z от x по следующей системе уравнений:

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y-z, \quad \frac{dz}{dx}=-x^2-4y+z.$$

Продифференцировав первое из них по x, найдем:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2x+\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}$$

или, если вместо $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ подставить сюда их выражения из данных уравнений:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2x+(x^2+y-z)-(-x^2-4y+z)=2x^2+2x+5y-2z.$$

С другой же стороны, первое из данных уравнений приводит к такому выражению для z:

$$z=x^2+y-\frac{dy}{dx};$$

подставляя это выражение в предыдущее уравнение, мы получим в результате уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2x^2+2x+5y-2\left(x^2+y-\frac{dy}{dx}\right)$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=2x,$$

уже содержащее лишь одну неизвестную функцию y, но зато второго порядка.

Частное решение этого уравнения [которое следует искать в форме $y=ax+b$, 2.4, II] будет $\bar{y}=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}$; для разыскания же дополнительной функции составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2-2\lambda-3=0,$$

откуда $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$, так что, окончательно, общее выражение для y получим в форме:

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{9}+C_1e^{3x}+C_2e^{-x}.$$

Для того чтобы найти выражение для второй неизвестной функции z, подставим в ее выражение найденное выражение для y и выражение для производной

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{3}+3C_1e^{3x}-C_2e^{-x}.$$

Таким образом,

$$z=x^2-\frac{2}{3}x+\frac{10}{9}-2C_1e^{3x}+2C_2e^{-x}.$$

Полученные формулы дают полное решение (или общий интеграл) предложенной системы. Как и должно быть, в нем фигурируют две произвольные постоянные. Попытаемся определить их значения, задавшись, например, такими начальными условиями:

$$y=\frac{4}{9} \text{ и } z=\frac{2}{3} \text{ при } x=0.$$

Подставляя эти значения, придем к уравнениям относительно C_1 и C_2:

$$C_1 + C_2 = 0, \quad -2C_1 + 2C_2 = -\frac{4}{9},$$

откуда $C_1 = \frac{1}{9}, C_2 = -\frac{1}{9}$,

2. $\frac{dy}{dx} = y - z + \frac{3}{2}x^2; \qquad \frac{dz}{dx} = -4y - 2z + 4x + 1.$

Решение. Для определения y имеем уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 3x^2 - x - 1,$$

откуда

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Затем,

$$z = -\frac{dy}{dx} + y + \frac{3}{2}x^2 = x^2 + x - C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{-3x}.$$

3. $\frac{dx}{dt} = y - z; \quad \frac{dy}{dt} = z - x; \quad \frac{dz}{dt} = x - y.$

Решение. Здесь t — независимая переменная, а x, y, z — искомые функции от t. Дифференцируя первое уравнение дважды по t, найдем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = z - 2x + y, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = -3y + 3z.$$

Для y и z получим выражения:

$$y = \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + x, \quad z = \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} + x,$$

а подставляя их в неиспользованное еще уравнение, где фигурирует $\frac{d^3x}{dt^3}$, придем к уравнению

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{dx}{dt} = 0.$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^3 + 3\lambda = 0$, корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{3}\,i$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}\,i$.
Поэтому:

$$x = C_1 + C_2 \sin\sqrt{3}\,t + C_3 \cos\sqrt{3}\,t.$$

Отсюда, пользуясь написанными выше выражениями для y и z, найдем:

$$y = C_1 - \frac{C_2 + C_3\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}\,t - \frac{C_3 - C_2\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}\,t,$$

$$z = C_1 - \frac{C_2 - C_3\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3}\,t - \frac{C_3 + C_2\sqrt{3}}{2}\cos\sqrt{3}\,t$$

4. $\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = z + x, \quad \frac{dz}{dt} = x + y.$

Решение. Если продифференцировать первое из этих уравнений, то получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = y + z + 2x.$$

Здесь мы имеем дело с *исключительным случаем*, ибо из уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y+z, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=y+z+2x$$

нельзя определить y и z, выразив их через x, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$; напротив, легко отсюда исключить сразу и y и z (напр., почленным вычитанием), и получить для определения x уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-2x=0.$$

Имеем: $\lambda^2-\lambda-2=0$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$,

$$x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$$

причем здесь всего две постоянные.

Теперь, зная x $\left(\text{а следовательно и } \frac{dx}{dt}\right)$, мы можем из первого уравнения предложенной системы выразить z через y:

$$z=\frac{dx}{dt}-y=-y+2C_1e^{2t}-C_2e^{-t};$$

подставляя же это выражение во второе уравнение, получим для определения y уравнение первого порядка:

$$\frac{dy}{dt}+y=3C_1e^{2t}.$$

Отсюда

$$y=C_1e^{2t}+C_3e^{-t},$$

где C_3 — новая произвольная постоянная.

Наконец, z получается из написанного выше его выражения:

$$z=C_1e^{2t}-(C_3+C_3)e^{-t}.$$

Таким образом, вместо одного уравнения третьего порядка, здесь пришлось последовательно решать одно уравнение второго порядка и одно первого порядка: сумма порядков равна трем и общий интеграл в совокупности содержит все же три произвольных постоянных!

5. Подобный же исключительный случай представился бы, если бы при решении системы (16 a) мы дифференцировали не первое, а второе или третье из данных уравнений. Это обстоятельство можно наперед предвидеть хотя бы потому, что в общее выражение для z или для u входят только две постоянных. Предлагается наново решить систему (16 a), дифференцируя, скажем, последнее уравнение.

Отв. $u=C_1'e^{2x}+C_2'e^{3x}$, $z=x-3C_2'e^{3x}+C_3'e^{x}$, $y=C_1'e^{2x}-C_2'e^{3x}+C_3'e^{x}$; этот ответ отождествляется с прежним, если положить: $C_1'=C_2$, $C_2'=-C_3$, $C_3'=C_1$.

292. Общий случай канонической системы. В приложениях чаще приходится иметь дело с системами уравнений порядка выше первого (обыкновенно—второго).

Пусть, например, речь идет о движении материальной точки массы m под действием некоторой силы $\mathbf{F}$. Если координаты точки обозначить через x, y, z, а время (которое, естественно, играет роль независимой переменной) — через t, то проекции скорости точки на направления координатных осей будут:

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \quad v_y=\frac{dy}{dt}, \quad v_z=\frac{dz}{dt}, \tag{19}$$

а слагающие ускорения:

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Сила **F**, в общем случае, зависит от времени t, от положения точки (т. е. от ее координат) и от скорости точки (т. е. от проекций скорости на оси); то же можно сказать и о проекциях F_x, F_y, F_z силы на оси. По закону Ньютона:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F},$$

или — переходя к проекциям на оси:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y\ (\ldots),\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z\ (\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Это — *дифференциальные уравнения движения* материальной точки. В случае плоского движения сохраняются только первые два (если считать, что движение происходит в плоскости xOy), причем из числа аргументов функций F_x и F_y выпадают z и $\frac{dz}{dt}$.

Подобная система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно наивысших производных искомых функций, носит название канонической.

Не трудно видеть, что каждая каноническая система легко может быть сведена к нормальной, путем введения производных в качестве новых искомых функций. Этот процесс совершенно аналогичен сведению одного уравнения высшего порядка к нормальной системе, о чем была речь в предыдущем n⁰ (см. замечание).

Рассмотрим этот вопрос подробнее на примере системы (20). Если, кроме x, y, z, ввести в качестве искомых функций проекции скорости (19), то получится такая нормальная система:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = v_x,\ \frac{dy}{dt} = v_y,\ \frac{dz}{dt} = v_z, \\ &m\frac{dv_x}{dt} = F_x\ (t,\ x,\ y,\ z,\ v_x, v_y, v_z), \\ &m\frac{dv_y}{dt} = F_y\ (\ldots),\quad m\frac{dv_z}{dt} = F_z\ (\ldots). \end{aligned}\right\}$$

Ясно, что общий интеграл будет содержать шесть произвольных постоянных. Эти постоянные позволяют удовлетворить шести начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0 \\ &v_x = (v_x)_0,\ v_y = (v_y)_0,\ v_z = (v_z)_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при } t = t_0.$$

Таким образом, под действием заданных сил, движение точки вполне определяется, если известны начальное положение и началь-

ная скорость точки, отнесенные к некоторому начальному моменту t_0.

Переходя к вопросу о практическом решении канонических систем, отметим, что для достижения этой цели нет надобности в фактическом переходе к нормальной системе. Можно непосредственно к заданной системе (даже если она не разрешена относительно наивысших производных!) приложить тот же прием, каким мы пользовались для решения нормальных систем. Именно, надлежит последовательным дифференцированием одного или нескольких уравнений системы добиться возможности исключить все искомые функции (с их производными), кроме одной, получить отдельное уравнение для определения этой последней, и т. д. Подробности выяснятся на приводимых ниже примерах. Мы ограничиваемся и здесь линейными системами с постоянными коэффициентами, которые наиболее часто встречаются.

Примеры и задачи. 1. $\frac{d^2y}{dx^2}=z+x$; $\frac{d^2z}{dx^2}=y+2x$.

Решение. Дифференцируем дважды первое уравнение и подставляем, вместо $\frac{d^2z}{dx^2}$, его выражение из второго уравнения:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2z}{dx^2}=y+2x,\quad \frac{d^4y}{dx^4}-y=2x.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^4-1=0$ имеет корни ± 1, $\pm i$.

Отсюда

$$y=-2x+C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\sin x+C_4\cos x.$$

Первое из данных уравнений позволяет, затем, определить z:

$$z=-x+C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\sin x-C_4\cos x.$$

2. $y''=3y+4z-3$; $z''=-y-z-5$. *

Решение. Дважды дифференцируя по x первое уравнение и принимая во внимание второе, получим:

$$y''''=3y''+4z''=3y''-4y-4z-20.$$

Но из того же первого уравнения:

$$z=\frac{1}{4}y''-\frac{3}{4}y+\frac{3}{4};$$

подставляя это выражение, вместо z, придем к такому уравнению:

$$y''''-2y''+y=-23.$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2=0$ имеет два корня 1 и -1 второй кратности.

Отв. $y=-23+(C_1x+C_2)e^x+(C_3x+C_4)e^{-x}$,

$$z=18-\frac{1}{2}(C_1x-C_1+C_2)e^x-\frac{1}{2}(C_3x+C_3+C_4)e^{-x}.$$

3. $y''-y'-z'+z=0$; $z''+5y'+z'+4y-z=0$. *

Решение. Дифференцируем дважды первое уравнение:

$$y'''-y''-z''+z'=0,$$
$$y''''-y'''-z'''+z''=0.$$

* Подразумевается независимая переменная x.

Для того чтобы иметь возможность исключить z''', придется продифференцировать раз и второе из данных уравнений:

$$z''' + 5y'' + z'' + 4y' - z' = 0.$$

Эти пять соотношений позволяют теперь исключить четыре величины z, z', z'', z'''. Из трех первых и последнего найдем:

$$z = -y''' - y'' - 3y' - 4y;\ z' = -y''' - 4y' - 4y;\ z'' = -y'' - 4y' - 4y;$$
$$z''' = -y''' - 4y'' - 4y'.$$

Подставив же выражения для z'' и z''' в четвертое уравнение, получим для определения y уравнение:

$$y'''' + 3y'' - 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = 0$ или $(\lambda^2)^2 + 3\lambda^2 - 4 = 0$ имеет корни ± 1 и $\pm 2i$.

Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin 2x + C_4 \cos 2x,$

$$z = -9C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 2C_4 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x.$$

4. $y'' + 2z' - y + 2z = 1,\ z'' + 2y' + 2y - z = x.$

Решение. Если продифференцировать только раз первое из этих уравнений:

$$y''' + 2z'' - y' + 2z' = 0,$$

то уже из этих трех соотношений сразу исключаются все три величины z, z', z'' [ср. задачи 4, 5 n⁰ 291]. Действительно, достаточно их почленно сложить, умножив предварительно второе на 2, а третье на (-1), чтобы получить

$$-y''' + y'' + 5y' + 3y = 2x + 1$$

или

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = -(2x + 1).$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 3) = 0$ имеет двойной корень -1 и простой корень 3. Имеем:

$$y = \frac{2}{3} x - \frac{7}{9} + (C_1 x + C_2) e^{-x} + C_3 e^{3x}.$$

Выражения для z у нас нет, но из первого уравнения:

$$z' + z = \frac{1}{2} (1 + y - y'') = \frac{1}{3} x + \frac{1}{9} + C_1 e^{-x} - 4C_3 e^{3x}.$$

Умножая обе части этого линейного уравнения на интегрирующий множитель e^x [267, см. (43)], получим:

$$(z \cdot e^x)' = \left(\frac{1}{3} x + \frac{1}{9}\right) e^x + C_1 - 4C_3 e^{4x}.$$

Интегрируем:

$$z \cdot e^x = \left(\frac{1}{3} x - \frac{2}{9}\right) e^x + C_1 x + C_4 - C_3 e^{4x},$$

так что, окончательно,

$$z = \frac{1}{3} x - \frac{2}{9} + (C_1 x + C_4) e^{-x} - C_3 e^{3x}.$$

В совокупности общий интеграл все же содержит четыре произвольных постоянных.

293. Связанные колебания. 1. В настоящем n⁰ мы рассмотрим некоторые вопросы, относящиеся к колебаниям системы тел (или — для простоты — материальных точек), связанных между собой упругими связями. Вопросы эти приводятся к си-

стемам дифференциальных уравнений, так что мы здесь будем иметь случай приложить изложенные в предыдущих пп⁰ методы.

В качестве простейшего примера мы остановимся на задаче о *поперечных колебаниях вала* на трех опорах, несущего два шкива (черт. 537). Веса шкивов пусть будут w_1 и w_2, весом же самого вала мы пренебрежем.

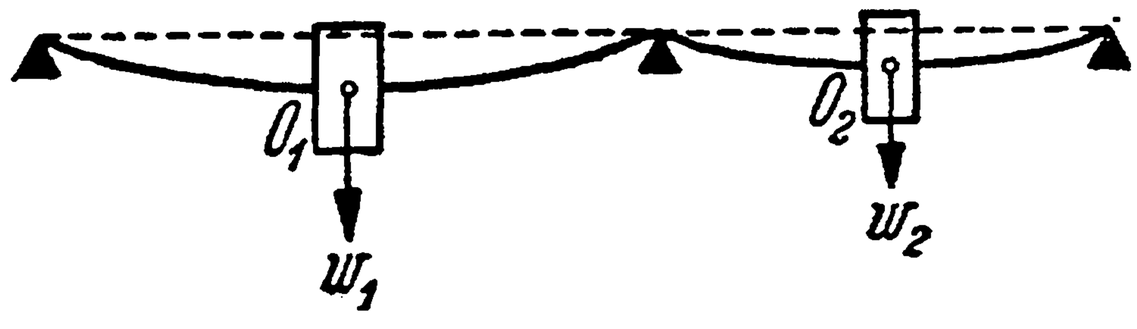
Сила w_1, приложенная в точке O_1, вызовет не только пропорциональное ей смещение aw_1 этой точки (как смещения, так и силы мы считаем положительными, если они направлены вниз), но и смещение $-bw_1$, в обратном направлении, точки O_2. Аналогично этому, и сила w_2, приложенная в точке O_2, на ряду с смещением cw_2 точки O_2, создаст и смещение $-b'w_2$ точки O_1.

Не входя в определение коэффициентов пропорциональности a, b, b', c (зависящих от жесткости и размеров вала, а также от расположения шкивов и средней опоры), заметим лишь, что $b' = b$ * и $ac - b^2 > 0$.

Итак, статические прогибы вала под упомянутыми грузами представятся так:

$$\eta_1 = aw_1 - bw_2, \quad \eta_2 = -bw_1 + cw_2. \tag{21}$$

Веса шкивов и вызванные прогибом упругие реакции взаимно уравновешиваются, так что впредь — при исследовании колебания шкивов около положения равновесия — их можно не принимать в расчет.



Черт. 537.

Если предположить теперь, что, кроме этих грузов, в точках O_1 и O_2 приложены еще силы P_1 и P_2, то дополнительные смещения y_1 и y_2, получившиеся благодаря этому, очевидно выразятся формулами, аналогичными (21):

$$y_1 = aP_1 - bP_2, \quad y_2 = -bP_1 + cP_2.$$

Разрешая эти уравнения относительно P_1 и P_2, мы получим, обратно, выражения для тех сил, которые способны вызвать данные смещения:

$$P_1 = \frac{cy_1 + by_2}{ac - b^2}, \quad P_2 = \frac{by_1 + ay_2}{ac - b^2}.$$

Важно уяснить себе, что этими же формулами выражаются вместе с тем и силы упругости Q_1 и Q_2, противодействующие произведенным смещениям. Точнее говоря, если принять во внимание знаки:

$$Q_1 = -\frac{cy_1 + by_2}{ac - b^2}, \quad Q_2 = -\frac{by_1 + ay_2}{ac - b^2}. \tag{22}$$

Таким образом, исследуя вопрос о колебаниях шкивов w_1 и w_2 около их положения равновесия, мы по формулам (22) можем установить силы, действующие на них в каждый данный момент. По основному закону движения Ньютона, дифференциальные уравнения движения напишутся так:

$$m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{cy_1 + by_2}{ac - b^2}, \quad m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{by_1 + ay_2}{ac - b^2}, \tag{23}$$

если через m_1 и m_2 обозначить массы $\frac{w_1}{g}$ и $\frac{w_2}{g}$ шкивов (мы предполагаем их сосредоточенными в точках O_1 и O_2).

Мы видим, что неизвестные функции y_1 и y_2 входят в оба уравнения, которые приходится рассматривать и решать совместно, как систему; колебания, действительно, оказываются связанными.

---

* Это равенство есть следствие известной *теоремы о взаимности перемещений*: перемещение b точки O_2, вызванное силой $= 1$, приложенной в O_1, равно перемещению b' точки O_1 под действием той же силы, но приложенной в O_2.

Перенося в уравнениях (23) все члены налево и вводя для упрощения письма обозначения:

$$\alpha = \frac{1}{m_1} \cdot \frac{c}{ac - b^2}, \quad \beta = \frac{1}{m_1} \cdot \frac{b}{ac - b^2}, \quad \gamma = \frac{1}{m_2} \cdot \frac{b}{ac - b^2}, \quad \delta = \frac{1}{m_2} \cdot \frac{a}{ac - b^2} \tag{24}$$

можно эту систему представить в виде:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \alpha y_1 + \beta y_2 = 0, \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \gamma y_1 + \delta y_2 = 0. \tag{25}$$

Для решения ее продифференцируем первое из этих уравнений дважды:

$$\frac{d^4 y_1}{dt^4} + \alpha \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \beta \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 0$$

и заменим здесь производную $\frac{d^2 y_2}{dt^2}$ ее выражением, полученным из второго уравнения:

$$\frac{d^4 y_1}{dt^4} + \alpha \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \beta (\gamma y_1 + \delta y_2) = 0.$$

Наконец, для того чтобы освободиться вовсе от функции y_2, найдем ее выражение из первого уравнения:

$$y_2 = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \alpha y_1 \right) \tag{26}$$

и подставим сюда. Окончательное уравнение, содержащее только одну неизвестную функцию y_1, будет таково:

$$\frac{d^4 y_1}{dt^4} + (\alpha + \delta) \frac{d^2 y_1}{dt^2} + (\alpha\delta - \beta\gamma) y_1 = 0. \tag{27}$$

Это—линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка, с постоянными коэффициентами и без последнего члена. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 + (\alpha + \delta) \lambda^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$$

(„биквадратное“ уравнение). Полагая $\lambda^2 = k$, и определяя значение k из квадратного уравнения

$$k^2 + (\alpha + \delta) k + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0, \tag{28}$$

найдем

$$k = \frac{-(\alpha + \delta) \pm \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma)}}{2}$$

Подкоренное выражение

$$(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) = \alpha^2 - 2\alpha\delta + \delta^2 + 4\beta\gamma = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma,$$

очевидно, положительно, так что для k получаются два различных вещественных значения, k_1 и k_2. Эти значения будут одного знака, ибо их произведение

$$k_1 \cdot k_2 = \alpha\delta - \beta\gamma = \frac{1}{m_1 \cdot m_2 (ac - b^2)} > 0, \tag{29}$$

а именно — оба отрицательны, так как сумма

$$k_1 + k_2 = -(\alpha + \delta) < 0. \tag{30}$$

Положим

$$k_1 = -\Omega_1^2, \quad k_2 = -\Omega_2^2; \tag{31}$$

в таком случае корни характеристического уравнения будут:

$$\lambda_1 = \Omega_1 i, \quad \lambda_2 = -\Omega_1 i, \quad \lambda_3 = \Omega_2 i, \quad \lambda_4 = -\Omega_2 i.$$

В соответствии с этим, общий интеграл уравнения (27) представится в виде:

$$y_1 = A_1 \sin(\Omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\Omega_2 t + \alpha_2). \tag{32}$$

Роль произвольных постоянных здесь играют A_1, A_2, α_1, α_2.

Выражение для y_2 получим, подставив в (26) выражение (32); оно имеет аналогичную форму:

$$y_2 = B_1 \sin(\Omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(\Omega_2 t + \alpha_2),$$

но постоянные B_1 и B_2 уже не будут произвольными и зависят от A_1, A_2 по формулам:

$$B_1 = \frac{1}{\beta}(\Omega_1^2 - \alpha) A_1, \quad B_2 = \frac{1}{\beta}(\Omega_2^2 - \alpha) A_2 \tag{33}$$

Мы приходим, таким образом, к заключению, что колебание рассматриваемой системы слагается из двух элементарных колебаний, именно, из колебания

$$y_1 = A_1 \sin(\Omega_1 t + \alpha_1), \quad y_2 = B_1 \sin(\Omega_1 t + \alpha_1)$$

с частотой Ω_1, и из колебания:

$$y_1 = A_2 \sin(\Omega_2 t + \alpha_2), \quad y_2 = B_2 \sin(\Omega_2 t + \alpha_2)$$

с частотой Ω_2.

Отметим, что множители $\Omega_1^2 - \alpha$ и $\Omega_2^2 - \alpha$ в формулах (33) необходимо разных знаков, ибо [см. (31), (29), (30)]

$$(\Omega_1^2 - \alpha)(\Omega_2^2 - \alpha) = \Omega_1^2\Omega_2^2 - \alpha(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \alpha^2 = k_1k_2 + \alpha(k_1 + k_2) + \alpha^2 =$$
$$= (\alpha\delta - \beta\gamma) - \alpha(\alpha + \delta) + \alpha^2 = -\beta\gamma < 0.$$

Поэтому в одном из упомянутых элементарных колебаний коэффициенты A и B одного знака, так что движения обеих точек O_1 и O_2 находятся в одной фазе, шкивы движутся оба в одну сторону; в другом же — коэффициенты A и B разных знаков, движения всегда в противоположных фазах, шкивы движутся в разные стороны.

Частоты Ω_1, Ω_2 называются частотами собственных свободных колебаний нашей системы. Полезно отметить, что они служат корнями уравнения:

$$\Omega^4 - (\alpha + \delta)\Omega^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0, \tag{34}$$

которое получается из (28) заменой k на $-\Omega^2$.

2. Предположим теперь, что на вал, скажем, в точке O_2 действует периодически изменяющаяся сила частоты Ω:

$$P = Z \sin \Omega t, \tag{35}$$

в вертикальном направлении. Примером такой силы может служить вертикальная слагающая центробежной силы, которая при вращении вала (с угловой скоростью Ω) развивается в неправильно центрированном шкиве [ср. 285,2]. Тогда в правой части второго из уравнений движения (23) придется добавить еще слагаемое (35). Пользуясь прежними сокращенными обозначениями (24) и полагая

$$H = \frac{Z}{m_2},$$

можно написать систему дифференциальных уравнений, которая определяет колебание рассматриваемой системы при новых условиях, в виде:

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \alpha y_1 + \beta y_2 = 0, \quad \frac{d^2y_2}{dt^2} + \gamma y_1 + \delta y_2 = H \sin \Omega t. \tag{36}$$

Решая ее попрежнему, вместо уравнения (27), придем к уравнению с последним членом:

$$\frac{d^4y_1}{dt^4} + (\alpha + \delta)\frac{d^2y_1}{dt^2} + (\alpha\delta - \beta\gamma)y_1 = -H\beta \cdot \sin \Omega t. \tag{37}$$

Общее решение уравнения без последнего члена (дополнительная функция)

нам уже известно: это выражение (32). Предполагая Ω отличным от Ω_1 и Ω_2, станем искать частное решение уравнения (37) в форме:

$$\bar{y}_1 = C \sin \Omega t;$$

члена с $\cos \Omega t$ мы не вводим, во внимание к тому, что в левой части уравнения нет производных нечетного порядка. Подставляя, получим:

$$[\Omega^4 - (\alpha + \delta)\Omega^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)] \cdot C \sin \Omega t = -H\beta \cdot \sin \Omega t,$$

откуда

$$C = \frac{-H\beta}{\Omega^4 - (\alpha + \delta)\Omega^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)}.$$

Отметим, что знаменатель здесь не нуль, потому что Ω не удовлетворяет уравнению (34), будучи, по предположению, отлично от его корней Ω_1 и Ω_2.

Итак, общее выражение для y_1 будет таково:

$$y_1 = \frac{-H\beta}{\Omega^4 - (\alpha + \delta)\Omega^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)} \sin \Omega t + A_1 \sin(\Omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\Omega_2 t + \alpha_2). \quad (38)$$

Подставив это выражение, вместо y_1, в (26), получим, что

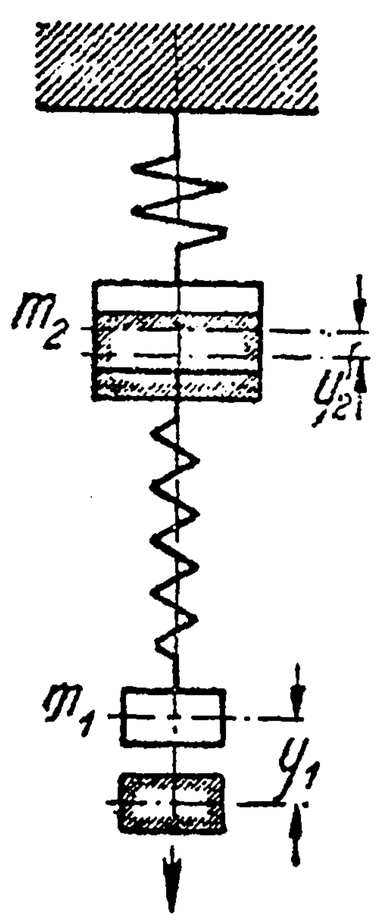
$$y_2 = \frac{(\alpha - \Omega^2) \cdot H}{\Omega^4 - (\alpha + \delta)\Omega^2 + (\alpha\delta - \beta\gamma)} \sin \Omega t + B_1 \sin(\Omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \sin(\Omega_2 t + \alpha_2), \quad (38a)$$

где постоянные B_1, B_2 связаны с постоянными A_1, A_2 формулами (33).

Для простоты мы во всех рассуждениях пренебрегали *сопротивлением*. Между тем, при наличии хотя бы ничтожного сопротивления, *собственные колебания* системы, выражаемые теперь последними двумя членами в формулах (38) и (38*a*), фактически будут *затухающими*. Поэтому особую важность приобретают *вынужденные колебания*, которые определяются первыми членами упомянутых формул.

Если частота Ω приближается к одной из частот Ω_1, Ω_2 собственных свободных колебаний системы, то амплитуды этих вынужденных колебаний безгранично возрастают, поскольку знаменатели соответствующих выражений стремятся к нулю; мы имеем в этом случае явление *резонанса* [ср. n° 285, 2]. Угловые скорости Ω_1, Ω_2 будут *критическими* для вала, и т. д.

3. Те же системы (25) и (36) встречаются и при других разнообразных осуществлениях связанных колебаний. Для примера, остановимся на теории так называемого *динамического поглотителя колебаний*. Ограничиваясь простейшим случаем, мы можем схематически представить себе его устройство в следующем виде (черт. 538).



Черт. 358.

На некоторое тело m_2, подвешенное на пружине, действует в вертикальном направлении периодическая сила (35). Для того чтобы умерить его колебания, к нему на пружине же прикрепляется еще одно тело m_1. Задача состоит в том, чтобы подобрать эту массу m_1 и жесткость пружины, на которой она подвешена так, чтобы умеряющее действие получилось наибольшим.

Предположим и здесь, для простоты, массы m_1 и m_2 сосредоточенными в их центрах тяжести. Пусть y_1 и y_2 будут вертикальные смещения этих центров тяжести относительно их положений равновесия (при чем, попрежнему, за положительное направление для смещений и для сил мы будем считать направление вниз). Принимая положение равновесия за исходное, мы не будем впредь учитывать сил тяжести, действующих на массы m_1 и m_2, поскольку они уравновесились сопротивлением пружин, и, как и выше, будем говорить лишь о дополнительных смещениях этих масс и о вызванных этим дополнительных напряжениях.

Если обозначить через a и b, соответственно, жесткость верхней и нижней пружины, то эти напряжения будут

$$F = ay_2$$

для верхней пружины и

$$G = b(y_1 - y_2)$$

для нижней (так как ее растяжение как раз и выразится разностью $y_1 - y_2$ смещений ее нижнего и верхнего концов).

Масса m_1 находится под действует силы $-G$, направленной вверх (при $y_1 > y_2$); на массу же m_2, кроме силы P, действует сила $-F$ вверх (при $y_2 > 0$) и сила G вниз (если $y_1 > y_2$). На этом основании можно составить такие уравнения движения рассматриваемой системы:

$$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = -G, \quad m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = P - F + G$$

или, подставляя выражения для сил,

$$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} + by_1 - by_2 = 0, \quad m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} - by_1 + (a+b)y_2 = Z \sin \Omega t.$$

Если положить

$$\alpha = \frac{b}{m_1}, \ \beta = -\frac{b}{m_1}, \ \gamma = -\frac{b}{m_2}, \ \delta = \frac{a+b}{m_2}, \ H = \frac{Z}{m_2},$$

то полученная система приведется непосредственно к виду (36).

Так как и здесь

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \frac{b}{m_1} \cdot \frac{a}{m_2} > 0, \quad \alpha + \delta > 0,$$

то остается в силе все сказанное выше. Из выражения (38 *a*) мы усматриваем, что целесообразнее всего распорядиться так, чтобы было

$$\Omega^2 = \alpha,$$

ибо тогда первый член этого выражения вовсе пропадет. Это условие может быть написано в виде:

$$\Omega = \sqrt{\frac{b}{m}} = \omega_1,$$

где ω_1 есть частота свободных колебаний „материальной точки" m_1 [280, 3]. Итак, для достижения наиболее благоприятного эффекта нужно массу m_1 и жесткость пружины b подобрать так, чтобы период свободных колебаний „поглотителя" совпадал с периодом возмущающей силы P.

Та же, в сущности, схема применяется обычно и при исследовании колебаний машины, фундамент которой покоится на упругом основании.

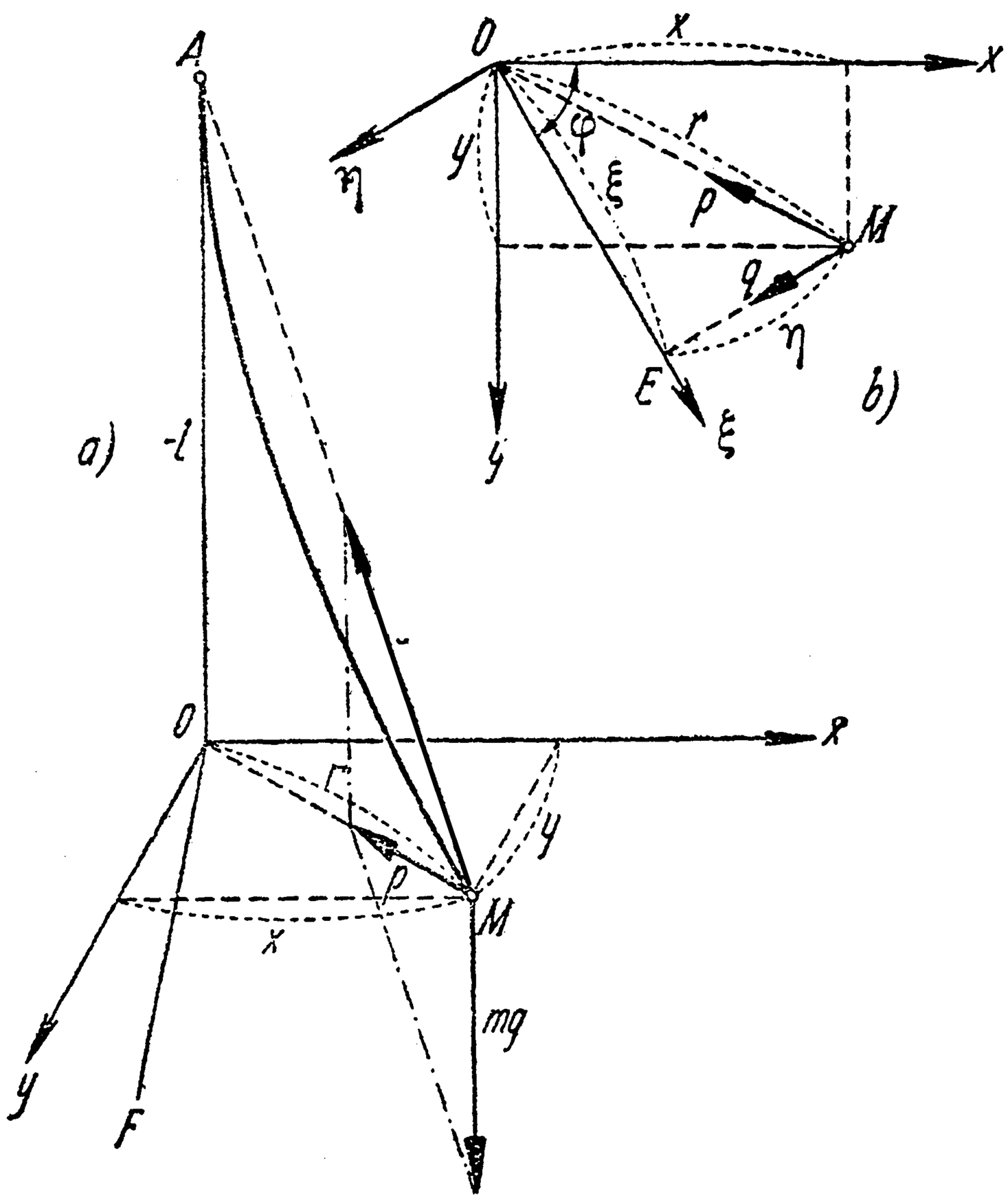
294. Быстро вращающийся шпиндель. Предположим, что к нижней оконечности вертикального вала с помощью шарнира прикреплен шпиндель, несущий на конце груз. Вращаясь вместе с валом вокруг вертикальной оси, шпиндель в то же время может свободно вращаться вокруг оси шарнира, в некоторой проходящей через центр шарнира плоскости, и кроме того способен изгибаться в перпендикулярном к этой плоскости направлении. Вертикальное положение шпинделя, очевидно, является его положением равновесия. Опыт показывает, что для угловых скоростей ω, меньших некоторой определенной величины ω_1, небольшие отклонения шпинделя от этого положения (неизбежно появляющиеся под влиянием различных причин) влекут за собой лишь небольшие же колебания, так что вертикальное положение оказывается для шпинделя положением устойчивого равновесия. Но лишь только ω превзойдет ω_1, равновесие перестает быть устойчивым и появляются настолько большие отклонения, что они угрожают поломкой механизма и требуют особых мер предосторожности. Наконец, если угловая скорость ω становится больше некоторой второй определенной величины $\omega_2 > \omega_1$, то вращение шпинделя снова становится спокойным. Таким образом, обнаруживается как бы целый сплошной *промежуток* (ω_1, ω_2), *критических скоростей!*

Описанные явления наблюдаются, например, в центрофугах и сепараторах.

Разовьем теперь математическую теорию этих явлений, предполагая для простоты самый шпиндель невесомым, а груз, который он несет на себе, сосредоточен-

ным на его нижнем конце, в виде материальной точки массы m. Мы ограничимся рассмотрением столь малых отклонений шпинделя от вертикального положения, что движение его нижнего конца можно считать происходящим в горизонтальной плоскости.

Пусть на черт. 539 a) A означает точку привеса шпинделя (центр шарнира), а O — проекцию ее на горизонтальную плоскость xOy, в которой колеблется нижний конец M шпинделя. Пусть, далее, плоскость AOE будет той плоскостью, в которой шпиндель может поворачиваться вокруг оси шарнира; эта плоскость вращается вместе с валом с постоянной угловой скоростью ω, скажем по часовой стрелке. На чертеже шпиндель AM изображен, конечно, преувеличенно изогнутым.



Черт. 539.

Установим, какие силы действуют на материальную точку M массы m. Это будет, прежде всего, упругая реакция q изогнутого стержня, которая направлена перпендикулярно к плоскости OE (см. черт. 539 b, где плоскость xOy представлена без искажения) и пропорциональна отклонению η точки M от этой плоскости ($\eta < 0$):

$$q = -c\eta. \qquad (39)$$

Затем вес mg нашей точки вместе с сопротивлением s шарнира дает, по правилу параллелограмма, равнодействующую p, которая должна лежать в плоскости xOy, если движение точки M происходит в этой плоскости. Из черт. 539 a) видно, что

$$\frac{p}{mg} = \frac{r}{l},$$

где $r = OM$ и $l = OA$; отсюда

$$p = \frac{mgr}{l}. \qquad (40)$$

Направление силы p, очевидно, идет от M к O.

Колебание точки M естественнее устанавливать по отношению к осям, вращающимся вместе с валом, напр., по отношению к системе $\xi O\eta$, где ось $O\xi$ совпадает с OE. Если через φ обозначить угол xOE, то известные формулы преобразования координат [107 (32)] сразу дают

$$x = \xi \cdot \cos\varphi - \eta \cdot \sin\varphi, \quad y = \xi \cdot \sin\varphi + \eta \cdot \cos\varphi.$$

Продифференцируем эти формулы дважды по t, помня, что производной от φ по t и будет угловая скорость вращения ω (которую мы предположили постоянной). Мы найдем последовательно:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \cdot \cos\varphi - \xi \cdot \sin\varphi \cdot \omega - \frac{d\eta}{dt} \cdot \sin\varphi - \eta \cdot \cos\varphi \cdot \omega,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \cdot \sin\varphi + \xi \cdot \cos\varphi \cdot \omega + \frac{d\eta}{dt} \cdot \cos\varphi - \eta \cdot \sin\varphi \cdot \omega,$$

и затем

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{d^2\xi}{dt^2}\cdot\cos\varphi-2\frac{d\xi}{dt}\cdot\sin\varphi\cdot\omega-\xi\cdot\cos\varphi\cdot\omega^2-\\&-\frac{d^2\eta}{dt^2}\cdot\sin\varphi-2\frac{d\eta}{dt}\cdot\cos\varphi\cdot\omega+\eta\cdot\sin\varphi\cdot\omega^2,\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{d^2\xi}{dt^2}\cdot\sin\varphi+2\frac{d\xi}{dt}\cdot\cos\varphi\cdot\omega-\xi\cdot\sin\varphi\cdot\omega^2+\\&+\frac{d^2\eta}{dt^2}\cdot\cos\varphi-2\frac{d\eta}{dt}\cdot\sin\varphi\cdot\omega-\eta\cdot\cos\varphi\cdot\omega^2.\end{aligned}\right\}\quad(41a)$$

Формулы (41) и (41*a*) выражают проекции на неподвижные оси Ox и Oy ускорения точки M. С другой стороны, мы знаем, что на эту точку в плоскости xOy действуют силы p и q, о которых была речь выше [см (39) и (40)]. Их проекции на названные оси будут, соответственно,

$$p\cdot\left(-\frac{x}{r}\right)=-\frac{mg}{l}\cdot x=-\frac{mg}{l}(\xi\cdot\cos\varphi-\eta\cdot\sin\varphi),$$

$$p\cdot\left(-\frac{y}{r}\right)=-\frac{mg}{l}\cdot y=-\frac{mg}{l}(\xi\cdot\sin\varphi+\eta\cdot\cos\varphi)$$

и

$$q\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=c\cdot\eta\cdot\sin\varphi,\quad q\cdot\cos\varphi=-c\cdot\eta\cdot\cos\varphi.$$

По закону Ньютона, складывая проекции сил, отдельно для каждой оси, мы должны в результате получить проекции ускорения, умноженные на массу m.

Получаемые таким путем равенства

$$m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\cdot\cos\varphi-2\frac{d\xi}{dt}\cdot\sin\varphi\cdot\omega-\ \ldots\right)=-\frac{mg}{l}(\xi\cdot\cos\varphi-\eta\cdot\sin\varphi)+c\cdot\eta\cdot\sin\varphi,$$

$$m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\cdot\sin\varphi+2\frac{d\xi}{dt}\cdot\cos\varphi\cdot\omega-\ \ldots\right)=-\frac{mg}{l}(\xi\cdot\sin\varphi+\eta\cdot\cos\varphi)-c\cdot\eta\cdot\cos\varphi$$

мы преобразуем, разделив их почленно на m, перенося затем все члены налево и наконец, объединяя порознь члены, содержащие $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-\omega^2\cdot\xi+\frac{g}{l}\cdot\xi-2\omega\cdot\frac{d\eta}{dt}\right)-$$

$$-\sin\varphi\left(2\omega\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{g}{l}\cdot\eta+\frac{c}{m}\cdot\eta-\omega^2\eta\right)=0.$$

$$\sin\varphi\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-\omega^2\cdot\xi+\frac{g}{l}\cdot\xi-2\omega\cdot\frac{d\eta}{dt}\right)+$$

$$+\cos\varphi\left(2\omega\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{g}{l}\cdot\eta+\frac{c}{m}\cdot\eta-\omega^2\eta\right)=0.$$

Это собственно и есть система дифференциальных уравнений, определяющих относительное движение точки M. Можно заменить эту систему более простой, которая получится, если почленно сложить написанные уравнения, умножив их предварительно, один раз на $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, а другой раз на $(-\sin\varphi)$ и $\cos\varphi$. В результате придем к такой системе:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{dt^2}+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\cdot\xi-2\omega\cdot\frac{d\eta}{dt}=0,\\&\frac{d^2\eta}{dt^2}+\left(\frac{g}{l}+\frac{c}{m}-\omega^2\right)\cdot\eta+2\omega\cdot\frac{d\xi}{dt}=0\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

Эта система получается почти сразу, если проектировать ускорение и силы (с учетом сил инерции и Кориолисовой силы) непосредственно на подвижные оси!

Для интегрирования системы (42) определим из первого уравнения:

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{1}{2\omega}\left[\frac{d^2\xi}{dt^2}+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\cdot\xi\right] \tag{43}$$

и дважды продифференцируем результат:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{1}{2\omega}\left[\frac{d^3\xi}{dt^3}+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\cdot\frac{d\xi}{dt}\right],$$

$$\frac{d^3\eta}{dt^3}=\frac{1}{2\omega}\left[\frac{d^4\xi}{dt^4}+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2}\right]. \tag{44}$$

Затем, продифференцировав второе из уравнений (42):

$$\frac{d^3\eta}{dt^3}+\left(\frac{g}{l}+\frac{c}{m}-\omega^2\right)\cdot\frac{d\eta}{dt}+2\omega\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,$$

подставим сюда, вместо $\frac{d\eta}{dt}$ и $\frac{d^3\eta}{dt^3}$, их выражения (43) и (44), исключая таким образом одну из искомых функций, η. Для определения другой функции, ξ, мы получим уравнение четвертого порядка:

$$\frac{d^4\xi}{dt^4}+\left(\frac{2g}{l}+\frac{c}{m}+2\omega^2\right)\frac{d^2\xi}{dt^2}+\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\left(\frac{g}{l}+\frac{c}{m}-\omega^2\right)\xi=0, \tag{45}$$

линейное и с постоянными коэффициентами. Если положить

$$\frac{2g}{l}+\frac{c}{m}+2\omega^2=A,\quad \left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\left(\frac{g}{l}+\frac{c}{m}-\omega^2\right)=B, \tag{46}$$

то соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$\lambda^4+A\lambda^2+B=0.$$

Заменяя здесь λ^2 через k, приведем его к квадратному уравнению:

$$k^2+Ak+B=0, \tag{47}$$

откуда:

$$\lambda^2=k=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-B}.$$

Легко вычислить, что

$$\frac{A^2}{4}-B=\left(\frac{4g}{l}+\frac{2c}{m}\right)\omega^2+\frac{c^2}{4m^2},$$

так что это выражение заведомо положительно и корни k_1 и k_2 квадратного уравнения (47) будут вещественными. Так как, по известному свойству корней квадратного уравнения: $k_1+k_2=-A$, $k_1\cdot k_2=B$, то сумма корней оказывается отрицательной. Таким образом

1) *если* $B>0$, *то оба корня отрицательны*,
2) *если* $B<0$, *то один корень положителен, а другой отрицателен*, наконец,
3) *если* $B=0$, *то один корень нуль, а другой отрицателен.*

Отрицательному корню $k=-h^2$ отвечают два чисто мнимых корня $\lambda=\pm hi$ и такие два члена в общем интеграле уравнения (45):

$$C_1\cdot\sin ht+C_2\cdot\cos ht. \tag{48}$$

Положительному же корню $k=h^2$ отвечают вещественные корни $\lambda=\pm h$ и группа членов

$$C_1\cdot e^{ht}+C_2\cdot e^{-ht}. \tag{49}$$

Наконец, корню $k=0$ отвечают два равных корня $\lambda=0$ и члены

$$C_1+C_2t. \tag{49 a}$$

Если в общем интеграле присутствуют члены вида (49) или (49 *a*), которые с возрастанием t могут неограниченно возрастать, то вертикальное положение шпинделя будет неустойчивым; действительно, в этом случае даже под действием ничтожнейших причин, т. е. при весьма малых значениях коэффициентов C, зависящих от „начальных условий", все же могут получиться весьма значительные отклонения. Наоборот, при наличии лишь членов вида (48), поскольку C малы, шпиндель будет производить лишь небольшие колебания вокруг положения равновесия.

Теперь становится ясным, что для спокойного вращения шпинделя нужно, чтобы оба корня уравнения (47) были отрицательны, т. е. чтобы выполнялось неравенство $B>0$ или [см. (46)]

$$\left(\frac{g}{l}-\omega^2\right)\left(\frac{g}{l}+\frac{c}{m}-\omega^2\right)>0.$$

Это может иметь место в двух случаях: либо когда

$$\omega^2<\frac{g}{l}$$

(и оба множителя положительны), либо когда

$$\omega^2>\frac{g}{l}+\frac{c}{m}$$

(и оба множителя отрицательны). Полагая

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{и} \quad \omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{c}{m}},$$

видим, что спокойное вращение шпинделя возможно лишь при

$$\omega<\omega_1 \quad \text{или} \quad \omega>\omega_2,$$

что вполне согласуется с данными опыта!

Для того чтобы скорость ω_2 легче могла быть достигнута, выгодно, чтобы c было не слишком велико, т. е. чтобы шпиндель был достаточно гибким; на практике это было замечено еще до того, как теория привела к этому результату.

295. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов. Читатель уже заметил, что нами рассмотрены лишь довольно частные классы дифференциальных уравнений, решения которых выражаются в элементарных функциях или, по крайней мере, приводятся к квадратурам. В технической практике встречаются, однако, и такие случаи, когда этого сделать нельзя. При подобных обстоятельствах приходится прибегать к приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений, в основе которых обыкновенно лежит разложение искомой функции в ряд Тэйлора.

Так как представление решения дифференциального уравнения бесконечным рядом имеет и самостоятельный интерес, то мы именно с него и начнем.

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'=F(x, y) \tag{50}$$

и требуется найти решение его $y=f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y=y_0 \quad \text{при} \quad x=x_0$$

или

$$f(x_0)=y_0. \tag{51}$$

Для того чтобы иметь возможность написать разложение искомой функции $y=f(x)$ в ряд Тэйлора по степеням $x-x_0$ [см. (18), 204]:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{1\cdot 2\cdot 3}(x-x_0)^3+\ldots,$$

нужно было бы знать начальные значения

$$f(x_0)=y_0,\ f'(x_0)=y_0',\ \ f''(x_0)=y_0'',\ \ f'''(x_0)=y_0''',\ldots$$

как самой функции, так и ее последовательных производных.

Начальное значение функции, y_0, непосредственно задано [см. (51)]. Если положить в правой части уравнения (50) [которому наша функция удовлетворяет!] $x=x_0$ и, и в соответствии с этим, $y=y_0$, то определится начальное значение производной:

$$y_0'=F(x_0, y_0).$$

Продифференцируем теперь предложенное уравнение (50) по x, помня при этом, что y и y' суть функции от x [см. (14), 225]:

$$y''=F_x'(x, y)+F_y'(x, y)\cdot y',$$

и снова положим здесь $x=x_0$ и одновременно $y=y_0$, $y'=y_0'$; таким путем мы найдем:

$$y_0''=F_x'(x_0, y_0)+F_y'(x_0, y_0)\cdot y_0',$$

и т. д.

Возьмем, для примера, уравнение:

$$y'=2xy. \tag{52}$$

Последовательно дифференцируя его, найдем:

$$\left.\begin{array}{l} y''=2y+2xy',\ \ y'''=2y'+2y'+2xy''=4y'+2xy'', \\ y^{(4)}=6y''+2xy''',\ \ y^{(5)}=8y'''+2xy^{(4)},\ \ y^{(6)}=10y^{(4)}+2xy^{(5)},\ldots \end{array}\right\} \tag{53}$$

Пусть, скажем, должны иметь:

$$y=1 \text{ при } x=0, \tag{54}$$

так что $x_0=0$ и $y_0=1$. Из (52) видим, что при $x=0$ необходимо $y'=0$:

$$y_0'=0.$$

Подставляя эти начальные значения в первое из равенств (53), найдем

$$y_0''=2$$

и аналогично

$$y_0'''=0,\ \ y_0^{(4)}=12,\ \ y_0^{(5)}=0,\ \ y_0^{(6)}=120,$$

и т. д.

Пользуясь найденными начальными значениями, мы можем теперь написать разложение интересующего нас частного решения уравнения (52) в ряд Тэйлора по степеням x:

$$y=1+\frac{2}{1\cdot 2}x^2+\frac{12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+\frac{120}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}x^6+\ldots$$

или

$$y = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \ldots \tag{55}$$

Если

$$y = -1 \text{ при } x = 1,$$

так что теперь $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, то из тех же уравнений (52) и (56) получим, как и только что,

$$y_0' = -2, \quad y_0'' = -6, \quad y_0''' = -20, \quad y_0^{(4)} = -76, \ \ldots$$

Разлагая решение, отвечающее новым начальным условиям, в ряд Тэйлора по степеням $(x-1)$, найдем:

$$y = -1 - \frac{2}{1}(x-1) - \frac{6}{1\cdot 2}(x-1)^2 - \frac{20}{1\cdot 2\cdot 3}(x-1)^3 -$$

$$- \frac{76}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(x-1)^4 - \ldots$$

или

$$y = -1 - 2(x-1) - 3(x-1)^2 - \frac{10}{3}(x-1)^3 - \frac{19}{6}(x-1)^4 - \ldots$$

Иной раз, особенно в случае линейных уравнений, более просто ведет к цели *метод неопределенных коэффициентов*. Разъясним его применение на первом из рассмотренных примеров. Итак, ищем разложение по степеням x функции, служащей решением дифференциального уравнения (52) и удовлетворяющей начальным условиям (54).

Обозначая неизвестные нам коэффициенты этого разложения просто буквами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ напишем его в виде:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Тогда, если продифференцировать,

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

Подставляя эти оба разложения в уравнении (52), мы получим тождество между двумя бесконечными рядами:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots =$$
$$= 2a_0x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + \ldots + 2a_{n-2}x^{n-1} + \ldots$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, мы придем к такой системе уравнений:

$$a_1 = 0, \quad 2a_2 = 2a_0, \quad 3a_3 = 2a_1, \quad 4a_4 = 2a_2, \ldots, \quad na_n = 2a_{n-2}, \ldots,$$

из которых последовательно находим:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = a_0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{1\cdot 2}a_0, \ldots$$

и вообще при нечетном $n = 2m - 1$:

$$a_{2m-1} = 0,$$

а при четном $n=2m$:

$$a_{2m}=\frac{1}{m}a_{2(m-1)}=\frac{1}{(m-1)m}a_{2(m-2)}=\frac{1}{(m-2)(m-1)m}a_{2(m-3)}=\ldots$$

и, окончательно,

$$a_{2m}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)m}a_0.$$

Так как все коэффициенты содержат множителем a_0, то, вынося его за скобку, получим разложение:

$$y=a_0\left\{1+\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1\cdot 2}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^{2m}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}+\ldots\right\}. \quad (56)$$

Если не учитывать начальных условий (54), то a_0 остается произвольным, и мы имеем здесь общий интеграл нашего уравнения, содержащий произвольную постоянную a_0. Для того чтобы удовлетворить и начальным условиям, нужно очевидно положить $a_0=1$. Тогда

$$y=1+\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1\cdot 2}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^{2m}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}+\ldots \quad (55a)$$

Это разложение, конечно, совпадает с ранее найденным (55); но примененный теперь метод позволил выявить и общий вид коэффициентов. Заметим кстати, что, сопоставляя разложение (55 a) с известным показательным рядом [(26), 206], сразу видим, что частное решение (55 a) есть не что иное, как

$$y=e^{x^2},$$

а общий интеграл (56):

$$y=a_0e^{x^2}.$$

Читатель легко проверит правильность этого результата, решив предложенное уравнение, в котором переменные просто отделяются!

Оба метода получения решения дифференциального уравнения в виде бесконечного ряда приложимы и к уравнениям высших порядков (равно как и к системам уравнений).

Фактическое вычисление значений искомой функции y с помощью получаемого для нее ряда (вернее — с помощью нескольких его первых членов) зачастую возможно лишь для значений аргумента x, близких к начальному x_0; при более значительном удалении аргумента от его начального значения пришлось бы брать — для достижения даже небольшой точности — слишком большое число членов ряда, что невыгодно. В подобном случае удобнее взять какую-нибудь новую вычисленную пару соответственных значений (x_1, y_1) за исходную и, разлагая y по степеням $x-x_1$, продвинуться несколько дальше, и т. д.

Примеры и задачи. 1. Разложить в ряд по степеням t решение дифференциального уравнения колебания маятника [280, (109)]

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta, \tag{57}$$

определяемое начальными условиями:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0 \text{ при } t = 0.$$

Решение. Для упрощения введем новую независимую переменную x, связанную с t соотношением:

$$x = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t. \tag{58}$$

Тогда

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{d\theta}{dx}$$

и аналогично

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{d\theta}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\frac{d\theta}{dx}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{g}{l}\cdot\frac{d^2\theta}{dx^2}.$$

Подставляя и сокращая на $\frac{g}{l}$, придем к уравнению:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\sin\theta.$$

Условимся впредь обозначать штрихами производные, взятые именно по x. Итак, имеем уравнение

$$\theta'' = -\sin\theta \tag{57 a}$$

и начальные условия:

$$\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta' = \theta_0' = 0 \text{ при } x = 0 \tag{59}$$

Последовательно дифференцируя по x, получим

$$\theta''' = -\cos\theta\cdot\theta', \quad \theta^{(4)} = \sin\theta\cdot(\theta')^2 - \cos\theta\cdot\theta'', \quad \theta^{(5)} = \cos\theta\cdot(\theta')^3 + 2\sin\theta\cdot\theta'\cdot\theta'' +$$
$$+ \sin\theta\cdot\theta'\cdot\theta'' - \cos\theta\cdot\theta''' = \cos\theta\cdot(\theta')^3 + 3\sin\theta\cdot\theta'\cdot\theta'' - \cos\theta\cdot\theta''',$$
$$\theta^{(6)} = -\sin\theta\cdot(\theta')^4 + 3\cos\theta\cdot(\theta')^2\cdot\theta'' + 3\cos\theta\cdot(\theta')^2\cdot\theta'' + 3\sin\theta\cdot(\theta'')^2 +$$
$$+ 3\sin\theta\cdot\theta'\cdot\theta''' + \sin\theta\cdot\theta'\cdot\theta''' - \cos\theta\cdot\theta^{(4)} = -\sin\theta\cdot(\theta')^4 + 6\cos\theta\cdot(\theta')^2\cdot\theta'' +$$
$$+ 3\sin\theta\cdot(\theta'')^2 + 4\sin\theta\cdot\theta'\cdot\theta''' - \cos\theta\cdot\theta^{(4)},$$

и т. д.

Положим теперь $x = 0$ и, одновременно, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta' = 0$; начальные значения второй и следующих производных будут

$$\theta_0'' = -1, \quad \theta_0''' = \theta_0^{(4)} = \theta_0^{(5)} = 0, \quad \theta_0^{(6)} = 3, \ldots,$$

так что разложение θ в ряд Тэйлора по степеням x имеет вид.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{240}x^6 + \ldots \tag{60}$$

Подставляя, вместо x, его выражение (58), придем к разложению по степеням t.

Так как в заданное уравнение θ входит под знаком синуса, то пользование методом неопределенных коэффициентов затруднено.

2. Пусть дано уравнение

$$y'' + y^2 = 0.$$

Как и выше, последовательно дифференцируя, найдем:

$$y'' = -y^2, \quad y''' = -2yy', \quad y^{(4)} = -2(y')^2 - 2yy'', \quad y^{(5)} = -6y'y'' - 2yy'''$$

$$y^{(6)} = -6(y'')^2 - 8y'y''' - 2yy^{(4)}, \quad y^{(7)} = -20y''y''' - 10y'y^{(4)} - 2yy^{(5)}.$$

Если начальные условия, например, таковы:

$$y = y_0 = 1 \quad \text{и} \quad y' = y_0' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

то одновременно:

$$y_0'' = -1, \; y_0''' = 0, \; y_0^{(4)} = 2, \; y_0^{(5)} = 0, \; y_0^{(6)} = -10, \; y_0^{(7)} = 0, \ldots,$$

и разложение представится в виде:

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{72}x^6 + \ldots \tag{61}$$

При начальных условиях:

$$y = y_0 = 0 \quad \text{и} \quad y' = y_0' = -1 \quad \text{при} \quad x = 1$$

имеем:

$$y_0'' = 0, \; y_0''' = 0, \; y_0^{(4)} = -2, \; y_0^{(5)} = 0, \; y_0^{(6)} = 0, \; y_0^{(7)} = -20, \ldots$$

и

$$y = -(x-1) - \frac{1}{12}(x-1)^4 - \frac{1}{252}(x-1)^7 - \ldots$$

Возвращаясь к первому предположению, попробуем теперь применить здесь метод неопределенных коэффициентов, полагая

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + \ldots$$

Дифференцируем дважды:

$$y'' = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3x + 3 \cdot 4 \cdot a_4x^2 + 4 \cdot 5 \cdot a_5x^3 + 5 \cdot 6 \cdot a_6 \cdot x^4 + 6 \cdot 7 \cdot a_7 \cdot x^5 + \ldots$$

и возводим ряд, выражающий y, в квадрат (точно таким же образом, как и обыкновенный многочлен):

$$y^2 = a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + (2a_0a_3 + 2a_1a_2)x^3 + (2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2)x^4 + \\ + (2a_0a_5 + 2a_1a_4 + 2a_2a_3)x^5 + \ldots$$

Подставляя эти разложения в исходное уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях x в левой части, получим систему уравнений:

$$2a_2 + a_0^2 = 0, \; 3a_3 + a_0a_1 = 0, \; 12a_4 + 2a_0a_2 + a_1^2 = 0, \; 10a_5 + a_0a_3 + a_1a_2 = 0,$$
$$30a_6 + 2a_0a_4 + 2a_1a_3 + a_2^2 = 0, \; 21a_7 + a_0a_5 + a_1a_4 + a_2a_3 = 0, \ldots$$

Если при $x = 0$ должны иметь: $y = 1$ и $y' = 0$, то $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, и затем из наших уравнений последовательно находим:

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{12}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = -\frac{1}{72}, \quad a_7 = 0, \ldots$$

и возвращаемся к разложению (61).

3. Если математический маятник испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости, то уравнение (57) заменяется таким:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + h\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \tag{62}$$

где h — некоторая постоянная. Вводя, как и выше в зад. 1, независимую переменную x, по формуле (58), приведем уравнение к виду:

$$\theta'' + k\theta' + \sin\theta = 0, \tag{62a}$$

где k — новая постоянная $\left(\text{равная } h\sqrt{\frac{l}{g}}\right)$. Пусть, напр., $k = \frac{1}{2}$. Имеем

$$\theta'' = -\frac{1}{2}\theta' - \sin\theta, \quad \theta''' = -\frac{1}{2}\theta'' - \cos\theta\cdot\theta',$$

$$\theta^{(4)} = -\frac{1}{2}\theta''' + \sin\theta\cdot(\theta')^2 - \cos\theta\cdot\theta'',$$

$$\theta^{(5)} = -\frac{1}{2}\theta^{(4)} + \cos\theta\cdot(\theta')^3 + 3\sin\theta\cdot\theta'\cdot\theta'' - \cos\theta\cdot\theta''', \ldots$$

Сохраняя начальные условия (59), получим:

$$\theta_0'' = -1, \quad \theta_0''' = \frac{1}{2}, \quad \theta_0^{(4)} = -\frac{1}{4}, \quad \theta_0^{(5)} = \frac{1}{8}, \ldots,$$

так что

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{96}x^4 + \frac{1}{960}x^5 - \ldots$$

Аналогично, при начальных условиях:

$$\theta = \theta_0 = 0 \quad \text{и} \quad \theta' = \theta_0' = 4 \quad \text{при} \quad x = 0$$

имеем:

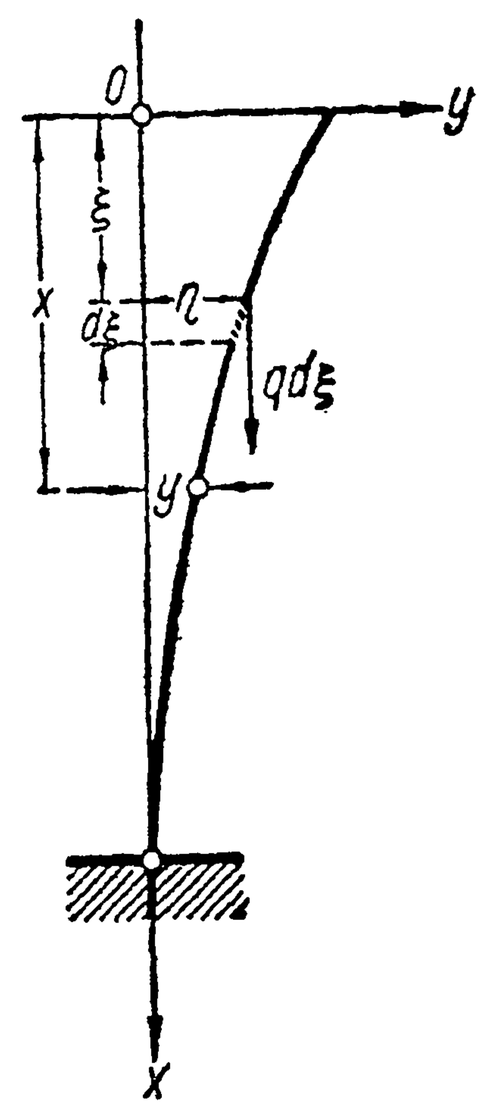
$$\theta_0'' = -2, \quad \theta_0''' = -3, \quad \theta_0^{(4)} = \frac{7}{2}, \quad \theta_0^{(5)} = \frac{261}{4}, \ldots,$$

и разложение θ примет вид:

$$\theta = 4x - x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{48}x^4 + \frac{261}{480}x^5 + \ldots \tag{63}$$

296. Продольный изгиб под действием собственного веса. В качестве примера задачи, которая может быть разрешена указанными в предыдущем n⁰ методами, рассмотрим вопрос об изгибе стержней под действием их собственного веса. Этот вопрос приобретает важность для таких конструкций, в состав которых входят стержни значительной длины (радио-мачты, буровые штанги и штанги рудничных насосов, мостовые стойки и т. д.).

Пусть мы имеем длинный и тонкий призматический стержень, нижний конец которого зажат, а верхний — свободен (черт. 540). Стержень находится под действием лишь собственного веса; вес единицы длины стержня обозначим через q. Покуда длина l стержня не достигает некоторой границы l_1, прямолинейная форма является единственно возможной (и устойчивой) формой равновесия стержня. При $l = l_1$ становятся возможными и иные формы равновесия, и под действием ничтожнейших причин стержень может значительно изогнуться; иными словами, имеет место то же явление, что и при сжатии стержня осевыми силами [286]. Требуется найти „критическую" длину l_1.



Черт. 540.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, как мы знаем [272, (58)] имеет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI}M. \tag{64}$$

Остается лишь определить величину изгибающего момента $M = M(x)$ в сечении x.

С этой целью рассмотрим часть стержня от этого сечения до свободного конца. Обозначим через ξ переменную абсциссу точки, изменяющуюся от $\xi = 0$ до $\xi = x$, а через η — ординату изогнутой оси, отвечающую абсциссе ξ. Считая изогнутую ось пологой, мы будем измерять длины отложенных на ней дуг их проекциями на вертикальную ось. Возьмем на расстоянии ξ от свободного конца элемент $d\xi$ стержня. Его вес $q\cdot d\xi$, действующий вертикально вниз, имеет плечо $\eta - y$ и создает момент

$$dM = q(\eta - y)\,d\xi.$$

Суммируя эти элементарные моменты, получим:

$$M(x) = \int_0^x q(\eta - y)\, d\xi. \tag{65}$$

Если вспомнить, что q и y — постоянные величины (т. е. величины, не зависящие от переменной интегрирования ξ), то выражение для изгибающего момента можно будет переписать так:

$$M(x) = q \cdot \int_0^x \eta\, d\xi - qxy,$$

так что уравнение изогнутой оси примет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{EI}\left[\int_0^x \eta\, d\xi - xy\right].$$

Для того чтобы избавиться от знака интеграла, продифференцируем по x это уравнение. При этом соображаем, что производной от интеграла будет, разумеется, подинтегральная функция; но так как нам нужна производная при значении x аргумента, то нужно вычислить и подинтегральную функцию при этом значении, что даст y. Так как производная от произведения xy будет $y + x \cdot \frac{dy}{dx}$, то окончательно получим

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{q}{EI} \cdot x \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Полагая

$$\frac{dy}{dx} = u,$$

сведем полученное уравнение к уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{q}{EI} \cdot x \cdot u = 0$$

Чтобы еще упростить это уравнение, введем и новую независимую переменную

$$z = \sqrt[3]{\frac{q}{EI}} \cdot x.$$

Очевидно,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \sqrt[3]{\frac{q}{EI}} \cdot \frac{du}{dz}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{q}{EI}}\right)^2 \cdot \frac{d^2u}{dz^2}.$$

Сократив на $\left(\sqrt[3]{\frac{q}{EI}}\right)^2$, придем к такому уравнению:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + zu = 0.$$

Станем искать его решение в форме бесконечного ряда:

$$u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + a_5 z^5 + a_6 z^6 + \ldots \tag{66}$$

Если этот ряд умножить на z и сложить с результатом его двукратного дифференцирования:

$$\frac{d^2u}{dz^2} = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 z + 3 \cdot 4 \cdot a_4 z^2 + 4 \cdot 5 \cdot a_5 \cdot z^3 + 5 \cdot 6 \cdot a_6 \cdot z^4 + \ldots;$$

то должен получиться нуль. Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях z, придем к системе уравнений:

$$\begin{array}{lll} 1\cdot 2\cdot a_2=0, & 4\cdot 5\cdot a_5+a_2=0, & 7\cdot 8\cdot a_8+a_5=0,\ldots \\ 2\cdot 3\cdot a_3+a_0=0, & 5\cdot 6\cdot a_6+a_3=0, & 8\cdot 9\cdot a_9+a_6=0,\ldots \\ 3\cdot 4\cdot a_4+a_1=0, & 6\cdot 7\cdot a_7+a_4=0, & 9\cdot 10\cdot a_{10}+a_7=0,\ldots \end{array}$$

Первая строка сразу дает:

$$a_2=a_5=a_8=\ldots=0;$$

из второй:

$$a_3=-\frac{1}{2\cdot 3}\cdot a_0,\quad a_6=-\frac{1}{5\cdot 6}\cdot a_3=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}\,a_0,\quad a_9=-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\cdot a_0,\ldots;$$

и из третьей:

$$a_4=-\frac{1}{3\cdot 4}\cdot a_1,\quad a_7=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdot a_1,\quad a_{10}=-\frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}\cdot a_1,\ldots$$

Обратимся теперь к предельным условиям. Прежде всего, на свободном конце, т. е. при $x=0$ (или при $z=0$) изгибающий момент должен быть нулем [см. (65)]; в виду (64), это равносильно условию:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0,\ \text{т. е.}\ \frac{du}{dx}=0,$$

или, наконец, если перейти к независимой переменной z:

$$\frac{du}{dz}=0.$$

Это значит, что в разложении (66) $a_1=0$, а тогда и

$$a_4=a_7=a_{10}=\ldots=0.$$

В силу этого, упомянутое разложение имеет вид:

$$u=a_0\cdot\left[1-\frac{1}{2\cdot 3}\cdot z^3+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}\cdot z^6-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\cdot z^9+\ldots\right].$$

Далее, на закрепленном конце, т. е. при $x=l$ $\left(\text{или при } z=l\cdot\sqrt[3]{\frac{q}{EI}}\right)$ не только $y=0$, но и $\frac{dy}{dx}=0$ (т. е. касательная к изогнутой оси вертикальна), а это значит, что $u=0$. Итак, при указанном значении z должно быть

$$a_0\left[1-\frac{1}{2\cdot 3}\cdot z^3+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}\cdot z^6-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\cdot z^9+\ldots\right]=0.$$

Если выражение в скобках при этом значении не обращается в нуль, то необходимо $a_0=0$, так что u оказывается тождественно равным нулю, но тогда $y=$ пост. и, очевидно, также тождественно равно нулю (ибо обращается в нуль при $x=0$). В качестве решения мы получаем вертикальную ось, которая является в этом случае единственной (и устойчивой) формой равновесия.

Иначе обстоит дело, если при

$$z=l\cdot\sqrt[3]{\frac{q}{EI}} \tag{67}$$

написанное выше выражение в скобках само равно нулю; тогда a_0 остается произвольным и, кроме прямолинейной, становятся возможными и другие формы равновесия, прямолинейная форма перестает быть устойчивой и т. д.

В виду этого представляется важным установить наименьший (положительный) корень z_1 уравнения

$$1-\frac{1}{2\cdot 3}\cdot z^3+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}\cdot z^6-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\cdot z^9+\ldots=0. \tag{68}$$

Тогда, в силу (67), искомая „критическая" длина l_1 стержня определится по формуле:

$$l_1 = z_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{EI}{q}}. \tag{69}$$

Действительно, при $l < l_1$, выражение (67) будет меньше z_1, и прямолинейная форма равновесия будет устойчивой; наоборот, при $l = l_1$ это выражение совпадает с z_1, и прямолинейная форма перестанет быть устойчивой.

Полагая в уравнении (68), для удобства,

$$z^3 = \zeta, \tag{70}$$

придем, окончательно, к уравнению

$$1 - \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\zeta + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}\cdot\zeta^2 - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\cdot\zeta^3 + \\ + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 12}\cdot\zeta^4 - \ldots = 0, \tag{71}$$

наименьший (положительный) корень ζ_1 которого и надлежит определить.

Вспомним одно замечательное свойство знакопеременного ряда (с убывающими по абсолютной величине членами), о котором была речь в n⁰ 209 (черт. 346):

все частные суммы нечетного порядка больше суммы ряда, в то время как все частные суммы четного порядка меньше суммы ряда.

Прежде всего ясно, что при $\zeta < 6$ каждый член ряда в (71) получается из предыдущего путем умножения его на (взятую с минусом) правильную дробь:

$$\frac{\zeta}{2\cdot 3},\ \frac{\zeta}{5\cdot 6},\ \frac{\zeta}{8\cdot 9}, \ldots,$$

так что члены ряда, действительно, убывают по абсолютной величине. Обозначая сумму ряда через $F(\zeta)$ и пользуясь указанным свойством, будем иметь:

$$F(\zeta) > 1 - \frac{\zeta}{2\cdot 3} > 0.$$

Таким образом, между 0 и 6 нет корней нашего уравнения.

Пусть теперь ζ содержится в промежутке между 6 и 7 (включая концы). Аналогично прежнему, легко установить, что при этих значениях ζ

$$F(\zeta) > 1 - \frac{\zeta}{2\cdot 3} + \frac{\zeta^2}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \frac{\zeta^3}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}.$$

Если подставить на место ζ в положительных членах шестерку, а в отрицательных — семерку, то лишь усилим неравенство; в то же время мы получим:

$$F(\zeta) > 1 - \frac{7}{6} + \frac{1}{5} - \frac{343}{12\,960} = \frac{89}{12\,960} > 0,$$

т. е. и в промежутке между 6 и 7 (включая эти числа) нет еще корней уравнения (71).

Полагая теперь $\zeta = 8$, получим, наоборот,

$$F(8) < 1 - \frac{8}{2\cdot 3} + \frac{8^2}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \frac{8^3}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9} + \frac{8^4}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot 12} = \\ = 1 - \frac{4}{3} + \frac{16}{45} - \frac{16}{405} + \frac{32}{13\,365} = -\frac{397}{13\,365} < 0.$$

Ясно, что корень ζ_1 будет лежать между 7 и 8!

В таком случае, в виду (70),

$$z_1 > \sqrt[3]{7} = 1{,}91, \quad z_1 < \sqrt[3]{8} = 2,$$

так что можно приближенно положить $z_1 \doteq 1{,}9$ и [см. (69)]

$$l_1 \doteq 1{,}9\sqrt[3]{\frac{EI}{q}}.$$

Более точный подсчет дает:

$$l_1 \doteq 1{,}99 \sqrt[3]{\frac{EI}{q}}.$$

Пусть, например, речь идет о железном круглом стержне диаметра 2 см. Примем $E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, а удельный вес железа $\gamma = 0{,}0078 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$. Имеем:

$$q = \pi \cdot 0{,}0078 \frac{\text{кг}}{\text{см}}, \quad I = \frac{\pi}{4} \text{ см}^4,$$

так что

$$l_1 \doteq 1{,}99 \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^6}{4 \cdot 0{,}0078}} = \frac{199}{\sqrt[3]{0{,}0156}} \doteq 800 \text{ см} = 8 \text{ м}.$$

297. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений по способу Эйлера-Коши. Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{72}$$

и требуется построить его „интегральную кривую“ [263], исходящую из „начальной“ точки (x_0, y_0). Возьмем другое значение аргумента $x_1 = x_0 + \Delta x_0$; если Δx_0 достаточно мало, то элемент искомой кривой, отвечающий изменению абсциссы x от x_0 до x_1, можно приближенно считать совпадающим с элементом касательной к этой кривой в начальной точке. Построить упомянутую касательную очень легко, ибо ее угловой коэффициент определяется по самому уравнению (72), если учесть начальные условия:

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0; \tag{73}$$

подставляя эти значения в правую часть уравнения (72), получим:

$$y_0' = f(x_0, y_0). \tag{74}$$

Если через y_1 обозначить ординату второго конца построенного элемента касательной, отвечающую абсциссе x_1, то, считая эту точку (x_1, y_1) как бы принадлежащей искомой кривой, можно, исходя из нее, построить следующий элемент кривой, снова заменяя его приближенно элементом касательной, и т. д.

В этом и заключается приближенный способ интегрирования дифференциального уравнения первого порядка, предложенный Эйлером (Euler) и видоизмененный Коши (Cauchy). Практически он осуществляется следующим образом.

Предположим, что интегральную кривую, определяемую начальными условиями (73), требуется построить для промежутка изменения абсциссы x от x_0 до X $(X > x_0)$. Вставим между этими значениями какие-нибудь $n-1$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, так что

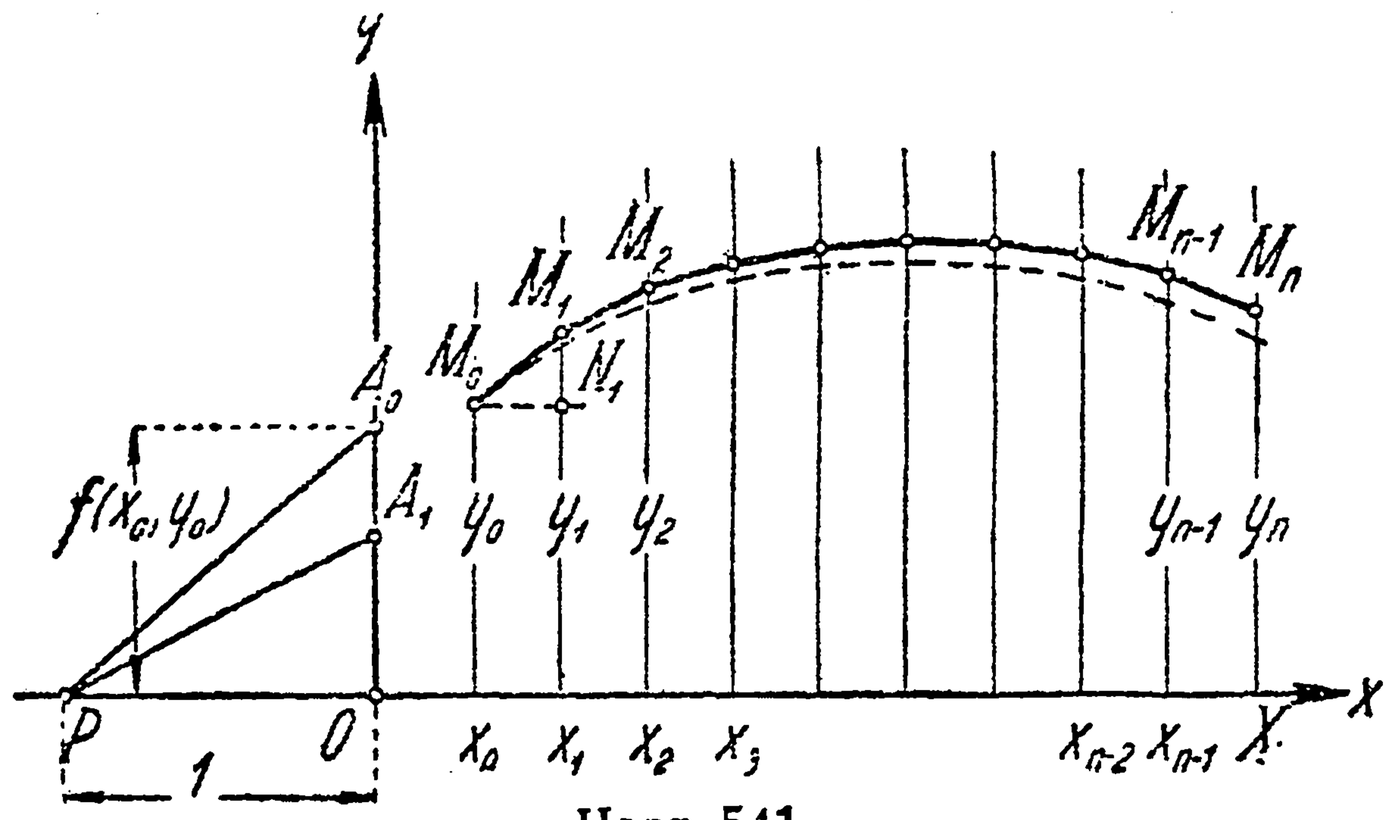
$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = X.$$

Разности

$$x_1 - x_0 = \Delta x_0, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_1, \ldots, \quad X - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}$$

чаще всего берут равными, а число n частичных промежутков сообразуют с требуемой степенью точности.

Проведем теперь ряд вертикальных прямых через точки на оси Ox с абсциссами $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = X$ (черт. 541). Отложим налево от начальной точки O по горизонтальной оси отрезок OP, равный единице длины, а по вертикальной оси отрезок OA_0, равный $f(x_0, y_0)$. Мы видим, что угловой коэффициент прямой PA_0 как раз равен угловому коэффициенту (74) касательной в начальной точке, так что, проведя отрезок $M_0M_1 \parallel PA_0$ до пересечения со второй вертикалью, мы и будем иметь нужный нам элемент касательной. Этим построением определяется ордината y_1 точки M_1; отложив на вертикальной оси отрезок OA_1, равный $f(x_1, y_1)$, и проведя $M_1M_2 \parallel PA_1$ до пересечения с третьей вертикалью, построим элемент касательной в точке M_1 и определим точку M_2 с абсциссой x_2, приближенно лежащую на кривой. Этот процесс приходится повторять столько раз, на сколько частей разложен основной промежуток (x_0, X).



Черт. 541.

Заметим, что единица длины PO, которою мы пользуемся при откладывании отрезков $OA_0, OA_1, \ldots$, может быть выбрана произвольно и совершенно независимо от масштаба, в котором по осям координат откладываются величины x и y. Действительно, угловой коэффициент прямой OA_0, OA_1 и т. д. (а только он нам и нужен) не зависит от выбора этой единицы длины.

Указанное графическое построение особенно удобно для тех случаев, когда сама функция $f(x, y)$ такова, что ее значение может быть получено графически. Так будет, например, если

$$f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y),$$

причем графики функций $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ заданы или предварительно построены.

Вместо графического построения точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ можно ординаты их (т. е. значения искомой функции y от x) определять чисто вычислительным путем. Из $\triangle M_0N_1M_1$ (см. чертеж) ясно, что

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0 = M_0N_1 \cdot \operatorname{tg} \measuredangle N_1M_0M_1 = f(x_0, y_0) \cdot \Delta x_0.$$

[Впрочем, мы и раньше уже видели, 67, что замена кривой на некотором участке ее касательной равносильна замене приращения ординаты Δy дифференциалом этой ординаты $dy = y' \cdot \Delta x$.]

Таким образом составляем ряд равенств:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 - y_0 = \Delta y_0 = f(x_0, y_0) \cdot \Delta x_0, \\ y_2 - y_1 = \Delta y_1 = f(x_1, y_1) \cdot \Delta x_1, \\ y_3 - y_2 = \Delta y_2 = f(x_2, y_2) \cdot \Delta x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}, \end{array}\right\} \qquad (75)$$

Из первого определяется $y_1 = y_0 + \Delta y_0$, подставляется во второе; из второго определяется $y_2 = y_1 + \Delta y_1$, подставляется в третье и т. д.

Совершенно так же поступают и в том случае, если $X < x_0$, с тем лишь различием, что тогда все $\Delta x < 0$.

Увеличивая число n частичных промежутков, можно добиться того, чтобы значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ произвольно мало отличались от соответственных истинных значений искомой функции, т. е. чтобы ломаная $M_0M_1 \ldots M_n$ с любой точностью воспроизводила искомую интегральную кривую. На практике, однако, способом Эйлера-Коши пользуются лишь для грубого приближения и, в связи с этим, берут не слишком большое число частей. Более точные вычисления ведутся иными приемами, один из которых будет указан ниже.

Примеры и задачи. 1. Дано уравнение

$$y' = 2xy;$$

требуется приближенно проинтегрировать его по методу Эйлера-Коши в промежутке от $x = 0$ до $x = 1$, при начальном значении искомой функции $y_0 = 1$. Разложим промежуток (0,1) на 10 равных частей, взяв все Δx равными 0,1. Вычисления располагаем по приведенной ниже схеме. В первом столбце помещаем

x	y	$\Delta y = 0{,}1y'$	$y' = 2xy$	e^{x^2}
0,0	1,00		0,0	1,00
		0,00		
0,1	1,00		0,2	1,01
		0,02		
0,2	1,02		0,4	1,04
		0,04		
0,3	1,06		0,6	1,09
		0,06		
0,4	1,12		0,9	1,17
		0,09		
0,5	1,21		1,2	1,28
		0,12		
0,6	1,33		1,6	1,43
		0,16		
0,7	1,49		2,1	1,63
		0,21		
0,8	1,70		2,7	1,90
		0,27		
0,9	1,97		3,5	2,25
		0,35		
1,0	2,32			2,72

значения x, во втором — соответствующие значения y, в четвертом — значения производной $y' = 2xy$, в третьем же — приращения $\Delta y = y' \cdot \Delta x = 0{,}1y'$; этот столбец помещен рядом со вторым, чтобы облегчить прибавление к y соответственного приращения Δy.

В данном уравнении переменные легко отделяются:

$$\frac{dy}{y} = 2x\,dx,$$

так что

$$\ln y = x^2 + \ln C$$

и

$$y = Ce^{x^2}.$$

Для того, чтобы при $x = 0$ было $y = 1$, нужно положить $C = 1$.

Итак, искомое решение точно выражается формулой:

$$y = e^{x^2}.$$

Для сравнения с найденными приближенными значениями y в пятом столбце помещены точные значения (с тремя верными знаками). Как видим, расхождение достигает 17%!

Для того чтобы улучшить приближение, уменьшим вдвое промежутки, т. е. положим теперь $\Delta x = 0{,}05$. Вычисления сведены в таблицу.

x	y	$\Delta y = 0{,}05\,y'$	$y' = 2xy$	e^{x^2}	x	y	$\Delta y = 0{,}05\,y'$	$y' = 2xy$	e^{x^2}
0,00	1,00		0,00	1,00	0,50	1,26		1,26	1,28
		0,00					0,06		
0,05	1,00		0,10	1,00	0,55	1,32		1,45	1,35
		0,01					0,07		
0,10	1,01		0,20	1,01	0,60	1,39		1,67	1,43
		0,01					0,08		
0,15	1,02		0,31	1,02	0,65	1,47		1,91	1,52
		0,02					0,10		
0,20	1,04		0,42	1,04	0,70	1,57		2,20	1,63
		0,02					0,11		
0,25	1,06		0,53	1,06	0,75	1,68		2,52	1,75
		0,03					0,12		
0,30	1,09		0,65	1,09	0,80	1,80		2,90	1,90
		0,03					0,14		
0,35	1,12		0,78	1,13	0,85	1,95		3,31	2,06
		0,04					0,17		
0,40	1,16		0,90	1,17	0,90	2,12		3,82	2,25
		0,05					0,19		
0,45	1,21		1,09	1,22	0,95	2,31		4,39	2,46
		0,05					0,22		
0,50	1,26		1,26	1,28	1,00	2,53			2,72

На этот раз погрешность не достигает 8%. Для сравнения на черт. 542 изображена точная интегральная кривая I и две ломаные (кривые) II, III, полученные в результате применения способа Эйлера-Коши. Ясно, что дальнейшее уменьшение промежутков Δx заставило бы ломаную (кривую) еще более приблизиться к истинной интегральной кривой.

2. Дано уравнение

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

и начальные условия

$$y = 1 \text{ при } x = 0.$$

Промежуток изменения независимой переменной (0,1). Выкладки приведены в таблице на стр. 227.

И это уравнение выбрано так, чтобы его можно было решить в конечном виде и таким путем проверить точность полученного приближения. Именно, предложенное уравнение относится к типу однородных [266]. Полагая $y = tx$, $y' = t'x + t$ приведем его к виду

$$t'x = \frac{t}{1+t^2} - t = -\frac{t^3}{1+t^2} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x} = -\frac{1+t^2}{t^3}\,dt,$$

так что

$$\ln x = -\ln t + \frac{1}{2t^2} + C,$$

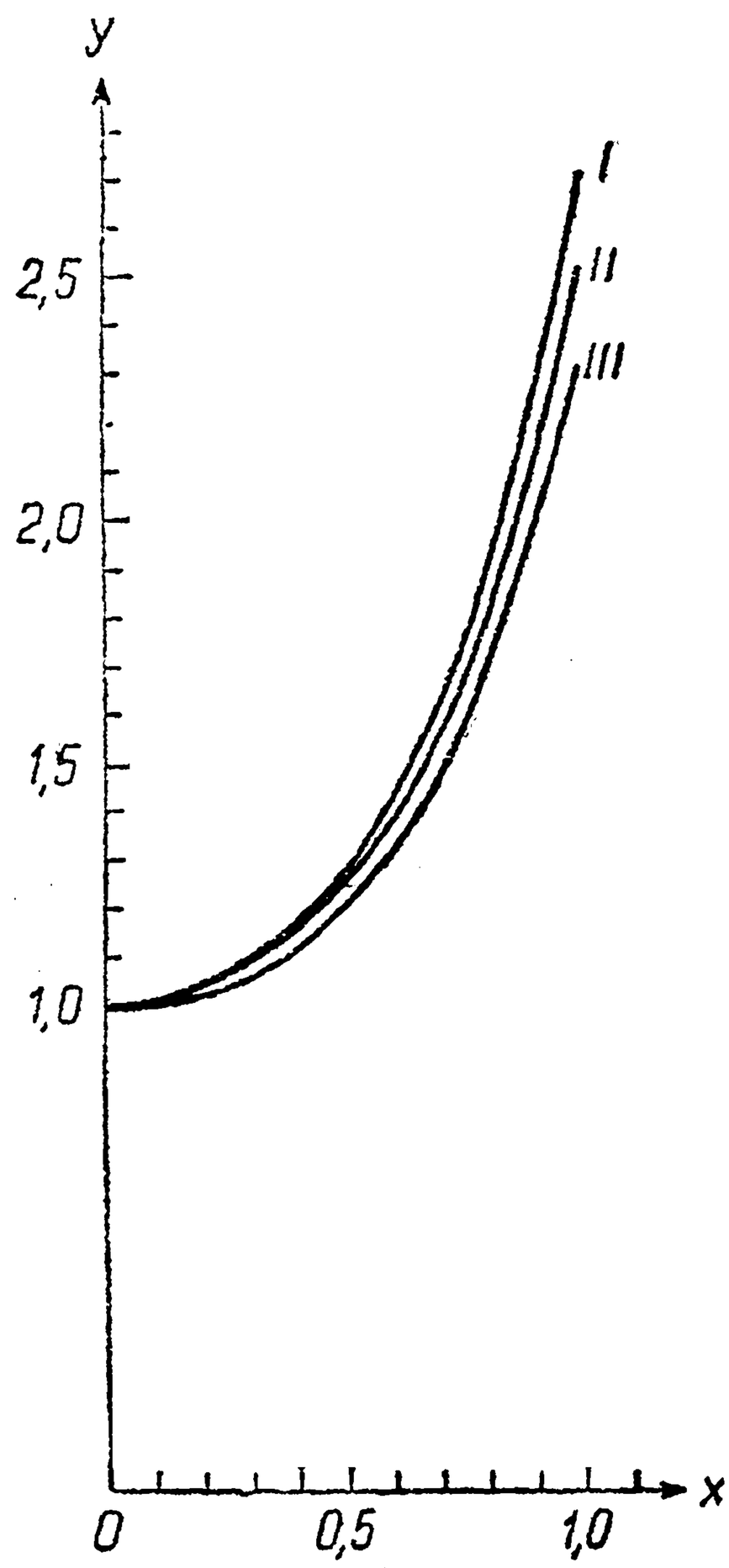
$$\ln y = \frac{x^2}{2y^2} + C.$$

В силу начальных условий, $C = 0$ и, окончательно,

$$x = y\sqrt{2\ln y}.$$

Это соотношение позволяет установить, что, напр., при $x = 1$ истинное значение y будет 1,328 (с избытком). Таким образом, погрешность найденного приближенного значения $y = 1{,}31$ меньше 0,018, т. е. не достигает 1,5%.

x	y	$\Delta y = 0{,}1 \cdot y'$	$y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$
0,0	1,00		0,0
		0,00	
0,1	1,00		0,1
		0,01	
0,2	1,01		0,2
		0,02	
0,3	1,03		0,3
		0,02	
0,4	1,06		0,3
		0,03	
0,5	1,09		0,4
		0,04	
0,6	1,13		0,4
		0,04	
0,7	1,17		0,4
		0,04	
0,8	1,21		0,5
		0,04	
0,9	1,26		0,5
		0,05	
1,0	1,31		



Черт. 542.

298. Случай дифференциальных уравнений высших порядков и систем уравнений. Пусть дана система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = g(x, y, z),$$

где x — независимая переменная, а y и z — искомые функции от нее, и установлены начальные условия:

$$y = y_0 \text{ и } z = z_0 \text{ при } x = x_0.$$

Для приближенного построения системы соответствующих „интегральных кривых“ $y = \varphi(x)$ на плоскости xOy и $z = \psi(x)$ на плоскости xOz можно применить построения Эйлера-Коши. При

этом обе кривые—каждая на своей плоскости—строятся постепенно и одновременно. Каждая уже полученная пара соответствующих значений y и z позволяет вычислить и построить $y' = f(x, y, z)$ и $z' = g(x, y, z)$, а затем, соответствующие элементы касательных, по ним — следующую пару значений y и z, и т. д.

Так же, как и выше, построение может быть заменено вычислением: последовательные приращения y и z определяются по формулам

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x = f(x, y, z) \cdot \Delta x, \quad \Delta z = z' \cdot \Delta x = g(x, y, z) \cdot \Delta x.$$

Число уравнений системы (т. е. число неизвестных функций), как видим, не играет роли.

Что же касается уравнений высших порядков или систем таких уравнений, то, как было уже разъяснено в nn° 291, 292, вводя последовательные производные неизвестных функций в качестве новых неизвестных функций, всегда можно свести дело к интегрированию систем уравнений первого порядка и, следовательно, применить и способ Эйлера-Коши.

Примеры и задачи. 1. Дана система:

$$y' = x^2 - z^2, \quad z' = 1 + y - z$$

и начальные условия:

$$y = 0, \ z = 0{,}5 \text{ при } x = 1.$$

Предлагается приближенно проинтегрировать систему в промежутке значений x от 1 до 2,3, взяв $\Delta x = 0{,}05$.

Решение дано в таблице, помещенной на стр. 229.

Если вычислить решение с помощью более точных приемов, то, например, для $x = 2{,}3$, получим $y = 2{,}268$, $z = 1{,}735$, так что погрешность не достигает и 1,5%.

2. Дано уравнение второго порядка

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0;$$

проинтегрировать его в промежутке от $x = 1$ до $x = 2$, при начальных условиях:

$$y = 0{,}77, \quad y' = -0{,}44 \quad \text{при } x = 1.$$

Полагая $z = y'$, сведем вопрос к решению системы

$$y' = z, \quad z' = -y - \frac{z}{x}$$

с начальными условиями:

$$y = 0{,}77, \quad z = -0{,}44 \quad \text{при } x = 1.$$

См. приведенную на стр. 230 схему (Δx взято равным 0,1).

Более точное значение y, отвечающее $x = 2$, будет 0,224; таким образом, в полученном значении 0,23 все знаки верны.

3. Рассмотрим задачу о колебании математического маятника, которая приводится к уравнению (57*a*) [см. 295, зад. 1]:

$$\theta'' = -\sin\theta,$$

если в качестве независимой переменной ввести переменную x по формуле (58).

Пусть в начальный момент, при $t = 0$ (следовательно, и при $x = 0$) отклонение маятника будет $\theta = \frac{\pi}{2}$, а угловая скорость $\frac{d\theta}{dt}$ (следовательно, и $\theta' = \frac{d\theta}{dx}$) равна

x	y	$\Delta y = 0{,}05\, y'$	$y' = x^2 - z^2$	z	$\Delta z = 0{,}05\, z'$	$z' = 1 + y - z$
1,00	0,00		0,75	0,50		0,50
		0,04			0,03	
1,05	0,04		0,82	0,53		0,51
		0,04			0,03	
1,10	0,08		0,90	0,56		0,52
		0,05			0,03	
1,15	0,13		0,97	0,59		0,54
		0,05			0,03	
1,20	0,18		1,06	0,62		0,56
		0,05			0,03	
1,25	0,23		1,14	0,65		0,58
		0,06			0,03	
1,30	0,29		1,23	0,68		0,61
		0,06			0,03	
1,35	0,35		1,32	0,71		0,64
		0,07			0,03	
1,40	0,42		1,41	0,74		0,68
		0,07			0,03	
1,45	0,49		1,51	0,77		0,72
		0,08			0,04	
1,50	0,57		1,59	0,81		0,76
		0,08			0,04	
1,55	0,65		1,68	0,85		0,80
		0,08			0,04	
1,60	0,73		1,77	0,89		0,84
		0,09			0,04	
1,65	0,82		1,86	0,93		0,89
		0,09			0,04	
1,70	0,91		1,95	0,97		0,94
		0,10			0,05	
1,75	1,01		2,02	1,02		0,99
		0,10			0,05	
1,80	1,11		2,09	1,07		1,04
		0,10			0,05	
1,85	1,21		2,17	1,12		1,09
		0,11			0,05	
1,90	1,32		2,24	1,17		1,15
		0,11			0,06	
1,95	1,43		2,29	1,23		1,20
		0,11			0,06	
2,00	1,54		2,34	1,29		1,25
		0,12			0,06	
2,05	1,66		2,38	1,35		1,31
		0,12			0,07	
2,10	1,78		2,39	1,42		1,36
		0,12			0,07	
2,15	1,90		2,40	1,49		1,41
		0,12			0,07	
2,20	2,02		2,41	1,56		1,46
		0,12			0,07	
2,25	2,14		2,40	1,63		1,51
		0,12			0,08	
2,30	2,26			1,71		

x	y	$\Delta y = 0{,}1\,y'$	$y' = z$	$\Delta z = 0{,}1\,z'$	$z' = -y - \frac{z}{x}$
1,0	0,77		—0,44		—0,33
		—0,04		—0,03	
1,1	0,73		—0,47		—0,30
		—0,05		—0,08	
1,2	0,68		—0,50		—0,26
		—0,05		—0,03	
1,3	0,63		—0,53		—0,22
		—0,05		—0,02	
1,4	0,58		—0,55		—0,19
		—0,05		—0,02	
1,5	0,53		—0,57		—0,15
		—0,06		—0,01	
1,6	0,47		—0,58		—0,11
		—0,06		—0,01	
1,7	0,41		—0,59		—0,06
		—0,06		—0,01	
1,8	0,35		—0,60		—0,02
		—0,06		0,00	
1,9	0,29		—0,60		+0,03
		—0,06		0,00	
2,0	0,23		—0,60		

нулю. Желая установить величину периода колебаний маятника, мы постараемся определить (конечно, приближенно) момент прохождения маятника через положение равновесия ($\theta = 0$); соответствующий промежуток времени составит, очевидно, четверть полного периода.

Приближенное интегрирование выполнено в приведенной на стр. 231 таблице. Мы видим, что при $x = 1{,}8$ отклонение θ еще положительно ($= 0{,}11$), в то время как при $x = 1{,}9$ отклонение θ уже отрицательно ($= -0{,}04$). Следовательно, обращение θ в нуль должно произойти при некотором промежуточном значении x. По методу хорд это значение приближенно равно [152, (54)]

$$x \doteq 1{,}8 + \frac{0{,}11 \cdot 0{,}1}{0{,}11 + 0{,}04} = 1{,}87.$$

Тогда, в силу (58), четверть искомого периода будет:

$$\frac{1}{4}\tau = 1{,}87\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Более точное значение, получаемое при помощи таблицы эллиптических интегралов [170; 280,4], таково:

$$\frac{1}{4}\tau = 1{,}854\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Таким образом, период оказывается установленным достаточно точно.

4. В заключение, обратимся к задаче о колебании маятника при наличии сопротивления, о которой была речь в n° 235, 3. Рассмотрим то же уравнение, что и там:

$$\theta'' + 0{,}5\,\theta' + \sin\theta = 0$$

при начальных условиях:

$$\theta = 0,\ \theta' = 4 \quad \text{при } x = 0 \quad (\text{при } t = 0).$$

Иными словами, маятнику, находящемуся в начальный момент в положении равновесия, сообщается некоторая скорость, и он предоставляется самому себе.

x	θ	$\Delta\theta = 0{,}1\,\theta'$	$\theta' = z$	$\Delta z = 0{,}1\,z'$	$z' = -\sin y$
0,0	1,57		0,00		—1,00
		0,00		—0,10	
0,1	1,57		—0,10		—1,00
		—0,01		—0,10	
0,2	1,56		—0,20		—1,00
		—0,02		—0,10	
0,3	1,54		—0,30		—1,00
		—0,03		—0,10	
0,4	1,51		—0,40		—1,00
		—0,04		—0,10	
0,5	1,47		—0,50		—0,99
		—0,05		—0,10	
0,6	1,42		—0,60		—0,99
		—0,06		—0,10	
0,7	1,36		—0,70		—0,98
		—0,07		—0,10	
0,8	1,29		—0,80		—0,96
		—0,08		—0,10	
0,9	1,21		—0,90		—0,93
		—0,09		—0,09	
1,0	1,12		—0,99		—0,90
		—0,10		—0,09	
1,1	1,02		—1,08		—0,85
		—0,11		—0,08	
1,2	0,91		—1,16		—0,79
		—0,12		—0,08	
1,3	0,79		—1,24		—0,71
		—0,12		—0,07	
1,4	0,67		—1,31		—0,62
		—0,13		—0,06	
1,5	0,54		—1,37		—0,51
		—0,14		—0,05	
1,6	0,40		—1,42		—0,39
		—0,14		—0,04	
1,7	0,26		—1,46		—0,26
		—0,15		—0,03	
1,8	0,11		—1,49		—0,11
		—0,15		—0,01	
1,9	—0,04				

На стр. 232 приведена обширная таблица, осуществляющая приближенное интегрирование указанного уравнения. Впоследствии мы проведем эти вычисления более точными методами [303,3]; сравнивая, можно убедиться в том, что погрешность величины θ не выходит за пределы 0,1 (6°). Погрешность эта довольно велика; тем не менее весь характер движения и поворотные моменты устанавливаются все же с точностью, которая для большинства случаев достаточна.

Так, мы видим, что прежде всего маятник сделает в положительном направлении полный оборот (θ растет от 0 до $2\pi = 6{,}28$) за промежуток времени, отвечающий, примерно, $x = 3{,}1$; затем, отклонится в том же направлении на угол $\theta = 7{,}4$ (точнее: 7,3) или — если отбросить 2π — на угол $\theta = 1{,}12$ (точнее: 1,02, т. е. около 60°), качнется в обратном направлении, и т. д.

График изменения θ в зависимости от x (или, если надлежаще изменить масштаб, — от t) представлен ниже, на черт. 545.

x	θ	$\Delta\theta = 0{,}1 \cdot \theta'$	$\theta' = z$	$\Delta z = 0{,}1 \cdot z'$	$z' = -0{,}5z - \sin\theta$	x	θ	$\Delta\theta = 0{,}1 \cdot \theta'$	$\theta' = z$	$\Delta z = 0{,}1 \cdot z'$	$z' = -0{,}5z - \sin\theta$
0	0		4		—2,0	2,6	5,49		1,61		—0,1
		0,40		—0,20				0,16		—0,91	
0,1	0,40		3,80		—2,3	2,7	5,65		1,60		—0,2
		0,38		—0,23				0,16		—0,02	
0,2	0,78		3,57		—2,5	2,8	5,81		1,58		—0,3
		0,36		—0,25				0,16		—0,03	
0,3	1,14		3,32		—2,6	2,9	5,97		1,55		—0,5
		0,33		—0,26				0,15		—0,05	
0,4	1,47		3,06		—2,5	3,0	6,12		1,50		—0,6
		0,31		—0,25				0,15		—0,06	
0,5	1,78		2,81		—2,4	3,1	6,27		1,44		—0,7
		0,28		—0,24				0,14		—0,07	
0,6	2,06		2,57		—2,2	3,2	6,41		1,37		—0,8
		0,26		—0,22				0,14		—0,08	
0,7	2,32		2,35		—1,9	3,3	6,54		1,29		—0,9
		0,23		—0,19				0,13		—0,09	
0,8	2,55		2,16		—1,6	3,4	6,67		1,20		—1,0
		0,21		—0,16				0,12		—0,10	
0,9	2,76		2,00		—1,4	3,5	6,79		1,10		—1,0
		0,20		—0,14				0,11		—0,10	
1,0	2,96		1,86		—1,1	3,6	6,90		1,00		—1,1
		0,19		—0,11				0,10		—0,11	
1,1	3,15		1,75		—0,9	3,7	7,00		0,89		—1,1
		0,17		—0,09				0,09		—0,11	
1,2	3,32		1,66		—0,7	3,8	7,09		0,78		—1,1
		0,17		—0,07				0,08		—0,11	
1,3	3,49		1,59		—0,5	3,9	7,17		0,67		—1,1
		0,16		—0,05				0,07		—0,11	
1,4	3,65		1,54		—0,3	4,0	7,24		0,56		—1,1
		0,15		—0,03				0,06		—0,11	
1,5	3,80		1,51		—0,3	4,1	7,30		0,45		—1,1
		0,15		—0,03				0,04		—0,11	
1,6	3,95		1,48		0,0	4,2	7,34		0,34		—1,0
		0,15		0,00				0,03		—0,10	
1,7	4,10		1,48		0,1	4,3	7,37		0,24		—1,0
		0,15		0,01				0,02		—0,10	
1,8	4,25		1,49		0,1	4,4	7,39		0,14		—1,0
		0,15		0,01				0,01		—0,10	
1,9	4,40		1,50		0,2	4,5	7,40		0,04		—0,9
		0,15		0,02				0,00		—0,09	
2,0	4,55		1,52		0,2	4,6	7,40		—0,05		—0,9
		0,15		0,02				0,00		—0,09	
2,1	4,70		1,54		0,2	4,7	7,40		—0,14		—0,8
		0,15		0,02				—0,01		—0,08	
2,2	4,85		1,56		0,2	4,8	7,39		—0,22		—0,8
		0,16		0,02				—0,02		—0,08	
2,3	5,01		1,58		0,2	4,9	7,37		—0,30		—0,7
		0,16		0,02				—0,03		—0,07	
2,4	5,17		1,60		0,1	5,0	7,34		—0,37		—0,7
		0,16		0,01				—0,04		—0,07	
2,5	5,33		1,61		0,0	5,1	7,30		—0,44		—0,6
		0,16		0,00				—0,04		—0,06	
2,6	5,49		1,61		—0,1	5,2	7,26		—0,50		—0,6

x	θ	$\Delta\theta = 0{,}1 \cdot \theta'$	$\theta' = z$	$\Delta z = 0{,}1 \cdot z'$	$z' = -0{,}5z - \sin\theta$	x	θ	$\Delta\theta = 0{,}1 \cdot \theta'$	$\theta' = z$	$\Delta z = 0{,}1 \cdot z'$	$z' = -0{,}5z - \sin\theta$
5,2	7,26		—0,50		—0,6	6,2	6,56		—0,78		0,1
		—0,05		—0,06				—0,08		0,01	
5,3	7,21		—0,56		—0,6	6,3	6,48		—0,77		0,2
		—0,06		—0,06				—0,08		0,02	
5,4	7,15		—0,62		—0,4	6,4	6,40		—0,75		0,3
		—0,06		—0,04				—0,07		0,03	
5,5	7,09		—0,66		—0,4	6,5	6,33		—0,72		0,3
		—0,07		—0,04				—0,07		0,03	
5,6	7,02		—0,70		—0,3	6,6	6,26		—0,69		0,4
		—0,07		—0,03				—0,07		0,04	
5,7	6,95		—0,73		—0,2	6,7	6,19		—0,65		0,4
		—0,07		—0,02				—0,06		0,04	
5,8	6,88		—0,75		—0,2	6,8	6,13		—0,61		0,5
		—0,08		—0,02				—0,06		0,05	
5,9	6,80		—0,77		—0,1	6,9	6,07		—0,56		0,5
		—0,08		—0,01				—0,06		0,05	
6,0	6,72		—0,78		0,0	7,0	6,01		—0,51		0,5
		—0,08		0,00				—0,06		0,05	
6,1	6,64		—0,78		0,0	7,1	5,95		—0,46		
		—0,08		0,00				—0,05			
6,2	6,56		—0,78		+0,1	7,2	5,90				

299. Понятие о разностях функции. Для изложения более точных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений мы нуждаемся в некоторых вспомогательных понятиях, которыми предварительно и займемся.

Рассмотрим некоторую функцию $\eta = \varphi(x)$, определенную для ряда равноотстоящих значений аргумента:

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h, \ldots,\ x_{n-1} = x_{n-2} + h,\ x_n = x_{n-1} + h,$$
$$x_{n+1} = x_n + h, \ldots, \tag{76}$$

и пусть соответствующие значения самой функции будут:

$$\eta_0 = \varphi(x_0),\ \eta_1 = \varphi(x_1),\ \eta_2 = \varphi(x_2), \ldots,\ \eta_{n-1} = \varphi(x_{n-1}),$$
$$\eta_n = \varphi(x_n),\ \eta_{n+1} = \varphi(x_{n+1}), \ldots$$

Тогда выражение $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x)$ называется *разностью* функции $\varphi(x)$, отвечающей значению x аргумента. Таким образом, значениям (76) отвечают разности:

$$\Delta\eta_0 = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi(x_1) - \varphi(x_0) = \eta_1 - \eta_0,$$
$$\Delta\eta_1 = \eta_2 - \eta_1, \ldots,\ \Delta\eta_n = \eta_{n+1} - \eta_n, \ldots$$

Разность $\Delta\eta = \Delta\varphi(x)$ оказывается определенной для тех же равноотстоящих значений (76), что и исходная функция $\varphi(x)$; лишь в том случае, если значений (76) конечное число, для последнего из них

разность, естественно, не может быть определена. Пусть, напр., x изменяется от 2 до 3 через 0,1 ($h=0{,}1$) и положим $\eta=x^3$. Соответствующие значения x и η помещены в первых двух столбцах приводимой ниже таблицы. Значения разности $\Delta\eta$ даны в третьем столбце; каждая разность помещена между теми двумя значениями η, вычитанием которых одно из другого она получается. Так, разность $1{,}801 = 15{,}625 - 13{,}824$ помещена между числами 13,824 и 15,625. Такой способ записи очень удобен [мы с ним уже имели дело в n⁰ 64]; нужно лишь помнить, что разность 1,801 мы относим к значению 13,824 величины η (или значению 2,4 аргумента x), помещенному над самой разностью.

x	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$
2,0	8,000			
		1,261		
2,1	9,261		0,126	
		1,387		0,006
2,2	10,618		0,132	
		1,519		0,006
2,3	12,167		0,138	
		1,657		0,006
2,4	13,824		0,144	
		1,801		0,006
2,5	15,625		0,150	
		1,951		0,006
2,6	17,576		0,156	
		2,107		0,006
2,7	19,683		0,162	
		2,269		0,006
2,8	21,952		0,168	
		2,437		0,006
2,9	24,389		0,174	
		2,611		
3,0	27,000			

Для разности $\Delta\eta=\Delta\varphi(x)$ можно, в свою очередь, составить разность $\Delta[\Delta\varphi(x)]$, поступая с функцией $\Delta\varphi(x)$ так же, как мы раньше поступали с функцией $\varphi(x)$. Эта разность называется *разностью второго порядка* (или короче — *второй разностью*) исходной функции и обозначается через $\Delta^2\eta=\Delta^2\varphi(x)$:

$$\Delta^2\varphi(x)=\Delta\varphi(x+h)-\Delta\varphi(x).$$

Значениям (76) отвечают разности

$$\Delta^2\eta_0=\Delta\eta_1-\Delta\eta_0,\ \Delta^2\eta_1=\Delta\eta_2-\Delta\eta_1,\ldots,\ \Delta^2\eta_n=\Delta\eta_{n+1}-\Delta\eta_n,\ldots$$

Так, вычитая последовательно одну из другой разности, помещенные в третьем столбце нашей таблицы, получим вторые разности, приведенные в четвертом столбце. Но и здесь нужно помнить, что для определения значения η (или x), которому мы относим данную вторую разность, нужно от нее провести наклонную линию вверх;

например, вторая разность 0,150 относится к значению 13,824 величины η (или значению 2,4 аргумента x).

Аналогично устанавливается понятие и о *разности третьего порядка* (или *третьей разности*) функции:

$$\Delta^3\eta = \Delta^3\varphi(x) = \Delta^2\varphi(x+h) - \Delta^2\varphi(x)$$

и т. д. В нашем примере третья разность уже оказывается постоянной, так что четвертая разность тождественно равна нулю.

Можно показать, что подобное свойство характерно вообще для целого многочлена третьей степени. Для целого многочлена k-ой степени в постоянную обращается лишь k-ая разность.

Если же рассматриваемая функция отлична от целого многочлена, то для нее ряд разностей может быть продолжен беспредельно (предполагая, конечно, что безграничен и ряд равноотстоящих значений x, для которых функция определена!). Однако, разности эти, если только h взято достаточно малым, обыкновенно быстро убывают. Для примера приводим таблицу последовательных разностей для функции $\eta = \log x$, меняя x от 1 до 2 через 0,1:

x	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	$\Delta^3\eta$	$\Delta^4\eta$
1,0	0,00000				
		0,04139			
1,1	0,04139		— 0,00360		
		0,03779		0,00057	
1,2	0,07918		— 0,00303		— 0,00011$^{(13)}$
		0,03476		0,00046$^{(5)}$	
1,3	0,11394		— 0,00257		— 0,00012$^{(9)}$
		0,03219		0,00034$^{(6)}$	
1,4	0,14613		— 0,00223		— 0,00004$^{(7)}$
		0,02996		0,00030$^{(29)}$	
1,5	0,17609		— 0,00193		— 0,00007$^{(5)}$
		0,02803		0,00023	
1,6	0,20412		— 0,00170		— 0,00004
		0,02633		0,00019	
1,7	0,23045		— 0,00151		— 0,00002$^{(3)}$
		0,02482		0,00017	
1,8	0,25527		— 0,00134		— 0,00003$^{(2)}$
		0,02348		0,00014	
1,9	0,27875		— 0,00120		
		0,02228			
2,0	0,30103				

Благодаря ошибкам от округления, которые при образовании последовательных разностей налагаются друг на друга, разности третьего

и четвертого порядка уже несколько искажены; правильные знаки (вычисленные, исходя из семизначных логарифмов) показаны в скобках.

300. Метод Адамса-Штермера для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Понятие о разностях функции различных порядков находит себе приложение в методе Адамса-Штермера (Adams-Störmer) для приближенного численного интегрирования дифференциальных уравнений и систем их. Мы начнем с изложения этого метода * применительно к одному дифференциальному уравнению первого порядка, вида

$$y' = f(x, y). \tag{77}$$

Пусть начальные значения x и y будут, соответственно, x_0 и y_0. Рассмотрим ряд равноотстоящих значений x, например ряд (76), и обозначим соответствующие значения искомой функции y от x через

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, \ldots$$

Для того чтобы последовательно строить эти значения, исходя от начального значения y_0, достаточно уметь вычислять разности

$$\Delta y_0, \Delta y_1, \ldots, \Delta y_{n-1}, \Delta y_n, \ldots,$$

ибо

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,\ y_2 = y_1 + \Delta y_1, \ldots,\ y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1},$$
$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n, \ldots$$

При этом вычислении основную роль будет играть величина

$$\eta_n = y_n' \cdot h, \tag{78}$$

где y_n' означает производную от y по x при $x = x_n$; если принять во внимание уравнение (77), которому должна удовлетворять функция y то величину η_n можно выразить и формулой

$$\eta_n = f(x_n, y_n) \cdot h. \tag{78a}$$

Как мы помним, при пользовании методом Эйлера-Коши, было просто положено [см. (75)]

$$\Delta y_n = \eta_n.$$

Здесь мы установим более точную формулу, привлекая, кроме величины η_n, и последовательные ее разности. Отбрасывая величины порядка h^4 (где h есть разность двух последовательных значений x), мы сможем ограничиться, как будет показано ниже, разностями первого и второго порядков.

Предположим, что тем или иным способом составлена таблица величин y_n и η_n (а также их разностей), вплоть до приводимых ниже строк:

* Метод Адамса-Штермера мы излагаем здесь в той форме, которую ему придал акад. А. Н. Крылов.

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
y_{n-2} & & & \eta_{n-2} & & \\
 & \Delta y_{n-2} & & & \Delta\eta_{n-2} & \\
y_{n-1} & & & \eta_{n-1} & & \Delta^2\eta_{n-2} \\
 & \Delta y_{n-1} & & & \Delta\eta_{n-1} & \\
y_n & & & \eta_n & &
\end{array}\right\} \qquad (A)$$

Таким образом, правая часть таблицы заканчивается косой строкой, состоящей из элементов

$$\eta_n, \quad \Delta\eta_{n-1}, \quad \Delta^2\eta_{n-2}.$$

Покажем, что через эти элементы очередная разность Δy_n может быть выражена с точностью до величин порядка h^4.

Вспомним разложение приращения функции y по степеням приращения x в ряд Тэйлора [205, (21a)]:

$$\Delta y = y'\Delta x + \frac{1}{2} y'' (\Delta x)^2 + \frac{1}{6} y''' (\Delta x)^3 + \ldots \qquad (79)$$

Полагая $x = x_n$, $\Delta x = h$ и подставляя вместо $y, y', y'', \ldots$ соответствующие значения их $y_n, y_n', y_n'', \ldots$, получим

$$\Delta y_n = y_n' \cdot h + \frac{1}{2} y_n'' \cdot h^2 + \frac{1}{6} y_n''' \cdot h^3 + \ldots \qquad (80)$$

Если заменить в разложении (79) y на y' (и соответственно — y' на y'', y'' на y''', ...), то придем к разложению:

$$\Delta y' = y'' \Delta x + \frac{1}{2} y''' (\Delta x)^2 + \ldots$$

Положим здесь сначала $x = x_n$, $\Delta x = -h$, а затем $x = x_n$, $\Delta x = -2h$; тогда получим

$$y'_{n-1} - y'_n = -y''_n \cdot h + \frac{1}{2} y_n''' \cdot h^2 + \ldots \qquad (81)$$

$$y'_{n-2} - y_n' = -y_n'' \cdot 2h + \frac{1}{2} y_n''' \cdot (2h)^2 + \ldots = -2y_n'' \cdot h + \\ + 2y_n''' \cdot h^2 + \ldots \qquad (82)$$

Эти формулы позволят нам разложить $\Delta\eta_{n-1}$ и $\Delta^2\eta_{n-2}$ по степеням h. В самом деле, прежде всего, в виду (78) и (81) имеем:

$$\Delta\eta_{n-1} = \eta_n - \eta_{n-1} = (y_n' - y'_{n-1}) \cdot h = y_n'' \cdot h^2 - \frac{1}{2} y_n''' \cdot h^3 + \ldots \qquad (83)$$

Аналогично, в виду (78) и (82),

$$\eta_n - \eta_{n-2} = (y_n' - y'_{n-2}) \cdot h = 2y_n'' \cdot h^2 - 2y_n''' \cdot h^3 + \ldots \qquad (84)$$

Вычитая (83) из (84), найдем:

$$\Delta\eta_{n-2}=\eta_{n-1}-\eta_{n-2}=y_n''\cdot h^2-\frac{3}{2}\,y_n'''\cdot h^3+\ldots$$

Наконец, очевидно,

$$\Delta^2\eta_{n-2}=\Delta\eta_{n-1}-\Delta\eta_{n-2}=y_n'''\cdot h^3+\ldots \tag{85}$$

Поставим себе теперь задачей найти такие коэффициенты α, β, γ, чтобы формула

$$\Delta y_n=\alpha\eta_n+\beta\Delta\eta_{n-1}+\gamma\Delta^2\eta_{n-2}$$

была верна с точностью до h^4.

Если воспользоваться равенствами (78), (83), (85), то правая часть этой формулы представится в виде

$$\alpha y_n'\cdot h+\beta y_n''\cdot h^2+\left(\gamma-\frac{1}{2}\beta\right)y_n'''\cdot h^3+\ldots \tag{86}$$

Отождествляя первые три члена в этом разложении и в разложении (80), найдем:

$$\alpha=1,\ \beta=\frac{1}{2},\ \gamma-\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{6},$$

откуда

$$\gamma=\frac{5}{12}.$$

Таким образом, если положить

$$\Delta y_n=\eta_n+\frac{1}{2}\,\Delta\eta_{n-1}+\frac{5}{12}\,\Delta^2\eta_{n-2}, \tag{87}$$

то погрешность будет порядка h^4, так как при этих значениях коэффициентов разложения (80) и (86) могут отличаться лишь ненаписанными членами, содержащими h в четвертой и высших степенях.

Эта формула (87) является основной в методе Адамса-Штермера.

Вычислив с ее помощью Δy_n, мы найдем

$$y_{n+1}=y_n+\Delta y_n,$$

затем определим

$$\eta_{n+1}=f(x_{n+1},\ y_{n+1})\cdot h$$

и разности $\Delta\eta_n$ и $\Delta^2\eta_{n-1}$, т. е. дополним правую часть таблицы (A) еще одной косой строкой. Таблица теперь будет иметь вид:

$$\left.\begin{array}{lll|lll}
\cdots & & & \cdots & & \\
\cdots & & & \cdots & & \\
y_{n-2} & & & \eta_{n-2} & & \\
 & \Delta y_{n-2} & & & \Delta\eta_{n-2} & \\
y_{n-1} & & & \eta_{n-1} & & \Delta^2\eta_{n-2} \\
 & \Delta y_{n-1} & & & \Delta\eta_{n-1} & \\
y_n & & & \eta_n & & \Delta^2\eta_{n-1} \\
 & \Delta y_n & & & \Delta\eta_n & \\
y_{n+1} & & & \eta_{n+1} & &
\end{array}\right\} \tag{A'}$$

С помощью элементов последней косой строки мы составим

$$\Delta y_{n+1} = \eta_{n+1} + \frac{1}{2}\Delta\eta_n + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-1},$$

и т. д.

Итак, формула (87), действительно, позволяет неопределенно продолжать составляемую таблицу. Но для ее приложимости нужно, чтобы по крайней мере три строки таблицы уже были написаны. Поэтому первые три строки

y_0			η_0		
	Δy_0			$\Delta\eta_0$	
y_1			η_1		$\Delta^2\eta_0$
	Δy_1			$\Delta\eta_1$	
y_2			η_2		

должны быть составлены без ее помощи. Для этого нужно лишь вычислить два значения y_1 и y_2, ибо по ним легко подсчитать и остальные величины. Эти значения y, отвечающие двум близким к x_0 значениям x: $x_1 = x_0 + h$ и $x_2 = x_0 + 2h$, часто можно установить, напр., с помощью разложения y в ряд [см. 295]; ниже, в 301, мы укажем и другой прием для той же цели.

Поясним метод Адамса-Штермера примером.

Пусть требуется проинтегрировать уравнение

$$y' = 2xy,$$

исходя из начальных условий:

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

При этом x должно изменяться, скажем, от 0 до 1. Положим $h = 0{,}05$. Тогда непосредственно нужно вычислить значения y_1 и y_2, отвечающие значениям аргумента 0,05 и $2 \cdot 0{,}05 = 0{,}10$.

Мы уже имели в n⁰ 295 разложение искомой функции в степенной ряд (55); подставляя в него $x = 0{,}05$ и $x = 0{,}1$, найдем

$$y_1 = 1 + 0{,}0025 + 0{,}000003125 + \ldots, \quad y_2 = 1 + 0{,}01 + 0{,}00005 + \ldots,$$

так что, если ограничиться тысячными долями, можно взять:

$$y_1 = 1{,}003, \quad y_2 = 1{,}010.$$

Соответствующие значения величины η будут [см. (78 a)]

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_1 = 2 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}003 \cdot 0{,}05 = 0{,}0050,$$

$$\eta_2 = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}010 \cdot 0{,}05 = 0{,}0101.$$

Затем,

$$\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0 = 0{,}0050, \quad \Delta\eta_1 = \eta_2 - \eta_1 = 0{,}0051,$$

$$\Delta^2\eta_0 = \Delta\eta_1 - \Delta\eta_0 = 0{,}0001.$$

Таким образом, начало таблицы (она приведена ниже) уже составлено. Теперь, по формуле (87) (ею приходится все время пользоваться, поэтому полезно ее запомнить)

$$\Delta y_2 = \eta_2 + \frac{1}{2}\Delta\eta_1 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0 = 0{,}0101 + 0{,}0026 \doteq 0{,}013,$$

так что $y_3 = 1{,}010 + 0{,}013 = 1{,}023$. После этого вычисляем η_3:

$$\eta_3 = 2 \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}023 \cdot 0{,}05 = 0{,}0153,$$

затем: $\Delta\eta_2 = 0{,}0052$, $\Delta^2\eta_1 = 0{,}0001$, и т. д.

Предлагаем читателю самому проделать дальнейшие вычисления, тщательно проверяя каждый свой шаг по нашей таблице.

x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0,00	1,000		0,0000		
				0,0050	
0,05	1,003		0,0050		0,0001
				0,0051	
0,10	1,010		0,0101		0,0001
		0,013		0,0052	
0,15	1,023		0,0153		0,0003
		0,018		0,0055	
0,20	1,041		0,0208		0,0003
		0,024		0,0058	
0,25	1,065		0,0266		0,0005
		0,030		0,0063	
0,30	1,095		0,0329		0,0005
		0,036		0,0067	
0,35	1,131		0,0396		0,0007
		0,043		0,0074	
0,40	1,174		0,0470		0,0007
		0,051		0,0081	
0,45	1,225		0,0551		0,0011
		0,060		0,0092	
0,50	1,285		0,0643		0,0010
		0,069		0,0102	
0,55	1,354		0,0745		0,0013
		0,080		0,0115	
0,60	1,434		0,0860		0,0017
		0,092		0,0132	
0,65	1,526		0,0992		0,0020
		0,107		0,0151	
0,70	1,633		0,1143		0,0023
		0,123		0,0174	
0,75	1,756		0,1317		0,0027
		0,141		0,0201	
0,80	1,897		0,1518		0,0032
		0,163		0,0233	
0,85	2,060		0,1751		0,0039
		0,188		0,0272	
0,90	2,248		0,2023		0,0048
		0,218		0,0320	
0,95	2,466		0,2343		
		0,252			
1,00	2,718				

Мы видели в 295, что точное решение рассматриваемого уравнения будет

$$y = e^{x^2}.$$

Сравнение найденных значений с точными показывает, что ошибка нигде не превосходит 0,001.

Если не нужна большая точность, то можно было бы отбросить и величины порядка h^3; в этом случае достаточно и одной первой разности $\Delta\eta$, так что формула (87) заменяется упрощенной:

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1}. \tag{88}$$

Вместе с тем, очевидно, здесь уже не нужно вычислять предварительно два значения y_1 и y_2, как только что, а лишь одно, y_1.

Для примера приведем решение уже рассмотренной задачи по упрощенной формуле:

x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	x	y	Δy	η	$\Delta\eta$
0,00	1,00		0,000		0,50	1,28		0,064	
				0,005			0,07		0,010
0,05	1,00		0,005		0,55	1,35		0,074	
		0,01		0,005			0,08		0,012
0,10	1,01		0,010		0,60	1,43		0,086	
		0,01		0,005			0,09		0,013
0,15	1,02		0,015		0,65	1,52		0,099	
		0,02		0,006			0,11		0,015
0,20	1,04		0,021		0,70	1,63		0,114	
		0,02		0,006			0,12		0,017
0,25	1,06		0,027		0,75	1,75		0,131	
		0,03		0,006			0,14		0,020
0,30	1,09		0,033		0,80	1,89		0,151	
		0,04		0,007			0,16		0,023
0,35	1,13		0,040		0,85	2,05		0,174	
		0,04		0,007			0,19		0,028
0,40	1,17		0,047		0,90	2,24		0,202	
		0,05		0,008			0,22		0,032
0,45	1,22		0,055		0,95	2,46		0,234	
		0,06		0,009			0,25		
0,50	1,28		0,064		1,00	2,71			

Сравнивая с таблицей на стр. 240, видим, что все знаки вычисленных приближенных значений y верны.

Если пренебречь и первыми разностями $\Delta\eta$, то мы вернемся к способу Эйлера-Коши, который, таким образом, представляется лишь простейшим частным осуществлением излагаемого здесь метода.

Наоборот, при желании достигнуть большей точности, можно было бы привлечь и третьи разности $\Delta^3\eta$ и т. д.

Если промежуток h выбран, то вопрос о том, до какой разности следует доводить вычисления, решается просто: отбрасываются те разности, которые настолько малы, что не влияют уже на интересующие нас знаки в приближенных значениях искомой функции y. При большом числе промежутков полезно иметь некоторый „запас прочности“,

в виду возможного накопления погрешностей, проистекающих от округления.

Можно ставить задачу и иначе: задавшись наперед порядком первой отбрасываемой разности, выбрать h настолько малым, чтобы это отбрасывание не отражалось на нужных знаках.

301. Дополнительные замечания к методу Адамса-Штермера. Как видно из примеров, последовательное вычисление разностей Δy, связанное с „наращиванием" косых строк, составленных из значений η и ее разностей, — очень просто и производится, так сказать, автоматически.

Иначе обстоит дело с начальными строками, в виду необходимости предварительно вычислить значения y_1 и y_2 (предполагая, что вводятся две разности для величины η). Можно, как было указано, воспользоваться для этой цели разложением функции y в ряд. Но этот прием все же довольно громоздок; при наличии же в составе выражения $F(x, y)$ [см. (77)] эмпирических функций, заданных графиком или таблицей, он и вовсе не применим. Поэтому мы изложим другой способ построения начальных строк, принадлежащий акад. А. Н. Крылову.

Он основан на двух формулах:

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_n - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_n \qquad (n \geqslant 0) \tag{89}$$

и

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_{n-1}, \qquad (n \geqslant 1) \tag{90}$$

которые верны с точностью до величин порядка h^4 и устанавливаются совершенно аналогично формуле (87).

Их можно получить и непосредственно из этой формулы с помощью таких простых соображений.

С точностью до h^4 можно считать

$$\Delta^3\eta_{n-1} = \Delta^3\eta_{n-2} = 0,$$

т. е.

$$\Delta^2\eta_{n-2} = \Delta^2\eta_{n-1} = \Delta^2\eta_n. \tag{91}$$

Таким образом, заменяя в (87) $\Delta^2\eta_{n-2}$ на $\Delta^2\eta_{n-1}$, сразу приходим к (90).

С другой стороны, можно было бы (все с той же точностью до h^4!) заменить в (87) $\Delta^2\eta_{n-2}$ и на $\Delta^2\eta_n$:

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2}\Delta\eta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_n. \tag{92}$$

Если принять во внимание, что [см. (91)]

$$\Delta\eta_n - \Delta\eta_{n-1} = \Delta^2\eta_{n-1} = \Delta^2\eta_n,$$

так что

$$\Delta\eta_{n-1} = \Delta\eta_n - \Delta^2\eta_n,$$

и подставить в (92), вместо $\Delta\eta_{n-1}$, это выражение, то придем к (89).

Полагая в (89) $n=0$, а в (90) $n=1$, получим следующие частные формулы, которыми и будем постоянно пользоваться:

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\eta_0, \tag{93}$$

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\eta_0. \tag{94}$$

Покажем, как с их помощью, по методу „последовательных приближений", находить y_1 и y_2.

Прежде всего, зная y_0, вычислим η_0 и — в первом приближении — положим

$$\Delta y_0 = \eta_0.$$

Теперь $y_1 = y_0 + \Delta y_0$ также известно, и можно найти η_1, а с ним и $\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0$. Исправим значение Δy_0, полагая на этот раз

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0; \tag{95}$$

это приведет к исправлению значений y_1, η_1 и $\Delta\eta_0$. Найдем Δy_1 по формуле

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0; \tag{96}$$

тогда станет известно $y_2 = y_1 + \Delta y_1$, а следовательно — также и η_2 $\Delta\eta_1 = \eta_2 - \eta_1$ и, наконец, $\Delta^2\eta_0 = \Delta\eta_1 - \Delta\eta_0$.

После этого проверяем выполнение формул (93) и (94); часто $\Delta^2\eta_0$ оказывается настолько малым, что и эти формулы верны, хотя в (95) и (96) мы $\Delta^2\eta_0$ в расчет не брали. Если это не так, то перевычисляем Δy_0 уже по формуле (93), а Δy_1 — по формуле (94), наново составляем η_1, η_2, $\Delta\eta_0$, $\Delta\eta_1$, $\Delta^2\eta_0$ и опять проверяем выполнение формул (93) и (94) и т. д. Обыкновенно, очень быстро удается добиться осуществления этих основных формул, а это служит гарантией того, что получаемые в конечном счете значения y_1 и y_2 уже достаточно точны.

Возвращаясь к первому примеру, расмотренному в предыдущем п°, имеем сначала:

$$y_0 = 1{,}000, \quad \eta_0 = 0, \quad \Delta y_0 = 0, \quad y_1 = 1{,}000,$$

$$\eta_1 = 2 - 0{,}05 \cdot 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}005, \quad \Delta\eta_0 = 0{,}005.$$

Затем, полагаем

$$\Delta y_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}005 \doteq 0{,}003, \quad \text{так что} \quad y_1 = 1{,}003.$$

Улучшение значения y_1 не отразится на $\eta_1 = 0{,}0050$ и $\Delta\eta_0 = 0{,}0050$. Положим, далее [см. (96)]

$$\Delta y_1 = 0{,}005 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}005 \doteq 0{,}007, \quad y_2 = 1{,}010;$$

тогда

$$\eta_2 = 0{,}0101, \quad \Delta\eta_1 = 0{,}0051 \quad \text{и} \quad \Delta^2\eta_0 = 0{,}0001.$$

Легко проверить теперь, что формулы (93) и (94) выполняются — и первые три строки нашей таблицы уже готовы, почти без вычислений! Конечно, не всегда результат достигается так быстро.

Если вычисления ведутся лишь с первыми разностями $\Delta\eta$, так что предварительному определению подлежит лишь y_1, то дело еще проще. В этом случае формулы (93), (94) заменяются одной:

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2}\Delta\eta_0. \tag{97}$$

Начнем с того, что положим, в первом приближении,

$$\Delta y_0 = \eta_0,$$

и найдем y_1, η_1, $\Delta\eta_0 = \eta_1 - \eta_0$. Затем, перевычисляем Δy_0 по формуле (97) и исправляем значения названных величин и т. д., пока формула (97) не окажется — в пределах требуемой точности — выполненной.

Так, для примера на стр. 241 имеем:

$$y_0 = 1{,}00, \quad \eta_0 = 0, \quad \Delta y_0 = 0, \quad y_1 = 1{,}00, \quad \eta_1 = 0{,}005, \quad \Delta\eta_0 = 0{,}005,$$

затем по формуле (97)

$$\Delta y_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}005 \doteq 0,$$

т. е. возвращаемся к тому же значению $y_1 = 1{,}00$, чем процесс и заканчивается.

Примеры. Вернемся к уравнению

$$y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

при начальных условиях:

$$y = 1 \quad \text{при} \quad x = 0$$

[см. 297, 2]. Полагая $h = 0{,}1$, попытаемся получить значение y при $x = 1$ с точностью до 0,01.

Выкладки приведены в таблице. Курсивом набраны строки, осуществляющие первое приближение. Проверяя выполнение формул (93) и (94), видим, что первая выполняется безупречно:

$$\Delta y_0 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0099 - \frac{1}{12} \cdot (-0{,}0009) \doteq 0{,}005;$$

что до второй, то

$$\Delta y_1 = 0{,}0099 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0099 + \frac{5}{12} \cdot (-0{,}0009) \doteq 0{,}0145,$$

даже с некоторым недостатком; но из-за этого не стоит вычислять наново и можно оставить попрежнему $\Delta y_1 = 0{,}015$.

x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$
0,0	1,000	0	0	0,0099	
0,1	1,000		0,0099		
0,0	1,000	0,005	0	0,0099	
0,1	1,005	0,015	0,0099	0,0090	—0,0009
0,2	1,020	0,023	0,0189	0,0077	—0,0013
0,3	1,043	0,030	0,0266	0,0061	—0,0016
0,4	1,073	0,035	0,0327	0,0048	—0,0013
0,5	1,108	0,039	0,0375	0,0036	—0,0012
0,6	1,147	0,042	0,0411	0,0026	—0,0010
0,7	1,189	0,045	0,0437	0,0019	—0,0007
0,8	1,234	0,046	0,0456	0,0015	—0,0004
0,9	1,280	0,048	0,0471		
1,0	1,328				

Все знаки полученного значения верны.

2. Если довольствоваться тремя верными знаками, то можно было бы ограничиться (при той же длине h промежутка) первой разностью.

x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	x	y	Δy	η	$\Delta\eta$
0,0	1,00	0	0	0,010	0,6	1,15	0,04	0,041	0,003
0,1	1,00		0,010		0,7	1,19	0,04	0,044	0,002
0,0	1,00	0,01	0	0,010	0,8	1,23	0,05	0,046	0,001
0,1	1,01	0,01	0,010	0,009	0,9	1,28	0,05	0,047	0,001
0,2	1,02	0,02	0,019	0,008	1,0	1,33	0,05	0,048	0,001
0,3	1,04	0,03	0,027	0,006	1,1	1,38	0,05	0,049	0,000
0,4	1,07	0,04	0,033	0,004	1,2	1,43	0,05	0,049	0,001
0,5	1,11	0,04	0,037	0,004	1,3	1,48	0,05	0,050	0,000
0,6	1,15		0,041		1,4	1,53		0,050	

Заметив, что разности $\Delta\eta$ становятся очень малыми, мы можем, чтобы быстрее двигаться вперед, увеличить промежуток h. Попробуем взять, напр., $h = 0{,}4$. Таблицу начнем сызнова, опираясь на известные уже нам значения y при $x = 1$ и $x = 1{,}4$, которые и дадут две начальные строки.

x	y	Δy	η	$\Delta\eta$	x	y	Δy	η	$\Delta\eta$
1,0	1,33		0,192		3,0	2,32		0,194	
		0,20		0,007			0,19		—0,003
1,4	1,53		0,199		3,4	2,51		0,191	
		0,20		0,001			0,19		—0,002
1,8	1,73		0,200		3,8	2,70		0,189	
		0,20		—0,002			0,19		—0,002
2,2	1,93		0,198		4,2	2,89		0,187	
		0,20		—0,002			0,19		—0,002
2,6	2,13		0,196		4,6	3,08		0,185	
		0,19		—0,002			0,18		
3,0	2,32		0,194		5,0	3,26			

В последнем полученном значении y все знаки верны.

Итак, вовсе не обязательно держаться на всем протяжении вычисления одной и той же величины промежутка h. Часто вначале, напр., выгодно брать очень маленькое h (процесс „последовательного приближения" быстрее завершается!), с тем чтобы потом его увеличить.

302. Приближенное интегрирование уравнения движения одноцилиндровой паровой машины. Желая дать более сложный пример применения метода Адамса-Штермера, с тем однако, чтобы точность вычисленных значений искомой функции могла быть проверена иным путем, мы остановимся на уравнении движения одноцилиндровой паровой машины. Интегрирование его будет поучительно во многих отношениях.

Это уравнение связывает угловую скорость ω вращения вала с углом θ поворота кривошипа и имеет вид:

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{F(\theta)}{E(\theta)} \cdot \frac{1}{\omega} - \frac{E'(\theta)}{2E(\theta)} \cdot \omega. \tag{98}$$

Здесь функция $E(\theta)$ зависит от размеров и распределения масс частей машины; исходя из некоторых частных предположений, положим:

$$E(\theta) = 485 + 2{,}15 \sin^2\theta \cdot (1 + 0{,}4 \cos\theta).$$

Что же касается функции $F(\theta)$, выражающей вращательный момент (с учетом сопротивления), то она задается графически, на основе индикаторной диаграммы машины. Предположим, что черт. 543 дает ее график; характерным для него являются „угловые точки". Попытаемся проинтегрировать уравнение (98) в промежутке изменения θ от 0 до 2π (от 0° до 360°), что даст картину периодических колебаний угловой скорости. Возьмем $h = 10° = \frac{\pi}{18} = 0{,}175$.*

Так как начального значения ω мы не знаем, то возьмем его равным расчетной средней скорости, которую предположим, напр., равной $2\pi = 6{,}283$.

* Уравнение и числовые данные (с незначительными изменениями) заимствованы у В. Горта (W. Hort), „Дифференциальные уравнения" (ГТТИ, 1933, стр. 190), где, впрочем, уравнение интегрируется иным способом.

Так как этот пример представляет для нас лишь учебный интерес, то, чтобы не усложнять дела, мы взяли случай, когда угловые точки отвечают „удобным" углам, кратным 10°. В иных условиях пришлось бы для каждого промежутка между угловыми точками брать свое h.

Для облегчения выкладок составим предварительно вспомогательную таблицу.

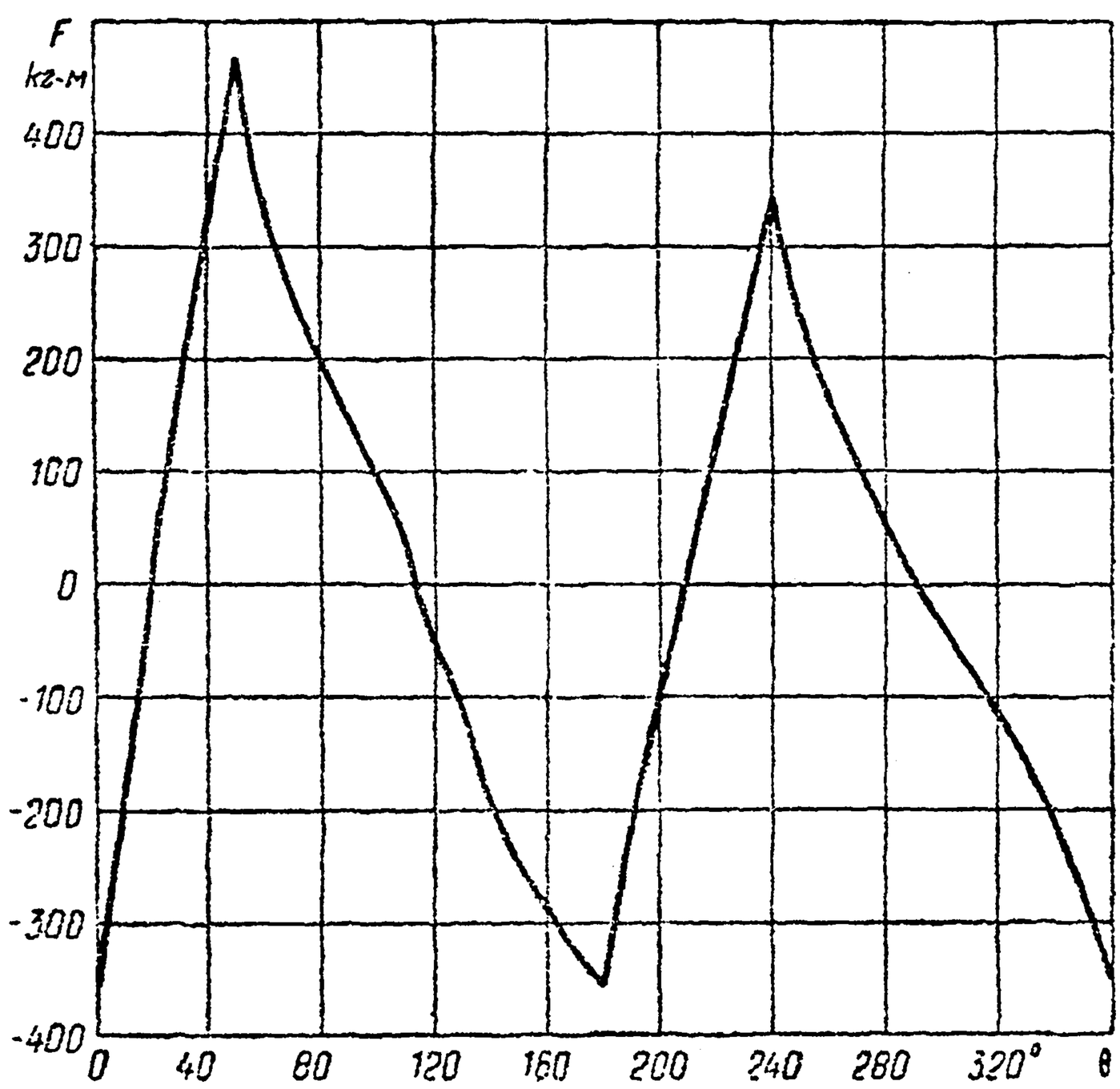
Вспомогательная таблица для вычисления величины η

θ	$\frac{F(\theta)}{E(\theta)} \cdot \frac{\pi}{18}$	$\frac{\frac{1}{2}E'(\theta)}{E(\theta)} \cdot \frac{\pi}{18}$	θ	$\frac{F(\theta)}{E(\theta)} \cdot \frac{\pi}{18}$	$\frac{\frac{1}{2}E'(\theta)}{E(\theta)} \cdot \frac{\pi}{18}$
0°	— 0,1278	0	180°	— 0,1278	0
10°	— 0,0688	+ 0,000184	190°	— 0,0806	+ 0,000082
20°	+ 0,0011	+ 0,000337	200°	— 0,0371	+ 0,000162
30°	+ 0,0579	+ 0,000433	210°	+ 0,0043	+ 0,000239
40°	+ 0,1167	+ 0,000457	220°	+ 0,0456	+ 0,000307
50°	+ 0,1676	+ 0,000410	230°	+ 0,0855	+ 0,000353
60°	+ 0,1202	+ 0,000302	240°	+ 0,1232	— 0,000368
70°	+ 0,0949	+ 0,000154	250°	— 0,0[illegible]64	+ 0,000344
80°	+ 0,0724	+ 0,000006	260°	+ 0,0609	+ 0,000271
90°	+ 0,0512	— 0,000155	270°	+ 0,0383	+ 0,000155
100°	+ 0,0337	— 0,000271	280°	+ 0,0190	— 0,000006
110°	+ 0,0133	— 0,000343	290°	+ 0,0018	— 0,000154
120°	— 0,0179	— 0,000368	300°	— 0,0140	— 0,000302
130°	— 0,0445	— 0,000353	310°	— 0,0291	— 0,000410
140°	— 0,0686	— 0,000307	320°	— 0,0431	— 0,000457
150°	— 0,0896	— 0,000239	330°	— 0,0582	— 0,000433
160°	— 0,1036	— 0,000162	340°	— 0,0773	— 0,000337
170°	— 0,1173	— 0,000082	350°	— 0,1004	— 0,000184

Самое вычисление значений угловой скорости ω по методу Адамса-Штермера, со всеми подробностями, дано на прилагаемой таблице (стр. 248—249).

Особого внимания заслуживают „угловые точки" графика на черт. 543, которые отвечают $\theta = 50°$, 180° и 240°. В виду скачкообразного изменения направления графика, было бы неправильно проходить через эти значения, как через обыкновенные промежуточные значения; наоборот, их всякий раз нужно рассматривать как начальные значения и наново строить начальные строки таблицы, пользуясь методом „последовательных приближений".

Как видим из таблицы, при $\theta = 2\pi$ (360°) мы возвращаемся к исходному значению $\omega = 6{,}283$, что само по себе служит некоторой проверкой. График изменения ω представлен на черт. 544 (стр. 252).



Черт. 543.

Нетрудно подсчитать, что средняя угловая скорость $\omega_{ср.}$ оказывается равной 6,313. Так как расчетная средняя скорость равна, по предположению, $2\pi = 6{,}283$, то следует начальную ско-

Приближенное интегрирование уравнения движения одно

θ	ω	Δω	η	Δη	Δ²η
0°	6,283		— 0,0204		
		— 0,020		+ 0,0082	
10°	6,263		— 0,0122		
0°	6,283		— 0,0204		
		— 0,016		+ 0,0082	
10°	6,267		— 0,0122		+ 0,0020
		— 0,008		+ 0,0102	
20°	6,259		— 0,0020		
0°	6,283		— 0,0204		
		— 0,017		+ 0,0082	
10°	6,266		— 0,0122		+ 0,0020
		— 0,007		+ 0,0102	
20°	6,259		— 0,0020		— 0,0017
		+ 0,004		+ 0,0085	
30°	6,263		+ 0,0065		+ 0,0007
		+ 0,010		+ 0,0092	
40°	6,273		+ 0,0157		
		+ 0,021			
50°	6.294				
50°	6,294		+ 0,0240		
		+ 0,024		— 0,0065	
60°	6,318		+ 0,0175		
50°	6,294		+ 0,0240		
		+ 0,021		— 0,0065	
60°	6,315		+ 0,0175		+ 0,0030
		+ 0,014		— 0,0035	
70°	6,329		+ 0,0140		
50°	6,294		+ 0,0240		
		+ 0,020		— 0,0065	
60°	6,314		+ 0,0175		+ 0,0030
		+ 0,015		— 0,0035	
70°	6,329		+ 0,0140		+ 0,0009
		+ 0,013		— 0,0026	
80°	6,342		+ 0,0114		+ 0,0002
		+ 0,010		— 0,0024	
90°	6,352		+ 0,0090		+ 0,0004
		+ 0,008		— 0,0020	
100°	6,360		+ 0,0070		— 0,0007
		+ 0,006		— 0,0027	
110°	6,366		+ 0,0043		— 0,0021
		+ 0,003		— 0,0048	
120°	6,369		— 0,0005		+ 0,0005
		— 0,004		— 0,0043	
130°	6,365		— 0,0048		+ 0,0003
		— 0,007		— 0,0040	
140°	6,358		— 0,0088		+ 0,0002
		— 0,011		— 0,0038	
150°	6,347		— 0,0126		+ 0,0011
		— 0,014		— 0,0027	
160°	6,333		— 0,0153		
		— 0,016		— 0,0027	0
170°	6,317		— 0,0180		
		— 0,019			
180°	6,298				

цилиндровой паровой машины по способу Адамса-Штермера

θ	ω	Δω	η	Δη	$\Delta^2\eta$
180°	6,298		— 0,0202		
		— 0,020		+ 0,0068	
190°	6,278		— 0,0134		
180°	6,298		— 0,0202		
		— 0,017		+ 0,0068	
190°	6,281		— 0,0134		— 0,0003
		— 0,010		+ 0,0065	
200°	6,271		— 0,0069		— 0,0004
		— 0,004		+ 0,0061	
210°	6,267		— 0,0008		+ 0,0001
		+ 0,002		+ 0,0062	
220°	6,269		+ 0,0054		— 0,0002
		+ 0,009		+ 0,0060	
230°	6,278		+ 0,0114		
		+ 0,014			
240°	6,292				
240°	6,292		+ 0,0172		
		+ 0,017		— 0,0056	
250°	6,309		+ 0,0116		
240°	6,292		+ 0,0172		
		+ 0,014		— 0,0055	
250°	6,306		+ 0,0116		+ 0,0019
		+ 0,009		— 0,0037	
260°	6,315		+ 0,0079		
240°	6,292		+ 0,0172		
		+ 0,014		— 0,0056	
250°	6,306		+ 0,0116		+ 0,0019
		+ 0,010		— 0,0037	
260°	6,316		+ 0,0079		+ 0,0009
		+ 0,007		— 0,0028	
270°	6,323		+ 0,0051		+ 0,0007
		+ 0,004		— 0,0021	
280°	6,327		+ 0,0030		+ 0,0004
		+ 0,002		— 0,0017	
290°	6,329		+ 0,0013		+ 0,0001
		+ 0,001		— 0,0016	
300°	6,330		— 0,0003		— 0,0001
		— 0,001		— 0,0017	
310°	6,329		— 0,0020		— 0,0002
		— 0,003		— 0,0019	
320°	6,326		— 0,0039		— 0,0007
		— 0,005		— 0,0026	
330°	6,321		— 0,0065		— 0,0010
		— 0,008		— 0,0036	
340°	6,313		— 0,0101		— 0,0011
		— 0,012		— 0,0047	
350°	6,301		— 0,0148		
		— 0,018			
360°	6,283				

Приближенное интегрирование уравнения движения одно (способ

θ	$F(\theta)$	Суммы попарно	Суммы сверху вниз	$2\int_0^\theta F(\theta)\,d\theta$	$\omega_0^2 \cdot E(0) + 2\int_0^\theta F(\theta)\,d\theta$	$E(\theta)$	ω
0°	— 355		0	0	19 147	485	6,283
		— 546					
10°	— 191		— 546	— 95	19 052	485,1	6,267
		— 188					
20°	+ 3		— 734	— 128	19 019	485,3	6,260
		+ 164					
30°	161		— 570	— 99	19 048	485,7	6,262
		486					
40°	325		— 84	— 15	19 132	486,2	6,273
		792					
50°	467		+ 708	+ 124	19 271	486,6	6,292
		810					
60°	343		1 518	265	19 412	487,0	6,314
		608					
70°	265		2 126	371	19 518	487,2	6,330
		467					
80°	202		2 593	453	19 600	487,3	6,342
		345					
90°	143		2 938	513	19 660	487,2	6,352
		237					
100°	94		3 175	554	19 701	487,0	6,360
		131					
110°	37		3 306	577	19 724	486,7	6,366
		— 13					
120°	— 50		3 293	575	19 722	486,3	6,368
		— 174					
130°	— 124		3 119	544	19 691	485,9	6,366
		— 315					
140°	— 191		2 804	489	19 636	485,6	6,359
		— 440					
150°	— 249		2 364	413	19 560	485,3	6,349
		— 537					
160°	— 288		1 827	319	19 466	485,2	6,334
		— 614					
170°	— 326		1 213	212	19 359	485,0	6,318
		— 681					
180°	— 355		532	— 93	19 240	485,0	6,298

дилиндровой паровой машины, приведенного к квадратуре трапеций).

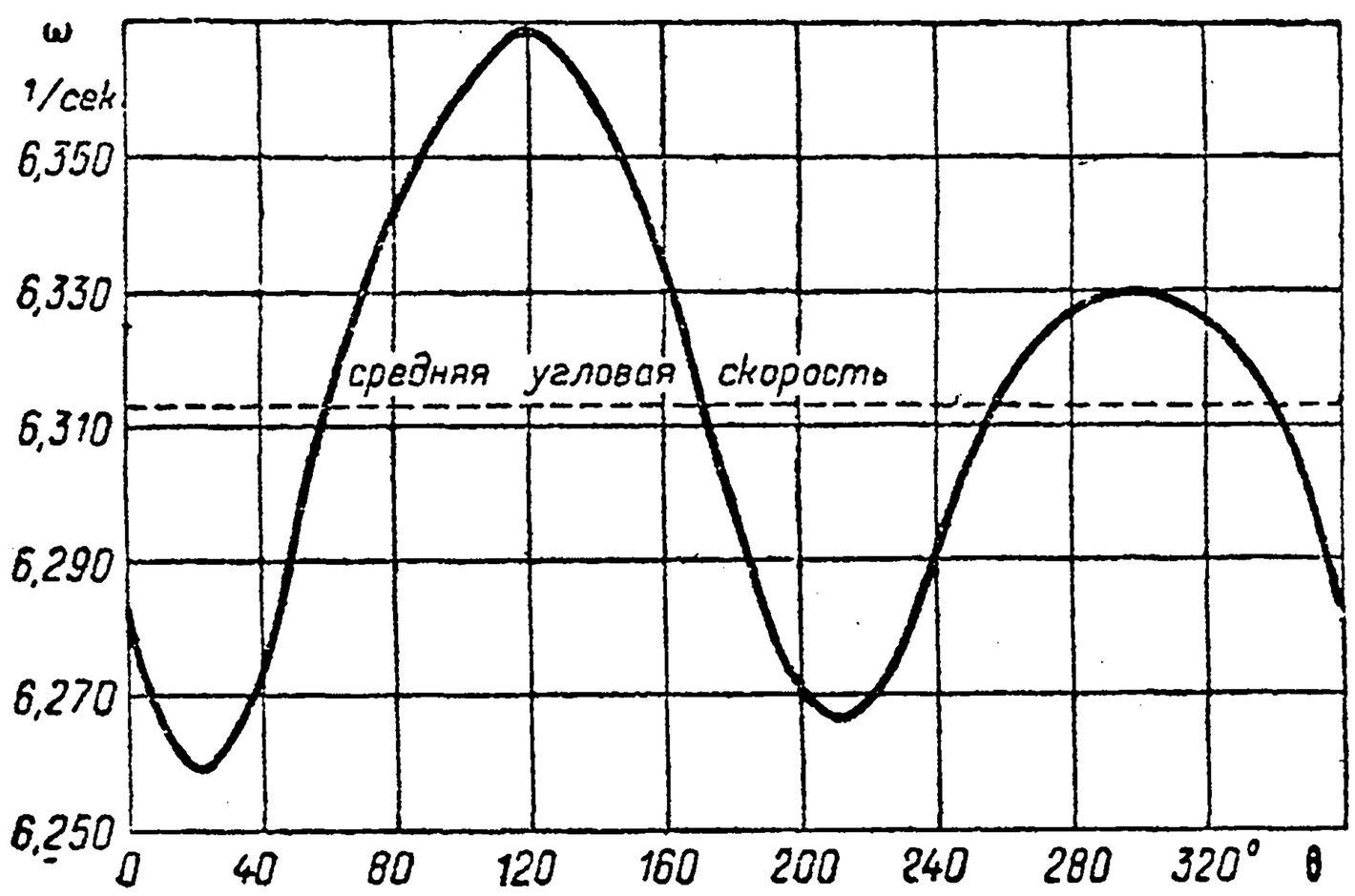
θ	$F(\theta)$	Суммы попарно	Суммы сверху вниз	$2\int_0^\theta F(\theta)\,d\theta$	$\omega_0^2 \cdot E(0) + 2\int_0^\theta F(\theta)\,d\theta$	$E(\theta)$	ω
180°	— 355		532	— 93	19 240	485,0	6,298
		— 579					
190°	— 224		— 47	— 8	19 139	485,0	6,282
		— 327					
200°	— 103		— 374	— 65	19 082	485,2	6,271
		— 91					
210°	+ 12		— 465	— 81	19 066	485,3	6,268
		+ 139					
220°	127		— 326	— 57	19 090	485,6	6,270
		365					
230°	238		+ 39	+ 7	19 154	485,9	6,278
		581					
240°	343		620	108	19 255	486,3	6,292
		584					
250°	241		1 204	210	19 357	486,7	6,307
		411					
260°	170		1 615	282	19 429	487,0	6,316
		277					
270°	107		1 892	330	19 477	487,2	6,323
		160					
280°	53		2 052	358	19 505	487,3	6,327
		58					
290°	5		2 110	368	19 515	487,2	6,329
		— 34					
300°	— 39		2 076	362	19 509	487,0	6,329
		— 120					
310°	— 81		1 956	341	19 488	486,6	6,328
		— 195					
320°	— 114		1 761	307	19 454	486,2	6,326
		— 276					
330°	— 162		1 485	259	19 406	485,7	6,321
		— 377					
340°	— 215		1 108	193	19 340	485,3	6,313
		— 494					
350°	— 279		614	107	19 254	485,1	6,300
		— 628					
360°	— 349		— 14	— 2	19 145	485,0	6,283

рость, а с нею и все остальные, понизить на 0,03. Строго говоря, нужно было бы повторить вычисления, исходя из новой начальной скорости, но это бесполезно, так как столь небольшое изменение значений ω не повлияет заметным образом на соответствующие значения η.

Теперь отметим, что есть возможность проверить полученную таблицу значений ω, решив уравнение (98) совсем другим путем. С этой целью, умножим обе части его на 2ω:

$$2\omega \cdot \frac{d\omega}{d\theta} = 2\frac{F(\theta)}{E(\theta)} - \frac{E'(\theta)}{E(\theta)} \cdot \omega^2.$$

Мы видим, что слева получилась производная от ω^2, так что если ω^2 принять за новую искомую функцию, то пред нами просто линейное дифференциальное уравнение, которое, как известно, решается в квадратурах!



Черт. 544.

Перенося член с ω^2 налево и умножая на $E(\theta)$ (которое здесь играет роль „интегрирующего множителя"), приведем его к виду:

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} \cdot E(\theta) + \omega^2 \cdot E'(\theta) = 2F(\theta)$$

или

$$\frac{d}{d\theta}\omega^2 \cdot E(\theta) = 2F(\theta).$$

Если через ω_0 обозначить начальное значение (при $\theta = 0$) угловой скорости, то, интегрируя, найдем отсюда

$$\omega^2 \cdot E(\theta) - \omega_0^2 \cdot E(0) = 2\int_0^\theta F(\theta)\, d\theta,$$

так что

$$\omega^2 = \frac{1}{E(\theta))}\left\{\omega_0^2 \cdot E(0) + 2\int_0^\theta F(\theta)\, d\theta\right\}$$

и наконец, ω получается извлечением квадратного корня.

Для приближенного вычисления $\int_0^\theta F(\theta)\, d\theta$ мы воспользуемся методом трапеций, сохранив прежнее деление промежутка. Так как нам нужно иметь таблицу значений этого интеграла, отвечающих значениям $\theta = 0°$, $10°$, $20°$,..., то удобнее всего поступить так.

Выписав в столбец снятые с графика значения $F(\theta)$ (см. таблицу на стр. 250—251, второй столбец), станем складывать каждую пару подписанных одно под другим чисел, помещая сумму сбоку между ними (третий столбец); полученные суммы снова станем складывать, но на этот раз все по порядку, сверху вниз, записывая

результат каждого сложения в четвертом столбце. Если остановиться на какой-нибудь из этих сумм, напр., 2126 (что отвечает $\theta = 70°$), то легко видеть, что она содержит значения -191, $+3$, $+161$, $+325$, $+467$ и $+343$ функции $F(\theta)$ (отвечающие $\theta = 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°$) по два раза каждое, и значения -355 и $+265$ (при $\theta = 0°$ и $70°$) — по разу. Таким образом, в лице этой суммы, 2126, мы имеем как раз ту сумму в скобках, которая фигурирует в формуле (74) n° **192**, если ее применить к вычислению интеграла $\int_0^\theta F(\theta)\,d\theta$, при $\theta = 70°$. Аналогичное можно сказать о каждой из сумм четвертого столбца.

Таким образом, если любую из них еще умножить на $\frac{\pi}{18} = 0{,}175$, т. е. на множитель $\frac{h}{n}$ формулы (74), **192**, то получится приближенное значение удвоенного интеграла

$$2\int_0^\theta F(\theta)\,d\theta$$

для соответствующего θ (пятый столбец). Остальная часть выкладок не нуждается в пояснениях. Совпадение результатов, полученных этим путем, с прежними — весьма хорошее!

Произведенные двояким путем выкладки дают читателю возможность усмотреть преимущества сведéния дифференциального уравнения к квадратурам (когда это возможно!). Независимо от необходимых вспомогательных выкладок и при прочих равных условиях, самый процесс бесперебойного вычисления „по столбцам", которым мы пользуемся при приближенном выполнении квадратуры, протекает быстрее и автоматичнее, чем процесс наращивания строк в методе Адамса-Штермера.

303. Приближенное интегрирование систем уравнений и уравнений высших порядков. Изложенный выше метод численного интегрирования дифференциальных уравнений распространяется на системы непосредственно. Пусть дана система, состоящая, скажем, из двух уравнений первого порядка:

$$y' = F(x, y, z), \quad z' = G(x, y, z),$$

и установлены начальные условия:

$$y = y_0, \; z = z_0 \quad \text{при} \quad x = x_0.$$

Последовательное вычисление значений y_n и z_n производится так же, как и в случае одного уравнения, но обязательно одновременно для обеих искомых функций. При этом основную роль играют две величины [ср. (78), (78 *a*)]

$$\eta_n = y_n' \cdot h = F(x_n, y_n, z_n) \cdot h, \qquad \zeta_n = z_n' \cdot h = G(x_n, y_n, z_n) \cdot h$$

и их разности. К формуле (87) здесь присоединяется аналогичная:

$$\Delta z_n = \zeta_n + \frac{1}{2}\Delta\zeta_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\zeta_{n-2};$$

если же мы довольствуемся лишь первыми разностями, то, кроме формулы (88), пользуемся такой же:

$$\Delta z_n = \zeta_n + \frac{1}{2}\Delta\zeta_{n-1}.$$

Наконец, и начальный процесс [301] здесь протекает так же, как и раньше. Лишь к формулам (93), (94) следует добавить еще формулы

$$\Delta z_0 = \zeta_0 + \frac{1}{2}\Delta\zeta_0 - \frac{1}{12}\Delta^2\zeta_0,$$

$$\Delta z_1 = \zeta_1 + \frac{1}{2}\Delta\zeta_0 + \frac{5}{12}\Delta^2\zeta_0,$$

если вычисление доводится до вторых разностей. Если же учитываются лишь первые разности, то, на ряду с формулой (97), пользуются формулой:

$$\Delta z_0 = \zeta_0 + \frac{1}{2}\Delta\zeta_0.$$

Перейдем к примерам.

Примеры и задачи. 1. Возьмем систему:

$$y' = x^2 - z^2, \quad z' = 1 + y - z$$

с начальными условиями:

$$y = 0, \quad z = 0{,}5 \quad \text{при} \quad x = 1,$$

причем x изменяется от 1 до 2,3 [ср. 293, 1]. Положим $h = 0{,}1$, но учтем и первые и вторые разности. Таким образом,

$$\eta_n = 0{,}1\ (x_n^2 - z_n^2), \quad \zeta_n = 0{,}1\ (1 + y_n - z_n).$$

Вот решение:

x	y	Δy	z	Δz	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$
1,0	*0,000*		*0,500*		*0,0750*			*0,0500*		
		0,075		*0,050*		*0,0158*			*0,0025*	
1,1	*0,075*		*0,550*		*0,0908*			*0,0525*		
1,0	0,000		0,500		0,0750			0,0500		
		0,083		0,051		0,0156			0,0032	
1,1	0,083		0,551		0,0906		0,0011	0,0532		0,0011
		0,098		0,055		0,0167			0,0043	
1,2	0,181		0,606		0,1073		0,0006	0,0575		0,0013
		0,116		0,060		0,0173			0,0056	
1,3	0,297		0,666		0,1246		0,0004	0,0631		0,0011
		0,134		0,067		0,0177			0,0067	
1,4	0,431		0,733		0,1423		— 0,0001	0,0698		0,0010
		0,151		0,074		0,0176			0,0077	
1,5	0,582		0,807		0,1599		— 0,0004	0,0775		0,0010
		0,169		0,082		0,0171			0,0087	
1,6	0,751		0,889		0,1770		— 0,0011	0,0862		0,0007
		0,185		0,091		0,0160			0,0094	
1,7	0,936		0,980		0,1930		— 0,0021	0,0956		0,0005
		0,201		0 102		0,0139			0,0099	
1,8	1,137		1,082		0,2069		— 0,0021	0,1055		0,0003
		0,213		0,111		0,0118			0,0102	
1,9	1,350		1,193		0,2187		— 0,0032	0,1157		0,0001
		0,224		0,121		0,0086			0,0103	
2,0	1,574		1,314		0,2273		— 0,0037	0,1260		— 0,0004
		0,230		0,131		0,0049			0,0099	
2,1	1,804		1,445		0,2322		— 0,0046	0,1359		— 0,0007
		0,233		0,141		0,0003			0,0092	
2,2	2,037		1,586		0,2325			0,1451		
		0,231		0,149						
2,3	2,268		1,735							

2. Вернемся к задаче о колебании маятника, о которой говорилось уже выше [295, 1, и 298, 3], причем сохраним прежние обозначения и начальные условия. Уравнение

$$\theta'' = -\sin\theta$$

заменяется, как обычно, системой:

$$\theta' = z, \quad z' = -\sin\theta.$$

Приближенное интегрирование приводится к таблице:

x	θ	$\Delta\theta$	z	Δz	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$
0	*1,571*	*0*	*0*	*— 0,100*	*0*	*— 0,0100*		*— 0,1000*	*0*	
0,1	*1,571*		*— 0,100*		*— 0,0100*			*— 0,1000*		
0	1,571		0		0			— 0,1000		
		— 0,005		— 0,100		— 0,0100			0	
0,1	1,566		— 0,100		— 0,0100		0	— 0,1000		0
		— 0,015		— 0,100		— 0,0100			0	
0,2	1,551		— 0,200		— 0,0200		0	— 0,1000		0,0001
		— 0,025		— 0,100		— 0,0100			0,0001	
0,3	1,526		— 0,300		— 0,0300		0	— 0,0999		0,0001
		— 0,035		— 0,100		— 0,0100			0,0002	
0,4	1,491		— 0,400		— 0,0400		0	— 0,0997		0,0003
		— 0,045		— 0,100		— 0,0100			0,0005	
0,5	1,446		— 0,500		— 0,0500		0,0001	— 0,0992		0,0003
		— 0,055		— 0,099		— 0,0099			0,0008	
0,6	1,391		— 0,599		— 0,0599		0,0001	— 0,0984		0,0006
		— 0,065		— 0,098		— 0,0098			0,0014	
0,7	1,326		— 0,697		— 0,0697		0,0002	— 0,0970		0,0007
		— 0,075		— 0,096		— 0,0096			0,0021	
0,8	1,251		— 0,793		— 0,0793		0,0002	— 0,0949		0,0009
		— 0,084		— 0,094		— 0,0094			0,0030	
0,9	1,167		— 0,887		— 0,0887		0,0004	— 0,0919		0,0010
		— 0,093		— 0,090		— 0,0090			0,0040	
1,0	1,074		— 0,977		— 0,0977		0,0004	— 0,0879		0,0013
		— 0,102		— 0,086		— 0,0086			0,0053	
1,1	0,972		— 1,063		— 0,1063		0,0007	— 0,0826		0,0014
		— 0,110		— 0,079		— 0,0079			0,0067	
1,2	0,862		— 1,142		— 0,1142		0,0007	— 0,0759		0,0015
		— 0,118		— 0,072		— 0,0072			0,0082	
1,3	0,744		— 1,214		— 0,1214		0,0009	— 0,0677		0,0015
		— 0,125		— 0,063		— 0,0063			0,0097	
1,4	0,619		— 1,277		— 0,1277		0,0011	— 0,0580		0,0014
		— 0,130		— 0,052		— 0,0052			0,0111	
1,5	0,489		— 1,329		— 0,1329		0,0011	— 0,0469		0,0011
		— 0,135		— 0,041		— 0,0041			0,0122	
1,6	0,354		— 1,370		— 0,1370		0,0013	— 0,0347		0,0011
		— 0,139		— 0,028		— 0,0028			0,0133	
1,7	0,215		— 1,398		— 0,1398		0,0014	— 0,0214		0,0007
		— 0,141		— 0,014		— 0,0014			0,0140	
1,8	0,074		— 1,412		— 0,1412			— 0,0074		
		— 0,141		0						
1,9	— 0,067		— 1,412							

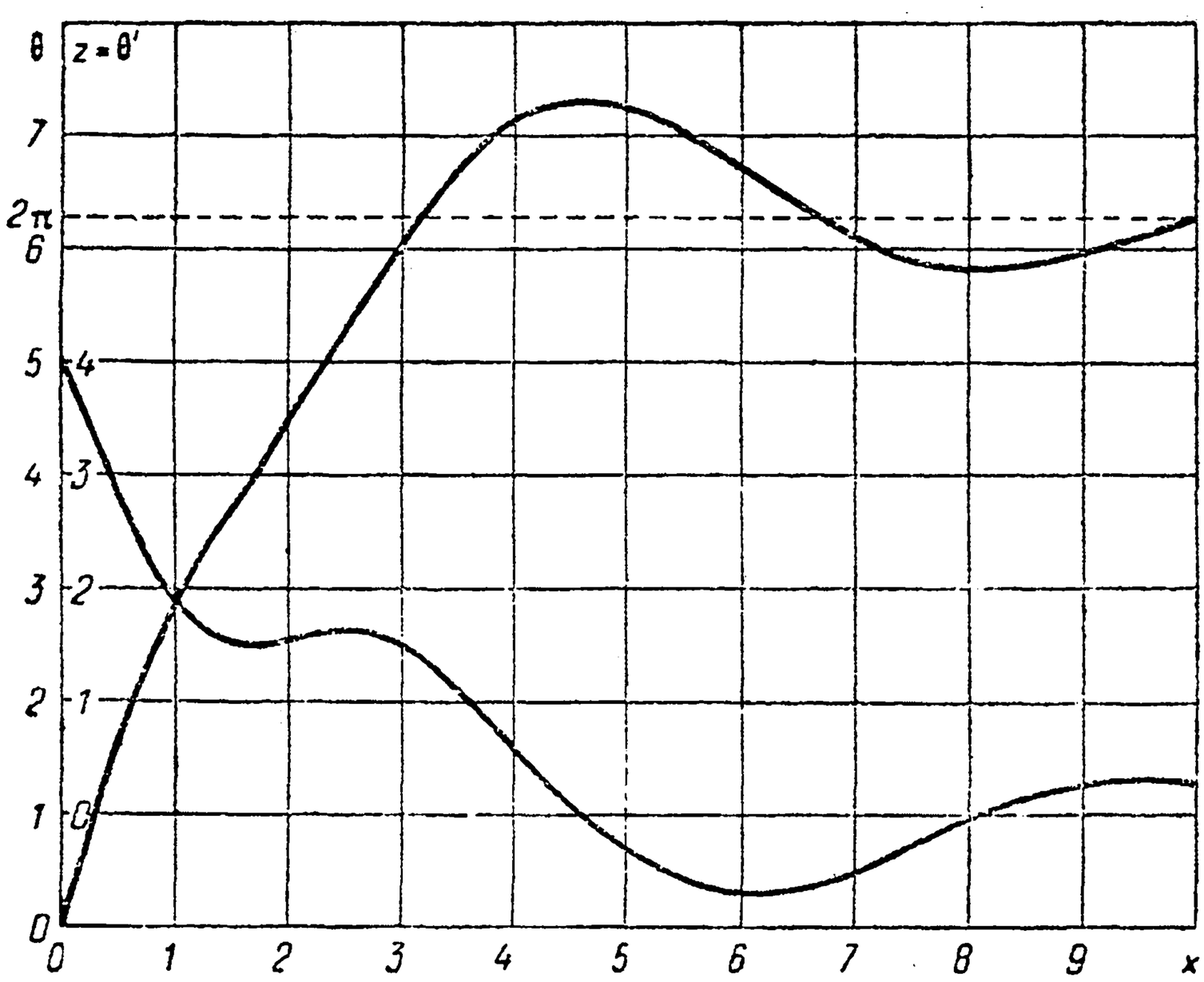
Так как при $x = 1{,}8$ и $x = 1{,}9$ имеем соответственно $\theta = 0{,}074$ и $\theta = -0{,}067$, то по методу хорд [152, (54)] находим, что обращение θ в нуль имеет место при

$$x \doteq 1{,}8 + \frac{0{,}074 \cdot 0{,}1}{0{,}074 + 0{,}067} \doteq 1{,}853,$$

так что четверть периода колебаний маятника оказывается равной

$$\frac{1}{4}\tau = 1{,}853\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

[Как мы указывали, верные четыре знака будут: 1,854.]



Черт. 545.

3. В качестве последнего примера рассмотрим снова уравнение

$$\theta'' + 0{,}5\,\theta' + \sin\theta = 0$$

с начальными условиями:

$$\theta = 0, \quad \theta' = 4 \quad \text{при } x = 0.$$

Как мы видели [295, 3; 298, 4], к нему — при частных предположениях — приводится задача о колебании маятника в сопротивляющейся среде.

Переходя, как обычно, к системе

$$\theta' = z, \quad z' = -0{,}5\,z - \sin\theta,$$

сначала возьмем $h = 0{,}1$. Убедившись в незначительной величине второй разности, можно было бы попытаться обойтись одной первой; предоставляем эту попытку читателю. Начиная с $x = 5$, мы увеличили промежуток h вдвое.

Значения θ_1, $z_1 = \theta_1'$ и θ_2, $z_2 = \theta_2'$, отвечающие $x = 0{,}1$ и $x = 0{,}2$, мы нашли с помощью разложения (63), № 295, и другого, получающегося из него дифференцированием. Не трудно было бы (пусть это сделает читатель) применить и метод „последовательных приближений“.

Графики изменения θ и θ' в зависимости от x приведены на черт. 545.

x	θ	$\Delta\theta$	z	Δz	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$
0	0		4		0,400			— 0,200		
						— 0,021			— 0,027	
0,1	0,39		3,79		0,379		— 0,003	— 0,227		0,008
						— 0,024			— 0,019	
0,2	0,76		3,55		0,355		— 0,001	— 0,246		0,011
		0,34		— 0,25		— 0,025			— 0,008	
0,3	1,10		3,30		0,330		0	— 0,254		0,011
		0,32		— 0,25		— 0,025			+ 0,003	
0,4	1,42		3,05		0,305		+ 0,001	— 0,251		0,009
		0,29		— 0,24		— 0,024			0,012	
0,5	1,71		2,81		0,281		0,001	— 0,239		0,006
		0,27		— 0,23		— 0,023			0,018	
0,6	1,98		2,58		0,258		0,002	— 0,221		0,005
		0,25		— 0,21		— 0,021			0,023	
0,7	2,23		2,37		0,237		0,003	— 0,198		0,003
		0,23		— 0,18		— 0,018			0,026	
0,8	2,46		2,19		0,219		0,002	— 0,172		— 0,001
		0,21		— 0,16		— 0,016			0,025	
0,9	2,67		2,03		0,203		0,003	— 0,147		0,000
		0,20		— 0,13		— 0,013			0,025	
1,0	2,87		1,90		0,190		0,002	— 0,122		— 0,002
		0,18		— 0,11		— 0,011			0,023	
1,1	3,05		1,79		0,179		0,002	— 0,099		— 0,001
		0,17		— 0,09		— 0,009			0,022	
1,2	3,22		1,70		0,170		0,002	— 0,077		— 0,002
		0,17		— 0,07		— 0,007			0,020	
1,3	3,39		1,63		0,163		0,002	— 0,057		— 0,002
		0,16		— 0;05		— 0,005			0,018	
1,4	3,55		1,58		0,158		0,002	— 0,039		— 0,003
		0,16		— 0,03		— 0,003			0,015	
1,5	3,71		1,55		0,155		0,001	— 0,024		— 0,002
		0,15		— 0,02		— 0,002			0,013	
1,6	3,86		1,53		0,153		0,001	— 0,011		— 0,002
		0,15		— 0,01		— 0,001			0,011	
1,7	4,01		1,52		0,152		0,002	+ 0,001		— 0,002
		0,15		+ 0,01		+ 0,001			0,008	
1,8	4,16		1,53		0,153		0	0,009		— 0,002
		0,16		+ 0,01		0,001			0,006	
1,9	4,32		1,54		0,154		0,001	0,015		— 0,002
		0,15		0,02		0,002			0,004	
2,0	4,47		1,56		0,156		0	0,019		— 0,001
		0,16		0,02		0,002			0,003	
2,1	4,63		1,58		0,158		0	0,021		— 0,004
		0,16		0,02		0,002			— 0,001	
2,2	4,79		1,60		0,160		0	0,020		— 0,003
		0,16		0,02		0,002			— 0,004	
2,3	4,95		1,62		0,162		— 0,001	0,016		— 0,002
		0,16		0,01		0,001			— 0,006	
2,4	5,11		1,63		0,163		0	0,010		— 0,001
		0,16		0,01		0,001			— 0,007	
2,5	5,27		1,64		0,164		— 0,001	0,003		— 0,003
		0,16		0		0			— 0,010	
2,6	5,43		1,64		0,164		— 0,001	— 0,007		0
		0,16		— 0,01		— 0,001			— 0,010	
2,7	5,59		1,63		0,163			— 0,017		

Продолжение

x	θ	$\Delta\theta$	z	Δz	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$
2,7	5,59		1,63		0,163	— 0,001			— 0,010	
		0,16		— 0,02		— 0,002	— 0,001	— 0,017		— 0,003
2,8	5,75		1,61		0,161		— 0,002	— 0,030	— 0,013	
		0,16		— 0,04		— 0,004				+ 0,001
2,9	5,91		1,57		0,157		— 0,001	— 0,042	— 0,012	
		0,15		— 0,05		— 0,005				0
3,0	6,06		1,52		0,152		— 0,001	— 0,054	— 0,012	
		0,15		— 0,06		— 0,006				0
3,1	6,21		1,46		0,146		— 0,001	— 0,066	— 0,012	
		0,14		— 0,07		— 0,007				0,001
3,2	6,35		1,39		0,139		— 0,001	— 0,077	— 0,011	
		0,13		— 0,08		— 0,008				0,002
3,3	6,48		1,31		0,131		— 0,001	— 0,086	— 0,009	
		0,13		— 0,09		— 0,009				0,001
3,4	6,61		1,22		0,122		— 0,001	— 0,094	— 0,008	
		0,12		— 0,10		— 0,010				0,002
3,5	6,73		1,12		0,112		0	— 0,100	— 0,006	
		0,11		— 0,10		— 0,010				0,002
3,6	6,84		1,02		0,102		— 0,001	— 0,104	— 0,004	
		0,10		— 0,11		— 0,011				0,001
3,7	6,94		0,91		0,091		0	— 0,107	— 0,003	
		0,08		— 0,11		— 0,011				0,003
3,8	7,02		0,80		0,080		0	— 0,107	0	
		0,07		— 0,11		— 0,011				0
3,9	7,09		0,69		0,069		0	— 0,107	0	
		0,06		— 0,11		— 0,011				0,001
4,0	7,15		0,58		0,058		+ 0,001	— 0,106	+ 0,001	
		0,05		— 0,10		— 0,010				0,001
4,1	7,20		0,48		0,048		0	— 0,104	0,002	
		0,04		— 0,10		— 0,010				0,001
4,2	7,24		0,38		0,038		0	— 0,101	0,003	
		0,03		— 0,10		— 0,010				0
4,3	7,27		0,28		0,028		0	— 0,098	0,003	
		0,02		— 0,10		— 0,010				0,001
4,4	7,29		0,18		0,018		+ 0,001	— 0,094	0,004	
		0,01		— 0,09		— 0,009				0
4,5	7,30		0,09		0,009		0	— 0,090	0,004	
		— 0,01		— 0,09		— 0,009				0
4,6	7,31		0		0		+ 0,001	— 0,086	0,004	
		0		— 0,08		— 0,008				0
4,7	7,31		— 0,08		— 0,008		0	— 0,082	0,005	
		— 0,01		— 0,08		— 0,008				0,001
4,8	7,30		— 0,16		— 0,016		+ 0,001	— 0,077	0,005	
		— 0,02		— 0,07		— 0,007				0
4,9	7,28		— 0,23		— 0,023			— 0,072		
		— 0,03		— 0,07						
5,0	7,25		— 0,30							

Продолжение

x	θ	$\Delta\theta$	z	Δz	η	$\Delta\eta$	$\Delta^2\eta$	ζ	$\Delta\zeta$	$\Delta^2\zeta$
4,6	7,31		0		0			— 0,171		
						— 0,032			0,016	
4,8	7,30		— 0,16		— 0,032		0,004	— 0,155		0,003
						— 0,028			0,019	
5,0	7,25		— 0,30		— 0,060		0,004	— 0,136		0,002
		— 0,07		— 0,12		— 0,024			0,021	
5,2	7,18		— 0,42		— 0,084		0,004	— 0,115		0,001
		— 0,09		— 0,10		— 0,020			0,022	
5,4	7,09		— 0,52		— 0,104		0,004	— 0,093		0,003
		— 0,11		— 0,08		— 0,016			0,025	
5,6	6,98		— 0,60		— 0,120		0,006	— 0,068		— 0,001
		— 0,13		— 0,05		— 0,010			0,024	
5,8	6,85		— 0,65		— 0,130		0,004	— 0,044		0
		— 0,13		— 0,03		— 0,006			0,024	
6,0	6,72		— 0,68		— 0,136		0,004	— 0,017		0
		— 0,13		— 0,01		— 0,002			0,024	
6,2	6,59		— 0,69		— 0,138		0,006	+ 0,007		+ 0,001
		— 0,14		+ 0,02		+ 0,004			0,025	
6,4	6,45		— 0,67		— 0,134		0,004	0,302		— 0,002
		— 0,13		0,04		0,008			0,023	
6,6	6,32		— 0,63		— 0,126		0,002	0,055		— 0,004
		— 0,12		0,07		0,010			0,019	
6,8	6,20		— 0,58		— 0,116		0,006	0,074		— 0,005
		— 0,11		0,08		0,016			0,014	
7,0	6,09		— 0,50		— 0,100		0,002	0,088		— 0,006
		— 0,09		0,09		0,018			0,008	
7,2	6,00		— 0,41		— 0,082		0,002	0,096		0,005
		— 0,07		+ 0,10		0,020			0,003	
7,4	5,93		— 0,31		— 0,062		0	0,099		— 0,003
		— 0,05		0,10		0,020			0	
7,6	5,88		— 0,21		— 0,042		0	0,099		— 0,007
		— 0,02		0,10		0,020			— 0,007	
7,8	5,86		— 0,11		— 0,022		— 0,002	0,092		+ 0,001
		— 0,01		0,09		0,018			— 0,006	
8,0	5,85		— 0,02		— 0,004		— 0,002	0,086		— 0,002
		0		0,08		0,016			— 0,008	
8,2	5,85		+ 0,06		+ 0,012		— 0,002	0,078		— 0,004
		0,02		0,07		0,014			— 0,012	
8,4	5,87		0,13		0,026		— 0,002	0,066		+ 0,002
		0,03		0,06		0,012			— 0,010	
8,6	5,90		0,19		0,038		— 0,002	0,056		— 0,004
		0,04		0,05		0,010			— 0,014	
8,8	5,94		0,24		0,048		— 0,004	0,042		+ 0,004
		0,05		0,03		0,006			— 0,010	
9,0	5,99		0,27		0,054		0	0,031		— 0,003
		0,05		0,03		0,006			— 0,013	
9,2	6,04		0,30		0,060		— 0,004	0,018		0
		0,06		0,01		0,002			— 0,013	
9,4	6,10		0,31		0,062		— 0,002	0,005		0,001
		0,06		0		0			— 0,012	
9,6	6,16		0,31		0,062		— 0,002	— 0,007		0,001
		0,06		— 0,01		— 0,002			— 0,011	
9,8	6,22		0,30		0,060			— 0,018		
		0,06		— 0,02						
10,0	6,28		0,28							

Этим мы заканчиваем изложение вопроса о приближенном интегрировании дифференциальных уравнений (и систем их). Итак, когда исследование технической задачи приводит к дифференциальному уравнению, то, даже если нельзя найти точного решения в элементарных функциях или хотя бы в квадратурах, однако всегда возможно найти его приближенное решение с любой нужной для практики степенью точности! Это — факт большой практической и принципиальной важности.

304. Дифференциальные уравнения в частных производных. Колебания стержней. В предшествующей и в настоящей главах мы до сих пор рассматривали лишь такие дифференциальные уравнения, в которых участвовали искомые функции от *одной* независимой переменной, вместе с их производными. Подобные уравнения носят название *обыкновенных дифференциальных уравнений*; они наичаще встречаются и являются простейшими.

Однако иной раз в техническом вопросе оказывается искомой функция, скажем, y, от *двух* независимых переменных, x и t:

$$y = f(x, t),$$

причем условия вопроса дают для ее определения некоторое соотношение, связывающее не только величины x, t, y, но и *частные производные*

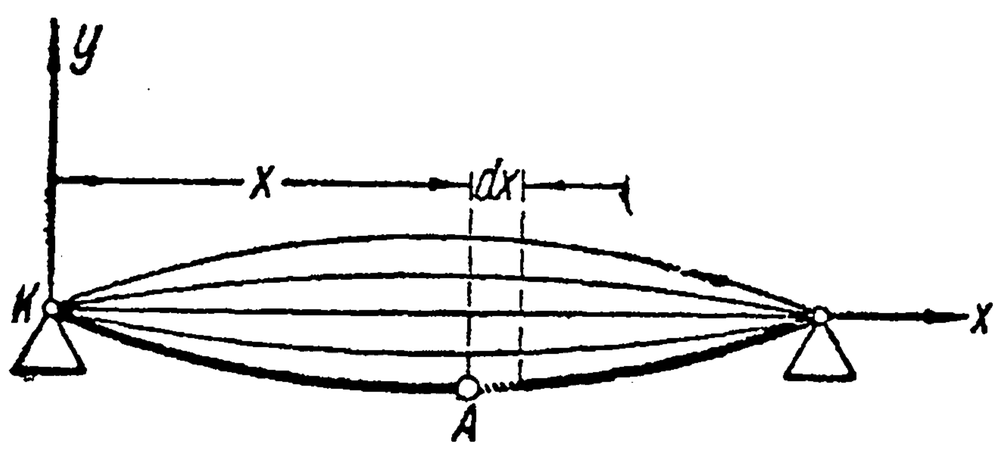
$$\frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial t}, \ldots,$$

т. е. соотношение вида:

$$F\left(x, t, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots\right) = 0.$$

Такое соотношение называется *дифференциальным уравнением в частных производных*; порядок его определяется порядком наивысшей встречающейся в нем производной. Разумеется, число независимых переменных может оказаться и больше двух; точно также можно рассматривать и системы уравнений в частных производных, определяющих несколько искомых функций.

Для техники наибольшую важность представляют линейные уравнения в частных производных второго или высшего порядка. Не имея возможности изложить здесь вопрос об их интегрировании сколько-нибудь полно, мы ограничимся тем, что на двух-трех примерах дадим читателю лишь общее представление о применяющихся здесь методах.



Черт. 546.

Пусть имеем призматический стержень (балку), опертый по концам (черт. 546). Допустим, что в некоторый момент $t = 0$ он был выведен из положения равновесия и точкам его сообщены некоторые скорости. Тогда стержень придет в колебание, характер которого и надлежит определить. Для простоты мы предположим, что речь идет лишь о поперечных колебаниях точек стержня (так что и начальные смещения их и начальные скорости имеют вертикальное направление).

Положение точки на стержне определяется ее абсциссой x; пусть y будет ее вертикальное смещение в момент времени t. Очевидно, y зависит и от x, и от t, и весь вопрос сводится к тому, чтобы определить эту функцию от двух переменных.

Обозначим через γ вес погонной единицы длины стержня; тогда масса элемента стержня длины dx (примыкающего к точке с абсциссой x) будет $\frac{\gamma}{g}\,dx$. По

закону движения Ньютона, сила, действующая на этот элемент, должна быть равна

$$\frac{\gamma}{g}\cdot dx\cdot\frac{d^2y}{dt^2}. \tag{99}$$

Откуда же взяться этой силе? Очевидно, это будет сила упругого сопротивления стержня его изгибу. Мы видели, что при наличии непрерывно распределенной нагрузки интенсивности q имеет место формула [276, (71)]

$$\frac{d^2M}{dx^2}=-q$$

или, так как изгибающий момент равен [272, (58)]

$$M=EI\cdot\frac{d^2y}{dx^2},$$

то окончательно (если нагрузку считать положительной *вниз!*)

$$q=-EI\cdot\frac{d^4y}{dx^4}.$$

Очевидно, и наоборот, такова будет и непрерывно распределенная по стержню упругая реакция (если ее считать положительной *вверх!*). Эта формула выражает названную реакцию независимо от причин, вызвавших изгиб стержня. Следовательно, она приложима и в нашем случае, так что на элемент dx действует сила

$$-EI\cdot\frac{d^4y}{dx^4}\cdot dx. \tag{100}$$

Приравниваем выражения (99) и (100), сокращая попутно на dx. При этом, так как производные по x берутся *при постоянном* t, а производные по t — *при постоянном* x, мы подчеркиваем это обстоятельство привычными для *частных* производных обозначениями с помощью *круглых* ∂:

$$\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=-\frac{EIg}{\gamma}\cdot\frac{\partial^4y}{\partial x^4}.$$

Если для простоты положить

$$a^2=\frac{EIg}{\gamma}, \tag{101}$$

то уравнение, к которому привелась наша задача, окончательно напишется в форме:

$$\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=-a^2\cdot\frac{\partial^4y}{\partial x^4}. \tag{102}$$

Это — уравнение в частных производных четвертого порядка.

Ищем решение его, в виде функции

$$y=f(x,t),$$

которая удовлетворяет, кроме уравнения, ряду условий, налагаемых нашей задачей. Прежде всего, так как на концах стержень оперт, то там и прогиб y, и изгибающий момент $M=EI\cdot\frac{\partial^2y}{\partial x^2}$ равны нулю, так что

$$y=0,\ \frac{\partial^2y}{\partial x^2}=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=l, \tag{103}$$

каково бы ни было $t\geqslant 0$. Это — так называемые *предельные условия*. Затем, должны быть заданы смещения y и вертикальные скорости $\frac{\partial y}{\partial t}$ в начальный момент $t=0$ *для всех точек стержня*; так как эти смещения и скорости могут быть

различными для различных точек, то они и должны быть заданы, как функции от абсциссы x переменной точки:

$$y=\varphi(x),\quad \frac{\partial y}{\partial t}=\psi(x)\quad \text{при } t=0 \tag{104}$$

для всех значений x между 0 и l. Это — *начальные условия.*

Мы обращаем внимание читателя на то, что здесь предельные и начальные условия должны выполняться совместно (раньше мы имели дело либо с теми, либо с другими!). Кроме того, начальные условия имеют необычный вид — в них фигурируют произвольно заданные функции от одной из независимых переменных, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (в то время как раньше произвольно задавались лишь отдельные значения искомой функции или ее производных!).

Попытаемся сначала удовлетворить уравнению (102) функцией y от x и t, представляющейся произведением двух функций X и T:

$$y=XT, \tag{105}$$

из которых первая зависит только от x, а вторая — только от t.*

Так как тогда

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=X\cdot T'',\quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=X^{(4)}\cdot T$$

(причем производные от X и T взяты по той единственной переменной, от которой соответственно зависит та или другая из этих функций), то уравнение (102) напишется так:

$$XT''=-a^2\cdot X^{(4)}\,T$$

или

$$-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''}{T}=\frac{X^{(4)}}{X}.$$

Замечательно, что левая часть этого равенства может зависеть только от t (и от x не зависит), в то время как правая может зависеть только от x (и от t не зависит)! Такое положение может иметь место лишь в том случае, если фактически обе части равенства не зависят ни от t, ни от x, т. е. сохраняют постоянную величину.

Обозначая, для удобства, эту постоянную величину через k^4, будем иметь

$$-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''}{T}=k^4,\qquad \frac{X^{(4)}}{X}=k^4,$$

так что для определения функции T (от независимой переменной t) получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$T''+a^2k^4\cdot T=0,$$

а для определения функции X (от независимой переменной x) — обыкновенное же дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$X^{(4)}-k^4\cdot X=0.$$

Оба уравнения — линейные, с постоянными коэффициентами, без последнего члена. Для первого из них, как мы хорошо знаем, общее решение будет:

$$T=C'\cdot\cos ak^2t+C''\cdot\sin ak^2t. \tag{106}$$

Встречалось нам [290, (7)] и уравнение, подобное второму. Мы видели [см. (8)], что общее выражение для X может быть написано так:

$$X=C_1\sin kx+C_2\cos kx+C_3\operatorname{sh}kx+C_4\operatorname{ch}kx. \tag{107}$$

---

* Несомненно, что такого рода функции, как

$$e^x\cdot\sin t,\quad \sin x\cdot\cos t \text{ и т. п.},$$

являются простейшими функциями от двух переменных. Мы и начинаем поисков решения в такой простейшей форме.

Произведение выражений (106) и (107) даст функцию от x и t, которая при любых значениях постоянных удовлетворяет уравнению (102); несмотря на свободу выбора постоянных, это все же будет лишь частное решение нашего уравнения.

Попытаемся теперь подобрать упомянутые постоянные так, чтобы удовлетворились и предельные условия (103). В виду состава функции $y = XT$, эти условия ничего не требуют от функции T и целиком перекладываются на функцию X:

$$X = 0,\ X'' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l.$$

Заметив, что

$$X'' = -k^2 C_1 \cdot \sin kx - k^2 C_2 \cdot \cos kx + k^2 C_3 \cdot \operatorname{sh} kx + k^2 C_4 \cdot \operatorname{ch} kx$$

и подставляя сюда и в (107) значение $x = 0$, получим

$$C_2 + C_4 = 0, \quad -C_2 + C_4 = 0,$$

откуда

$$C_2 = C_4 = 0.$$

Таким образом, теперь

$$X = C_1 \cdot \sin kx + C_3 \cdot \operatorname{sh} kx, \quad X'' = -k^2 C_1 \cdot \sin kx + k^2 C_3 \cdot \operatorname{sh} kx,$$

полагая здесь $x = l$, придем к равенствам

$$C_1 \cdot \sin kl + C_3 \cdot \operatorname{sh} kl = 0, \quad -C_1 \cdot \sin kl + C_3 \cdot \operatorname{sh} kl = 0,$$

из которых следует, что должно быть одновременно

$$C_1 \cdot \sin kl = 0, \quad C_3 \cdot \operatorname{sh} kl = 0.$$

Так как гиперболический синус не может быть нулем, если его аргумент не нуль, то второе условие выполнимо лишь при $C_3 = 0$. Иначе обстоит дело с первым условием. Оно, конечно, выполняется при $C_1 = 0$, но если мы и эту последнюю постоянную положим равной нулю, то X, а с ним и y просто сведется к нулю, что не интересно. Можно, однако, удовлетворить первому условию и при любом $C_1 \neq 0$, если

$$\sin kl = 0.$$

А для этого нужно, чтобы аргумент синуса был кратным π:

$$kl = n\pi,$$

где n — любое натуральное число. Отсюда определяется постоянная k, которая до сих пор оставалась произвольной:

$$k = k_n = \frac{n\pi}{l}. \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots) \qquad (108)$$

Итак, умножая $C_1 \sin kx$ на выражение (106) и обозначая $C_1 C'$ и $C_1 C''$ через A и B, получим частное решение нашего уравнения в виде

$$y = \sin kx \cdot (A \cos ak^2 t + B \sin ak^2 t),$$

где k определяется формулой (108), а A, B — произвольны. Это решение удовлетворяет и предельным условиям (103).

При каждом значении $k = k_n$ постоянные A и B можно выбирать независимо от их выбора при других значениях k; обозначим их значения, соответствующие $k = k_n$, через A_n и B_n. Таким образом, мы имеем, в сущности, целую последовательность частных решений

$$y_n = \sin k_n x \cdot (A_n \cos ak_n^2 t + B_n \sin ak_n^2 t),$$

которые удовлетворяют уравнению (102) и условиям (103).

Очевидно, то же справедливо и для суммы любого числа этих частных решений* и даже для суммы ряда, из них составленного:

---

* Это простое следствие линейности уравнения (102) и условий (103). Ср. заключительное замечание в № 283.

$$y = \sin k_1 x\,(A_1 \cos ak_1^2 t + B_1 \sin ak_1^2 t) + \sin k_2 x\,(A_2 \cos ak_2^2 t + B_2 \sin ak_2^2 t) + \cdots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x\,(A_n \cos ak_n^2 t + B_n \sin ak_n^2 t). \tag{108}$$

Попытаемся теперь подобрать коэффициенты A_n и B_n (которые пока оставались совершенно произвольными) с таким расчетом, чтобы выполнились и начальные условия (104). С этой целью продифференцируем функцию (108) по t:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x\,(-ak_n^2 \cdot A_n \sin ak_n^2 t + ak_n^2 \cdot B_n \cos ak_n^2 t) \tag{109}$$

и положим, как в (108), так и в (109), $t = 0$:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} ak_n^2 \cdot B_n \sin k_n x.$$

Таким образом, если хотим, чтобы выполнились условия (104), нужно определить коэффициенты A_n и B_n так, чтобы имели место разложения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} ak_n^2 \cdot B_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} = \psi(x) \qquad (0 < x < l).$$

Но мы уже [217, (78) — (81)] знаем, что для этого нужно положить, при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx$$

и

$$ak_n^2 \cdot B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

откуда легко найти и B_n.

При таком выборе коэффициентов выражение (108) дает полное решение нашей задачи!

Всматриваясь в выражение (108), мы видим, что колебание произвольной точки стержня как бы слагается из бесчисленного множества отдельных элементарных колебаний. Возьмем любое из них:

$$y_n = \sin k_n x \cdot (A_n \cos ak_n^2 t + B_n \sin ak_n^2 t),$$

что можно также представить и в виде:

$$y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \sin k_n x \cdot \sin (ak_n^2 \cdot t + \varphi_n). \tag{110}$$

Это есть простое *гармоническое колебание* с амплитудой

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2}\, |\sin k_n x|,$$

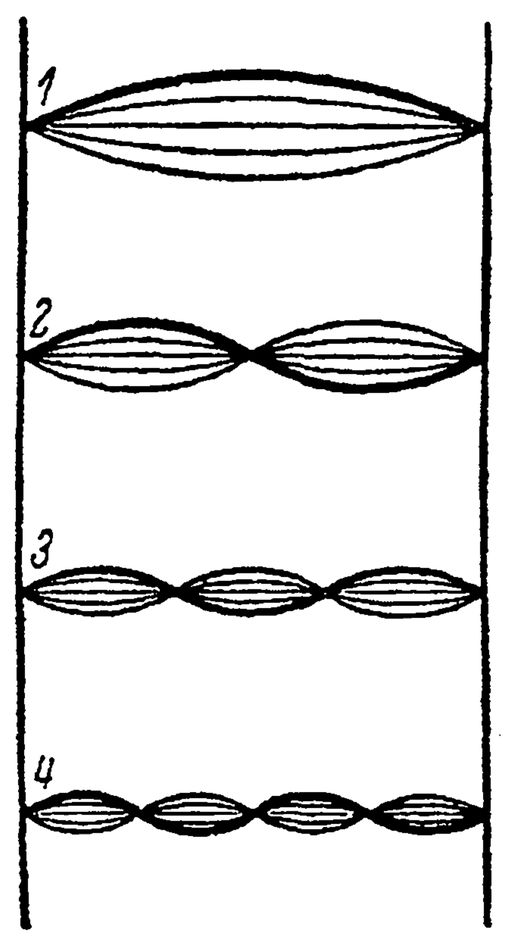
зависящей от x, т. е. от положения точки на стержне, и с частотой [см. (101) и (108)]

$$\omega_n = ak_n^2 = n^2 \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma}}, \tag{111}$$

одинаковой для всех точек стержня. Эти частоты носят название *частот свободных колебаний* стержня. [Если наш стержень представляет собою вращающийся цилиндрический вал, то, как и следовало ожидать, частоты (111) его свободных колебаний совпадают с его *критическими угловыми скоростями* (11), о которых шла речь в n⁰ **290**, 1. Мы имеем здесь одно из осуществлений явления *резонанса*; ср. **285**, 2].

Интересно отметить, что все точки стержня, участвующие в гармоническом колебании (110), в каждый данный момент находятся в одной и той же фазе; точнее говоря, так как $\sin k_n x$ может иметь и отрицательные значения, часть этих точек находится в одной фазе, а часть — в прямо противоположной. Картина явления ясна из черт. 547, где даны первые четыре гармоники. Таким образом, все точки стержня одновременно проходят через положения равновесия, через наибольшие удаления от этих положений, и т. д.

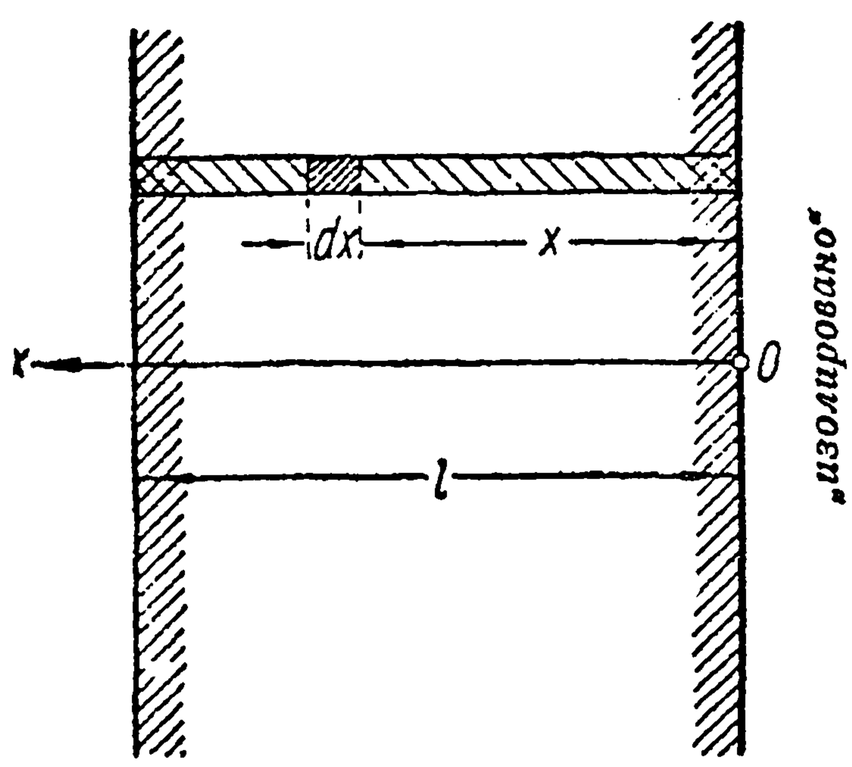
Такое колебательное движение называется *стоячей волной*. В связи с этим и самый метод, которым мы пользовались для решения данного уравнения (102), составляя искомую функцию из произведений вида (105), получил название *метода стоячих волн*. Он был предложен Фурье.



Черт. 547.

Для правильной ориентации читателя мы считаем необходимым настойчиво подчеркнуть, что мы умышленно остановились на такой задаче, которая приводит к необходимости пользоваться лишь уже известными читателю разложениями в ряд Фурье по тригонометрическим функциям целых кратных некоторой дуги. При других условиях закрепления концов стержня (напр., в случае, когда они наглухо заделаны), мы столкнулись бы с необходимостью прибегнуть к разложениям, хотя и по тригонометрическим функциям, но более сложного типа. Наконец, в других задачах, решаемых методом стоячих волн, приходится даже иметь дело с разложениями по функциям более сложной природы, нежели тригонометрические. Суть дела от этого, однако, не меняется.

305. Распространение тепла в плоской стене. В качестве второго примера мы остановимся на задаче о распространении тепла в толще плоской стены. Мы уже имели дело и раньше [**278**, 4, и **280**, 2] с тепловыми задачами, но там мы рассматривали *установившийся* тепловой процесс, при котором температура θ каждой точки тела не изменяется с течением времени; здесь же мы станем изучать еще не установившийся процесс, так что в нашем случае температура θ будет зависеть от времени t.



Черт. 548.

Мы рассмотрим случай плоской стены, ограниченной двумя параллельными плоскостями на расстоянии l одна от другой (черт. 548). Пусть одна из них, скажем, левая поддерживается при постоянной температуре $\theta = \theta_0$, в то время как другая оказывается *изолированной* в тепловом отношении, так что тепло через нее вовсе не проходит. Тогда, если не приближаться к краям стены, можно считать, что вдоль каждой плоскости, параллельной ограничивающим стену плоскостям, температура будет одна и та же. Иначе говоря, если провести ось Ox перпендикулярно ко всем этим плоскостям, то температура θ окажется зависящей, кроме времени t, еще лишь от абсциссы x точки, отсчитываемой вдоль этой оси:

$$\theta = f(x, t).$$

Выделим из стены призматический столбик с основанием dF и осью, параллельной оси Ox. Мы уже знаем [**278**, (83)], что через любое сечение этого столбика, определяемое абсциссой x, за бесконечно малый промежуток времени dt проходит количество тепла

$$q = -\lambda \cdot dF \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot dt, \tag{112}$$

где λ — коэффициент теплопроводности.*

Если взять элемент столбика между сечениями (x) и $(x + dx)$, то количество тепла, которое за промежуток dt пройдет через второе сечение, будет

$$q + dq = -\lambda \cdot dF \cdot \left(\frac{d\theta}{dx} + d\,\frac{d\theta}{dx}\right) \cdot dt,$$

так что задержится в этом элементе количество тепла

$$dq = \lambda \cdot dF \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \cdot dx \cdot dt. \tag{113}$$

Это тепло пойдет полностью на повышение температуры θ на величину $d\theta$. Если обозначить через c удельную теплоемкость вещества стены (кал./кг), а через γ — его плотность (кг/см^3), то должны иметь также

$$dq = c \cdot dF \cdot dx \cdot \gamma \cdot d\theta. \tag{114}$$

Приравнивая между собой два полученных для dq выражения (113) и (114), получим — по сокращении —

$$\lambda \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \cdot dt = c \cdot \gamma \cdot d\theta.$$

или

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2}.$$

Полагая

$$\frac{\lambda}{c \cdot \gamma} = a^2 \tag{115}$$

и вводя для частных производных обозначения с помощью круглых ∂, окончательно придем к такому дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}. \tag{116}$$

Требование, чтобы (начиная с момента $t = 0$) температура точек плоскости $x = l$ была равна θ_0:

$$\theta = \theta_0 \quad \text{при} \quad x = l \tag{117}$$

даст нам одно *предельное условие*. Другое мы получим, исходя из предположения, что плоскость $x = 0$ изолирована в тепловом отношении; так как через нее тепло вовсе не проходит, то из формулы (112) усматриваем, что необходимо

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{118}$$

Для того чтобы задача была вполне определенной, нужно еще, чтобы было задано начальное распределение температур в толще стены:

$$\theta = \varphi(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{119}$$

Мы несколько упростим условие (117), если введем, вместо θ новую искомую функцию u, полагая

$$\theta = \theta_0 + u, \quad u = \theta - \theta_0.$$

---

* Мы будем здесь измерять теплоту в (больших) калориях, длины — в см, температуру — в °C, время — в секундах; тогда размерность коэффициента λ выразится так:

$$\frac{\text{Кал.}}{\text{см} \cdot {}^\circ\text{C} \cdot \text{сек.}}.$$

Так как все производные обеих функций θ и u соответственно равны, то u должна удовлетворять уравнению, аналогичному (116):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{116 a}$$

при предельных условиях:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = l \tag{117 a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{118 a}$$

и начальном условии:

$$u = \varphi(x) - \theta_0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{119 a}$$

Применим и здесь метод стоячих волн, т. е. станем искать решение уравнения (116 a) в форме

$$u = TX,$$

где T зависит только от t, а X — только от x. Означая, как и выше, штрихами производные для T — по t, а для X — по x, будем иметь

$$T'X = a^2 TX''$$

или

$$\frac{T'}{a^2 \cdot T} = \frac{X''}{X}.$$

Так как это отношение на деле не может зависеть ни от t (ибо правая часть равенства не зависит от t), ни от x (ибо левая часть от него не зависит), т. е. является постоянным, то мы и положим его равным $-k^2$, так что

$$\frac{T'}{a^2 \cdot T} = -k^2, \quad \frac{X''}{X} = -k^2,$$

или

$$\frac{T'}{T} = -a^2 k^2, \quad X'' + k^2 X = 0.$$

Полученное для определения T уравнение первого порядка дает нам:

$$T = Ce^{-a^2 k^2 t}.$$

Функция же X определится из линейного уравнения второго порядка:

$$X = C_1 \cdot \cos kx + C_2 \cdot \sin kx.$$

Полагая для простоты $CC_1 = A$, $CC_2 = B$, получим окончательно такое частное решение нашего уравнения (116 a):

$$u = e^{-a^2 k^2 t} (A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx).$$

При этом, очевидно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-a^2 k^2 t} (-Ak \cdot \sin kx + Bk \cdot \cos kx).$$

Если положить здесь $x = 0$, то получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Bk \cdot e^{-a^2 k^2 t}.$$

Желая удовлетворить предельному условию (118 a), мы приходим к необходимости взять $B = 0$. Тогда наше решение принимает вид:

$$u = A \cdot e^{-a^2 k^2 t} \cdot \cos kx.$$

Обратимся теперь к условию (117 a); для того чтобы и оно выполнялось, нужно, чтобы было

$$\cos kl = 0,$$

т. е. чтобы kl равнялось нечетному кратному $\frac{\pi}{2}$:

$$kl = (2n-1)\frac{\pi}{2},$$

откуда и определяется постоянная k, могущая принимать любое из ряда значений:

$$k = k_n = (2n-1)\frac{\pi}{2l}. \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (120)$$

Таким образом мы получаем последовательность частных решений уравнения (116 a):

$$u_n = A_n \cdot e^{-a^2 k_n^2 t} \cdot \cos k_n x,$$

удовлетворяющих каждое обоим предельным условиям (117 a) и (118 a). Очевидно, и сумма их

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-a^2 k_n^2 t} \cdot \cos k_n x \qquad (121)$$

также удовлетворяет и дифференциальному уравнению, и названным условиям.

Теперь остается лишь удовлетворить начальному условию (119 a). Для того чтобы выражение (121) ему удовлетворяло, нужно подобрать коэффициенты A_n так, чтобы для всех значений x между 0 и l имело место разложение.

$$\varphi(x) - \theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l}$$

Не следует смешивать разложения этого типа с теми, о которых была речь в n° 217 [(78), (79)]: аргументом косинуса здесь является нечетное (а не любое целое) кратное дуги $\frac{\pi x}{2l}$ $\left(\text{а не } \frac{\pi x}{l}\right)$. Тем не менее, как можно показать, и такое разложение всегда возможно.

Мы не станем выводить общих формул для A_n и остановимся на частном предположении, что начальная температура внутренних точек стены была равна нулю:

$$\varphi(x) = 0.$$

Тогда придется иметь дело с разложением

$$-\theta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l}.$$

Для определения коэффициента A_m умножим обе части этого равенства на $\cos(2m-1)\frac{\pi x}{2l}$ и проинтегрируем обе части его в промежутке от 0 до l.

Слева мы получим:

$$\int_0^l (-\theta_0)\cos(2m-1)\frac{\pi x}{2l}\,dx = -\theta_0 \cdot \frac{2l}{(2m-1)\pi} \cdot \sin(2m-1)\frac{\pi x}{2l}\Bigg|_{x=0}^{x=l} =$$

$$= -\theta_0 \cdot \frac{2l}{(2m-1)\pi} \cdot \sin(2m-1)\frac{\pi}{2} = \pm\frac{2l\,\theta_0}{(2m-1)\pi},$$

причем знак $(+)$ отвечает четному m, а знак $(-)$ нечетному, так что результат можно записать и в виде:

$$(-1)^m \frac{2l\,\theta_0}{(2m-1)\pi}.$$

Справа же, если полученный ряд проинтегрировать почленно [207], придем к ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^l \cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l} \cdot \cos(2m-1)\frac{\pi x}{2l} \cdot dx. \tag{122}$$

Так как [ср. 155, (2)]

$$\cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l} \cdot \cos(2m-1)\frac{\pi x}{2l} = \frac{1}{2}\cos(m+n-1)\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2}\cos(m-n)\frac{\pi x}{l},$$

то при $n \neq m$,

$$\int_0^l \cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l} \cdot \cos(2m-1)\frac{\pi x}{2l}\, dx = \frac{l}{2(m+n-1)\pi}\sin(m+n-1)\frac{\pi x}{l} +$$

$$+ \frac{l}{2(m-n)\pi}\sin(m-n)\frac{\pi x}{l}\Bigg|_{x=0}^{x=l} = 0,$$

в то время как при $n = m$

$$\int_0^l \cos^2(2m-1)\frac{\pi x}{2l}\, dx = \frac{l}{2(2m-1)\pi}\sin(2m-1)\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{2}x\Bigg|_{x=0}^{x=l} = \frac{l}{2}.$$

Ясно, что в ряде (122) все члены, кроме m-го, будут нулями, а m-ый будет равен $A_m \cdot \frac{l}{2}$. Таким образом, имеем:

$$(-1)^m \frac{2l\theta_0}{(2m-1)\pi} = A_m \cdot \frac{l}{2},$$

откуда

$$A_m = (-1)^m \frac{4}{\pi} \cdot \theta_0 \cdot \frac{1}{2m-1} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

Подставляя найденные значения A_m в разложение (121) и возвращаясь к неизвестной функции θ, окончательно получим:

$$\theta = \theta_0 + \frac{4\theta_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot e^{-a^2k_n^2 t} \cdot \cos(2n-1)\frac{\pi x}{2l}. \tag{123}$$

Так как показательные множители очень быстро убывают, даже при небольших значениях t, то при вычислении по этой формуле фактически используются лишь немногие ее члены.

На черт. 549 изображены графики зависимости θ от x при различных значениях $t = \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5, 10, 20, 60$ сек., для пластины из чугуна в $l = 5$ см толщины, принимая $\theta_0 = 300°$ и

$$\gamma = 0{,}0072\ \frac{\text{кг}}{\text{см}^3}, \quad c = 0{,}13\ \frac{\text{Кал.}}{\text{кг.°C}}, \quad \lambda = 0{,}00013\ \frac{\text{Кал.}}{\text{см} \cdot \text{°C} \cdot \text{сек.}},$$

так что [см. (115)]

$$a^2 = 0{,}139.$$

Любопытно отметить, что те же графики могут служить, в известном смысле, и при других данных. Пусть, напр., имеем стену из литого железа толщиной в $l = 10$ см, причем

$$\gamma = 0{,}0078\ \frac{\text{кг}}{\text{см}^3},\quad c = 0{,}114\ \frac{\text{Кал.}}{\text{кг.}^\circ\text{C}},\quad \lambda = 0{,}000155\ \frac{\text{Кал.}}{\text{см.}\cdot{}^\circ\text{C}\cdot\text{сек}}$$

и [см. (115)]

$$a^2 = 0{,}174.$$

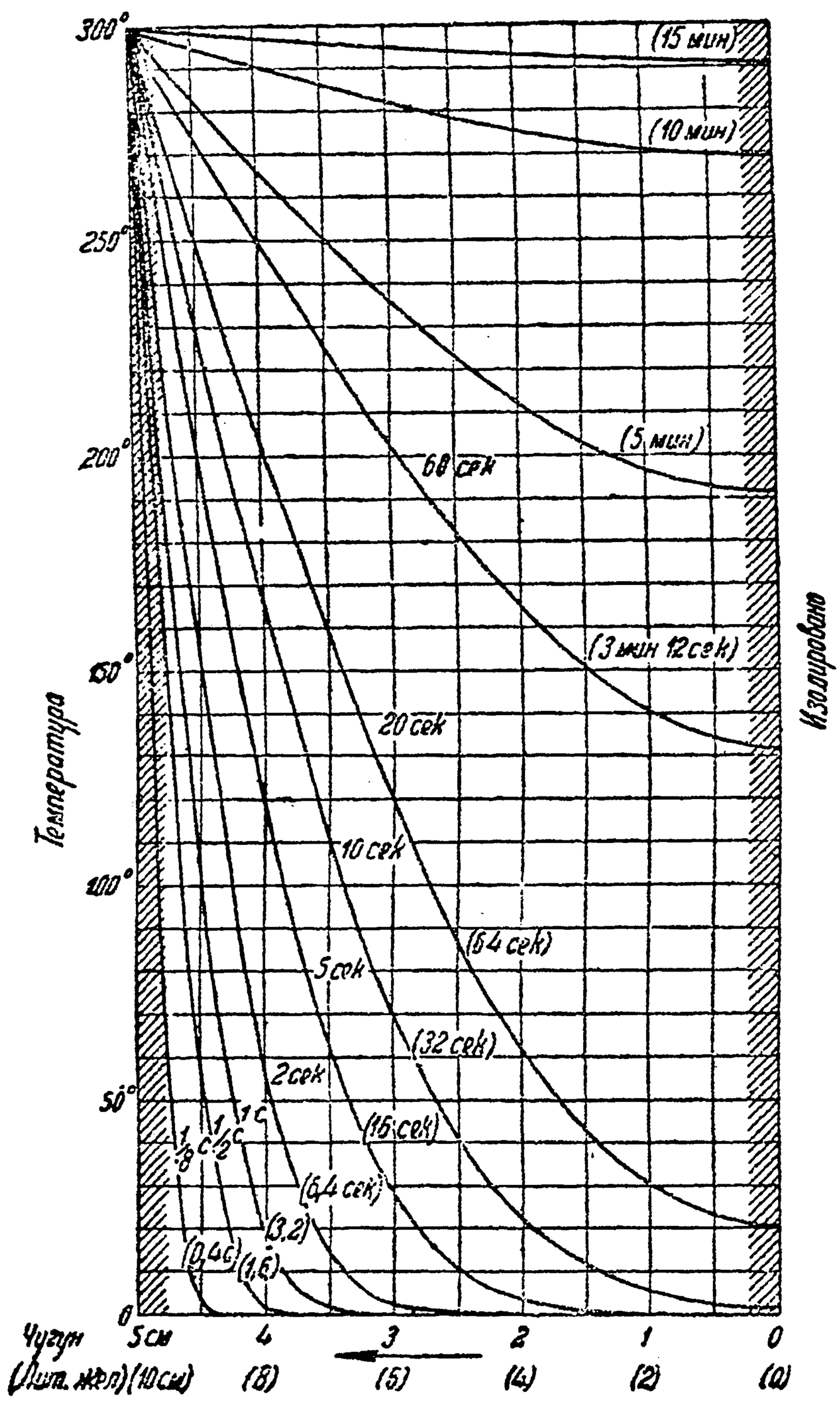
Если одновременно с удвоением l брать и значения x вдвое больше прежних (что практически сведется к изменению горизонтального масштаба), то аргументы косинуса останутся неизменными. Обращаясь к показателям, видим, что каждое k_n [см. (120)] уменьшится вдвое, если учесть еще изменение a^2, то в общем коэффициент при t уменьшится в

$$\frac{0{,}139\cdot 4}{0{,}174} = 3{,}2$$

раза; таким образом, достаточно только взять значения t во столько же раз большими прежних, чтобы и показатели остались неизменными, и в результате получились бы те же значения θ, что и прежде!

На чертеже новые значения x и t показаны в скобках.

Как и в предыдущей задаче, здесь также следует упомянуть, что нами были выбраны именно такие условия на границах, чтобы не выйти из круга сведений, имеющихся у читателей.



Черт. 549.

306. Случай бесконечно толстой стены. Если „стена" очень большой толщины, то ее практичнее (в смысле упрощения выкладок) принять за „бесконечно толстую". Для этого случая ($l = \infty$) сохраняется лишь одно *предельное условие*, относящееся к той ограничивающей стену плоскости, которая поддерживается при постоянной температуре; в этой именно плоскости возьмем на этот раз начало O оси Ox, так что должно быть:

$$\theta = \theta_0 \quad \text{при} \quad x = 0. \tag{124}$$

Для $x = \infty$ никакого условия не ставим. *Начальное условие* сразу берем в частной форме:

$$\theta = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \ (\text{для всех } x > 0). \tag{125}$$

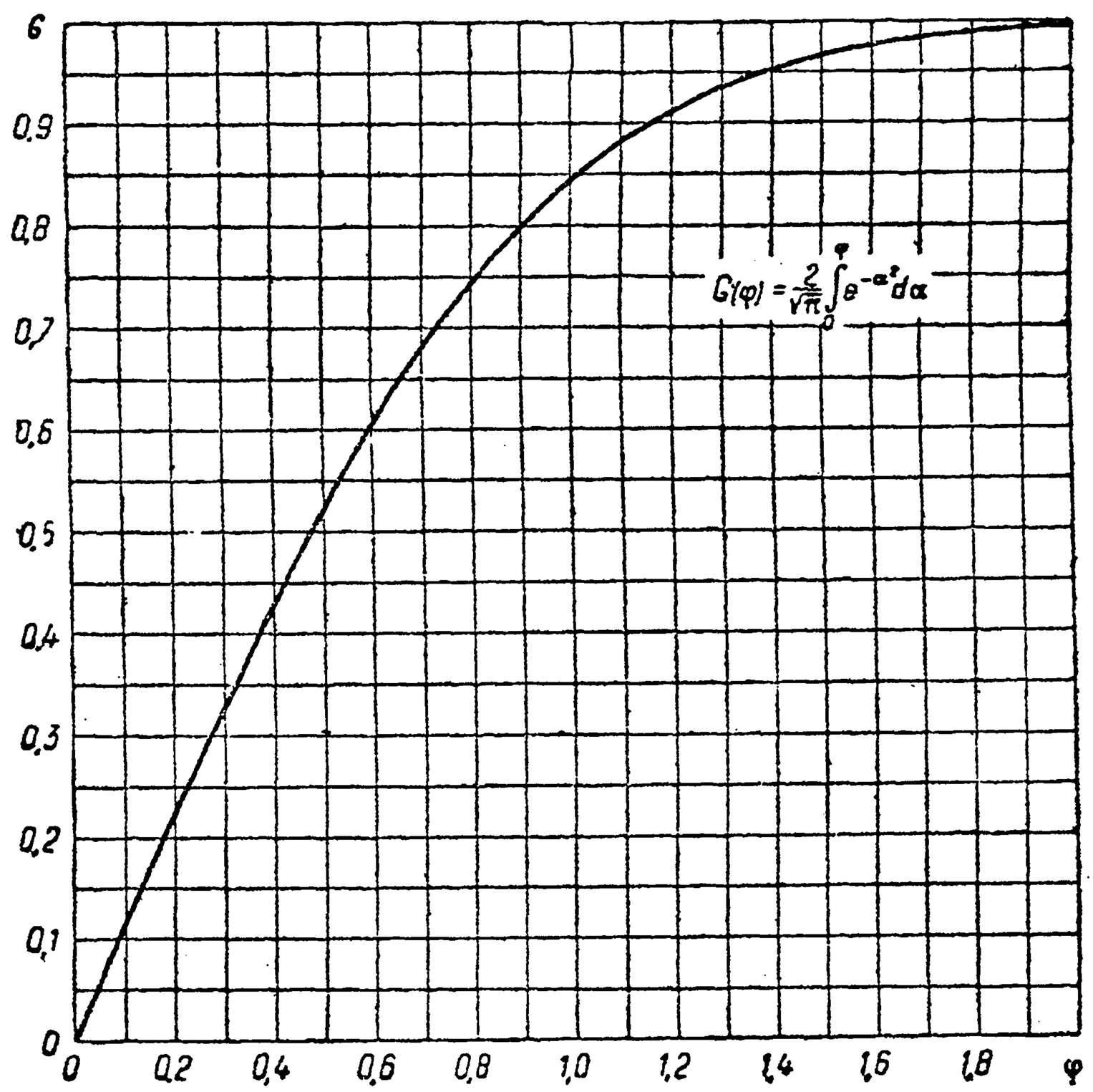
Полученное в предыдущем п⁰ решение здесь никак не может быть использовано. Здесь приходится искать решение в совсем другой форме — в форме интеграла. Мы ограничимся тем, что сразу укажем решение; оно имеет вид:

$$\theta = \theta_0 \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varphi} e^{-\alpha^2} d\alpha\right), \tag{126}$$

если под φ разуметь выражение:

$$\varphi = \frac{x}{2a\sqrt{t}}. \tag{127}$$

Не трудно проверить, что определенная таким образом „сложная" функция от x и t, действительно, удовлетворяет всем требованиям.



Черт. 550.

Прежде всего, дифференцируя θ, как сложную функцию, получим:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\theta_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\varphi^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\theta_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{\theta_0}{a\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\theta_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2a\sqrt{t^3}} = \frac{\theta_0 x}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{t^3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

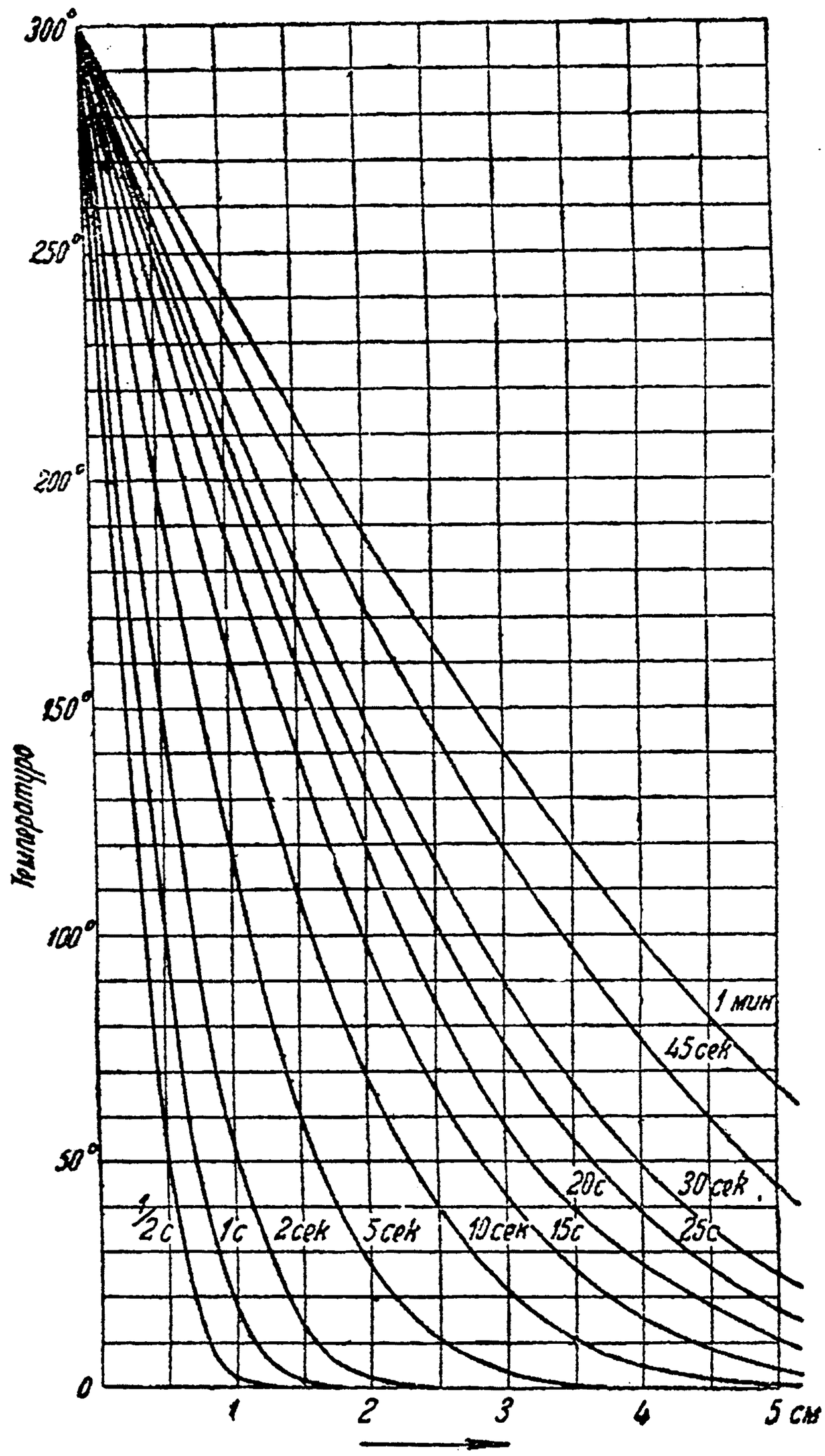
Если первую производную еще раз продифференцировать по x, то найдем:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = -\frac{\theta_0}{a\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \cdot -\frac{x}{2a^2 t} = \frac{\theta_0 x}{2a^3\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{t^3}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

и сразу видно, что дифференциальное уравнение (116) удовлетворено.

Затем, при $x = 0$, очевидно, $\varphi = 0$, так что $\theta = \theta_0$ при каждом $t > 0$, т. е. удовлетворено и условие (124). Наконец, вспомним, что нами было вычислено [253, (74)] значение интеграла:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$



Черт. 551.

Поэтому, если положить $t = 0$, то $\varphi = \infty$, при любом $x > 0$, и θ обращается в 0, т. е. и условие (125) выполнено.

Так как для интеграла

$$G(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varphi e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

который играет важную роль в теории вероятностей и в ряде связанных с нею вопросов (напр., в теории стрельбы), составлены обширные таблицы, то вычисления по формуле (126) не вызывают затруднений. На черт. 550 приведен график этой вспомогательной функции $G(\varphi)$.

Для примера решим такую задачу: как глубоко под землей должна быть расположена верхушка резервуара с огнеопасной жидкостью для того, чтобы при пожаре на поверхности, который продолжается 24 часа и при котором температура доходит до 1200° С, температура внутри резервуара не превысила 50° С.

Полагая в (126) $\theta_0 = 1200$, а $\theta = 50$, находим, что

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varphi e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0} = 0{,}958.$$

откуда, по графику,

$$\varphi = \frac{x}{2a\sqrt{t}} = 1{,}4,$$

так что

$$x^2 = 4a^2 t \cdot 1{,}4^2.$$

Принимая для сухой земли

$$\lambda = 0{,}12\ \frac{\text{Кал.}}{\text{м. °С} \cdot \text{час.}},\quad c = 0{,}2\ \frac{\text{Кал.}}{\text{кг. °С}},\quad \gamma = 2000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

будем иметь [см. (115)]

$$a^2 = \frac{0{,}12}{0{,}2 \cdot 2000} = 0{,}0003$$

и, так как в нашем случае $t = 24$ час., окончательно

$$x^2 = 4 \cdot 0{,}0003 \cdot 24 \cdot 1{,}4^2 = 0{,}057 \text{ и } x = 0{,}24 \text{ м} = 24 \text{ см}.$$

Для сравнения хода температуры в случае „бесконечно толстой" стенки и стенки конечной толщины вернемся к рассмотренному в предыдущем n⁰ примеру пластины из чугуна. Распределение температур в случае „бесконечно толстой" такой пластины представлено на черт. 551.

Заметим, что построение этих кривых облегчается благодаря следующему обстоятельству. Очевидно, что такое одновременное изменение x и t, при котором φ [см. (127)] не меняется, сохранит неизменной и температуру θ. Так будет, напр., при увеличении времени t вчетверо, если при этом и абсциссу x увеличить вдвое. Поэтому, скажем, кривая, отвечающая $t = 2$ сек., может быть получена из кривой для $t = \frac{1}{2}$ сек. путем простого увеличения вдвое абсцисс ее точек.

ДОПОЛНЕНИЕ I.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ.

307. Общие замечания об эмпирических формулах. В инженерной практике чаще приходится встречаться с *эмпирическими формулами*, воспроизводящими непосредственно результаты опытов или наблюдений, нежели с формулами теоретическими. Настоящую главу мы посвятим систематическому изучению интересного и важного вопроса о составлении эмпирической формулы по опытным данным, ограничиваясь случаем двух связанных зависимостью величин, скажем, x и y; даже по отношению к этому простейшему случаю мы остановимся лишь на наичаще встречающихся формах. Выше, в пп° 94 и 146, мы уже сталкивались с тем же вопросом; читателю предлагается возобновить в памяти содержание этих пп°.

Задача стоит так. Из опыта получаются значения величины y:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

отвечающие определенным значениям другой величины x:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

По этим данным требуется установить формулу:

$$y = f(x),$$

дающую аналитическое выражение функциональной зависимости между x и y. С точки зрения геометрической — по точкам, заданным их координатами

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

требуется установить уравнение кривой, через них проходящей.

Разумеется, мы не можем претендовать на то, чтобы формула точно воспроизводила результаты опыта или чтобы кривая точно проходила через заданные точки. В самом деле если поставить перед собою такую цель, то это прежде всего привело бы зачастую к такому усложнению самой формулы, что она сделалась бы практически непригодной. Самое же важное — это то, что наши измерения и наблюдения неизбежно сопряжены с случайными погрешностями. Извилистая кривая, проходящая через все „опытные точки", воспроизводила бы и эти погрешности, так что ее точность была бы иллюзорна. Проводя же плавную кривую, в непосредственной близости от этих точек (хотя и не непременно через них), мы с ее помощью — в известной мере — контролируем опытные данные или, как говорят, сглаживаем или выравниваем их.

При составлении эмпирической формулы инженер обыкновенно не ставит себе цели разгадать характер истинной зависимости между рассматриваемыми величинами (чем занимается исследователь-естествоиспытатель); у него гораздо более скромная задача — охватить сжатой формулой все многообразие численных результатов своих опытов так, чтобы по этой формуле не только можно было (хотя бы с приближением) восстановить эти результаты, но также и легко производить интерполирование, т. е. вычисление таких значений величины y, которые непосредственно опытом не были установлены. Такая замена таблицы численных результатов одной формулой становится особенно полезной в случае желания применить к этим результатам методы анализа [ср. ниже 314, зад. 2, замечание].

Точность, с которой эмпирическая формула воспроизводит опытные данные, особенно если эти данные многочисленны, до некоторой степени позволяет судить о том, насколько точно формула позволяет вычислять и ненаблюденные значения интересующей нас величины. Эта точность колеблется в довольно широких границах. Бывают случаи, когда она выражается долями процента; но бывает и наоборот, что опытные точки располагаются настолько неправильно, что погрешность эмпирической формулы, по сравнению с опытными данными, достигает 25%. Примером может служить, скажем, формула Тетмайера для ломающей силы при продольном изгибе [см. 310, зад. 5]. Несмотря на столь значительную погрешность, формула практически полезна, ибо все же позволяет легко прикинуть примерную величину ломающей силы, в то время как обычный в инженерной практике запас прочности с избытком уравновешивает возможную погрешность.

Относительно использования эмпирических формул заметим еще следующее. Можно с известным вероятием считать, что полученная по опытным данным эмпирическая формула дает возможность более или менее точно устанавливать значения y при условиях, близких к тем, при которых производились наблюдения. Всякое значительное удаление от этих условий делает уже сомнительным получаемый результат; в частности, требует большой осторожности так называемое *экстраполирование* с помощью эмпирической формулы, т. е. вычисление по ней значений y, отвечающих таким значениям x, которые далеко лежат („экстра" означает по-латыни „вне", „снаружи") от наблюденных его значений.

Мы рассмотрим в последующих nn⁰ случаи приближения к опытным данным с помощью формул вида:

$$y=a,\quad y=ax,\quad y=ax+b,\quad y=c\cdot x^{\alpha},\quad y=\beta\cdot\alpha^{x},$$

$$y=ax^2+bx+c,\quad y=ax^3+bx^2+cx+d,\quad y=\frac{ax+b}{x+c}.$$

Если задаться видом формулы, то задача сводится к определению ее коэффициентов; для решения этой задачи мы приведем несколько методов. Попутно будут даны указания относительно оснований для выбора того или иного вида формулы; эти указания подитожены в n⁰ 319.

Может случиться, что для одной и той же зависимости предлагается несколько формул. При выборе из них той, которая рекомендуется на практике, следует учесть не только точность вычисления, но и простоту формулы; какому из этих соображений отдать первенство — зависит от практической задачи. Бывает иногда, что в основе эмпирической формулы лежат теоретические соображения, и лишь входящие в состав формулы постоянные подлежат определению из опыта. Это положение вещей является наиболее благоприятным и такую формулу следует предпочесть другим. Многочисленные примеры, иллюстрирующие и дополняющие сделанные замечания, читатель найдет ниже.

308. Приближение с помощью постоянной. Начнем с простейшей задачи. Некоторая величина y была несколько раз измерена, и в результате получился ряд близких между собой значений:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n. \tag{1}$$

Требуется найти постоянную a так, чтобы формула

$$y = a$$

была наилучше согласована с результатами наблюдений.

Подобная задача может возникнуть как в том случае, когда y на самом деле есть постоянная (напр., при многократном взвешивании одного и того же груза), так и в случае, когда y заведомо изменяется, но незначительно, и лишь в целях простоты мы считаем ее постоянной.

Какое бы значение мы ни придали постоянной a, мы не можем достигнуть того, чтобы все погрешности

$$\Delta_1 = a - y_1, \ \Delta_2 = a - y_2, \ \ldots, \ \Delta_n = a - y_n$$

одновременно были нулями. Считая все измерения равноценными, естественно за наиболее согласованное с ними значение a счесть то, при котором *алгебраическая сумма всех погрешностей равна нулю*, так что происходит как бы взаимное *уравновешивание погрешностей*. Итак, имеем условие:

$$\sum_i \Delta_i = \sum_i (a - y_i) = na - \sum_i y_i = 0,$$

откуда

$$a = \frac{\sum_i y_i}{n} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

Искомая постоянная есть просто среднее арифметическое всех значений (1)!

Конечно, этот результат настолько очевиден, что для его обоснования едва ли нужны были изложенные соображения. Мы привели их лишь с той целью, чтобы читатель на этом простом случае начал осваиваться с *методом уравновешивания погрешностей*, которым мы будем пользоваться и ниже.

Пусть, например, четырехкратное нивеллирование одной и той же высоты дало следующие результаты (в метрах): 5,62; 5,57; 5,47; 5,50. Вероятнейшим значением этой высоты мы считаем

$$\frac{5{,}62 + 5{,}57 + 5{,}47 + 5{,}50}{4} = \frac{22{,}16}{4} = 5{,}54 \text{ м.}$$

Это значение отличается от результатов измерения соответственно на $-0{,}8$; $-0{,}3$; $+0{,}7$ и $+0{,}4$. Сумма этих погрешностей действительно равна нулю.

309. Приближение с помощью формулы $y = ax$. Предположим теперь, что рассматриваются две величины x и y, пропорциональные (или приближенно пропорциональные) между собой:

$$y = ax, \tag{2}$$

но *коэффициент пропорциональности*, a, *нам неизвестен*. Пусть путем измерений или наблюдений мы нашли ряд соответствующих значений этих величин:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ \hline y & y_1 & y_2 & y_3 & \ldots & y_n \end{array} \tag{3}$$

Отношения

$$\frac{y_1}{x_1}, \quad \frac{y_2}{x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{y_n}{x_n}$$

близки между собой, но — в силу неизбежных погрешностей измерения (или неточности самой формулы) — не равны. Естественно за значение a взять среднее арифметическое этих отношений.

Напр., как известно, *закон охлаждения Ньютона* состоит в допущении пропорциональности между скоростью охлаждения v и избытком $\theta°$ температуры охлаждающегося тела над температурой среды:

$$v = a\theta.$$

В нижеследующей таблице приведены опытные данные:

θ	220°	200°	180°	160°	140°	120°	100°
v	8,81	7,40	6,10	4,89	3,88	3,02	2,30

(4)

Отношения соответственно равны

0,040, 0,037, 0,034, 0,031, 0,028, 0,025, 0,023,

их средним арифметическим будет 0,031, так что приближенно

$$v = 0{,}031\,\theta.$$

Если подставить сюда указанные значения θ, то для v получим соответственно

6,82, 6,20, 5,58, 4,96, 4,34, 3,72, 3,10.

Погрешности значений v, вычисленных по этой формуле, сравнительно с наблюденными будут

$-1{,}99$, $-1{,}20$, $-0{,}52$, $+0{,}07$, $+0{,}46$, $+0{,}70$, $+0{,}80$.

Обращаем внимание читателя на то, что *их сумма не будет нулем!*

Можно было бы и в рассматриваемом случае считать, что из всех значений коэффициента a в формуле (2) наилучше согласовано с результатами опыта (3) то значение, при котором *погрешности*

$$\Delta_1 = ax_1 - y_1,\ \Delta_2 = ax_2 - y_2,\ \ldots,\ \Delta_n = ax_n - y_n$$

взаимно уравновешиваются, так что алгебраическая сумма равна нулю. Это приводит к условию,

$$\sum_i \Delta_i = \sum_i (ax_i - y_i) = a \cdot \sum_i x_i - \sum_i y_i = 0,$$

откуда

$$a = \frac{\sum_i y_i}{\sum_i x_i} = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}. \tag{5}$$

Если воспользоваться этой формулой в приведенном примере, то получится результат:

$$a = \frac{36{,}4}{1120} = 0{,}0325,$$

несколько отличный от прежнего. Вычисляя v по формуле

$$v = 0{,}0325\,\theta,$$

найдем значения

7,15, 6,50, 5,85, 5,20, 4,55, 3,90, 3,25

и на этот раз погрешности

—1,66, —0,90, —0,25, +0,31, +0,67, +0,88, +0,95,

разумеется, дают в сумме нуль.

Применение *метода уравновешивания погрешностей* следует предпочесть; к тому же он и проще, ибо требует лишь одного деления. Впрочем, чаще всего оба метода приводят практически к одному и тому же результату.

Примеры и задачи. 1. Если тело температуры θ° окружено средой с температурой 0°, то по *закону Стефана* (Stephan) скорость охлаждения v выражается формулой

$$v = a[(\theta + 273)^4 - 273^4]. \tag{6}$$

Исходя из опытных данных (4), требуется определить a.

Выражение в скобках играет как бы роль x в общей формуле (2). Его последовательные значения будут:

$$138\,023 \times 10^5,\ 182\,999 \times 10^5,\ 235\,392 \times 10^5,\ 295\,975 \times 10^5,\ 365\,561 \times 10^5,$$
$$445\,000 \times 10^5,\ 535\,182 \times 10^5.$$

Оба способа определения a приводят здесь к одному результату $a = 16{,}56 \times 10^{-11}$. При этом значении a, по формуле (6) получаются такие значения для v:

8,86, 7,37, 6,05, 4,90, 3,90, 3,03, 2,29

с погрешностями против наблюденных:

$$+0{,}05,\ -0{,}03,\ -0{,}05,\ +0{,}01,\ +0{,}02,\ +0{,}01,\ -0{,}01;$$

сумма их нуль.

Закон Стефана, впоследствии получивший теоретическое обоснование, значительно лучше согласуется с опытом, чем грубая формула Ньютона. Однако, последней часто предпочитают пользоваться в виду ее простоты.

2. В n⁰ 27 был описан опыт над растяжением стального стержня, который привел к следующим данным:

P	750	1095	1200	1440	1800	1950	2220	2400	2550
$1000\,l$	0,35	0,50	0,55	0,65	0,85	0,9	1,0	1,1	1,2

где P — растягивающее усилие (в кг/см²), а l — относительное удлинение. Как известно,

$$l = \frac{P}{E},$$

если через E обозначить модуль упругости. График зависимости между l и P представляет прямую, которая изображена на черт. 21. Непосредственное измерение, с учетом *масштабов* [см. 34, (8)], дает приближенно $E = 2\,200\,000$ (кг/см²). Найти значение E обоими вычислительными приемами, указанными выше.

Отв. $E = 2\,170\,000$ (кг/см²), в обоих случаях.

3. Во многих дальномерах расстояние l, подлежащее определению, получается по формуле $l = cd$, где d есть показание, отсчитанное по рейке с помощью зрительной трубы, а c — постоянная дальномера. Обыкновенно стараются устроить так, чтобы эта постоянная была равна 100, но в виду изнашивания прибора приходится время от времени наново устанавливать ее величину. Пусть с этой целью было произведено 11 определений заранее тщательно измеренных расстояний и (после необходимых поправок и приведений, на которых не останавливаемся) получились следующие результаты (в метрах):

№ измер.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
l	125,679	119,684	107,694	95,704	83,714	71,724	59,734	47,744	35,754	23,764	11,774
d	1,2661	1,2039	1,0830	0,9637	0,8434	0,7195	0,6002	0,4805	0,3593	0,2390	0,1183

Предлагается определить постоянную c.

Отв. По методу средних арифметических, $c = 99{,}430$; по методу уравновешивания погрешностей, $c = 99{,}400$. Сравните погрешности, которые получаются при этих значениях постоянной; убедитесь, что во втором случае сумма погрешностей — нуль.

310. Приближение с помощью линейной формулы $y = ax + b$. Очень часто приходится иметь дело с линейной формулой вида:

$$y = ax + b. \tag{7}$$

Имея опытные данные (3), не трудно наперед усмотреть, в каком случае именно эта формула будет подходящей. Это будет тогда, когда последовательные приращения x и y оказываются (приближенно) пропорциональными [33].

Еще проще убедиться в пригодности формулы (7) графически: если нанести *точки*

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

на миллиметровку, то сразу можно заметить, что они приближенно располагаются на *прямой*. Как уже указывалось в n° 94, в этом случае с помощью *натянутой нити* легко установить и подходящее положение этой прямой; остается затем лишь написать ее уравнение, чтобы получить искомую эмпирическую формулу.

В тех случаях, когда опытные данные не отличаются особой точностью или когда сама формула (7) является лишь грубым приближением к истинной зависимости, *способ натянутой нити* покрывает все потребности; при некотором навыке он дает хорошие результаты даже при надобности в большей точности.

Изложим теперь вычислительный прием для определения коэффициентов a, b формулы (7). Какие бы значения мы им ни придавали, подставляя в правую часть этой формулы наблюденные значения x, в левой части мы, разумеется, не получим в точности наблюденные значения y, так что всегда налицо будут некоторые погрешности:

$$\Delta_1 = ax_1 + b - y_1,\ \Delta_2 = ax_2 + b - y_2,\ \ldots,\ \Delta_n = ax_n + b - y_n. \quad (8)$$

В этом случае *метод уравновешивания погрешностей*, в его прежней форме, дал бы нам лишь одно условие:

$$\sum_i \Delta_i = \sum_i (ax_i + b - y_i) = a \cdot \sum_i x_i + nb - \sum_i y_i = 0,$$

т. е. одно уравнение

$$\sum_i x_i \cdot a + nb = \sum_i y_i \quad (9)$$

для определения двух неизвестных коэффициентов a и b. Для того чтобы получить нужные нам два уравнения, мы разобьем все наблюдения (3) на две группы (примерно одной численности) и к каждой из них в отдельности применим упомянутой метод. В результате мы будем иметь два уравнения вида (9), только суммы и число n будут относиться не ко всем наблюдениям сразу, но сначала к одной, а затем — к другой части их.

Рассмотрим для примера вопрос об измерении скорости течения воды с помощью так называемой *Вольтмановской вертушки*. Зависимость между скоростью v (м/сек.) и числом оборотов N (в мин.) гребного винта, входящего в состав прибора, обычно приближенно выражается линейной формулой:

$$v = v_0 + \alpha N. *$$

Для определения коэффициентов v_0 и α сообщают прибору движение в стоячей воде (что равносильно, по производимому действию, движению воды при неподвижном приборе). Таким путем были получены следующие данные:

N	21	32	45	55	57	64	77	80	90	96
v	0,39	0,55	0,64	0,76	0,81	0,91	1,05	1,05	1,18	1,22

(10)

* Здесь v_0 означает тот предел скорости, ниже которого движение воды уже не в состоянии преодолеть внутреннее трение в вертушке, так что винт вовсе не вращается.

Погрешности (8) в этом случае будут иметь вид:

$$\Delta_1 = 21\alpha + v_0 - 0{,}39, \quad \Delta_2 = 32\alpha + v_0 - 0{,}55, \quad \Delta_3 = 45\alpha + v_0 - 0{,}64,$$
$$\Delta_4 = 55\alpha + v_0 - 0{,}76, \quad \Delta_5 = 57\alpha + v_0 - 0{,}81, \quad \Delta_6 = 64\alpha + v_0 - 0{,}91,$$
$$\Delta_7 = 77\alpha + v_0 - 1{,}05, \quad \Delta_8 = 80\alpha + v_0 - 1{,}05, \quad \Delta_9 = 90\alpha + v_0 - 1{,}18,$$
$$\Delta_{10} = 96\alpha + v_0 - 1{,}22.$$

Потребовав, напр., чтобы суммы первых пяти и последних пяти порознь были равны нулю, мы придем к уравнениям

$$210\alpha + 5v_0 = 3{,}15; \quad 407\alpha + 5v_0 = 5{,}41,$$

откуда

$$\alpha = 0{,}01147; \quad v_0 = 0{,}148.$$

При этих значениях постоянных, погрешности будут

$$-0{,}001, \ -0{,}035, \ +0{,}024, \ +0{,}019, \ -0{,}008,$$
$$-0{,}028, \ -0{,}019, \ +0{,}016, \ \ 0{,}000, \ +0{,}029.$$

Первые пять в сумме дают $-0{,}001$, а вторые пять $-0{,}002$: незначительные отклонения от нуля объясняются, конечно, округлениями.

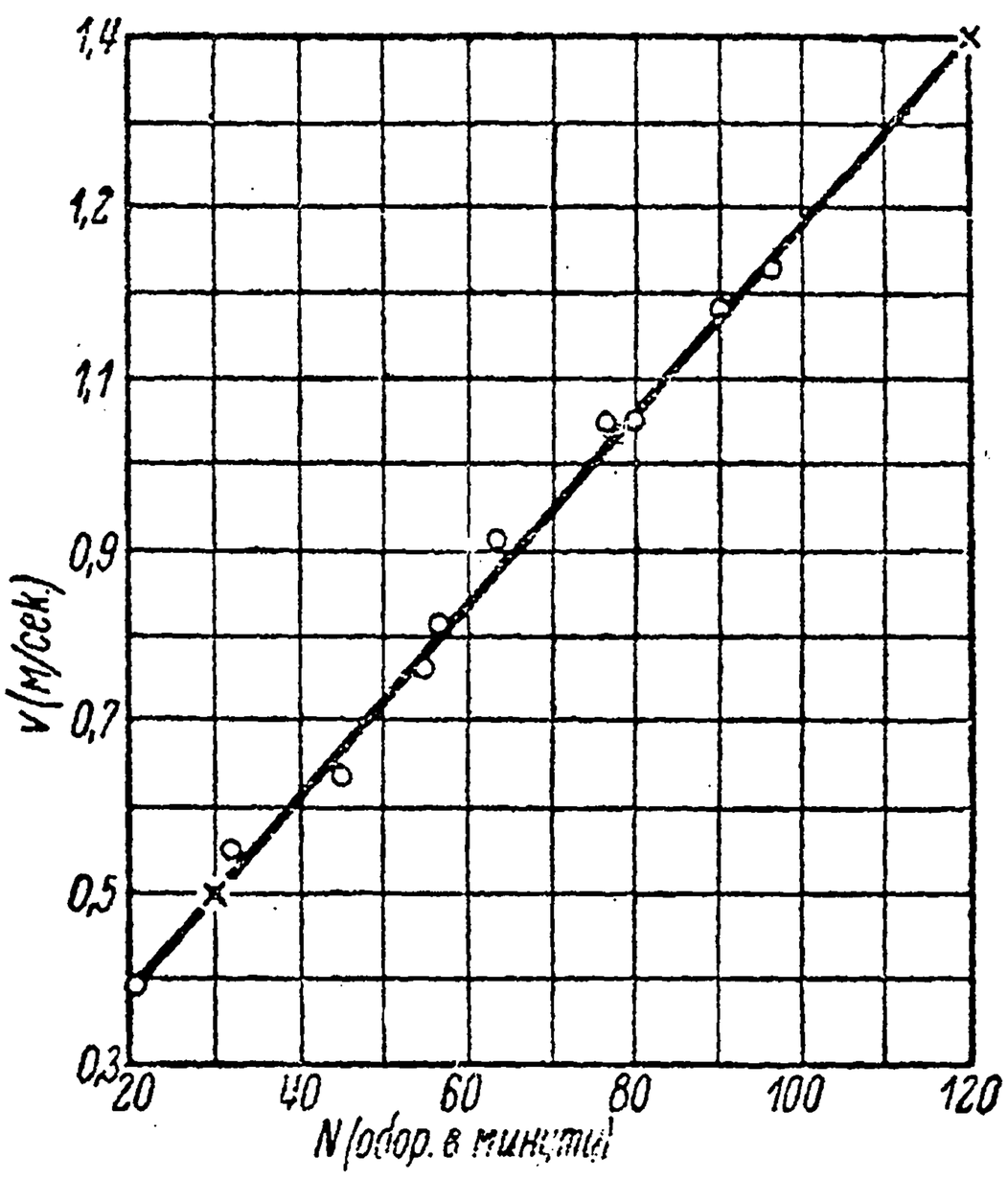
Интересно сопоставить этот результат с тем, что в этом случае дает *способ натянутой нити*. Как видим из черт. 552, хорошо подходит, напр., прямая через точки (30; 0,5) и (120; 1,5), уравнение которой [93, (19)]

$$y - 0{,}5 = \frac{1{,}5 - 0{,}5}{120 - 30}(x - 30) \quad \text{или}$$

$$y = \frac{1}{90}x + \frac{1}{6},$$

так что

$$\alpha = 0{,}0111, \quad v_0 = 0{,}167$$



Черт. 552.

Для этого случая погрешности будут таковы:

$$+0{,}010, \ -0{,}027, \ +0{,}027, \ +0{,}018, \ -0{,}010$$
$$-0{,}032, \ -0{,}027, \ +0{,}006, \ -0{,}013, \ +0{,}014.$$

Результат, примерно, того же качества, что и выше, но получен гораздо проще!

Примеры и задачи. 1. Зависимость между затратой энергии в насосе Q (кг-м) и высотой подачи h (м) дается следующей таблицей:

h	6	15	30	60	90	120
Q	10,25	10,42	11,26	12,52	13,78	15,04

Выразить эту зависимость линейной формулой:

$$Q = ah + b.$$

Решение. Имеем:

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = (6a + b - 10{,}25) + (15a + b - 10{,}42) + (30a + b - 11{,}26) = \\ = 51a + 3b - 31{,}93 = 0$$

и аналогично

$$\Delta_4 + \Delta_5 + \Delta_6 = 270a + 3b - 41{,}34 = 0,$$

откуда

$$a = 0{,}0430,\ b = 9{,}91.$$

Предлагается решить эту задачу и методом натянутой нити.

2. Теплота испарения r (кал./кг) зависит от температуры t (° C) по таблице:

t	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
r	539,4	533,1	526,7	520,1	513,2	506,0	498,5	490,6	482,3	473,5	464,2

Нанеся эти точки на миллиметровку, видим, что эта зависимость не может быть выражена линейной формулой с достаточной точностью. Тем не менее в качестве первого приближения [см. ниже, 314, 1] предлагается подобрать для нее формулу вида: $r = at + b$, пользуясь как графическим, так и вычислительным методом.

Отв. *a*) По методу натянутой нити можно, напр., провести прямую через точки (90, 550), и (235, 440), откуда $r \doteq 618{,}3 - 0{,}759\,t$;

b) по методу уравновешивания погрешностей (разбивая данные точки на две группы — первые пять и остальные шесть) получается: $r \doteq 615{,}2 - 0{,}739\,t$.

3. Опыты, произведенные над многоступенной активной турбиной, дали следующую зависимость между работой трения рабочего колеса турбины W (киловатт) и удельным весом γ (кг/м³) окружающего его пара:

W	5,2	8,8	12,6	12,3	21,2	21,7	26,9	30,1	38,0
γ	0,094	0,307	0,366	0,610	0,855	0,871	1,119	1,393	1,662

Выразить эту зависимость линейной формулой и оценить в процентах расхождение между нею и опытными данными.

Отв. $W = 2{,}62 + 21{,}05\,\gamma$. Расхождение достигает 25%!

4. При испытании машины на свободное движение по инерции угловая скорость ее ω измерялась через каждые 5 секунд:

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
ω	8,3	7,1	6,2	5,5	4,7	4,1	3,6	3,2	2,8	2,5	2,3

Установить линейную зависимость. Оценить погрешность.

Отв. $\omega = 7{,}39 - 0{,}113\,t$. Погрешность достигает 25%! Формулу следует рассматривать, как грубое приближение [см. ниже, 314, 2].

5. В качестве последнего примера рассмотрим вопрос о *продольном изгибе* и о величине *критической* или *ломающей силы* P_k [см. n° 286]. Тетмайер (Tetmajer) произвел многочисленные опыты для проверки теоретической формулы Эйлера [(149), 286]

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

(случай свободных концов). Полагая $I = F \cdot k^2$, где F — площадь сечения стержня, а k — „радиус инерции" (наименьший!), и переходя к *ломающему напряжению* $\beta_k = \frac{P_k}{F}$, можно эту формулу переписать в виде

$$\beta_k = \pi^2 E \cdot \left(\frac{k}{l}\right)^2. \tag{11}$$

Часть результатов Тетмайера над образцами из сварочного железа сведена в таблицу:

$\frac{l}{k}$	β_k	$\frac{l}{k}$	β_k	$\frac{l}{k}$	$\left(\frac{k}{l}\right)^2$	β_k	$\frac{l}{k}$	$\left(\frac{k}{l}\right)^2$	β_k
31,6	2,54	75,7	2,16	111,0	81162	1,48	170,0	34602	0,67
35,4	2,37	76,3	1,92	111,7	80148	1,65	172,0	33802	0,69
39,6	2,33	76,3	1,81	115,0	75614	1,26	172,0	33802	0,61
45,9	2,39	83,6	2,08	118,5	71213	1,35	177,0	31919	0,67
50,0	2,26	84,2	2,10	120,7	68641	1,37	191,8	27183	0,51
50,0	2,34	87,0	1,92	130,0	59172	1,21	198,0	25508	0,54
50,6	2,36	90,0	2,22	131,0	58272	1,05	210,0	22676	0,49
50,6	2,25	90,0	2,01	131,0	58272	0,91	210,0	22676	0,44
53,3	2,33	90,0	1,94	135,0	54870	1,17	212,0	22250	0,51
60,2	2,41	90,1	1,75	135,0	54870	1,09	214,0	21836	0,46
62,1	2,27	90,1	1,53	141,9	49663	0,93	214,0	21836	0,40
68,0	2,25	94,7	1,77	151,0	43858	0 84	216,0	21433	0,45
70,0	2,35	95,3	1,86	153,0	42719	0,97	218,0	21042	0,44
70,0	2,11	96,7	1,81	157,0	40570	0,81	218,0	21042	0,43
71,2	2,27	96,7	1,74	161,0	38579	0,71	245,0	16660	0,33
71,2	1,98	98,2	1,77	162,0	38104	0,73	262,0	14568	0,30
71,9	2,14	101,0	1,60	163,0	37638	0,70	288,0	12056	0,25
74,5	2,30	107,0	1,71	170,0	34602	0,75	355,0	7935	0,15

Эти же результаты представлены графически на черт. 553, причем по горизонтальной оси откладываются

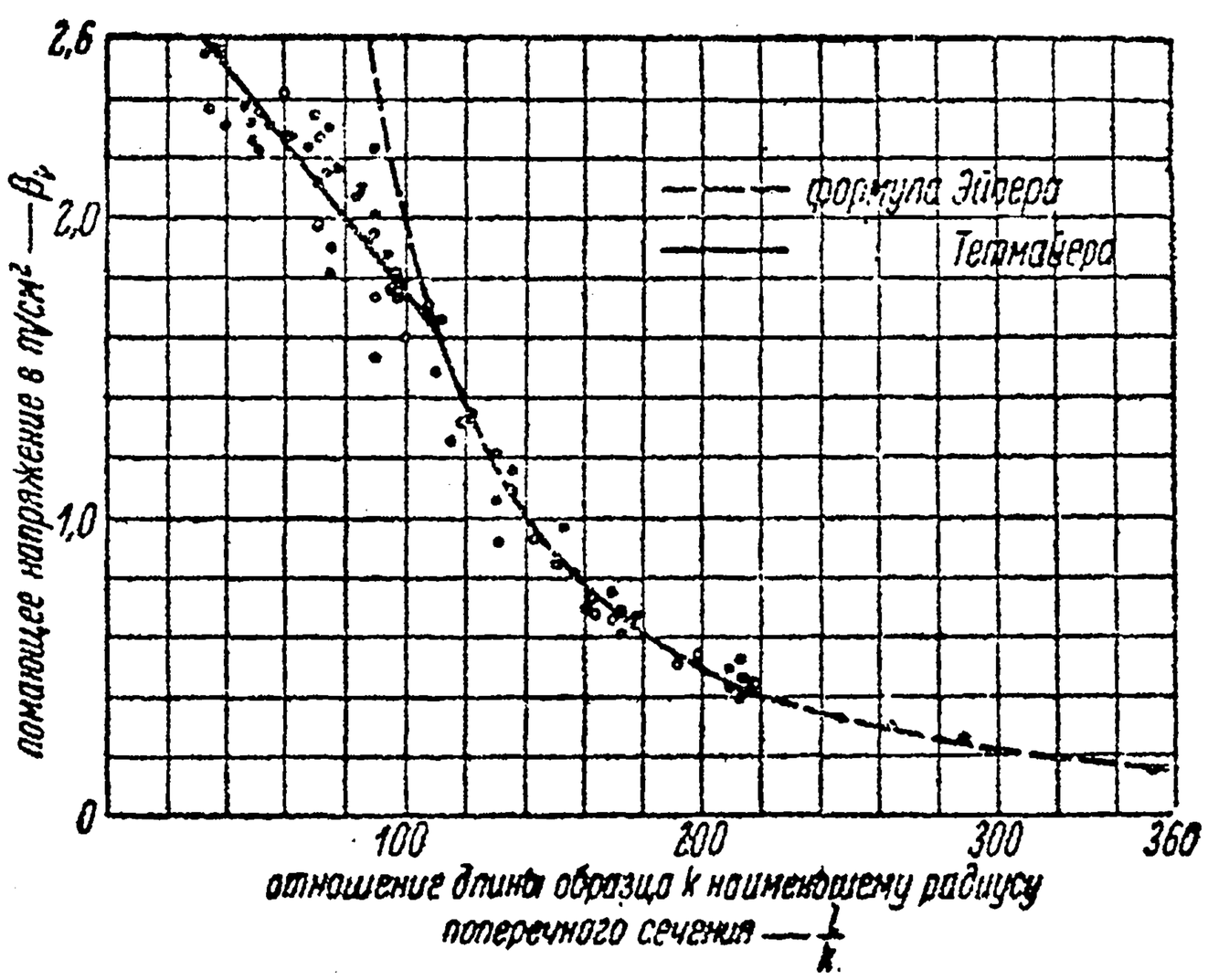
$$\frac{l}{k}\left(\text{а не } \frac{k}{l}\right).$$

Покуда $\frac{l}{k} > 110$, точки ложатся вблизи Эйлеровой кривой. Если эту часть опытов попытаться выразить формулой:

$$\beta_k = a\left(\frac{k}{l}\right)^2,$$

определяя коэффициент a по методу уравновешивания погрешностей [309], *, то получим:

$$\beta_k \doteq 19\,500\left(\frac{k}{l}\right)^2,$$



Черт. 553.

* Для облегчения вычислений в таблице приведены значения величины $\left(\frac{k}{l}\right)^2$.

что чрезвычайно близко к формуле (11), ибо, при $E = 2000$ т/см², коэффициент теоретической формулы $\pi^2 E = 19\,740$.

Однако, при $\frac{l}{k} < 110$ формула Эйлера явно неприложима; в то же время видим, что соответствующие точки имеют приближенно линейное расположение. Начерченная прямая отвечает приближенной формуле (которая устанавливается обычным путем):

$$\beta_k = 3{,}01 - 0{,}0127\left(\frac{l}{k}\right).$$

Сам Тетмайер из всех своих опытов получил близкую формулу:

$$\beta_k = 3{,}03 - 0{,}013\left(\frac{l}{k}\right).$$

6. Если, имея ряд точек (3), приписать каждой из них „массу" 1, то *центром тяжести* системы точек (3) будет служить точка с координатами:

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad \eta = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}.$$

Выбор коэффициентов зависимости (7) под условием уравновешивания погрешностей в группе наблюдений (3) равносилен требованию, чтобы прямая (7) проходила через этот центр тяжести. Итак, каждая из двух групп точек заменяется ее центром тяжести, и через полученные две точки проводится прямая.

311. Формулы, приводящиеся к линейной. К их числу прежде всего относятся формулы вида:

$$y = a \cdot \varphi(x) + b, \tag{12}$$

где $\varphi(x)$ есть некоторая наперед выбранная функция от x, а a и b — численные коэффициенты, подлежащие определению. Формула (12) приводится к линейной:

$$y = a \cdot X + b,$$

если положить $X = \varphi(x)$. Таким образом, откладывая по горизонтальной оси именно эту величину вместо x, а по вертикальной — попрежнему величину y, мы должны получить прямую.

Это дает возможность наперед проверить пригодность формулы (12) для выражения результатов наблюдения следующим образом. Вычислив значения $X = \varphi(x)$, соответствующие наблюденным значениям x, наносят на миллиметровку точки (X, y) [но не (x, y)]; если они расположатся приближенно прямолинейно, то формула (12) годится.

Коэффициенты a и b в этом случае могут быть определены *способом натянутой нити.*

Аналогично и в случае более общей формулы

$$y = a \cdot \varphi(x) + b \cdot \psi(x), \tag{13}$$

разделив на $\psi(x)$ и положив

$$\frac{y}{\psi(x)} = Y, \quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = X,$$

также можно свести дело к линейной формуле

$$Y = a \cdot X + b$$

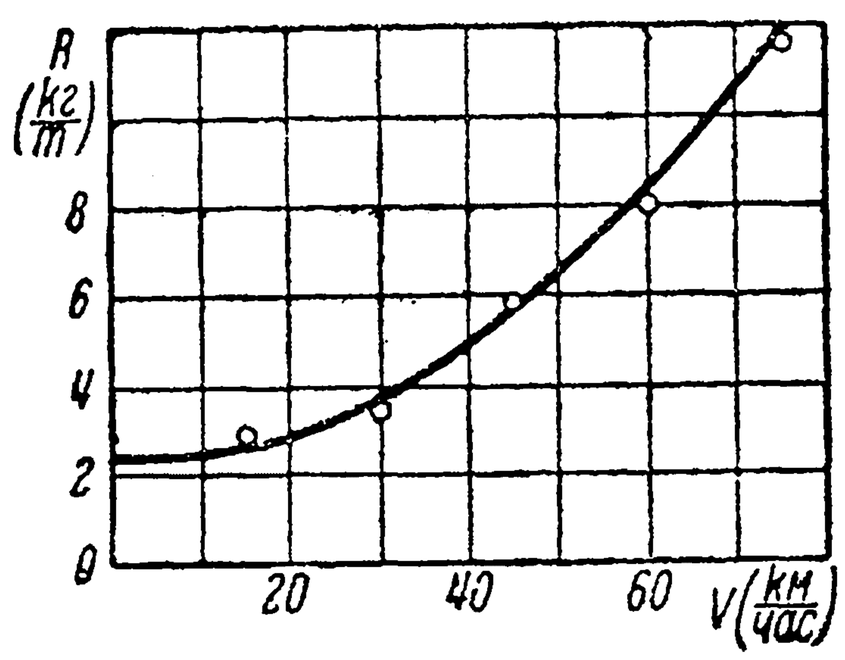
и воспользоваться *методом натянутой нити* для определения коэффициентов.

Как в случае формулы (12), так и в случае формулы (13) коэффициенты могут быть определены и по *методу уравновешивания погрешностей*, причем для этого нет надобности предварительно переходить к величинам X или Y. Разобьем наблюдения на две группы, и пусть (3) будет одна из них. Тогда имеем, для случая формулы (12),

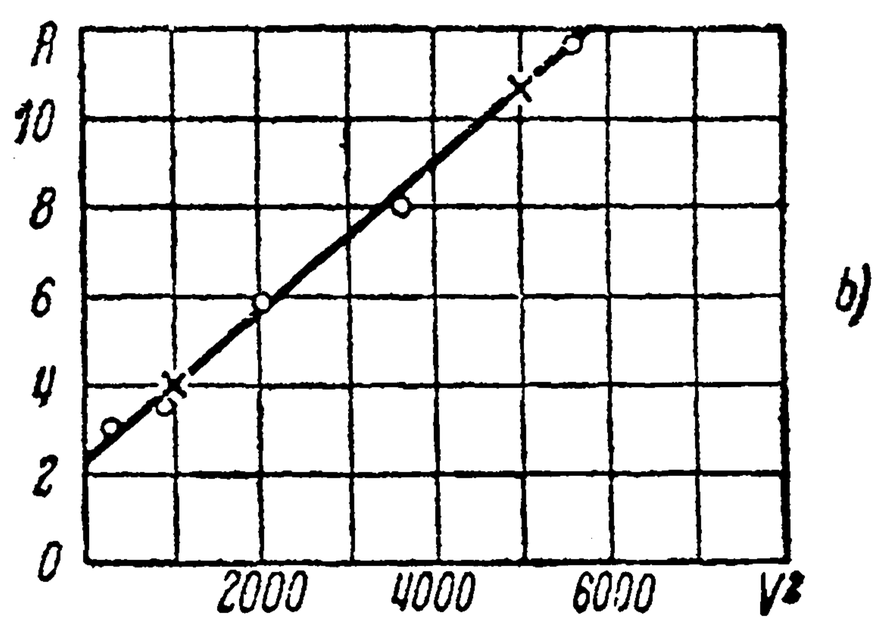
$$\sum_i \Delta_i = \sum_i [a \cdot \varphi(x_i) + b - y_i] = 0$$

или

$$\sum_i \varphi(x_i) \cdot a + n \cdot b = \sum_i y_i.$$



Черт. 554*a*).



Черт. 554*b*).

Аналогично, вторая группа наблюдений даст второе уравнение для определения a и b.

Точно также, в случае формулы (13), имели бы два уравнения вида

$$\sum_i \varphi(x_i) \cdot a + \sum_i \psi(x_i) \cdot b = \sum_i y_i. \tag{14}$$

Примеры и задачи. 1. Сопротивление R (кг/т) движению поезда зависит от скорости V (км/час), причем из опытов получена следующая таблица:

V	15	30	45	60	75
R	2,9	3,7	5,8	8,0	11,6

При первом взгляде на таблицу ясно, что линейная формула здесь не подойдет, так как изменение функции R не пропорционально изменению независимой переменной V; то же заключение можно сделать и на основании черт. 554 *a*), ибо точки (V, R) располагаются не прямолинейно. Угадывая здесь параболу, имеющую ось Oy свой осью, попробуем формулу типа

$$R = aV^2 + b.$$

С этой целью составим таблицу зависимости между V^2 и R:

V^2	225	900	2025	3600	5625
R	2,9	3,7	5,8	8,0	11,6

Нанеся полученные точки на чертеж (см. черт. 554 *b*), видим, что они довольно

точно определяют прямую линию. Ее можно провести, напр., через точки (1000; 4,0) и (5000; 10,6); если положить $X = V^2$ и $y = R$, то ее уравнение будет:

$$y - 4{,}0 = \frac{10{,}6 - 4{,}0}{5000 - 1000}(X - 1000)$$

или

$$y = 2{,}4 + 0{,}00165\ X.$$

Заменяя здесь, обратно, X на V^2, а y на R, получим искомую эмпирическую формулу: $R = 2{,}4 + 0{,}00165\ V^2$.

2. При испытании судна получилась следующая таблица зависимости между скоростью V (в узлах) и затрачиваемой мощностью H (в лош. силах):

H	290	560	1144	1810	2300
V	5	7	9	11	12

Предполагая, что зависимость приближенно выражается формулой:

$$H = aV^2 + b,$$

найти коэффициенты a, b. *Отв.* $H = 17V^2 - 200$.

3. Исследуя истечение через щель, Базен получил следующие данные относительно коэффициента истечения μ, в зависимости от напора H:

μ	0,448	0,432	0,421	0,417	0,414	0,412
H	0,164	0,328	0,656	0,984	1,312	1,64
$\frac{1}{H}$	6,098	3,049	1,524	1,016	0,762	0,610

Установить, пользуясь методом уравновешивания погрешностей, приближенную зависимость вида:

$$\mu = \frac{a}{H} + b.$$

Отв. $\mu = \frac{0{,}007}{H} + 0{,}409$.

4. Найти эмпирическую формулу, связывающую коэффициент трения μ между ремнем и шкивом—со скоростью ремня v (фут/мин.) по следующим данным:

v	500	1000	2000	4000	6000
μ	0,29	0,33	0,38	0,45	0,51

Решение. Если нанести точки (v, μ) на миллиметровку (взяв, напр., масштабы: 1 см = 500 ф/мин. для v и 1 см = 0,05 для μ), и соединить их плавной кривой, то последняя уподобится параболе с горизонтальной осью и с вершиной на вертикальной оси. Поэтому ищем зависимость в форме

$$\mu = a\sqrt{v} + b.$$

По методу уравновешивания погрешностей (объединяя первые три наблюдения и последние два) получится

$$\mu = 0{,}0039\sqrt{v} + 0{,}204.$$

Можно воспользоваться и методом натянутой нити. Если положить $X = \sqrt{v}$, $y = \mu$, то точки (X, y) расположатся, напр., вблизи прямой, проходящей через точки: (25; 0,3), (75; 0,5) и имеющей уравнение

$$y - 0{,}3 = \frac{0{,}5 - 0{,}3}{75 - 25}(X - 0{,}5) \text{ или } y = 0{,}004X + 0{,}2,$$

так что

$$\mu = 0{,}004\sqrt{v} + 0{,}2.$$

5. Для ряда брусков различной длины l (мм) непосредственно были измерены их *разрывные удлинения* φ (в %), т. е. те относительные удлинения, при которых происходит разрыв. В результате получилась таблица:

l	50	70	100	150	200	260
φ	62,0	53,7	46,3	39,3	35,2	31,9

Найти эмпирическую формулу, связывающую φ и l.

Решение. Кривая, соединяющая точки (l, φ), имеет гиперболическую форму; ее асимптотами будут служить вертикальная ось и некоторая прямая, параллельная горизонтальной оси. Но кривая к своей вертикальной асимптоте приближается настолько медленно, что вместо формулы

$$\varphi = \frac{a}{l} + b$$

естественнее испробовать формулу

$$\varphi = \frac{a}{\sqrt{l}} + b.$$

По методу уравновешивания погрешностей (деля наблюдения на две равные по численности группы) получаем:

$$\varphi = \frac{379{,}5}{\sqrt{l}} + 8{,}34.$$

Если подставить сюда указанные значения l, то найдем по порядку:

62,01, 53,70, 46,29, 39,33, 35,18, 31,88

с погрешностями, против измеренных значений φ, не превосходящими 0,03:

+0,01, 0, —0,01, +0,03, —0,02, —0,02.

Сумма первых трех есть 0; сумма последних трех равна $-0{,}01 \doteq 0$.

6. Для характеристики истечения топлива из жиклера Лорэ (Lauret) предложил формулу

$$H = a \cdot Q^2 + b \cdot Q, \tag{15}$$

где H есть полное разрежение (в см столба бензина), а Q — расход топлива (в см³/мин.). Опыты над жиклером Zenith 83/100 дали следующие результаты:

Q	14	20,5	35,3	45	53,8	62	68,3	75,2	82
H	3,05	4,9	10,4	15,3	20,1	25,4	29,8	34,6	40,0

Требуется определить коэффициенты формулы Лорэ.

Решение: а) Разделив формулу (15) на Q и полагая

$$X = Q \text{ и } Y = \frac{H}{Q},$$

сведем ее к формуле

$$Y = a \cdot X + b.$$

Нанеся на миллиметровку точки

$X = Q$	14	20,5	35,3	45	53,8	62	68,3	75,2	82
$Y = \frac{H}{Q}$	0,218	0,239	0,295	0,340	0,374	0,410	0,436	0,460	0,488

(напр., в масштабе: 1 см = 10 для X и 4 см = 0,1 для Y), увидим, что они располагаются вблизи прямой, проходящей через точки (10; 0,2) и (60; 0,4),

$$Y = 0{,}004\,X + 0{,}16,$$

так что можно принять:

$$H = 0{,}004\,Q^2 + 0{,}16\,Q.$$

b) Желая точнее вычислить коэффициенты a и b, прибегнем к методу уравновешивания погрешностей; объединим первые пять наблюдений и последние четыре. Вычислив значения Q^2:

Q^2	196	420,25	1246,09	2025	2894,44	3844	4664,89	5655,04	6724,

по форме (14) составляем два уравнения:

$$6781{,}78\,a + 168{,}6\,b = 53{,}75,$$
$$20887{,}93\,a + 287{,}5\,b = 129{,}8\,,$$

из которых

$$a = 0{,}0040912, \quad b = 0{,}15423,$$

так что, округляя,

$$H = 0{,}00409\,Q^2 + 0{,}154\,Q.$$

Предлагается сравнить погрешности значений H, вычисленные по обеим полученным формулам. Проверить, в какой мере „уравновешиваются“ погрешности во втором случае (некоторая невязка объясняется округлением!).

7. В целях установления условий, обеспечивающих от образования трещин в железобетонных балках, было произведено несколько серий опытов, из которых определялось напряжение σ (кг/см²) в железе непосредственно перед появлением трещин в бетоне, при различных степенях армирования μ (в %). Эти результаты сведены в таблицу:

№	μ	$\frac{1}{\mu}$	σ	№	μ	$\frac{1}{\mu}$	σ
1	0,15	6,667	2020	17	1,51	0,662	660
2	0,30	3,333	2010	18	1,52	0,658	660
3	0,30	3,333	1990	19	1,54	0,649	690
4	0,31	3,226	2150	20	1,57	0,637	640
5	0,35	2,857	1100	21	1,58	0,633	750
6	0,40	2,500	1641	22	1,58	0,633	750
7	0,42	2,381	1317	23	1,58	0,633	800
8	0,50	2,000	1487	24	1,73	0,578	814
9	0,52	1,923	1509	25	2,2	0,455	571
10	0,55	1,818	1076	26	3,1	0,323	469
11	0,60	1,667	1250	27	4,2	0,238	400
12	0,82	1,220	941	28	5,3	0,189	322
13	0,86	1,163	777	29	6,4	0,156	314
14	0,91	1,099	910	30	6,6	0,152	261
15	1,21	0,826	850	31	6,6	0,152	261
16	1,26	0,794	785	32	6,8	0,147	287

Если точки (μ, σ) нанести на миллиметровку, то они расположатся в достаточной степени беспорядочно. Тем не менее (см. черт. 555) явственно проглядывает в качестве „оси“, вокруг которой центрируются эти точки, некоторая гипербола, одной асимптотой которой служит сама вертикальная ось, а другая — параллельна горизонтальной оси. Таким образом подсказывается мысль об эмпирической формуле вида

$$\sigma = \frac{a}{\mu} + b,$$

которая, хотя и грубо, но все же могла бы характеризовать явление.

Для определения коэффициентов a и b можно прибегнуть к методу уравнива-

ния погрешностей. Если разбить наблюдения на две группы по 16 в каждой, то, пользуясь указанными в таблице значениями обратной величины $\frac{1}{\mu}$, легко найти:

$$\sigma = \frac{440}{\mu} + 351.$$

Однако в данном случае следовало бы, пожалуй, предпочесть другой путь. Мы обращаем внимание читателя на то, что погрешности при определении μ, в случае малых его значений, благодаря резкому возрастанию величины σ для них, очень сильно влияют на беспорядочность расположения точек. Для того чтобы хоть несколько сгладить это влияние, мы (главным образом, в первой половине наблюдений) станем объединять точки в небольшие группы и заменять каждую группу ее „центром тяжести" [это понятие разъяснено в задаче 6 п° 310]. Подобным приемом нередко пользуются при беспорядочном расположении точек.

В следующей таблице указано, какие, примерно, точки целесообразно объединить в группы, и приведены соответствующие (фиктивные!) значения μ и σ:

№№ объедин. набл.	μ	$\frac{1}{\mu}$	σ	№№ объедин. набл.	μ	$\frac{1}{\mu}$	σ
1, 2, 3, 4	0,26	3,8462	2042	17, 18, 19, 20	1,54	0,6494	662
6, 8, 9	0,47	2,1277	1546	25	2,2	0,4545	571
7, 11	0,51	1,9608	1284	26	3,1	0,3226	469
5, 10	0,45	2,2222	1088	27	4,2	0,2381	400
12, 13, 14	0,86	1,1628	876	28	5,3	0,1887	322
15, 16, 21 / 22, 23, 24	1,49	0,6711	792	29	6,4	0,1563	314
				30, 31, 32	6,7	0,1493	270

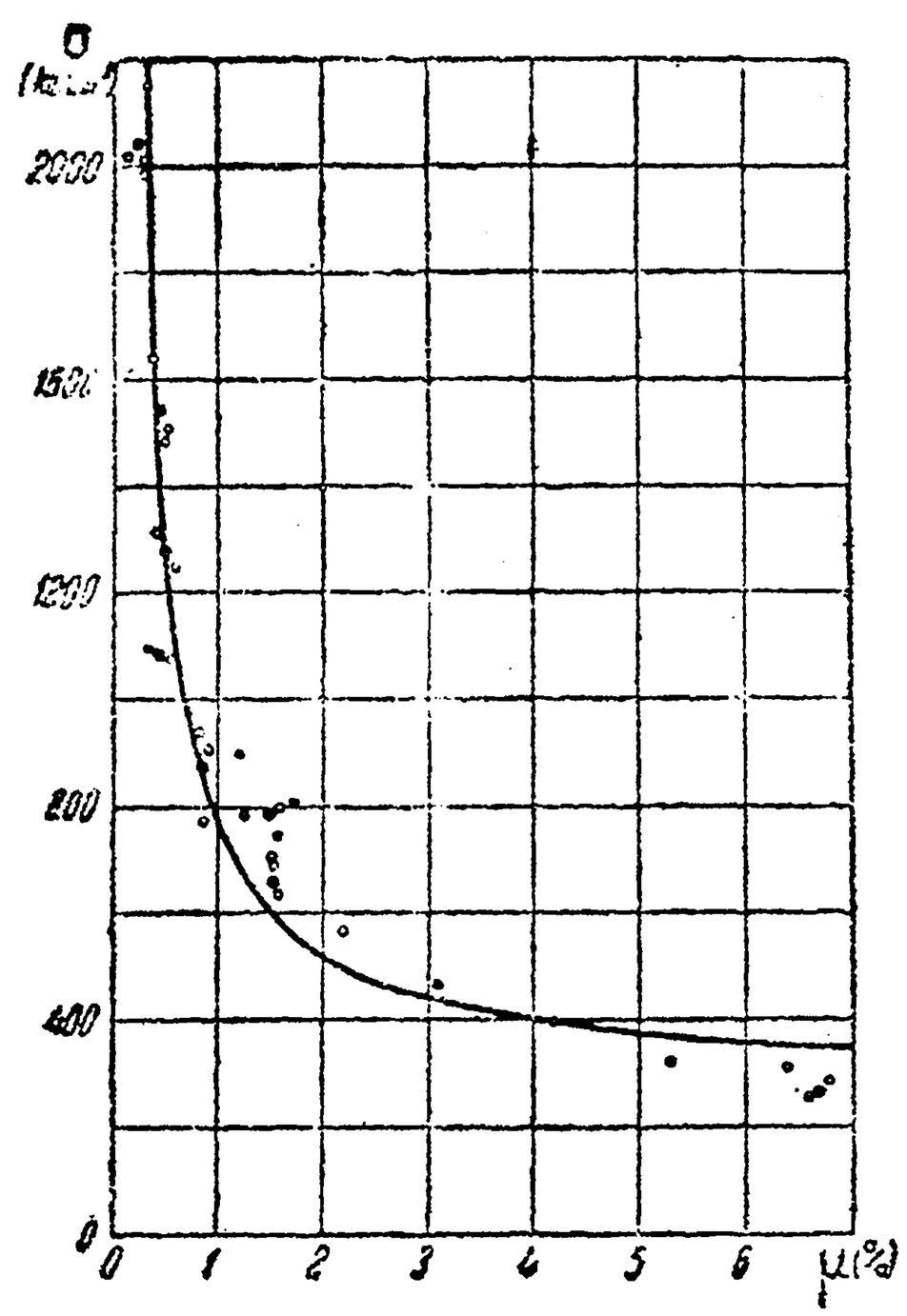
Фиктивные точки (μ, σ), заменяющие каждая некоторую группу опытных точек, отмечены на черт. 555 сплошными кружками. Если теперь прибегнуть к методу уравновешивания погрешностей, то получится гипербола (изображенная на чертеже):

$$\sigma = \frac{498}{\mu} + 276$$

или, округляя,

$$\sigma = \frac{500}{\mu} + 275.$$

Как ни грубо выражает эта формула опытные данные, по ней все же можно прикинуть величину σ по заданному μ.



Черт. 555.

312. Формулы вида $y = cx^a$. Логарифмическая бумага. Очень важное значение в технике имеют **степенные** формулы:

$$y = cx^a. \qquad (16)$$

Если прологарифмировать такую формулу (напр., по основанию 10):

$$\log y = a \cdot \log x + \log c \qquad (17)$$

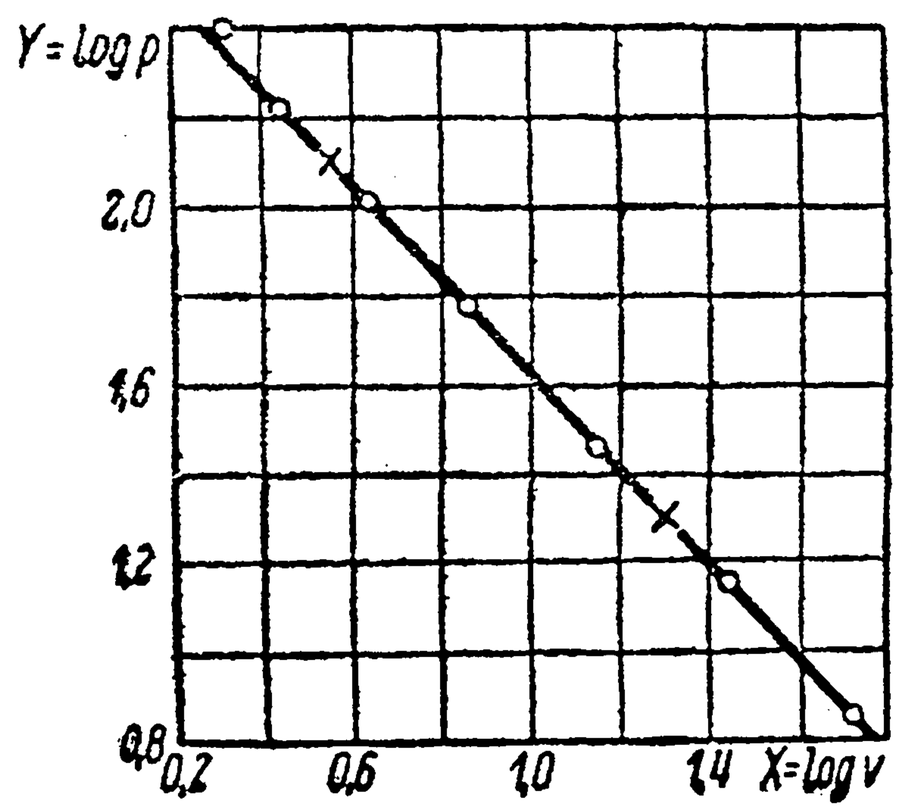
и положить

$$\log x = X, \ \log y = Y, \ \log c = b, \qquad (18)$$

то придем и в этом случае к линейной формуле:

$$Y = a \cdot X + b. \tag{19}$$

Таким образом, если формула (16) действительно имеет место, то, откладывая по осям $\log x$ и $\log y$, вместо x и y, мы должны получить прямую. Наоборот, если точки ($\log x$, $\log y$), отвечающие наблюденным значениям x и y, располагаются приближенно прямолинейно, то это служит признаком пригодности формулы (16).



Черт. 556.

Коэффициенты уравнения (19) прямой определяются по *методу натянутой нити* или по *методу уравновешивания погрешностей*. Угловой коэффициент a непосредственно дает показатель в степенной формуле (16); множитель же c находится с помощью таблицы логарифмов по его логарифму b [см. третью из формул (18)].

Нужно однако отметить, что, пользуясь *методом уравновешивания погрешностей* для определения коэффициентов формулы (19), мы отнюдь не уравновешиваем погрешностей в исходной формуле (16). Тем не менее всегда довольствуются уравновешиванием погрешностей в $\log y$, ибо это приводит к решению системы *линейных* уравнений.

Примеры и задачи. 1. Заимствуем у Перри (Perry) следующие данные, дающие зависимость между давлением p (фунт/дюйм^2) и объемом v (фут^3) одного фунта насыщенного пара:

p	6,86	14,70	28,83	60,40	101,9	163,3	250,3
v	53,92	26,36	14,00	6,992	4,28	2,748	1,853

Требуется установить формулу вида:

$$pv^k = c.$$

Логарифмируя и полагая

$$\log p = Y, \quad \log v = X, \quad \log c = b,$$

получим:

$$Y + kX = b \text{ или } Y = -kX + b.$$

Если нанести на миллиметровку точки (X, Y) по таблице:

$Y = \log p$	0,836	1,167	1,460	1,781	2,008	2,213	2,398
$X = \log v$	1,732	1,421	1,146	0,845	0,631	0,439	0,268

то эти точки расположатся, напр., вблизи прямой, проходящей через точки (0,55; 2,1) и (1,3; 1,3) (черт. 556), ее уравнение будет

$$Y = -1{,}067\,X + 2{,}687.$$

Следовательно, $k = 1{,}067$ и $b = \log c = 2{,}687$, откуда $c = 487$, так что окончательно имеем:

$$p \cdot v^{1{,}067} = 487.$$

Если прибегнуть к методу уравновешивания погрешностей, разбив данные на две группы (четыре первых и три последних), то придем к уравнениям:

$$5{,}244 + 5{,}144 \cdot k = 4b,$$
$$6{,}619 + 1{,}338 \cdot k = 3b,$$

из которых $k = 1{,}066$ и $b = \log c = 2{,}682$, так что $c = 481$ и

$$p \cdot v^{1{,}066} = 481$$

— результат, очень близкий к первому!

2. Крутящий момент T (кг-см) и угол кручения θ^0 находятся в зависимости, определяемой таблицею:

T	800	850	900	950	1000	1050	1100	1150	1200
θ	10,4	12,53	15,41	19,2	23,67	29,28	35,58	42,49	51,2

Установить формулу вида:

$$T = c \cdot \theta^a.$$

Отв. По способу натянутой нити: $T = 440 \cdot \theta^{0{,}257}$.

3. При испытании самолета определялось общее давление на крыло P (кг) при разных скоростях полета V(км/час):

V	50	100	150	200	250
P	35	200	540	1130	1970

Нанеся на миллиметровку точки ($\log V$, $\log P$), установить пригодность формулы

$$P = c \cdot V^a;$$

найти a и c.

Отв. По способу уравновешивания погрешностей: $P = 0{,}002 \cdot V^{2{,}5}$.

4. Вместо *закона Гука*, устанавливающего простую пропорциональность между деформацией i и соответствующим напряжением p, иногда пользуются так называемым *степенным законом Баха:*

$$i = c \cdot p^a.$$

при этом — в случае сжатия или растяжения — коэффициент c есть величина, обратная модулю упругости E.

Над цилиндром из литого чугуна было произведено шесть серий опытов: он подвергался сжимающей нагрузке и измерялось упругое укорачивание j образца, которое выражалось в $\frac{1}{600}$ см. Если через p (кг/см²) обозначить сжимающее напряжение, то результаты опытов будут таковы:

p	166	333	499	666	832	998
j	7,60	15,88	24,60	33,42	42,34	51,31

Для того чтобы найти относительное укорочение i, следует значения j разделить на 600 (т. е. выразить их в см) и на длину измеренной части цилиндра: 75 см. Логарифмируя, получим:

$\log p$	2,22011	2,52244	2,69810	2,82347	2,92012	2,99913
$\log i$	—3,77240	—3,45236	—3,26228	—3,12921	—3,02646	—2,94301

По методу уравновешивания погрешностей теперь не трудно получить два уравнения:

$$7{,}44065\,a + 3b = -10{,}48704,$$
$$8{,}74272\,a + 3b = -9{,}09868,$$

откуда $a = 1{,}0663$, $b = \log c = -6{,}14027$, так что $c = \frac{1}{1\,381\,300}$ и

$$i = \frac{1}{1\,381\,300} p^{1{,}0663}.$$

5. Исследуя охлаждение трубы, находящейся в воздушном потоке, Юз (Hughes) произвел четыре серии опытов, из которых были вычислены значения двух параметров x и y, играющих важную роль в вопросах этого рода, именно:

$$x = \frac{wd}{a}, \quad y = \alpha \frac{d}{\lambda},$$

где α — коэффициент теплопередачи, λ — коэффициент теплопроводности, a — температуропроводность, d — диаметр трубы и, наконец, w — скорость воздушного потока. Результаты опытов приведены в таблице:

x	y	$\log x$	$\log y$	x	y	$\log x$	$\log y$
432	14,05	2,635	1,148	3 345	32,5	3,524	1,512
716,5	16,4	2,855	1,219	3 470	36,6	3,540	1,563
898	17,8	2,953	1,250	4 320	39,65	3,635	1,598
973	18,0	2,988	1,255	4 715	43,7	3,673	1,640
1 063	18,8	3,027	1,274	5 330	45,35	3,727	1,657
1 137	20,4	3,056	1,310	5 765	43,0	3,761	1,633
1 291	20,85	3,111	1,319	6 040	48,9	3,781	1,689
1 373	21,3	3,138	1,328	6 810	54,7	3,833	1,738
1 487	23,15	3,172	1,365	7 390	57,4	3,869	1,759
1 633	25,0	3,213	1,398	7 600	54,3	3,881	1,735
1 960	26,75	3,292	1,427	7 780	59,3	3,891	1,773
2 070	27,2	3,316	1,435	8 450	62,8	3,927	1,798
2 080	26,1	3,318	1,417	8 830	58,9	3,946	1,770
2 243	28,7	3,351	1,458	10 140	64,6	4,006	1,810
2 327	28,75	3,367	1,459	11 340	71,6	4,055	1,855
2 430	28,75	3,386	1,459	13 440	77,5	4,128	1,889
2 647	30,1	3,423	1,479	15 090	86,7	4,179	1,938
2 888	33,6	3,461	1,526	16 975	91,3	4,230	1,960
3 165	34,3	3,500	1,535	19 270	102	4,285	2,009
3 225	34,85	3,509	1,542	20 300	105	4,308	2,021
3 255	35,4	3,513	1,549	22 000	111	4,342	2,045

Если точки ($\log x$, $\log y$) нанести на миллиметровку (см. черт. 557), то они расположатся приближенно прямолинейно. Даже по способу натянутой нити можно получить неплохой результат; напр., если провести прямую через точки (3; 1,25) и (4,3; 2):

$$Y = 0{,}58\ X - 0{,}49,$$

то получим:

$$y = 0{,}33 \cdot x^{0{,}58}.$$

Метод уравновешивания погрешностей даст в этом случае:

$$y = 0{,}41 \cdot x^{0{,}55}.$$

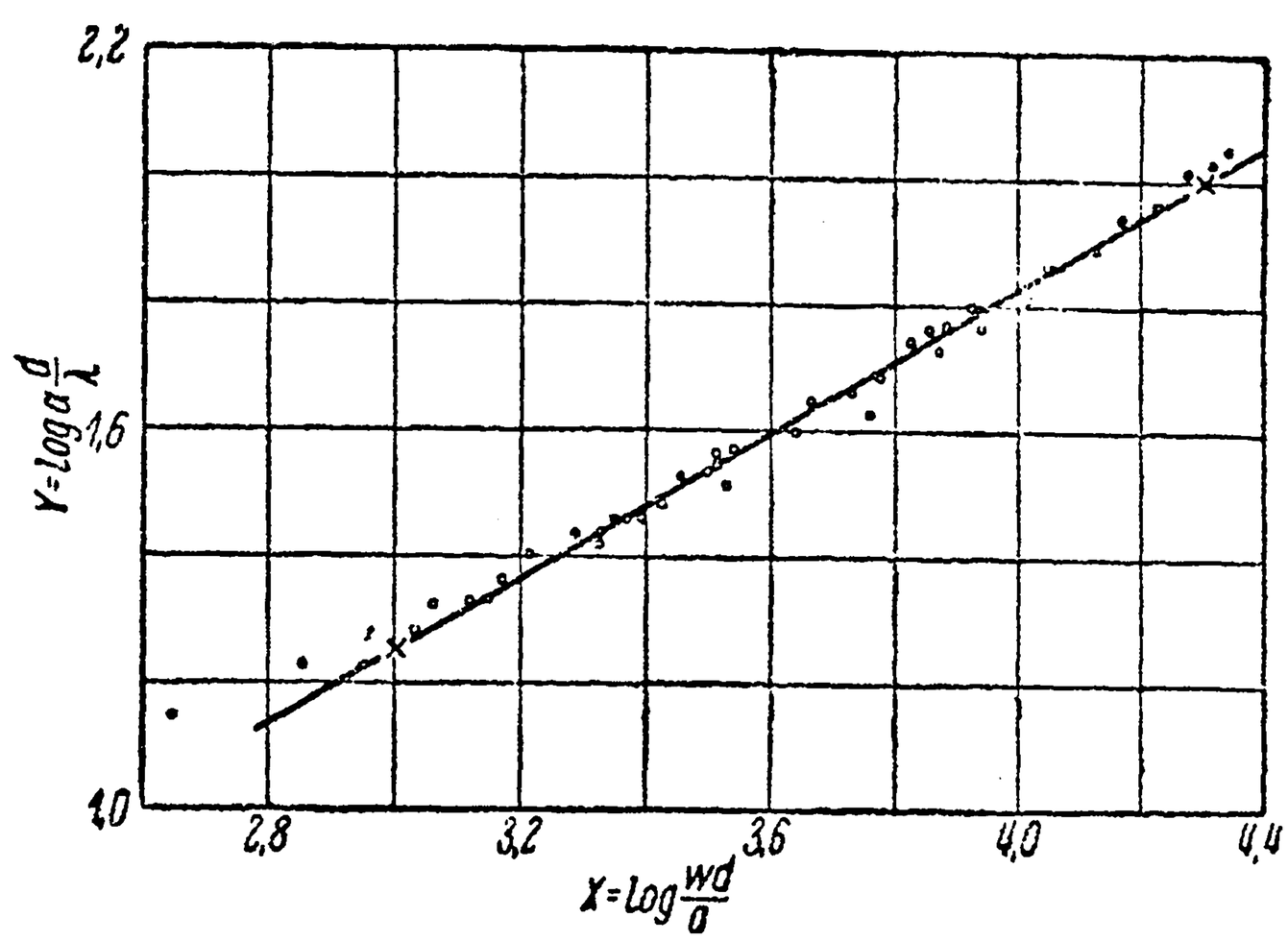
Впрочем правильнее отбросить первые два опыта, которым отвечают точки, слишком уклоняющиеся от прямой (эти отклонения могут быть приписаны случайным причинам); тогда получится другой — повидимому лучший — результат:

$$y = 0{,}36 \cdot x^{0{,}567}.$$

Нахождение формул рассматриваемого типа облегчается при помощи так называемой *логарифмической бумаги*.

В главе II мы видели, какое важное значение имеет *логарифмическая шкала* [n° 11], т. е. такая шкала, в которой отсчету x соответствует отрезок длины $\log x$. Если подобную шкалу нанести на горизонтальную и вертикальную оси, то на них можно построить *логарифмическую сетку*, которая своей неравномерностью в обоих направлениях резко отличается от обычной равномерной сетки; такая логарифмическая сетка изображена на черт. 558. В продаже имеется „логарифмическая бумага", с нанесенной на ней логарифмической сеткой.

Пользуясь логарифмической бумагой, можно особенно просто решать вопросы, связанные с формулами вида (16). Мы уже знаем, что, если по горизонтали, вместо x, откладывать $X = \log x$, а по вертикали, вместо y, откладывать $Y = \log y$, то зависимость (16) геометрически изобразится в виде прямой линии. Но на этот раз логарифмическая сетка избавляет нас от необходимости предварительно вычислять эти логарифмы, ибо, беря на горизонтальной и вертикальной (логарифмических!) шкалах просто отсчеты x и y, мы тем самым автоматически откладываем именно их логарифмы.



Черт. 557.

Если прямолинейный график зависимости (16) уже начерчен, то по нему непосредственно можно устанавливать значения y, отвечающие произвольно взятым значениям x. Для примера на черт. 558 представлены графики зависимостей

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = \sqrt{x},\ y = \sqrt[3]{x},$$

а также зависимости (площади S круга и его радиуса r):

$$S = \pi r^2.$$

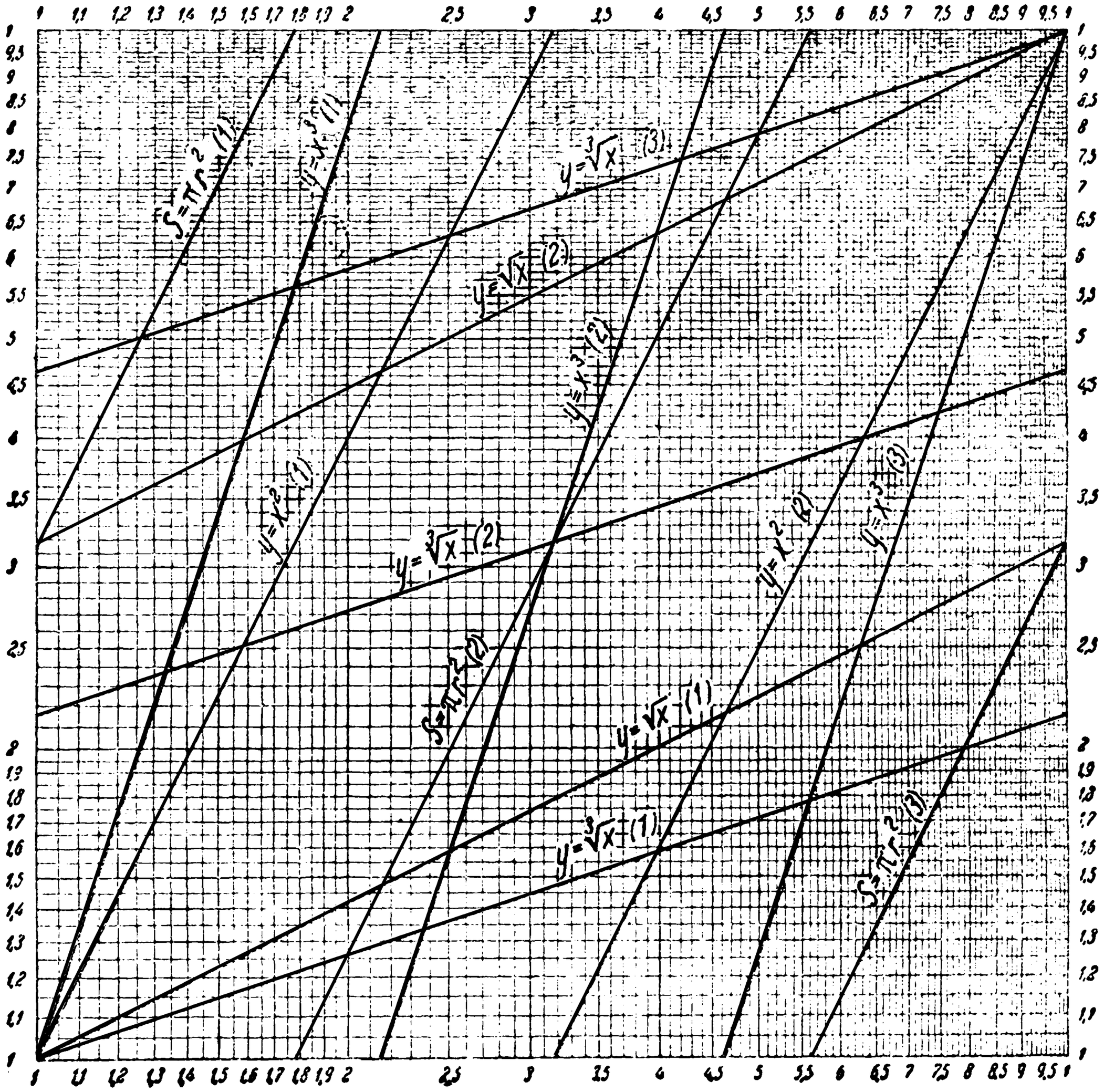
[В координатах (X, Y) уравнения этих прямых будут соответственно:

$$Y = 2X,\ Y = 3X,\ Y = \frac{1}{2}X,\ Y = \frac{1}{3}X \text{ и } Y = 2X + 0{,}497.]$$

По ним читатель легко установит, напр., что $2{,}7^3 = 19{,}7$, $\sqrt{7{,}5} = 2{,}74$ или что радиусу круга 3,7 отвечает площадь 43.

Читателя может удивить наличие на чертеже двух линий квадратов и квадратных корней, трех линий кубов, кубических корней и площадей круга. Остановимся для примера на квадратах. Для того чтобы

получить квадраты, бо́льшие десяти, нужно было бы распространить чертеж еще вверх. Так как в этой верхней своей части логарифмическая сетка совершенно тождественна с начерченной,* то мы просто опустили верхнюю часть нашей линии квадратов, так что при пользовании второй частью линии квадратов отсчеты сбоку должны быть увеличены в 10 раз. Аналогично этому, для того чтобы



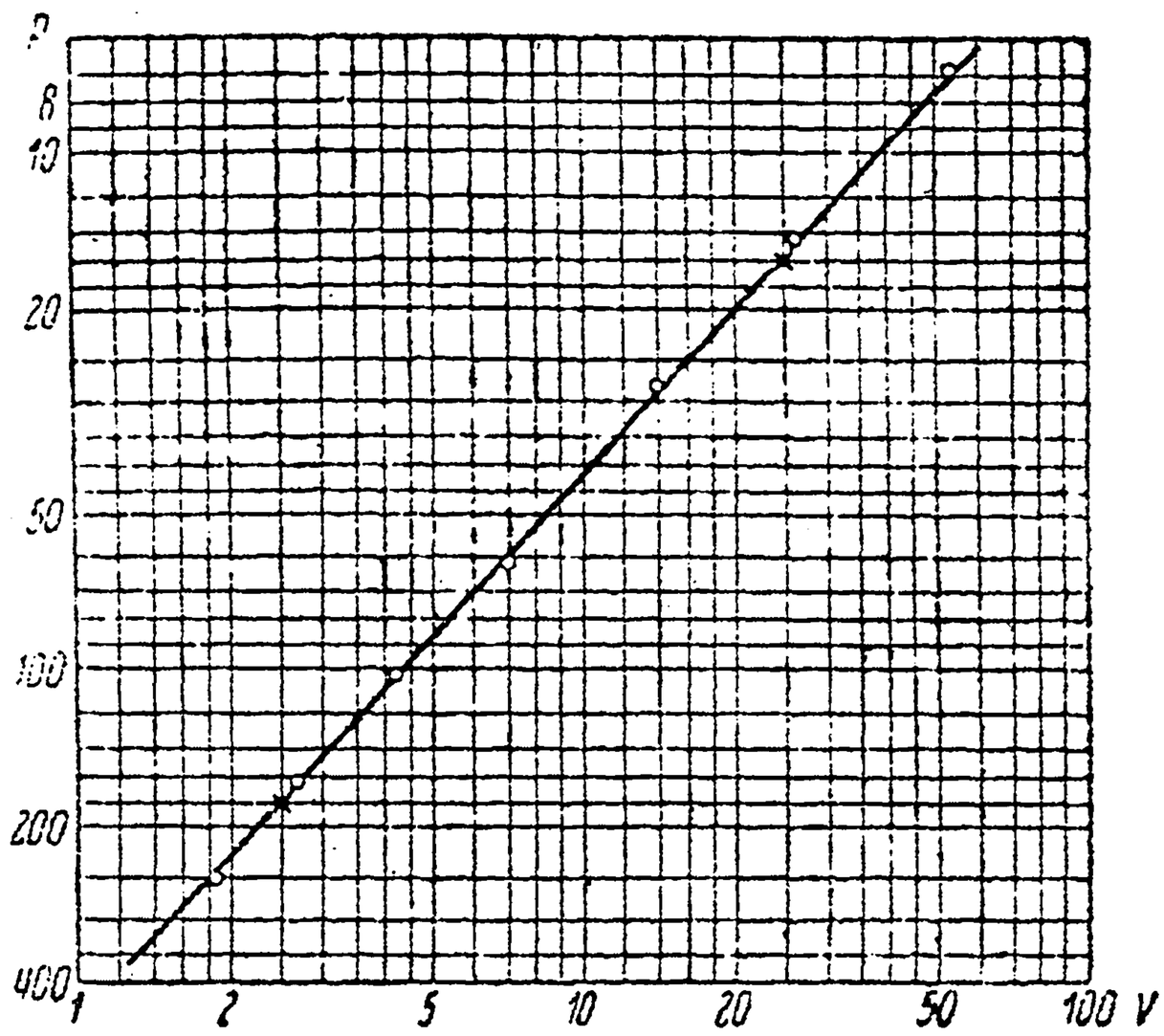
Черт. 558.

получить квадратные корни, бо́льшие десяти, нужно было бы продолжить чертеж направо; вместо этого мы передвинули правую часть линии налево, с тем чтобы — при пользовании ею — увеличивать отсчеты понизу в 10 раз.

При построении эмпирических формул вида (16), логарифмическая бумага позволяет без вычислений сразу установить пригодность

* В этом сказывается та своеобразная *периодичность* делений логарифмической шкалы, о которой упоминалось уже в главе II, стр. 30).

или непригодность формулы такого вида. Сама прямая определяется по *способу натянутой нити*; зная коэффициенты уравнения прямой (19), затем уже нетрудно восстановить формулу (16). Заметим, впрочем, что в виду большей трудности интерполирования на логарифмической сетке на ней получаются обыкновенно несколько более грубые результаты.



Черт. 559.

Примеры и задачи. 6. Вернемся к задаче 1, рассмотренной выше. На черт. 559 точки (v, p) нанесены непосредственно на логарифмическую сетку. Прямая проведена через узловые точки, отвечающие $v = 25$, $p = 16$ и $v = 2{,}5$, $p = 180$, с координатами

(1,398; 1,204) и (0,398; 2,255).

Уравнение прямой:

$$Y + 1{,}05\,X = 2{,}673,$$

откуда — если от логарифмов вернуться к числам —

$$pv^{1,05} = 471.$$

Предполагается читателю наново решить с помощью логарифмической бумаги и остальные задачи 2 — 5.

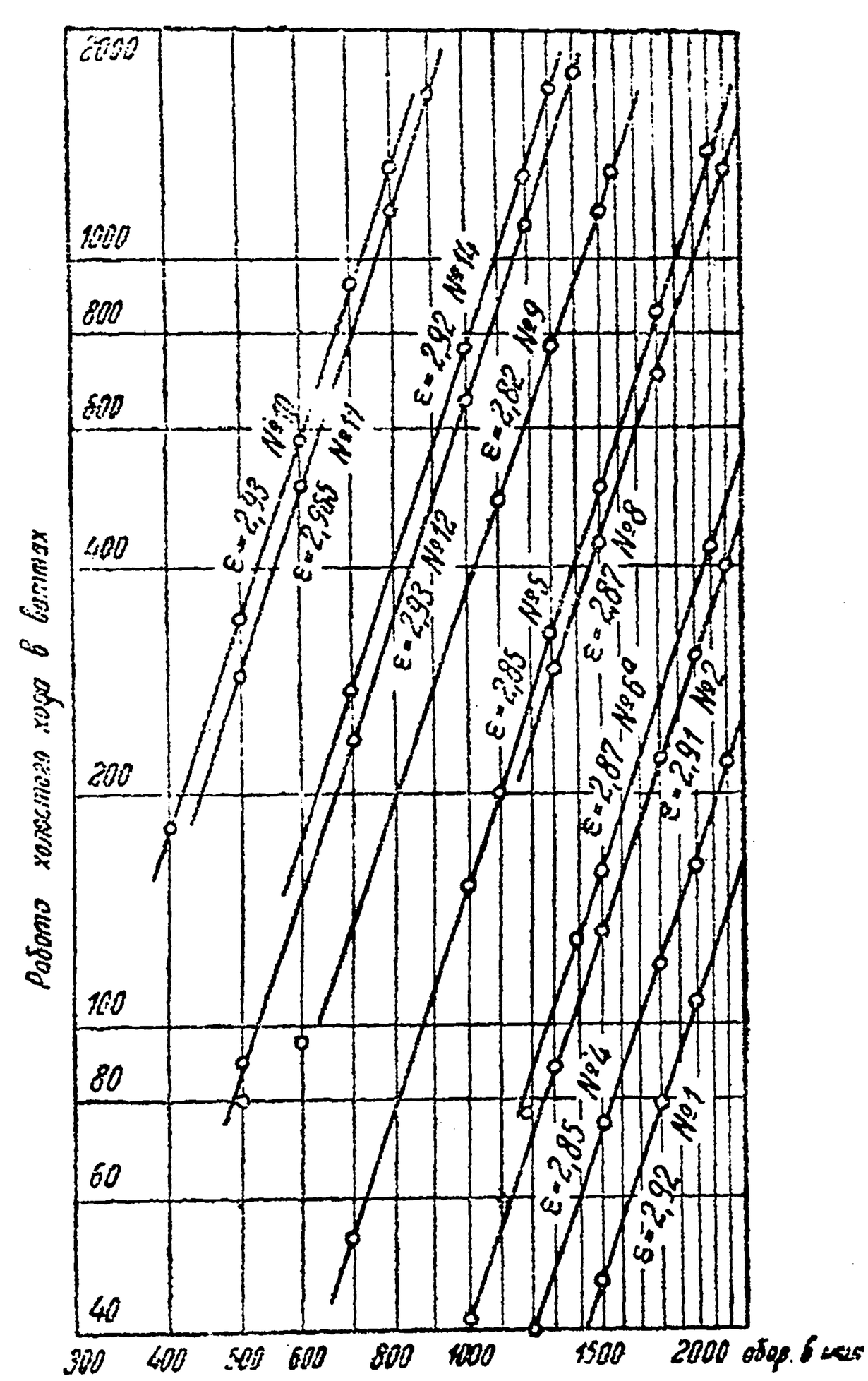
7. На черт. 560 приведены (на логарифмической сетке) результаты ряда опытов, определявших работу W (ватт) холостого хода (работу трения) колеса паровой турбины, в зависимости от числа оборотов n (в мин.). Прямолинейное расположение точек сразу указывает на зависимость вида:

$$W = W_0 \cdot n^{\varepsilon}.$$

Определить ε.

Указание. Поскольку интересен только показатель ε, достаточно определить угловой коэффициент каждой из прямых, разделив разность ординат двух ее точек (измеренную по масштабу) на разность абсцисс.

Значения ε приведены на чертеже; имеем $\varepsilon \doteq 2{,}9$, или, округляя, $\varepsilon \doteq 3$.



Черт. 560.

8. Скорость резания v (м/мин.) и площадь поперечного сечения

стружки F (мм²) обыкновенно связываются эмпирической формулой вида:

$$v = \frac{c}{\sqrt[\varepsilon]{F}}.$$

Она, разумеется, подходит под тип (16), ибо может быть переписана в виде

$$v = c \cdot F^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Для хромониккелевой стали были получены следующие опытные данные:

F	1,1	1,4	1,7	2,1	2,6	4,7	6,1	7,0	10,0	12,8	16,5	20,8	40,6
v	25,0	22,7	22,1	19,8	17,0	12,3	10,7	10,0	8,2	6,7	5,6	5,0	3,5

а для мартеновской стали:

F	1,4	1,9	2,2	2,5	2,7	3,3	3,8	5,9	7,5	9,0	9,5
v	30,8	27,8	27,0	25,2	24,2	23,0	22,1	17,9	16,0	14,8	14,5
F	13,8	14,8	18,0	19,9	22,0	25,0	28,0	31,8			
v	12,4	12,0	11,0	10,4	10,1	9,5	9,0	8,4			

Определить для этих случаев постоянные c и ε.

Указание. Отметив точки (F, v) на логарифмической сетке и проведя (приближенно) через них прямую, установить, какие значения v_1 и v_{10} соответствуют $F = 1$ и $F = 10$. Тогда, очевидно,

$$c = v_1, \quad -\frac{1}{\varepsilon} = \log v_{10} - \log v_1.$$

Отв. В первом случае: $v_1 = 29$, $v_{10} = 7{,}8$, так что $c = 29$ и

$$-\frac{1}{\varepsilon} = 0{,}892 - 1{,}462 = -0{,}570 = -\frac{1}{1{,}75},$$

откуда $\varepsilon = 1{,}75$; во втором случае: $v_1 = 36$, $v_{10} = 14{,}0$, $c = 36$, $\varepsilon = 2{,}44$.

313. Формулы вида $y = \beta \cdot \alpha^x$. Полулогарифмическая бумага. Показательная формула

$$y = \beta \cdot \alpha^x \tag{20}$$

также легко приводится к линейной: стоит лишь прологарифмировать ее:

$$\log y = x \cdot \log \alpha + \log \beta$$

и положить

$$Y = \log y, \quad a = \log \alpha \quad \text{и} \quad b = \log \beta, \tag{21}$$

чтобы получить между величинами x и Y линейную зависимость

$$Y = ax + b. \tag{22}$$

На этот раз по горизонтальной оси откладывается, попрежнему, x и лишь по вертикальной оси, вместо y, следует откладывать $Y = \log y$. Для пригодности формулы (20) нужно, чтобы точки (x, Y), отвечающие опытным данным, располагались приближенно прямолинейно. Коэффициенты a и b уравнения прямой определяются как обычно (*методом*

натянутой нити, либо же *методом уравновешивания погрешностей*),* а затем, переходя от логарифмов к числам [см. (21)], восстанавливаются постоянные α и β формулы (20).

Заметим, что обыкновенно формулу (20) пишут в равносильной форме:

$$y = \beta \cdot e^{\gamma x}. \tag{23}$$

В этом случае, как легко убедиться логарифмированием, множитель γ связан с угловым коэффициентом a формулы (22) такой зависимостью:

$$\gamma \cdot \log e = a, \text{ откуда } \gamma = \frac{a}{\log e} = \frac{a}{0{,}43429} = 2{,}3026\, a.$$

Примеры и задачи. 1. Если исходить из закона охлаждения Ньютона [74, 6], то температура θ° охлаждающегося тела, помещенного в среду температуры 0°, с течением времени уменьшается по закону:

$$\theta = \theta_0 \cdot e^{-kt},$$

причем коэффициент k определяется из опыта.** Опытные данные приведены в таблице:

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
θ	9,5	7,0	6,3	5,1	3,9	3,2	2,7	2,1	1,7	1,4	1,1

причем время измерялось в минутах. Найти k.

Решение. Вычислив значения $Y = \log \theta$:

0,978, 0,845, 0,799, 0,708, 0,591, 0,505, 0,431, 0,322, 0,230, 0,146, 0,041

для определения коэффициентов формулы

$$Y = at + b$$

прибегнем к методу уравновешивания погрешностей, объединяя в группы первые шесть и последние пять наблюдений. Мы придем к уравнениям:

$$75a + 6b = 4{,}426, \quad 200a + 5b = 1{,}170,$$

откуда $a = -0{,}018315$, $b = 0{,}9666$. Тогда

$$k = \frac{0{,}018315}{0{,}43429} \doteq 0{,}042.$$

Так как $b = \log \theta_0$, то $\theta_0 = 9{,}26$ и окончательно

$$\theta = 9{,}26 \cdot e^{-0{,}042\, t}.$$

Примерно такие же результаты получаются и с помощью натянутой нити.

Читателя не должно удивлять то обстоятельство, что при $t = 0$ отсюда получается $\theta_0 = 9{,}26^\circ$, вопреки непосредственному измерению, давшему $9{,}5^\circ$. Это—явление того же порядка, что и расхождение нашей формулы с данными опыта при других значениях t! Дело в том, что измерения могут содержать погрешности, которые мы „сглаживаем" нашей формулой; с другой стороны, конечно и закон Ньютона лишь грубо характеризует действительность.

---

* По поводу применения последнего метода и здесь можно было бы указать [как и в n° 312], что уравновешивание погрешностей в $\log y$ не равносильно уравновешиванию погрешностей в y.

** Этот множитель k равен произведению „коэффициента теплопередачи" α на площадь F наружной поверхности тела [ср. 278, (88)].

2. Для плотности воздуха ρ (кг/м³) на различных высотах H (км) над уровнем моря были получены следующие значения:

H	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6
ρ	1,198	1,135	1,071	1,021	0,973	0,921	0,817	0,732	0,659

Найти зависимость между ρ и H в показательной форме, по методу натянутой нити.

Решение. Можно для высот взять масштаб: 1 км = 2 см, а для логарифмов ρ: 0,1 = 4 см. Проведенная прямая отсекает на вертикальной оси отрезок 0,104 и проходит через точку (3,75; — 0,075). По этим данным:

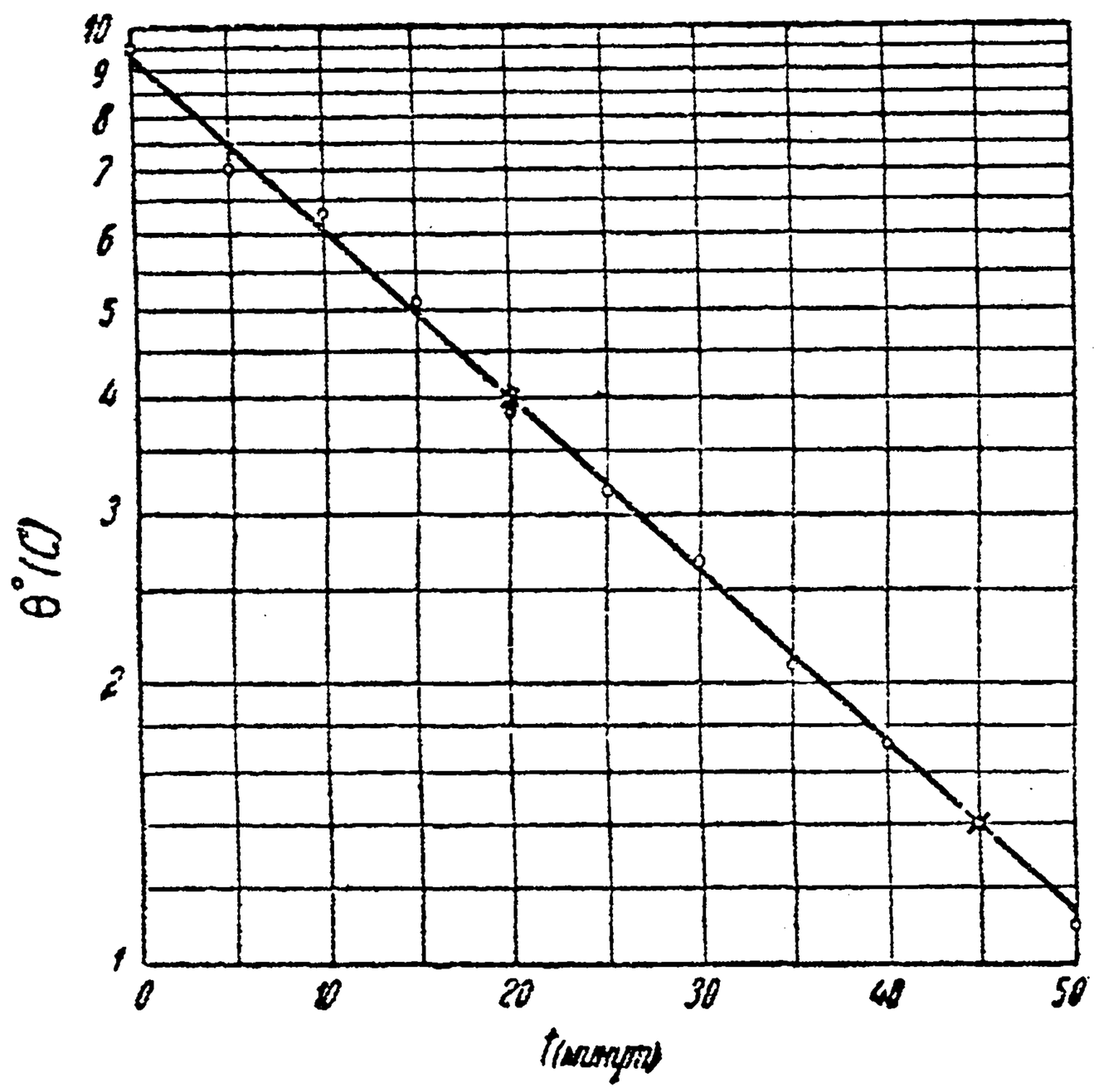
$$\log \rho = -0{,}048\,H + 0{,}104,$$

так что

$$\rho = 1{,}27 \cdot 10^{-0{,}048\,H} = 1{,}27 \cdot e^{-0{,}110\,H}.$$

Близкий результат получается и по методу уравновешивания погрешностей.

Составление формул показательного типа облегчается применением *полулогарифмической бумаги*. На ней нанесена *полулогарифмическая сетка*, в основе которой лежит обыкновенная равномерная шкала по одной оси (скажем, горизонтальной) и логарифмическая шкала по другой оси (вертикальной). Такая сетка изображена, напр., на черт. 561; по одному измерению она равномерна и лишь по другому измерению отличается характерными сгущениями логарифмической шкалы.



Черт. 561.

Зависимость вида (23), если по горизонтальной оси откладывать x, а по вертикальной $Y = \log y$, геометрически изобразится в виде прямой линии. При пользовании полулогарифмической сеткой откладывание логарифмов по вертикали производится автоматически. В следующих примерах и задачах предлагается прибегнуть к полулогарифмической бумаге.

Примеры и задачи. 3. Прежде всего решим с ее помощью задачу 1. Решение непосредственно ясно из черт. 561. Прямую можно провести, напр., через узловые точки, отвечающие $t = 20$, $\theta = 4{,}0$ и $t = 45$, $\theta = 1{,}4$; их координаты будут

$$(20;\ 0{,}602) \text{ и } (45;\ 0{,}146),$$

так что уравнение прямой, в координатах t и Y ($= \log \theta$), имеет вид:

$$Y = 0{,}967 - 0{,}01824\,t.$$

Отсюда

$$\theta = 9{,}27 \cdot e^{-0{,}042\,t}$$

— результат почти тождественный с полученным выше!

Пусть читатель наново решит и зад. 2.

4. Исследование зависимости коэффициента трения μ в подшипнике (при постоянной скорости) от температуры t° привело к следующим результатам:

t	120	110	100	90	80	70	60
μ	0,0051	0,0059	0,0071	0,0085	0,0102	0,0124	0,0148

Выяснить с помощью полулогарифмической бумаги пригодность формулы типа (23) и установить ее коэффициенты.

Указ. Помня о „периодичности" логарифмической шкалы, можно — если отсчеты идут от 1 до 100 — читать их как тысячные. *Отв.* Прямая проходит, примерно, через точки, отвечающие $t = 62{,}5$, $\mu = 0{,}0140$ и $t = 132{,}5$, $\mu = 0{,}0040$. Окончательно,

$$\mu = 0{,}043 \cdot e^{-0{,}018\,t}$$

[Проверить методом уравновешивания погрешностей!]

5. Для определения коэффициента трения μ пенькового каната *a*) по необработанному дереву и *b*) по полированному дереву был произведен ряд опытов, устанавливающих величину наибольшего груза S_1 (кг), который уравновешивается данным грузом $S_0 = 2$ кг при помощи переброшенного через деревянный шкив каната, при различных углах обхвата ω. Результаты опытов сведены в таблицу:

ω		30° 0,524	60° 1,047	90° 1,571	120° 2,094	150° 2,618	180° 3,142	210° 3,665	240° 4,189	270° 4,712	300° 5,236
S_1	*a*)	2,6	3,4	4,4	5,7	7,4	9,6	12,5	16,3	21,1	27,5
	b)	2,4	2,8	3,4	4,0	4,7	5,6	6,7	8,0	9,5	11,2

Установить значения μ с помощью полулогарифмической бумаги, исходя из известной формулы Эйлера [260, (13)]:

$$S_1 = S_0 \cdot e^{\mu\omega}.$$

Отв. *a*) $\mu = 0{,}50$, *b*) $\mu = 0{,}33$.

314. Формулы вида $y = ax^2 + bx + c$. Мы исчерпали все встречающиеся на практике виды эмпирических формул, содержащих два (подлежащих определению) коэффициента. Во всех этих случаях, как мы видели, дело всегда можно свести к проведению прямой линии (*метод натянутой нити*). Эта легко выполнимая операция обыкновенно дает при определении коэффициентов достаточную для инженера точность, если только выбранный тип формулы достаточно согласуется с опытными данными. Установление последнего обстоятельства также было нетрудно, ибо сводилось к проверке (приближенно) прямолинейного расположения ряда точек.

Мы переходим теперь к формулам, содержащим большее число коэффициентов. Из них наиболее важными являются *параболические формулы*, дающие представление y в виде полинома, целого относительно x, в особенности, в виде полинома второй степени:

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{24}$$

Мы уже знаем [146], что для определения трех коэффициентов a, b, c этого уравнения параболы нужно знать три точки (x_1, y_1),

(x_2, y_2), (x_3, y_3), через которые она проходит. Тогда либо находят коэффициенты из системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= ax_1^2 + bx_1 + c, \\ y_2 &= ax_2^2 + bx_2 + c, \\ y_3 &= ax_3^2 + bx_3 + c, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

либо пользуются интерполяционной формулой Лагранжа [146, (22)].

Эти три точки часто выбирают из числа тех точек, которые изображают опытные данные; но иной раз — при разбросанности точек — выгоднее поступить иначе: по лекалу проводят кривую, которая всего лучше отвечала бы „опытным" точкам, и на ней именно и берут нужные три точки. Оба приема мы объединим названием *метода выбранных точек* (он тесно примыкает к *методу натянутой нити*!).

Можно в данном случае использовать и знакомый нам *метод уравновешивания погрешностей*, но так как для определения трех коэффициентов нужны три уравнения, то опытные данные приходится разбивать на три группы. Если (3) дает одну из этих групп, то, как читатель легко сообразит, ей будет отвечать уравнение

$$\sum_i x_i^2 \cdot a + \sum_i x_i \cdot b + n \cdot c = \sum_i y_i, \qquad (26)$$

как условие уравновешивания погрешностей в пределах этой группы.

Вернемся, для примера, к задаче 2 n° 146, в которой требовалось установить параболический закон зависимости:

$$V = aD^2 + bD + c$$

скорости V (м/сек) течения реки от относительной глубины D, исходя из результатов непосредственного измерения:

D	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
V	0,957	0,969	0,976	0,978	0,975	0,968	0,954	0,939	0,918	0,804

Разбивая эти результаты на группы (4, 3 и 3), получим такие три уравнения, по образцу (26):

$$\begin{aligned} 0{,}14\,a + 0{,}6\,b + 4\,c &= 3{,}880 \\ 0{,}77\,a + 1{,}5\,b + 3\,c &= 2{,}897 \\ 1{,}94\,a + 2{,}4\,b + 3\,c &= 2{,}751. \end{aligned}$$

Отсюда

$$a = -0{,}2248, \quad b = 0{,}130, \quad c = 0{,}958.$$

Сравните этот результат с полученным в n° 146; решите по *методу уравновешивания погрешностей* и 1 задачу этого n°.

Примеры и задачи. 1. По данным, приведенным в задаче 2 n° 310 установить формулу вида:

$$r = at^2 + bt + c. \qquad (27)$$

Решение. *а*) Сначала проведем „параболу" через три точки (100; 539,4), (150; 506,0) и (200; 464,2). Взяв ее уравнение в виде:

$$r = A(t - 100)^2 + B(t - 100) + C, \qquad (27\,a)$$

без труда найдем:

$$C = 539{,}4; \quad 2500\,A + 50\,B + C = 506{,}0; \quad 10\,000\,A + 100\,B + C = 464{,}2,$$

так что $B = -0{,}584$, $A = -0{,}00168$. Теперь—если угодно—легко получить формулу и в виде (27).

b) Желая использовать метод уравновешивания погрешностей, разобьем данные на три группы (4, 4 и 3). Чтобы облегчить вычисления, будем исходить из формулы (27 *a*). Для определения коэффициентов A, B, C получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2119{,}3 &= 1\,400\,A + 60\,B + 4\,C, \\ 2008{,}3 &= 12\,600\,A + 220\,B + 4\,C, \\ 1420{,}0 &= 12\,500\,A + 270\,B + 3\,C, \end{aligned}$$

откуда $A = -0{,}00174$, $B = -0{,}572$, $C = 539{,}0$.

Ср. результаты вычислений как по одной, так и по другой из полученных формул—с данными таблицы. Совпадение — удовлетворительное.

2. По данным, приведенным в задаче 4 n⁰ 310, установить методом уравновешивания погрешностей зависимость вида

$$\omega = at^2 + bt + c$$

и оценить погрешности. (Проверьте „уравновешивание" погрешностей!)

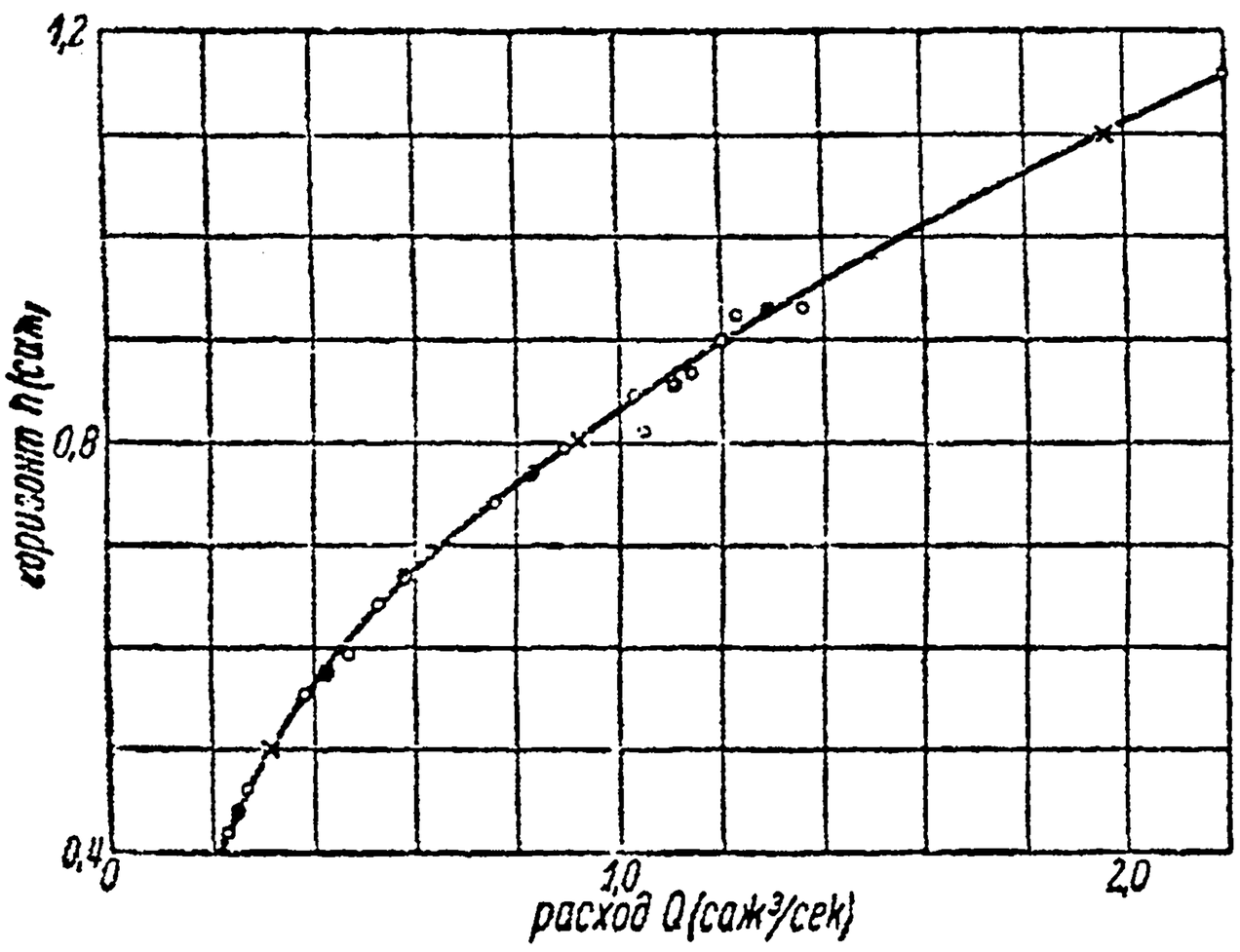
Отв. $\omega = 0{,}00179\,t^2 - 0{,}2064\,t + 8{,}166$. Погрешность $< 2\%$.

№ по порядку	h	Q	№ группы	Средн. зн. h	Средн. зн. Q
1	0,415	0,223	*1*	*0,435*	*0,246*
2	0,455	0,268			
3	0,554	0,387	2	*0,575*	*0,429*
4	0,595	0,471			
5	0,645	0,533	*3*	*0,668*	*0,586*
6	0,690	0,638			
7	0,745	0,772	*4*	*0,770*	*0,833*
8	0,795	0,894			
9	0,810	1,049	*5*	*0,855*	*1,106*
10	0,845	1,038			
11	0,865	1,186			
12	0,900	1,202			
13	0,920	1,221	*6*	*0,928*	*1,289*
14	0,935	1,356			
15	1,155	2,201	*7*	*1,155*	*2,201*

(к след. стр.)

Замечание. Дифференцируя полученную формулу, можно установить формулу для углового ускорения. Предлагается определить значения этого ускорения по методу n⁰ 64 и сравнить результаты. Использование эмпирической формулы (хотя и требующее большего труда), вообще, следует предпочесть, поскольку здесь сглаживаются случайные отдельные погрешности измерения, которые сказываются на значениях производной очень резко.

3. Наблюдения на водомерном посту над расходом воды Q (саж³/сек) в зависимости от горизонта воды h (саж) дали результаты, приведенные в табл. на стр. 301. Если нанести точки (h, Q) на чертеж (см. черт. 562, где, согласно обычаю, h откладывается по вертикали, а Q — по горизонтали), то становится ясным параболический характер зависимости. Однако, в виду некоторой разбросанности точек (и большого их числа) провести кривую затруднительно. Задача облегчится, если объединить точки в небольшие группы (как указано в таблице) и каждую группу точек заменить ее „центром тяжести" [как в задаче 7 n⁰ 311]. На начерченной после этого кривой берем три точки, отвечающие $h = 0{,}5$, 0,8, 1,1 (соответствующие значения Q будут: 0,31; 0,91, 1,96) и через них проводим параболу:



Черт. 562.

$$Q = 0{,}31 - 1{,}25\,h + 2{,}5\,h^2.$$

4. Опыты Стодола (Stodola) над соплами Лаваля привели к следующей зависимости между отношением $\frac{p_1}{p_x}$ давлений (в наиболее узкой части сопла и в любом его сечении) и отношением $\frac{f_x}{f_m}$ площадей сечений (любого и наименьшего):

$\frac{p_1}{p_x}$	$\frac{f_x}{f_m}$		
	a)	*b*)	*c*)
7,14	1,919	1,703	1,608
8,33	2,133	1,861	1,746
10	2,408	2,075	1,931
25	4,652	3,723	3,326
50	7,953	5,959	5,158
75	10,963	7,903	6,715
100	13,803	9,678	8,116
125	16,504	11,343	9,413
150	19,000	12,921	10,632
200	24,133	15,890	12,898

При этом столбец *a*) отвечает истечению влажного пара ($k = 1{,}135$), столбец *b*) — истечению перегретого пара ($k = 1{,}30$), наконец, столбец *c*) — истечению воздуха ($k = 1{,}40$).

Для каждого из трех случаев установить параболическую зависимость $\frac{p_1}{p_x}$ от $\frac{f_x}{f_m}$ (по способу уравновешивания погрешностей).

Отв. Для случая *а*), напр., имеем:

$$\frac{p_1}{p_x} = -5{,}8 + 6{,}326 \cdot \frac{f_x}{f_m} + 0{,}0947\left(\frac{f_x}{f_m}\right)^2.$$

315. Формулы вида $y = ax^3 + bx^2 + cx + д$. Если формула типа (24) не с достаточной точностью воспроизводит опытные данные, то иногда прибегают к параболе третьей степени, т. е. пытаются выразить зависимость между рассматриваемыми величинами формулой вида:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + д. \tag{28}$$

Для определения коэффициентов в этом случае, прежде всего, применим *метод выбранных точек*, но на этот раз нужно выбрать четыре точки (по числу коэффициентов), а дальше поступать так же, как и в случае параболы второй степени.

Можно, разумеется, и здесь использовать *метод уравновешивания погрешностей*, разбивая опытные данные на четыре группы.

Пример. 1. Возвращаясь к данным задачи 1 предыдущего n°, попытаемся выразить зависимость между r и t формулой:

$$r = A(t-100)^3 + B(t-100)^2 + C(t-100) + D.$$

Эту „параболу третьей степени" проведем через точки:

(100; 539,4), (130; 520,1), (170; 490,6) и (200; 464,2),

так что $D = 539{,}4$, а для определения остальных коэффициентов получается система

$$\begin{aligned} 27\,000\,A + 900\,B + 30\,C &= -19{,}3, \\ 343\,000\,A + 4\,900\,B + 70\,C &= -48{,}8, \\ 1\,000\,000\,A + 10\,000\,B + 100\,C &= -75{,}2. \end{aligned}$$

Отсюда $A = -0{,}0000069$, $B = -0{,}000655$, $C = -0{,}6175$.

Предлагаем читателю удостовериться в прекрасном совпадении результатов вычисления по полученной формуле с данными таблицы.

Если от эмпирической формулы требуется, чтобы она воспроизводила опытные данные с большой точностью, то в некоторых случаях можно даже наперед предвидеть, достаточна ли для этого квадратичная формула (24), либо нужно прибегнуть к полиному третьей степени (28), либо, наконец, и этого не достаточно. Такая возможность представляется, если значения независимой переменной x взяты равноотстоящими:

$$x_1,\ x_2 = x_1 + h,\ x_3 = x_2 + h, \ldots,\ x_n = x_{n-1} + h. \qquad (h > 0)$$

В этом именно предположении в n° 299 было установлено понятие о последовательных разностях функции $y = \varphi(x)$:

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x),\ \Delta^2\varphi(x) = \Delta[\Delta\varphi(x)] = \Delta\varphi(x+h) - \Delta\varphi(x), \ldots$$

Если $\varphi(x)$ есть многочлен k-ой степени, то (как упоминалось там) его k-ая разность сводится к постоянной, так что $(k+1)$-ая разность будет нулем.

Это свойство легко проверить на трехчлене второй степени:

$$y = \varphi(x) = ax^2 + bx + c.$$

Действительно,

$$\Delta\varphi(x) = [a(x+h)^2 + b(x+h) + c] - [ax^2 + bx + c] = 2ah \cdot x + (ah^2 + bh),$$

затем,

$$\Delta^2\varphi(x) = [2ah\cdot(x+h)+(ah^2+bh)] - [2ah\cdot x+(ah^2+bh)] = 2ah^2,$$

т. е. вторая разность сводится к постоянной. Если имеем многочлен третьей степени:

$$y = \varphi(x) = ax^3+bx^2+cx+\partial,$$

то легко усмотреть, что его разность

$$\Delta\varphi(x) = [a(x+h)^3+b(x+h)^2+c(x+h)+\partial] - [ax^3+bx^2+cx+\partial] =$$
$$= 3ah\cdot x^2+(3ah^2+2bh)\cdot x+(ah^3+bh^2+ch)$$

представляет собою трехчлен второй степени, так что (как мы видели) от нее вторая разность — которая как раз и будет третьей для исходного многочлена — обращается в постоянную, и т. д.

Можно показать, что упомянутое свойство характерно именно для целых многочленов.

После сказанного ясно, что если опытные данные точно воспроизводятся многочленом k-ой степени, то построенная по ним k-ая разность должна быть точно постоянной, и обратно. Практически, конечно, на абсолютную точность претендовать нельзя, как в виду погрешностей в опытных данных, так и в виду не полного соответствия им со стороны эмпирической формулы. Поэтому на практике довольствуются тем, что какая-либо k-ая разность оказывается приближенно постоянной, в пределах требуемой точности; и тогда заключают, что опытные данные для своего воспроизведения с нужной точностью требуют именно многочлена k-ой степени. Подчеркиваем, что пользоваться этим признаком имеет смысл только при большой точности данных, ибо малейшие в них погрешности очень чувствительно искажают разности!

Для примера вернемся к уже решенной задаче (см. пример 1). Последовательные разности там будут таковы:

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
539,4			
	—6,3		
533,1		—0,1	
	—6,4		—0,1
526,7		—0,2	
	—6,6		—0,1
520,1		—0,3	
	—6,9		0,0
513,2		—0,3	
	—7,2		0,0
506,0		—0,3	
	—7,5		—0,1
498,5		—0,4	
	—7,9		0,0
490,6		—0,4	
	—8,3		—0,1
482,3		—0,5	
	—8,8		0,0
473,5		—0,5	
	—9,3		
464,2			

Очевидно, что убывающую вторую разность нельзя счесть постоянной; наоборот, третья разность, колеблющаяся между —0,1 и 0, может быть почтена за постоянную — колебания можно связать с погрешностями округления значений y. Сле-

довательно, здесь можно было предвидеть хорошие результаты именно от применения многочлена третьей степени.

Пример. 2. Для упражнения предлагаем читателю решить, какой степени многочлен понадобится для представления следующей зависимости между сжатием x (мм) буфферной пружины и соответствующей нагрузкой y (кг):

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40
y	0	48,7	105,2	172,4	253,4	351,6	469,7	610,9	778,5

Отв. Лишь третья разность $\Delta^3 y$, колеблющаяся около 3,1, может быть приближенно принята за постоянную. Удовлетворительных результатов можно ждать лишь от многочлена третьей степени.

316. Формулы вида $y=\frac{ax+b}{x+c}$. Упомянем в заключение еще о формуле дробно-линейного вида:

$$y=\frac{mx+n}{px+q},$$

выражающей, как мы знаем [41, (25)], равнобочную гиперболу с осями, параллельными осям координат. Если (считая $p\neq 0$) разделить все коэффициенты m, n, p, q на p, то можно уравнение ее привести к виду:

$$y=\frac{ax+b}{x+c}, \tag{29}$$

так что определению подлежат всего лишь три независимых постоянных: a, b и c.

На практике обыкновенно пользуются *методом выбранных точек*, т. е. проводят гиперболу через три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), выбранных из числа данных или взятых на проведенной от руки кривой. Подставляя их координаты в уравнение (28), мы для определения трех неизвестных постоянных получаем такую систему из трех линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a\cdot x_1+b-c\cdot y_1&=x_1\cdot y_1,\\ a\cdot x_2+b-c\cdot y_2&=x_2\cdot y_2,\\ a\cdot x_3+b-c\cdot y_3&=x_3\cdot y_3. \end{aligned}$$

Примеры и задачи. 1. Опыты, устанавливающие коэффициенты трения скольжения μ между тормозными колодками литой стали и стальными бандажами, в зависимости от скорости v (км/час) поезда, привели к таблице:

v	8,1	16,1	21,8	43,9	65,8	87,6	96,5
μ	0,330	0,271	0,242	0,183	0,158	0,142	0,138

Если точки (v, μ) нанести на чертеж, то вырисуется кривая как раз гиперболического вида. Проведем гиперболу через первую, четвертую и седьмую точки для определения коэффициентов получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} 8{,}1\cdot a+b-0{,}330\cdot c&=8{,}1\cdot 0{,}330=2{,}6730,\\ 43{,}9\cdot a+b-0{,}183\cdot c&=43{,}9\cdot 0{,}183=8{,}0337,\\ 96{,}5\cdot a+b-0{,}138\cdot c&=96{,}5\cdot 0{,}138=13{,}3170. \end{aligned}$$

Отсюда

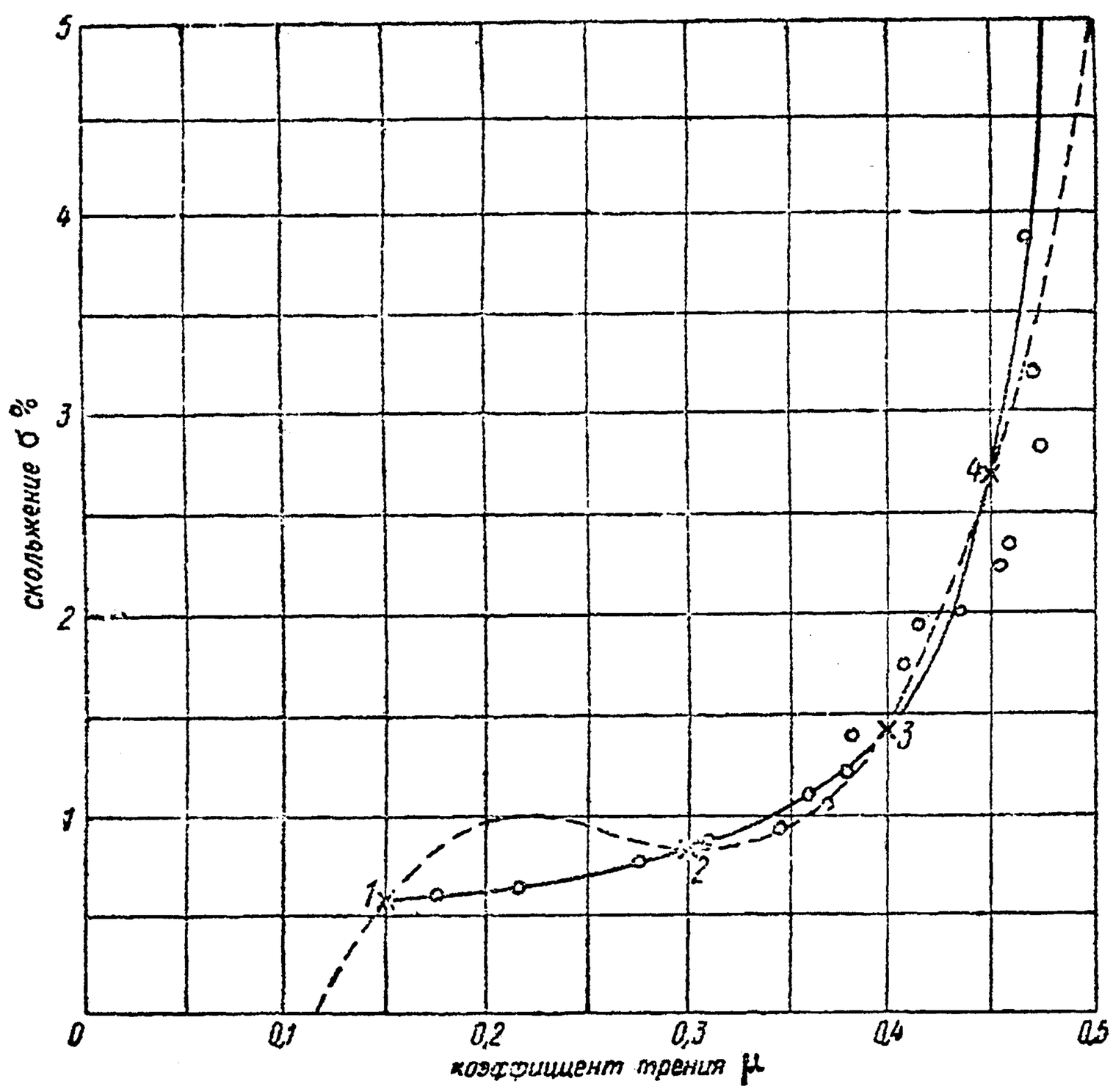
$$a = 0{,}8747, \quad b = 6{,}969, \quad c = 15{,}165,$$

так что

$$\mu = \frac{0{,}8747\,v + 6{,}969}{v + 15{,}165} = 0{,}4595\,\frac{1 + 0{,}01255\,v}{1 + 0{,}06594\,v}.$$

Совпадение с опытными данными по этой формуле получается превосходное.

2. В качестве второго примера мы исследуем диаграмму зависимости между коэффициентом трения μ и скольжением σ (в %) для фрикционных передач из фибры: опытные данные представлены на черт. 563 маленькими кружками. Как видим, точки эти лежат довольно неправильно, но кривая, начерченная сплошной линией, согласуется с ними неплохо. Каково ее уравнение?



Черт. 563.

Попытаемся сначала подыскать параболу третьей степени (28), проведем ее, напр., через точки *1, 2, 3, 4* начерченной кривой с координатами:

(0,15; 0,55), (0,3; 0,825), (0,4; 1,42), (0,45; 2,7).

Из уравнений:

$$\begin{aligned} 0{,}003375\,a + 0{,}0225\,b + 0{,}15\,c + d &= 0{,}55, \\ 0{,}027\,a + 0{,}09\,b + 0{,}3\,c + d &= 0{,}825, \\ 0{,}064\,a + 0{,}16\,b + 0{,}4\,c + d &= 1{,}42, \\ 0{,}091125\,a + 0{,}2025\,b + 0{,}45\,c + d &= 2{,}7 \end{aligned}$$

находим:

$$a = 381{,}8, \quad b = -308, \quad c = 80{,}5, \quad d = -5{,}89.$$

Однако кривая

$$y = 381{,}8\,x^3 - 308\,x^2 + 80{,}5\,x - 5{,}89, \tag{30}$$

изображенная на чертеже пунктиром, очевидно, плохо подходит к нашему случаю: она имеет максимум и минимум, совершенно не отвечающие действительному распределению точек.

Вглядываясь в чертеж, мы замечаем, что начерченная кривая (следуя опытным точкам) как слева внизу, так и справа наверху как бы выравнивается, что подсказывает нам мысль о гиперболе. На этот раз возьмем ее уравнение в виде [41]

$$y-\beta=\frac{a}{x-\alpha} \quad \text{или} \quad (x-\alpha)\cdot(y-\beta)=a.$$

Если провести гиперболу через точки *1, 2, 4* (здесь достаточно трех точек, ибо подлежат определению всего три коэффициента!), то это даст нам уравнения:

$$\begin{aligned}(0{,}15-\alpha)\cdot(0{,}55-\beta)&=a,\\(0{,}3-\alpha)\cdot(0{,}825-\beta)&=a,\\(0{,}45-\alpha)\cdot(2{,}7-\beta)&=a.\end{aligned}$$

Отсюда:

$$\alpha=0{,}5015,\quad \beta=0{,}1806,\quad a=-0{,}1298.$$

Кривая

$$y=0{,}1806-\frac{0{,}1298}{x-0{,}5015} \tag{30a}$$

почти точно совпадает с начерченной сплошной кривой и вполне удовлетворительно согласуется с опытными данными.

Этот пример весьма поучителен, ибо с ясностью подчеркивает важность правильного угадывания самой формы зависимости, которое не может быть подменено увеличением числа точек, через которые проводится кривая: кривая (30), проведенная через 4 точки, хуже отвечает опытным данным, чем проведенная всего через 3 точки кривая (30 *a*)!

Встречаются иной раз в технической практике эмпирические формулы и других, более сложных типов, но это случается редко, и мы на них не будет останавливаться.

317. Метод наименьших квадратов. Мы изложим теперь еще один вычислительный прием для определения коэффициентов эмпирических формул, известный под именем *метода наименьших квадратов* (Гаусс). Он играет важную роль при обработке опытных результатов в тех случаях, когда нужна большая точность.

Под погрешностью Δ будем разуметь (как и выше) разность между вычисленным по формуле значением y и наблюденным его значением. Раньше мы все время исходили из требования, чтобы эти погрешности взаимно уравновешивались, т. е. чтобы их алгебраическая сумма обращалась в нуль:

$$\sum \Delta_i=0. \tag{31}$$

Распространяя это требование на все наблюдения или на отдельные группы наблюдений, мы получали необходимое число уравнений для определения коэффициентов формулы.

Для метода Гаусса характерна другая исходная мысль: *наилучшими, т. е. наиболее согласованными с результатами опыта считаются такие значения коэффициентов, при которых сумма квадратов всех погрешностей*

$$S=\sum \Delta_i^2 \tag{32}$$

оказывается наименьшей (отсюда — и название метода). Таким образом здесь мы сталкиваемся с задачей разыскания наименьшего значения функции. Задача эта — для всех важных на практике случаев — будет решена в общем виде, и читателю будут сообщены практические приемы для непосредственного вычисления коэффициентов.

1°. Ознакомление с методом наименьших квадратов начнем с простейшей задачи: найти такое постоянное значение $y=a$, которое было бы наилучше согласовано с результатом n отдельных измерений величины y:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

[308]. Из погрешностей

$$\Delta_1 = a - y_1, \ \Delta_2 = a - y_2, \ \ldots, \ \Delta_n = a - y_n$$

составим сумму квадратов:

$$S = \sum_i \Delta_i^2 = \sum_i (a - y_i)^2.$$

Здесь $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть постоянные, полученные из опыта, числа и единственной переменной, от которой зависит величина S, является коэффициент a. Надлежит найти то значение a, при котором эта величина S будет наименьшей. С этой целью, как обычно [80, 83], вычислим производную от S по a:

$$S_a' = 2 \sum_i (a - y_i) = 2 \sum_i \Delta_i$$

и приравняем ее нулю. В сущности, мы возвращаемся таким образом к прежнему условию (31)! Отсюда, как и прежде,

$$a = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n};$$

это значение a, действительно, доставляет выражению S наименьшее значение, ибо $S_a'' = 2n > 0$.

Итак, в рассмотренной простейшей задаче метод наименьших квадратов приводит в точности к тому же результату, что и прежний метод. Иначе обстоит дело в других случаях.

2°. Пусть по опытным результатам:

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

(33)

требуется установить формулу вида:

$$y = ax$$

[309]. Составим величину S:

$$S = \sum_i \Delta_i^2 = \sum_i (ax_i - y_i)^2,$$

и снова решаем задачу на минимум; здесь

$$S_a' = 2 \sum_i (ax_i - y_i) \cdot x_i = 2a \cdot \sum_i x_i^2 - 2 \sum_i x_i y_i$$

и из условия $S_a' = 0$ находим:

$$a = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{34}$$

Так как $S_a'' = 2 \sum_i x_i^2 > 0$, то найденное значение a, действительно, доставляет величине S наименьшее значение. Как видим, сравнивая (34) и (5) [309], по методу наименьших квадратов получается другое выражение, нежели по методу уравновешивания погрешностей. Впрочем, в численных результатах разница обычно невелика.

Заметим, что Гауссом введены другие обозначения для сумм однотипных слагаемых, разнящихся лишь указателями; именно, он полагает:

$$\sum_i x_i = [x], \quad \sum_i x_i^2 = [x^2], \quad \sum_i x_i y_i = [xy], \text{ и т. п.}$$

В этих обозначениях, формула (34) перепишется так:

$$a = \frac{[xy]}{[x^2]}. \tag{34 a}$$

Вернемся для примера к таблице (4) n⁰ 309. Мы воспроизводим ее, со всеми дальнейшими необходимыми вычислениями.

θ	v	θ^2	θv	$0{,}034\,\theta$	Δ	Δ^2
220	8,81	48 400	1938,2	7,48	— 1,33	1,77
200	7,40	40 000	1480,0	6,80	— 0,60	0,36
180	6,10	32 400	1098,0	6,12	+ 0,02	0,00
160	4,89	25 600	782,4	5,44	+ 0,55	0,30
140	3,88	19 600	543,2	4,76	+ 0,88	0,77
120	3,02	14 400	362,4	4,08	+ 1,06	1,12
100	2,30	10 000	230,0	3,40	+ 1,10	1,21
		190 400 $[\theta^2]$	6434,2 $[\theta v]$		+ 1,68 $[\Delta]$	5,53 $[\Delta^2]$

По формуле (34 a) находим:

$$a = \frac{[\theta v]}{[v^2]} = \frac{6434{,}2}{190\,400} \doteq 0{,}034.$$

В пятом столбце приведены вычисленные по формуле

$$v = 0{,}034\,\theta$$

значения v, а в следующих — соответствующие погрешности $\Delta_i = 0{,}034\,\theta_i - v_i$ и их квадраты. Мы видим, что сумма $\sum_i \Delta_i = [\Delta]$ уже *не* нуль. Зато сумма квадратов

$$S = \sum_i \Delta_i^2 = [\Delta^2]$$

получает свое наименьшее значение 5,53. Если, например, взять те значения a, 0,031 и 0,0325, которые были получены в n⁰ 309 другим путем, то, как нетрудно проверить, им отвечают бо́льшие значения S, именно: 7,01 и 5,84.

При пользовании *методом наименьших квадратов* естественно самое качество формулы оценивать по величине S или по величине *средней квадратической погрешности*

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} S}.$$

В только что рассмотренной задаче, например, мы получаем:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot 5{,}53} = 0{,}89,$$

в то время как при ранее найденных значениях a имели бы, соответственно, $\delta = 1{,}00$ или 0,91.

3⁰. Если по опытным данным (33) нужно установить линейную формулу

$$y = ax + b$$

[310], то для определения ее коэффициентов a и b будем исходить из того же основного требования, чтобы сумма квадратов погрешностей

$$S = \sum_i \Delta_i^2 = \sum_i (ax_i + b - y_i)^2$$

была наименьшей. Но на этот раз величина S зависит от двух переменных a и b ($x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ — данные числа). Для того чтобы найти их значения, доставляющие S наименьшее значение, нужно [как мы знаем, 228] приравнять нулю обе частные производные S по a и по b:

$$S_a' = 2\sum_i (ax_i + b - y_i) \cdot x_i, \quad S_b' = 2\sum_i (ax_i + b - y_i).$$

Таким путем составляется система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_i x_i^2 \cdot a + \sum_i x_i \cdot b &= \sum_i x_i y_i, \\ \sum_i x_i \cdot a + n \cdot b &= \sum_i y_i \end{aligned} \qquad (35)$$

или в обозначениях Гаусса:

$$\begin{aligned} [x^2]\cdot a + [x]\cdot b &= [xy], \\ [x]\cdot a + \ \ n\cdot b &= [y]. \end{aligned} \qquad (35\,a)$$

Из этих уравнений (их называют *нормальными*) и определяются искомые коэффициенты a и b.

Легко заметить, что второе из уравнений (35) равносильно требованию об уравновешивании всех погрешностей

$$\sum_i \Delta_i = \sum_i (ax_i + b - y_i);$$

таким образом, это условие здесь выполняется попутно с удовлетворением основного требования. Как читатель помнит [310], раньше мы разбивали опытные данные на две группы и уравновешивали погрешности в каждой группе порознь.

В качестве примера вернемся к определению постоянных для Вольтмановской вертушки по данным (10) n⁰ 310, которые мы здесь воспроизводим:

N	v	N^2	Nv	$\alpha N + v_0$	$\Delta = \alpha N + v_0 - v$	$\Delta^2 \cdot 10^4$
21	0,39	441	8,19	0,401	+0,011	1,2
32	0,55	1024	17,60	0,524	−0,026	6,8
45	0,64	2025	28,80	0,670	+0,030	9,0
55	0,76	3025	41,80	0,782	+0,022	4,8
57	0,81	3249	46,17	0,804	−0,006	0,4
64	0,91	4096	58,24	0,882	−0,028	7,8
77	1,05	5929	80,85	1,028	−0,022	4,8
80	1,05	6400	84,00	1,062	+0,012	1,4
90	1,18	8100	106,20	1,174	−0,006	0,4
96	1,22	9216	117,12	1,240	+0,020	4,0
617	8,56	43505	588,97		0,007	40,6
$[N]$	$[v]$	$[N^3]$	$[Nv]$		$[\Delta]$	$[\Delta^2]\cdot 10^4$

Здесь же выполнены и все выкладки, необходимые для применения *метода наименьших квадратов*. Для определения постоянных α и v^0 формулы

$$v = \alpha N + v_0,$$

по форме (35a) составляем нормальные уравнения:

$$\begin{aligned} [N^2]\cdot\alpha + [N]\cdot v_0 &= [Nv], \\ [N]\cdot\alpha + 10 \quad v_0 &= [v], \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} 43\,505\alpha + 617 v_0 &= 588{,}97, \\ 617\alpha + \ 10 v_0 &= 8{,}56; \end{aligned}$$

отсюда

$$\alpha = 0{,}01119, \quad v_0 = 0{,}1656.$$

В пятом столбце таблицы приведены значения v, вычисленные по полученной формуле

$$v = 0{,}01119N + 0{,}1656;$$

в шестом — даны погрешности этих значений по сравнению с данными опыта. Их сумма $[\Delta] = 0{,}007$ незначительно разнится от нуля, благодаря округлениям. Качество приближения может быть оценено по *средней квадратической погрешности*:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{10}\,[\Delta^2]} = \sqrt{4{,}06 \cdot 10^{-4}} = 0{,}0201.$$

Любопытно отметить, что по *методу натянутой нити* получаются примерно те же значения коэффициентов, что и сейчас; им отвечает $\delta = 0{,}0203$. По *методу уравновешивания погрешностей* получается в этом смысле даже худший результат: $\delta = 0{,}0211$.

4°. Переходя теперь к квадратичной формуле:

$$y = ax^2 + bx + c$$

с тремя подлежащими определению коэффициентами a, b и c, мы предоставляем читателю самому установить [228], что наименьшее значение величина

$$S = [\Delta^2] = \sum_i (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

получит в том случае, если эти коэффициенты будут удовлетворять такой системе *нормальных* уравнений:

$$\begin{aligned} [x^4] \cdot a + [x^3] \cdot b + [x^2] \cdot c &= [x^2y], \\ [x^3] \cdot a + [x^2] \cdot b + [x] \cdot c &= [xy], \\ [x^2] \cdot a + [x] \cdot b + n \cdot c &= [y]. \end{aligned} \tag{36}$$

Аналогично исчерпывается вопрос и в случае многочлена третьей степени. И в этих случаях, как и выше, качество эмпирической формулы, т. е. степень ее соответствия опытным данным, оценивается средней квадратической погрешностью δ.

Дальнейшие указания относительно применения *метода наименьших квадратов* будут даны в следующем n°, попутно с решением задач.

318. Примеры и задачи на метод наименьших квадратов. Все задачи этого n° должны быть решены по *методу наименьших квадратов*.

1. Решить наново задачи 1, 2, 3 n° 309.

Решение задачи 3. Вместо того чтобы применить для нахождения коэффициента c в формуле

$$l = c \cdot d \tag{37}$$

указанный прием [317, (34 a)] непосредственно, выгоднее сначала упростить выкладки следующим образом. Принимая за приближенное значение c, напр., 99,2,

мы полагаем $c = 99{,}2 + c'$, так что остается разыскать эту поправку c'. Переписав формулу (37) в виде

$$l = (99{,}2 + c')\,d = 99{,}2\,d + c' \cdot d,$$

легко усмотреть, что задача сводится к представлению величины поправки:

$$l' = l - 99{,}2\,d$$

формулой вида

$$l' = c' \cdot d.$$

Значения этой вспомогательной величины l' вычисляются без труда:

d	1,2661	1,2039	1,0830	0,9637	0,8434	0,7195	0,6002	0,4805	0,3593	0,2390	0,1183
l'	0,082	0,257	0,260	0,105	0,049	0,350	0,194	0,078	0,111	0,055	0,039

Составив суммы

$$[dl'] = 1{,}3006 \text{ и } [d^2] = 7{,}1743,$$

по (34 a) находим:

$$c' = \frac{1{,}3006}{7{,}1743} = 0{,}181, \text{ так что } c = 99{,}381.$$

Определить среднюю квадратическую погрешность формулы (37), как при этом значении c, так и при других его значениях, найденных в 309.

2. Решить наново задачи 1—5 n⁰ 310.

Решение задачи 1. Для упрощения выкладок будем исходить из грубой приближенной формулы, напр.:

$$Q = 0{,}042h + 10,$$

которую можно получить, проведя прямую через третью и шестую из данных точек (30; 11,26) и (120; 15,04). Вводя поправку Q', можно точнее написать

$$Q = 0{,}042h + 10 + Q',$$

так что теперь предстоит выразить эту поправку линейной формулой вида:

$$Q' = a'h + b'$$

(где a' и b' сами могут быть рассматриваемы как поправки к приближениям 0,042 и 10 искомых коэффициентов a и b).

Выкладки приведены в таблице:

h	Q	$0{,}042h + 10$	Q'	h^2	hQ'
6	10,25	10,252	— 0,002	36	— 0,012
15	10,42	10,63	— 0,210	225	— 3,150
30	11,26	11,26	0	900	0
60	12,52	12,52	0	3600	0
90	13,78	13,78	0	8100	0
120	15,04	15,04	0	14400	0
321 [h]			— 0,212 [Q']	27261 [h^2]	— 3,162 [hQ']

Нормальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 27261a' + 321b' &= -3{,}162, \\ 321a' + \quad 6b' &= -0{,}212; \end{aligned}\right\}$$

отсюда:

$$a' = 0{,}00081, \quad b' = -0{,}787.$$

Окончательно:

$$Q = 0{,}04281h + 9{,}9213.$$

3. Длина стержня в 1 м проверялась сравнением его с образцовым метром, причем результаты измерения приводились к нормальной для образцового метра температуре. Оказалось, что при температуре $t = 20°, 40°, 50°, 60°$ (C) длина стержня была соответственно $l = 1000{,}22$; $1000{,}65$; $1000{,}90$; $1001{,}05$ мм. Если через l_0 обозначить длину стержня при $0°$, а через α — его коэффициент линейного расширения, то длина l стержня при температуре $t°$ выразится формулой

$$l = l_0(1 + \alpha t) = l_0 + \lambda t, \text{ где } \lambda = \alpha l_0.$$

Определить l_0 и λ (α) по методу наименьших квадратов.

Указание. Для упрощения положить $l = 1000 + l'$ и искать линейную формулу для l': $l' = \lambda t + \mu$. *Отв.* $l = 999{,}804 + 0{,}0212t$. [Ср. **94**, 4].

4. Решить наново задачи 1—7 n° **311**.

Указание. В случае формулы вида

$$y = a \cdot \varphi(x) + b,$$

простая подстановка $X = \varphi(x)$ сводит ее к линейной и дает возможность использовать уравнения вида (35 a). При некотором навыке можно, разумеется, не производить самой подстановки, обращаясь с $\varphi(x)$ так, как раньше с x.

Пусть читатель сам сообразит, как непосредственно применить метод наименьших квадратов к формуле вида

$$y = a \cdot \varphi(x) + b \cdot \psi(x)$$

[ср. зад. 6].

Решение задачи 5. Требуется установить формулу

$$\varphi = \frac{a}{\sqrt{l}} + b, \tag{38}$$

роль x здесь играет $\frac{1}{\sqrt{l}}$. См. таблицу:

l	φ	$\frac{1}{l}$	$\frac{1}{\sqrt{l}}$	$\frac{1}{\sqrt{l}} \cdot \varphi$	$\frac{a}{\sqrt{l}} + b$	Δ	$\Delta^2 \cdot 10^4$
50	62,0	0,0200000	0,141421	8,76812	62,001	+0,001	0,01
70	53,7	0,0142857	0,119523	6,41838	53,697	−0,003	0,09
100	46,3	0,0100000	0,100000	4,63000	46,293	−0,007	0,49
150	39,3	0,0066667	0,081650	3,20833	39,335	+0,035	12,25
200	35,2	0,0050000	0,070711	2,48902	35,186	−0,014	1,96
260	31,9	0,0038462	0,062017	1,97835	31,890	−0,010	1,00
	268,4	0,0597986	0,575322	27,49270		+0,002	15,80
	$[\varphi]$	$\left[\frac{1}{l}\right]$	$\left[\frac{1}{\sqrt{l}}\right]$	$\left[\frac{1}{\sqrt{l}} \cdot \varphi\right]$		$[\Delta]$	$[\Delta^2] \cdot 10^4$

Нормальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{1}{l}\right]\cdot a+\left[\frac{1}{\sqrt{l}}\right]\cdot b&=\left[\frac{1}{\sqrt{l}}\cdot\varphi\right],\\ \left[\frac{1}{\sqrt{l}}\right]\cdot a+\qquad 6\cdot b&=[\varphi].\end{aligned}\right\}$$

Отсюда: $a=379{,}21$, $b=8{,}372$. Значения φ, вычисленные по формуле (38) при этих значениях a и b, даны в шестом столбце. Имеем $\delta=0{,}016$, в то время как при найденных в **311** коэффициентах было бы $\delta=0{,}018$!

Обращаем внимание на необходимость точных подсчетов, ибо зачастую небольшие погрешности (округления) в коэффициентах нормальных уравнений так отражаются на значениях искомых величин a, b, что теряется вся выгода, которую может дать метод наименьших квадратов.

5. Решить наново задачи 1—5 и 8 n⁰ **312**.

Указание. Прологарифмировав степенную формулу, привести ее к линейному виду, а затем поступать, как указано в **317** в отношении линейной формулы. Можно и сразу воспользоваться уравнениями (35 a), подставляя лишь $\log x$ и $\log y$ вместо x и y.*

Решение задачи 4:

$\log p$	$\log i$	$(\log p)^2$	$\log p\cdot\log i$
2,2201081	— 3,7723989	4,9288799	— 8,3751332
2,5224442	— 3,4523620	6,3627248	— 8,7083904
2,6981005	— 3,2622777	7,2797462	— 8,8019520
2,8234742	— 3,1292061	7,9720065	— 8,8352326
2,9201233	— 3,0264616	8,5271200	— 8,8376409
2,9991305	— 2,9430105	8,9947838	— 8,8264725
16,1833808	— 19,5857168	44,0652612	— 52,3848216
$[\log p]$	$[\log i]$	$[\log^2 p]$	$[\log p\cdot\log i]$

Нормальные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}[\log^2 p]\cdot a+[\log p]\cdot b&=[\log p\cdot\log i],\\ [\log p]\cdot a+\qquad 6\cdot b&=[\log i].\end{aligned}\right\}$$

Отсюда $a=1{,}0660$, $b=\log c=-6{,}13966$, $c=\frac{1}{1379300}$; близкий к прежнему результат!

6. Решить наново задачи 1, 2, 4, 5 n⁰ **313**.

Указание аналогично указанию к предшествующей задаче.

Решение задачи 1. Здесь (время) t принимает значения от 0 до 50 через 5 (мин.). Для упрощения введем новую независимую переменную τ, полагая

$$\tau=\frac{t-25}{5};$$

очевидно, τ принимает подряд все целые значения от -5 до 5. Имеем:

* Применение метода наименьших квадратов к логарифмам рассматриваемых величин, разумеется, неравносильно применению его к самим величинам. Однако этим обыкновенно довольствуются.

t	θ	τ	$\eta = \log\theta$	τ^2	$\tau\eta$	$\theta_0 \cdot e^{-kt}$	Δ
0	9,5	— 5	0,97772	25	— 4,88860	9,303	— 0,197
5	7,0	— 4	0,84510	16	— 3,38040	7,528	+ 0,528
10	6,3	— 3	0,79934	9	— 2,39802	6,091	— 0,209
15	5,1	— 2	0,70757	4	— 1,41514	4,929	— 0,171
20	3,9	— 1	0,59106	1	— 0,59106	3,988	+ 0,088
25	3,2	0	0,50515	0	0	3,227	+ 0,027
30	2,7	1	0,43136	1	0,43136	2,612	— 0,088
35	2,1	2	0,32222	4	0,64444	2,113	+ 0,013
40	1,7	3	0,23045	9	0,69135	1,710	+ 0,010
45	1,4	4	0,14613	16	0,58452	1,384	— 0,016
50	1,1	5	0,04139	25	0,20695	1,120	+ 0,020
		0	5,59749	110	— 10,11460		
		$[\tau]$	$[\eta]$	$[\tau^2]$	$[\tau\eta]$		

То обстоятельство, что $[\tau] = 0$, сразу значительно упрощает систему нормальных уравнений, которые в данном случае принимают вид:

$$[\tau^2] \cdot a = [\tau\eta], \quad 11b = [\eta].$$

Отсюда $a = -0{,}091951$, $b = 0{,}50886$; таким образом, сначала мы получаем выражение $\log\theta$ через вспомогательную переменную τ:

$$\log\theta = -0{,}091951\,\tau + 0{,}50886,$$

а затем подставляем вместо τ его выражение через t:

$$\log\theta = -0{,}018390t + 0{,}96862.$$

Окончательно [313]:

$$\theta_0 = 9{,}303, \quad k = \frac{0{,}01839}{0{,}43429} = 0{,}04235.$$

Замечание. Пусть имеем переменную x, которая принимает ряд значений:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{39}$$

Обозначим через μ среднее арифметическое ее значений:

$$\mu = \frac{[x]}{n}.$$

Если ввести новую переменную ξ, полагая

$$\xi = x - \mu,$$

то ее значения будут

$$x_1 - \mu, \; x_2 - \mu, \ldots, \; x_n - \mu.$$

Составим их сумму:

$$[\xi] = (x_1 - \mu) + \ldots + (x_n - \mu) = [x] - n\mu = [x] - n \cdot \frac{[x]}{n} = 0.$$

Итак, новая переменная ξ замечательна тем, что для нее $[\xi] = 0$. Этим часто пользуются, применяя метод наименьших квадратов, чтобы упростить выкладки.

Только что мы имели тому пример. Исходной независимой переменной была t; для нее $\mu = 25$, так что, полагая $\xi = t - 25$, мы уже обеспечили бы равенство: $[\xi] = 0$. То, что мы ξ еще разделили на 5 и ввели переменную

$$\tau = \frac{\xi}{5} = \frac{t - 25}{5},$$

было мало существенно и лишь уменьшило те числа, с которыми нам нужно было иметь дело.

Если значения (39) исходной переменной x оказываются вдобавок равноотстоящими, то переменная $\xi = x - \mu$ будет обладать еще одним свойством, именно: $[\xi^3] = 0$. В самом деле, в этом случае значения x расположатся симметрично относительно средней точки μ, а значения ξ — симметрично относительно нуля. Таким образом, каждому значению ξ, большему нуля, отвечает такое же по абсолютной величине значение ξ, но со знаком (—), так что по возведении в куб (или в любую нечетную степень) оба эти значения взаимно уничтожатся.

Этим замечанием мы сейчас же и воспользуемся.

7. Решить наново задачи 1 — 4 n⁰ 314.

Решение задачи 2. Прибегнем к той же подстановке

$$\tau = \frac{t - 25}{5},$$

что и выше. Имеем:

t	ω	τ	τ^2	τ^3	τ^4	$\tau\omega$	$\tau^2\omega$	вычисл. ω	Δ	$\Delta^2 \cdot 10^2$
0	8,3	— 5	25	— 125	625	— 41,5	207,5	8,190	— 0,110	1,21
5	7,1	— 4	16	— 64	256	— 28,4	113,6	7,189	+ 0,089	0,79
10	6,2	— 3	9	— 27	81	— 18,6	55,8	6,280	+ 0,080	0,64
15	5,5	— 2	4	— 8	16	— 11,0	22,0	5,464	— 0,036	0,13
20	4,7	— 1	1	— 1	1	— 4,7	4,7	4,741	+ 0,041	0,17
25	4,1	0	0	0	0	0	0	4,110	+ 0,010	0,01
30	3,6	1	1	1	1	3,6	3,6	3,572	— 0,028	0,08
35	3,2	2	4	8	16	6,4	12,8	3,126	— 0,074	0,55
40	2,8	3	9	27	81	8,4	25,2	2,773	— 0,027	0,07
45	2,5	4	16	64	256	10,0	40,0	2,513	+ 0,013	0,02
50	2,3	5	25	125	625	11,5	57,5	2,345	+ 0,045	0,20
	50,3	0	110	0	1958	— 64,3	542,7		+ 0,003	3,86
	$[\omega]$	$[\tau]$	$[\tau^2]$	$[\tau^3]$	$[\tau^4]$	$[\tau\omega]$	$[\tau^2\omega]$		$[\Delta]$	$[\Delta^2] \cdot 10^2$

Нормальные уравнения пишем по форме (36):

$$\left.\begin{aligned} [\tau^4]\cdot a + [\tau^2]\cdot c &= [\tau^2\omega], \\ [\tau^2]\cdot b \qquad\quad &= [\tau\omega], \\ [\tau^2]\cdot a + \quad 11c &= [\omega], \end{aligned}\right\}$$

причем учитываем выгодные для нас равенства: $[\tau] = [\tau^3] = 0$!

Отсюда: $a = 0{,}04627$, $b = -0{,}5845$, $c = 4{,}110$, так что

$$\omega = 0{,}04627\,x^2 - 0{,}5845\,x + 4{,}1100$$

или, возвращаясь к переменной t,

$$\omega = 0{,}00185\,t^2 - 0{,}2094\,t + 8{,}1893.$$

Решение задачи 4а). Положим для краткости

$$\frac{f_x}{f_m} = x, \quad \frac{p_1}{p_x} = y.$$

Средним арифметическим значений x будем $\mu = 10{,}347$; введем новую переменную $\xi = x - 10.347$. Тогда $[\xi] = 0$ и это несколько упростит выкладки; но $[\xi^3]$ отлично от нуля (значения x ведь не являются равноотстоящими!).

x	y	ξ	ξ^2	ξ^3	ξ^4	ξy	$\xi^2 y$
1,919	7,14	— 8,428	71,031	— 598,65	5045,4	— 60,18	507,2
2,133	8,33	— 8,214	67,470	— 554,20	4552,2	— 68,42	562,0
2,408	10	— 7,939	62,028	— 500,38	3972,5	— 79,39	630,3
4,652	25	— 5,695	32,433	— 184,71	1 051,9	— 142,38	810,8
7,953	50	— 2,394	5,731	— 13,72	32,8	— 119,70	286,6
10,963	75	+ 0,616	0,380	+ 0,23	0,1	+ 46,20	28,5
13,803	100	3,456	11,944	41,28	142,7	345,60	1194,4
16,504	125	6,157	37,909	233,40	1437,1	769,63	4738,6
19,002	150	8,655	74,909	648,34	5611,4	1298,25	11236,4
24,133	200	13,786	190,054	2 620,08	36120,5	2757,20	38010,8
	750,47	0	554,889	1691,67	57966,6	4746,81	58005,6
	$[y]$	$[\xi]$	$[\xi^2]$	$[\xi^3]$	$[\xi^4]$	$[\xi y]$	$[\xi^2 y]$

Отв. $y = 0{,}0859\,\xi^2 + 8{,}293\,\xi + 70{,}281 =$
$= 0{,}0859\,x^2 + 6{,}515\,x - 6{,}327.$

319. Заключительные замечания о составлении эмпирических формул. Попытаемся набросать в общих чертах тот план, которому должен следовать инженер, желающий воплотить в формулу свои опытные данные.

Прежде всего, разумеется, эти данные должны быть нанесены в виде ряда точек на миллиметровку. Если точки расположатся „правильно", следует провести через них кривую (или прямую). „Неправильное", разбросанное расположение точек свидетельствует о том, что в данном случае нельзя претендовать на сколько-нибудь точное выражение формулой опытных данных. Проведение кривой в этом случае может оказаться затруднительным. Беде иной раз можно помочь, объединяя точки в группы и заменяя каждую группу точек одной „средней" точкой, напр., их „центром тяжести" [как мы уже делали в n⁰ 311, зад. 7, и n⁰ 314, зад. 3]. Обращаем внимание читателя также на то, что в подобных случаях важную роль играет выбор масштаба: изменяя его, можно сделать „скачки" менее резкими и тем облегчить проведение кривой.

Когда кривая начерчена (мы исключаем случай прямой, как наиболее благоприятный и не нуждающийся в пояснениях), надлежит сравнить ее с графиками различных элементарных функций, которые читатель найдет в главе IV. Это сравнение обыкновенно подсказывает несколько вариантов различных формул, которые и должны быть последовательно испробованы. При этом, если по обстоятельствам дела может быть заподозрена степенная (или показательная) формула, то немедленно надлежит изобразить опытные данные на логарифмической (или полулогарифмической) бумаге — и вопрос сразу выяснится!

При известных условиях, как мы указывали в n⁰ 315, и последовательные разности искомой функции могут быть использованы для установления возможности выразить опытные данные многочленом той или иной степени.

К сожалению, все эти указания действительны только для простых случаев (правда, наиболее частых в инженерной практике). Искусство выбора вида эмпирической формулы в более сложных случаях вырабатывается на опыте.

Наоборот, если инженер вращается в кругу исследований, для которых уже стали обычными эмпирические формулы определенного вида (как, например, политропическая зависимость для объема и давления газа или пара в двигателе), то он находится в счастливом положении и уже ни в каких указаниях относительно вида формулы не нуждается.

Обратимся теперь к определению коэффициентов испытываемой эмпирической формулы. В большинстве случаев для этого достаточен *метод натянутой нити* (на миллиметровке, логарифмической или полулогарифмической бумаге) или — в случае парабол и гиперболы — *метод выбранных точек*. При желании исследователя получить более точный результат и избежать опасности внести субъективный элемент в определение постоянных — ему рекомендуется *метод уравновешивания погрешностей*.

Наконец, *методом наименьших квадратов* целесообразно пользоваться лишь при наличии к тому серьезных оснований. Выигрыш в точности (да и то лишь, если *условно* оценивать эту точность средней квадратической погрешностью!) по сравнению с *методом уравновешивания погрешностей*, обыкновенно, не велик, а вычислительной работы он требует гораздо больше. Для того чтобы все же имело смысл им пользоваться, нужно соблюдение ряда условий. Прежде всего, сами опытные данные должны быть точными. Затем должна быть уверенность в правильном выборе вида формулы: если вид формулы выбран неудачно, то более точный подсчет ее коэффициентов имеет мало значения. [Мы всячески предостерегаем читателя от заблуждения, будто применение *метода наименьших квадратов* может компенсировать неудачность выбора вида формулы!]. Наконец, по условиям вопроса, должна быть действительная нужда в возможно точном воспроизведении эмпирических данных.

Мы считаем полезным, в заключение, проиллюстрировать выбор и установление эмпирической формулы примером. Рассмотрим зависимость между давлением p (в мм ртутного столба) и температурой t (°C) насыщенного водяного пара. Мы будем исходить из так называемых „мюнхенских опытов“, которыми были установлены значения p для различных температур t от 100° до 180°, через каждые 10° (см. таблицу на стр. 322—323, первые два столбца).

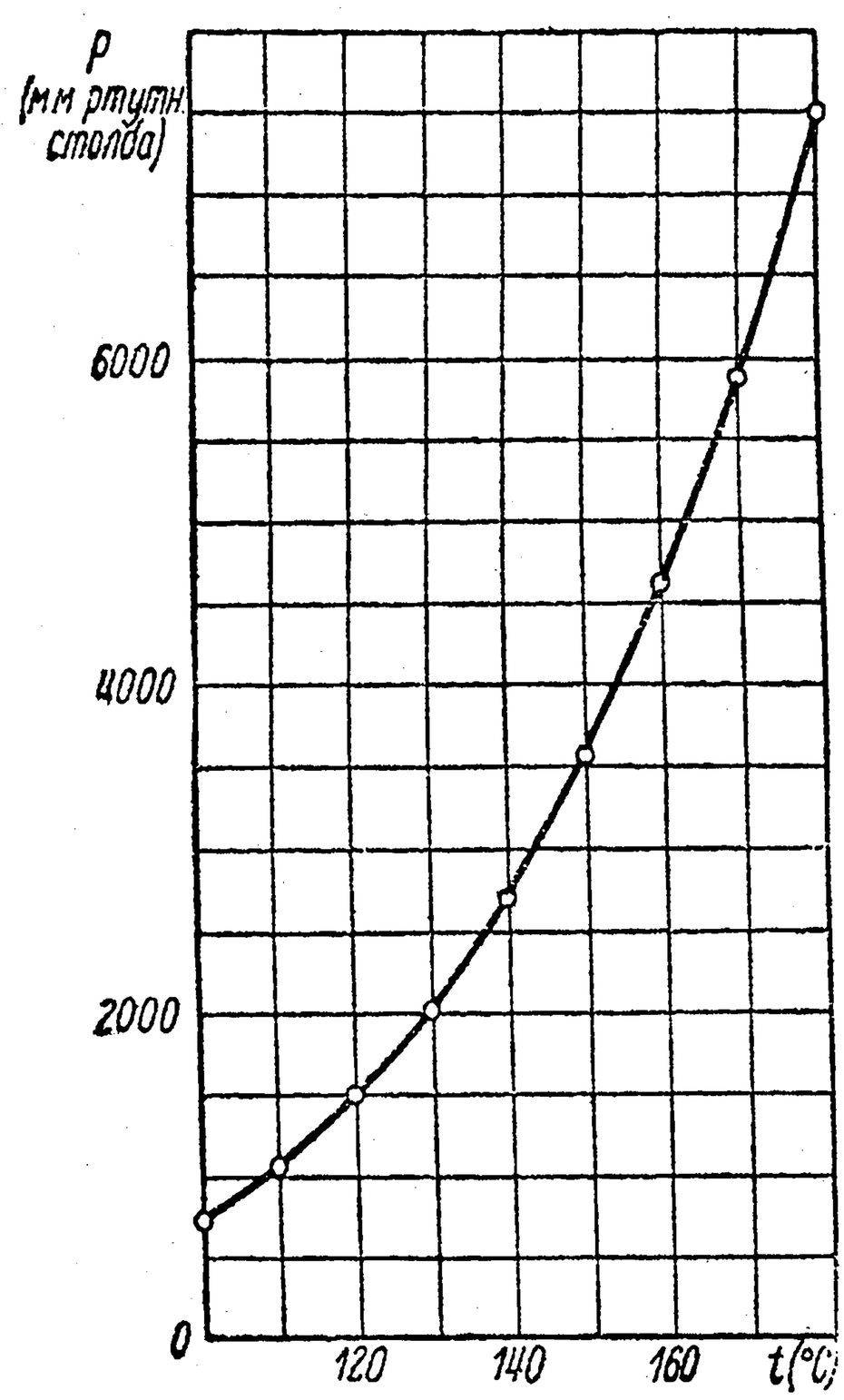
I. Нанесем точки (t, p) на миллиметровку (черт. 564). Через них легко провести плавную кривую, напоминающую параболу с вертикальной осью. В качестве первого приближения попробуем провести параболу через первую, пятую и девятую точки, причем уравнение параболы возьмем в виде:

$$p = a(t-140)^2 + b(t-140) + c. \qquad (40)$$

Подставляя сюда координаты выбранных точек, составим три уравнения, из которых найдем:

$$a = 0{,}891875, \quad b = 84{,}425, \quad c = 2710.$$

В таблице стр. 322—323, в столбцах под заголовками p_I и Δ_I, помещены вычисленные по этой формуле значения p и соответствующие погрешности.



Черт. 564.

Имеем:

$$[\Delta_I] = +28, \quad [\Delta_I^2] \doteq 58\,000.$$

Конечно, приближение очень грубое!

II. Немного помогло бы делу и применение *метода наименьших квадратов*. Если прибегнуть к замене переменной $\tau = t - 140$ [ср. замечание n⁰ 318], то легко получить такие значения для коэффициентов формулы (40):

$$a = 0{,}893042, \quad b = 82{,}4035, \quad c = 2706.$$

Этой формуле отвечают столбцы (p_{II}) и (Δ_{II}) нашей таблицы. Здесь

$$[\Delta_{II}] = -0{,}1 \doteq 0, \quad [\Delta_{II}^2] \doteq 33\,000.$$

Хотя погрешности взаимно уравновешиваются, но сумма их квадратов все же очень велика.

III. Для того чтобы наперед установить, можно ли ждать значительного улучшения результата от применения многочленов высших степеней, прибегнем к разностям [315]:

p	Δp	$\Delta^2 p$	$\Delta^3 p$
760			
	314		
1074		101	
	415		20
1489		121	
	536		28
2025		149	
	685		23
2710		172	
	857		38
3567		210	
	1067		28
4634		238	
	1305		32
5939		270	
	1575		
7514			

Третья разность колеблется около 28; приближенно ее можно рассматривать как „постоянную“. Благоприятный признак для многочлена третьей степени!

Если провести параболу третьей степени

$$p = a(t-140)^3 + b(t-140)^2 + c(t-140) + \partial$$

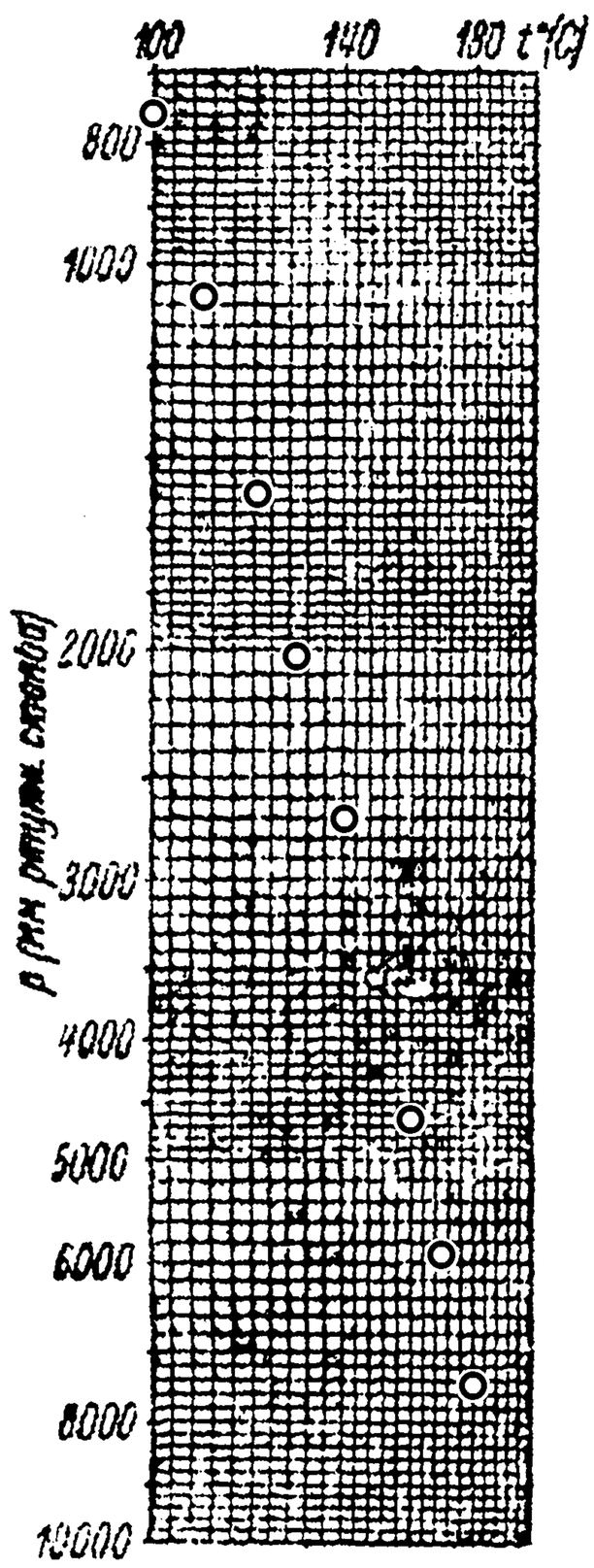
через четыре точки: первую, четвертую, шестую и девятую, то получим

$$a = 0{,}00488, \quad b = 0{,}894, \quad c = 76{,}6117, \quad \partial = 2706{,}6.$$

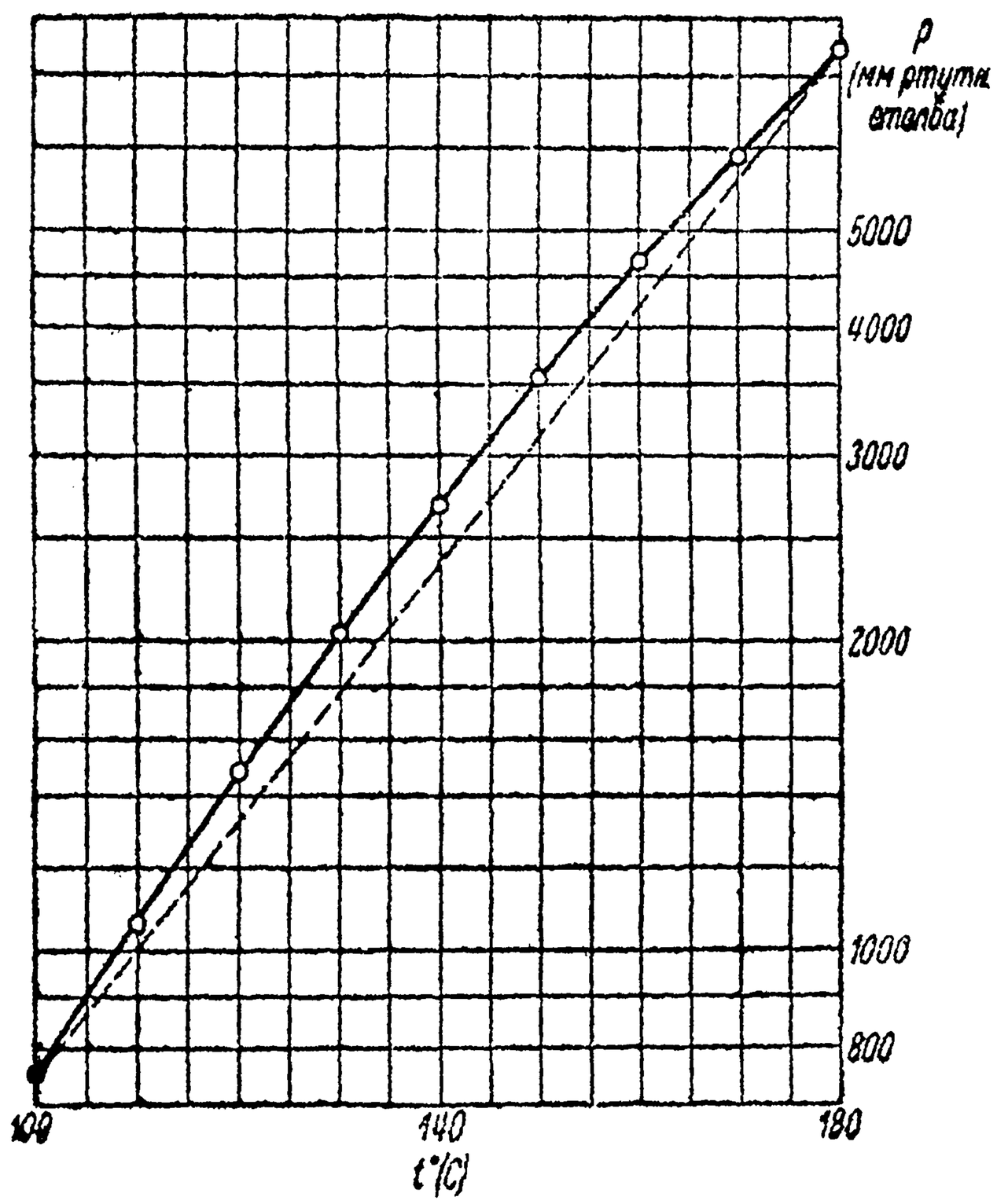
См. столбцы (p_{III}) и (Δ_{III}) таблицы. Имеем на этот раз:

$$[\Delta_{III}] = 11{,}1, \quad [\Delta^2_{III}] \doteq 80$$

— резкое улучшение результата!



Черт. 565.



Черт. 566.

IV. Чтобы дать себе отчет в том, чего можно ждать от степенной формулы, нанесем точки (t, p) на логарифмическую сетку (черт. 565). Они располагаются приближенно прямолинейно, испробуем степенную формулу:

$$p = c \cdot t^a.$$

Воспользовавшись для определения постоянных *методом наименьших квадратов*, найдем:

$$c = 0{,}00001133, \quad a = 3{,}9073.$$

Соответствующие столбцы таблицы показывают не слишком хорошее совпадение:

$$[\Delta_{IV}] = -96, \quad [\Delta^2_{IV}] \doteq 35\,000;$$

t	p	p_{I}	Δ_{I}	$\Delta_{I}^2 \cdot 10^{-2}$	p_{II}	Δ_{II}	$\Delta_{II}^2 \cdot 10^{-2}$	p_{III}	Δ_{III}	Δ_{III}^2
100	760	760	0	0	838,7	+78,7	62	760	0	0
110	1074	980	—94	88	1037,6	—36,7	13	1081,0	+6,7	45
120	1489	1378	—111	123	1415,2	—73,8	54	1492,9	+3,9	15
130	2025	1955	—70	49	1971,3	—53,7	29	2025	0	0
140	2710	2710	0	0	2706,0	—4,0	0	2706,6	—3,4	12
150	3567	3643	+76	58	3619,3	+52,3	27	3567	0	0
160	4634	4755	+121	146	4711,3	+77,3	60	4635,5	+1,5	2
170	5939	6045	+106	112	5981,8	+42,8	18	5941,4	+2,4	6
180	7514	7514	0	0	7431,0	—83,0	69	7514	0	0
			+28	576		—0,1	332		+11,1	80

качество приближения сравнимо с формулой II.

V. Обратимся, наконец, к формулам показательного типа. Если нанести точки (t, p) на полулогарифмическую сетку (черт. 566), то они расположатся явно *не* прямолинейно, так что показательная формула обычного вида

$$p = \beta e^{\gamma t}$$

здесь совершенно не годится. Однако, через точки графика легко проводится кривая параболического типа; так как этот график выражает функцию $\log p$, то естественно приходит в голову положить

$$\log p = a(t-140)^2 + b(t-140) + c. \tag{41}$$

Если провести эту параболу через три точки

$$(100;\ \log 760),\quad (140;\ \log 2710)\ \text{и}\ (180;\ \log 7514), \tag{42}$$

то легко получатся такие значения коэффициентов:

$$a = -0{,}0000341438,\quad b = 0{,}0124383,\quad c = 3{,}43297.$$

Результаты вычислений по этой формуле и соответствующие погрешности даны в столбцах (p_{V}) и (Δ_{V}) таблицы; здесь

$$[\Delta_{V}] = 40,\quad [\Delta_{V}^2] \doteq 1350.$$

Качество — значительно лучшее, чем в случае формулы II, при том же числе коэффициентов; но оно много ниже, чем для формулы III — правда, при большем числе коэффициентов.

VI. *Метод наименьших квадратов* может лишь незначительно улучшить дело. С его помощью для коэффициентов формулы (41) найдем значения (близкие к прежним):

$$a = -0{,}0000340714,\quad b = 0{,}0124000,\quad c = 3{,}43294;$$

и тогда

$$[\Delta_{VI}] = -1,\quad [\Delta_{VI}^2] \doteq 1040.$$

p_{IV}	Δ_{IV}	$\Delta^2_{IV}\cdot 10^{-2}$	p_V	Δ_V	Δ^2_V	p_{VI}	Δ_{VI}	Δ^2_{VI}	p_{VII}	Δ_{VII}	Δ^2_{VIII}
740	— 20	4	760	0	0	763	+ 3	9	760	0	0
1073	— 1	0	1069	— 5	25	1072	— 2	4	1074,5	+ 0,2	0
1508	+ 19	4	1481	— 8	64	1484	— 5	25	1489,0	0	0
2062	+ 37	14	2019	— 6	36	2021	— 4	16	2026,2	+ 1,2	1,4
2754	+ 44	19	2710	0	0	2710	0	0	2710	0	0
3606	+ 39	15	3580	+ 13	169	3577	+ 10	100	3569,3	+ 2,3	5,3
4641	+ 7	0	4657	+ 23	529	4648	+ 14	196	4634,1	+ 0,1	0
5880	— 59	35	5962	+ 23	529	5947	+ 8	64	5937,3	— 1,7	2,9
7352	— 162	262	7514	0	0	7489	— 25	625	7514	0	0
	— 96	353		+ 40	1352		— 1	1039		+ 2,1	9,6

VII. Мы не станем пытаться улучшать качество формулы за счет увеличения числа коэффициентов. Используя мысль Рэнкина, мы попробуем выразить $\log p$ такой формулой:

$$\log p = A + \frac{B}{T} + \frac{C}{T^2},$$

где $T = 273 + t$ есть абсолютная температура. Для определения трех коэффициентов A, B, C, прибегнем к *методу выбранных точек*, именно: потребуем, чтобы равенство это точно выполнялось для трех пар значений (42). Это требование приводит к таким трем уравнениям относительно A, B и C:

$$\left.\begin{aligned} A + 0{,}00268097\ B + 0{,}00000718757\ C &= 2{,}88081, \\ A + 0{,}00242131\ B + 0{,}00000586273\ C &= 3{,}43297, \\ A + 0{,}00220751\ B + 0{,}00000487308\ C &= 3{,}87587. \end{aligned}\right\}$$

Из них

$$A = 7{,}82863,\ B = -1534{,}47,\ C = -116029.$$

Вычисленные по новой формуле значения p_{VII} превосходно воспроизводят опытные данные:

$$[\Delta_{VII}] = 2{,}1,\ [\Delta^2_{VII}] \doteq 10.$$

Таким образом, формула

$$p = 10^{7{,}82863 - \frac{1534{,}47}{T} - \frac{116029}{T^2}}$$

или—если угодно—

$$p = 67395000 \cdot e^{-\frac{6664{,}12}{T} - \frac{267167}{T^2}}$$

оказывается наилучшей из всех. В основе ее все же лежат некоторые теоретические соображения — и в этом разгадка удивительного

совпадения с данными опыта. Можно получить еще некоторое улучшение, если вычислить коэффициенты по *методу наименьших квадратов*.

320. Применение метода наименьших квадратов к составлению приближенных формул. Отклоняясь от основного содержания настоящей главы, мы в заключительных пп^0 укажем одно интересное обобщение *метода наименьших квадратов* на случай непрерывно изменяющихся значений аргумента (в противоположность отдельным, разрозненным, значениям аргумента, определенным из опыта, о чем была речь раньше).

Пусть имеем некоторую функцию $y = f(x)$, определенную для всех значений аргумента x от a до b. Рассмотрим на ряду с нею некоторое [скажем, более простое по своему строению] выражение

$$F(x, A, B, \ldots), \tag{43}$$

содержащее, кроме x, еще некоторые *параметры* $A, B, \ldots$ [напр., линейное выражение $Ax + B$]. Поставим себе задачу — подыскать такие значения этих параметров, чтобы выражение (43) *наилучше* представляло нашу функцию $f(x)$ для значений x от a до b. Погрешность от замены функции $f(x)$ выражением (43):

$$\Delta = F(x, A, B, \ldots) - f(x)$$

будет, очевидно, функцией от x; *средняя квадратическая погрешность* δ [176, зад. 8] в промежутке от a до b определяется равенством:

$$\delta^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b \Delta^2\,dx.$$

Оценивая качество приближения величиной δ, мы и станем искать такие значения параметров $A, B, \ldots$, которые доставляют наименьшее значение интегралу

$$I = \int_a^b \Delta^2 dx = \int_a^b [F(x, A, B, \ldots) - f(x)]^2\,dx.$$

Для примера, попытаемся воспроизвести функцию

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}$$

в промежутке от 0 до 1 с помощью линейной функции

$$F(x, A, B) = Ax + B.$$

Нам нужно подобрать A и B так, чтобы интеграл

$$I = \int_0^1 (Ax + B - \sqrt{1+x^2})^2 dx$$

получил наименьшее из возможных для него значений.

Прежде всего

$$(Ax + B - \sqrt{1+x^2})^2 = A^2 \cdot x^2 + 2AB \cdot x + B^2 - 2A \cdot x\sqrt{1+x^2} - 2B \cdot \sqrt{1+x^2} + 1 + x^2$$

и [по формулам 28 и 29, 168]

$$I = \left[A^2 \cdot \frac{x^3}{3} + AB \cdot x^2 + B^2 \cdot x - A \cdot \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - B \cdot x\sqrt{1+x^2} - \right.$$

$$\left. - B \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x + \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}A^2 + AB + B^2 - \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)A -$$

$$- [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]B + \frac{4}{3}.$$

Имея явное выражение I через A и B, далее поступаем по правилам № 228, т. е. приравниваем нулю частные производные от I по A и по B:

$$\frac{\partial I}{\partial A} = \frac{2}{3}A + B - \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) = 0$$

$$\frac{\partial I}{\partial B} = A + 2B - \left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right) = 0.$$

Отсюда

$$A = 2 - 2\sqrt{2} + 2\ln(1 + \sqrt{2}) = 0{,}42695,$$

$$B = -4 + 5\sqrt{2} - 3\ln(1 + \sqrt{2}) = 0{,}93432.$$

Таким образом, мы получаем искомую приближенную формулу:

$$\sqrt{1 + x^2} \doteq 0{,}42695\,x + 0{,}93432,$$

известную под именем формулы Понселе (Poncelet).

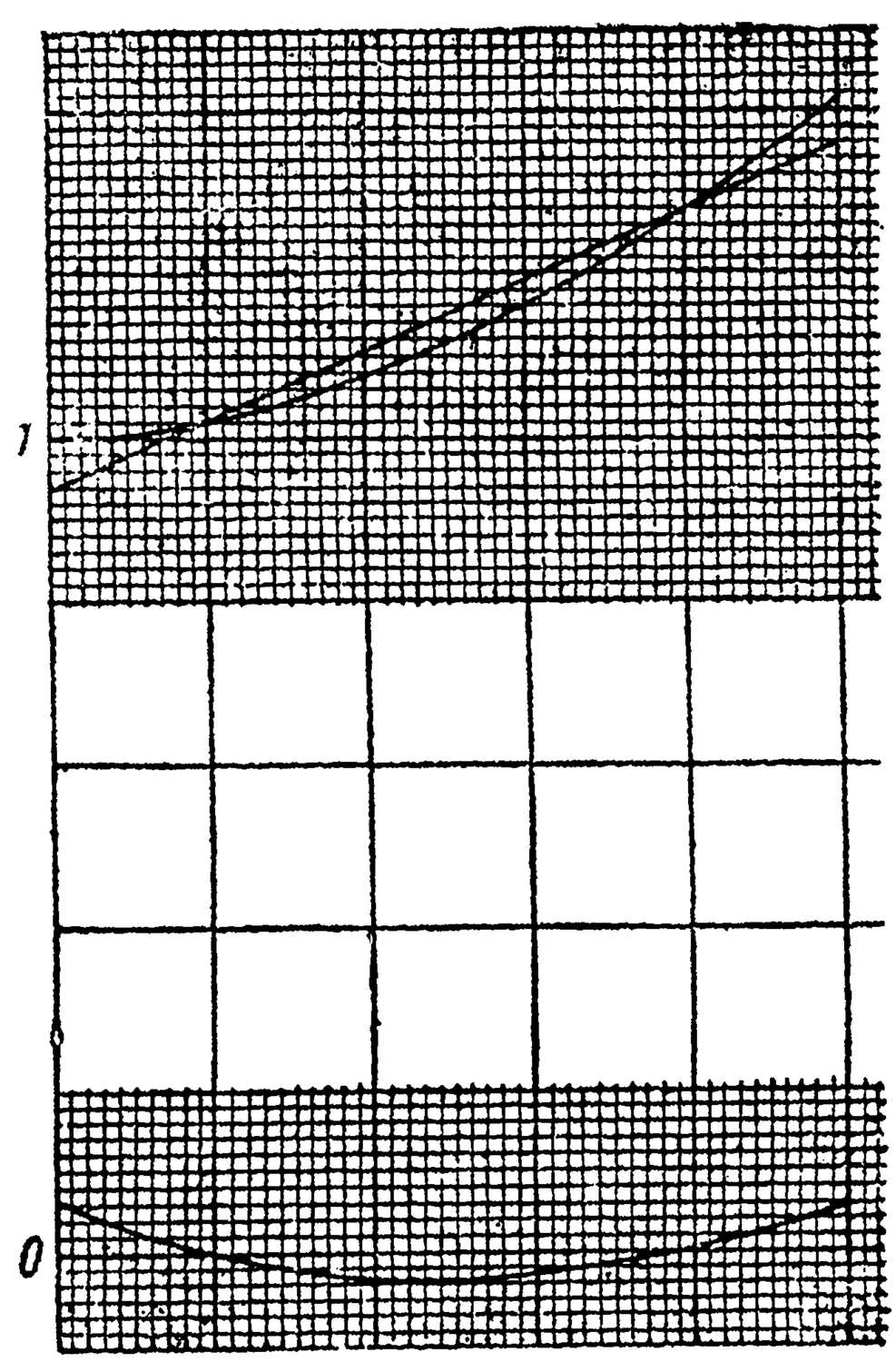
Следует дать себе отчет в различии между характерами приближения, которое дается этой формулой или формулами № 211 (получаемыми из рядов Тэйлора). Там речь шла о приближении для каждого отдельного значения x и притом тем лучшем, чем меньше x; здесь же суть дела в суммарном приближении одной функции к другой в целом промежутке. На черт. 567 наверху для сравнения помещены графики обеих функций:

$$y = \sqrt{1 + x^2} \text{ и } y = 0{,}42695\,x + 0{,}93432;$$

там же внизу приведена кривая погрешностей:

$$y = \Delta = 0{,}42695\,x + 0{,}93432 - \sqrt{1 + x^2}$$

— и то, и другое в масштабе: 1 = 5 см.



Черт. 567.

Для упражнения предлагаем читателю приближенно заменить линейной функцией *a*) функцию $\frac{1}{x}$ в промежутке от 1 до 2, *b*) функцию $\sqrt{x}$ в промежутке от 0 до 1.

Отв. *a*) $1{,}10812 - 0{,}47665\,x$, *b*) $\frac{4}{5}x + \frac{4}{15}$.

321. Приближение с помощью тригонометрических сумм. Мы знаем [215], что каждая периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π—при очень общих условиях, которые в технической практике всегда выполняются—разлагается в тригонометрический ряд (ряд Фурье):

$$f(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots =$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx),$$

расположенный по синусам и косинусам дуг, кратных x. При этом коэффициенты a, b ряда выражаются такими интегральными формулами [см. 216, (70)]:

$$\left.\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,\ a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx, \\ b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Если взять n-ую частную сумму этого ряда:

$$\left.\begin{aligned} s_n(x) = a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx = \\ = a_0 + \sum_{m=1}^{m=n}(a_m\cos mx + b_m\sin mx), \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

то, по мере возрастания n, она будет все ближе подходить к исходной функции $f(x)$. На черт. 360 и 363 мы видели, как графики этих сумм все теснее примыкали к графику самой функции $f(x)$.

Для того чтобы лучше выяснить характер этого приближения, мы поставим такую задачу. Станем рассматривать вообще тригонометрические суммы типа (45), с произвольными числовыми коэффициентами:

$$\begin{aligned} S_n(x) = A_0 + A_1\cos x + B_1\sin x + \ldots + A_n\cos nx + B_n\sin nx = \\ = A_0 + \sum_{m=1}^{m=n}(A_m\cos mx + B_m\sin mx); \end{aligned} \quad (46)$$

такую сумму называют *тригонометрической суммой n-го порядка*. При фиксированном n это выражение содержит $2n+1$ параметров.

$$A_0,\ A_1,\ B_1,\ \ldots,\ A_n,\ B_n.$$

Теперь вопрос — как ими распорядиться, чтобы сумма $S_n(x)$ воспроизводила функцию $f(x)$ в промежутке от 0 до 2π наилучшим образом (в смысле предыдущего n⁰), по сравнению со всеми тригонометрическими суммами того же порядка.

Как читатель видит, эта задача является частным случаем той, которая решалась в n⁰ 320: сумма $S_n(x)$ здесь играет роль выражения $F(x, A, B, \ldots)$, о котором там шла речь. Составим выражение для средней квадратической погрешности:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[S_n(x) - f(x)\right]^2 dx = \frac{1}{2\pi}I. \quad (47)$$

Следует найти те значения коэффициентов, при которых интеграл

$$I = \int_0^{2\pi}\left[S_n(x) - f(x)\right]^2 dx$$

имеет наименьшее значение. Имеем, раскрывая скобки,

$$I = \int_0^{2\pi} S_n^2(x)\,dx - 2\int_0^{2\pi} f(x)\,S_n(x)\,dx + \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx.$$

Последнее слагаемое не содержит параметров и представляет постоянное число. Затем,

$$\begin{aligned} S_n^2(x) = \\ = A_0^2 + A_1^2\cos^2 x + B_1^2\sin^2 x + \ldots + A_n^2\cos^2 nx + B_n^2\sin^2 nx + \\ + 2A_0A_1\cos x + 2A_0B_1\sin x + 2A_1B_1\cos x\sin x + \ldots \end{aligned}$$

Интегралы от $\cos mx$, $\sin mx$ и от произведений $\cos mx \cdot \sin kx$, стоящих в последней строке, все будут нулями в силу формул (69) n⁰ 216. Наоборот, интегралы от квадратов $\cos^2 mx$ и $\sin^2 mx$, по тем же формулам, все равны π. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} S_n^2(x)\,dx = 2\pi A_0^2 + \pi(A_1^2 + B_1^2 + \ldots + A_n^2 + B_n^2).$$

С другой стороны, подставляя вместо S_n его выражение (46), имеем:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,S_n(x)\,dx = A_0 \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx + A_1 \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx + B_1 \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx +$$

$$+ \ldots + A_n \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx + B_n \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx. \qquad (48)$$

Окончательно,

$$I = 2\pi A_0^2 + \pi A_1^2 + \pi B_1^2 + \ldots + \pi A_n^2 + \pi B_n^2 -$$

$$- 2A_0 \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,dx - 2A_1 \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx - 2B_1 \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx - \ldots$$

$$\ldots - 2A_n \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx - 2B_n \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx + \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx.$$

Теперь, как обычно, составляем уравнения

$$\frac{\partial I}{\partial A_0} = 4\pi A_0 - 2\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial A_1} = 2\pi A_1 - 2\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial B_1} = 2\pi B_1 - 2\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial I}{\partial A_n} = 2\pi A_n - 2\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0,$$

$$\frac{\partial I}{\partial B_n} = 2\pi B_n - 2\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,\quad A_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx,\quad B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx,$$

$$\ldots,\quad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Сопоставляя эти результаты с формулами (44), мы видим, что средняя квадратическая погрешность (47) получает свое наименьшее значение тогда, когда

коэффициенты суммы (46) совпадают с коэффициентами Фурье нашей функции $f(x)$. Иными словами, *из всех тригонометрических сумм n-го порядка наилучшее приближение к функции $f(x)$ дает соответствующая частная сумма $s_n(x)$ ее ряда Фурье* [см. (45)].

Представляет интерес установить соответствующую величину средней квадратической погрешности. Заменяя в выражении (47) интеграла I все коэффициенты A и B через a и b и через них же выражая интегралы

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 2\pi a_0, \quad \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \pi a_1, \quad \int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx = \pi b_1, \ldots,$$

легко получить

$$I = \int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx - 2\pi a_0^2 - \pi(a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2).$$

Таким образом квадрат средней квадратической погрешности выразится так [см. (47)]:

$$\delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx - a_0^2 - \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + \ldots + a_n^2 + b_n^2).$$

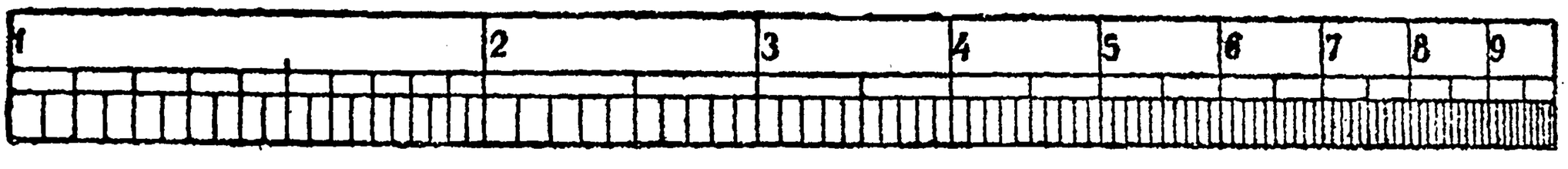
По мере возрастания n, в скобках справа добавляются все новые положительные слагаемые, скобки возрастают, следовательно δ_n убывает, и соответственно улучшается качество приближения.

Можно доказать, что при безграничном возрастании n эта погрешность δ_n стремится к нулю: *частная сумма ряда Фурье функции $f(x)$, при достаточно большом числе членов, воспроизводит эту функцию в промежутке $(0, 2\pi)$ с произвольно малой средней квадратической погрешностью.*

Дополнение II.

ЭЛЕМЕНТЫ НОМОГРАФИИ.

322. Зависимость между двумя переменными. Функциональная шкала и график. *Номографией* в широком смысле называется наука о *графических* способах изображения функциональных зависимостей и вычисления соответствующих значений переменных величин. Стремясь к наиболее наглядным и сжатым, а также практически удобным геометрическим способам, номография пользуется различными вспомогательными приемами, важнейшие из которых мы здесь изложим. Чертежи, являющиеся результатом применения номографических методов, несмотря на существенные различия между ними в принципах их построения и использования, все носят общее название *номограмм*.



Черт. 568.

Для представления зависимости между двумя переменными мы привыкли пользоваться *графиком* [ч. I, 30]. Сейчас мы познакомимся с новым понятием — о *функциональной шкале*, которое может быть использовано для той же цели.

Читатель уже знаком с логарифмической линейкой и помнит, какую роль в ней играет *логарифмическая шкала* (черт. 568), на которой отрезки длины $\log x$ снабжены пометками или отсчетами x [ч. I, 11]: при этом за масштабную единицу может быть принят любой отрезок (на чертеже — вся шкала). Подобным же образом можно поступить с любой функцией $y=f(x)$. Выбрав определенный масштаб μ и взяв на оси определенную начальную точку, станем откладывать на ней (в выбранном масштабе!) отрезки $y=f(x)$, отвечающие ряду значений x (обыкновенно, равноотстоящих), но концы этих отрезков снабдим отсчетами не „y“, а „x“. Таким путем составится некоторая шкала, которая и называется *функциональной шкалой для x, построенной по функции $f(x)$*, или — *шкалой для функции $f(x)$, с отсчетами x.* *

Если переменная x изменяется в промежутке от a до b (так что

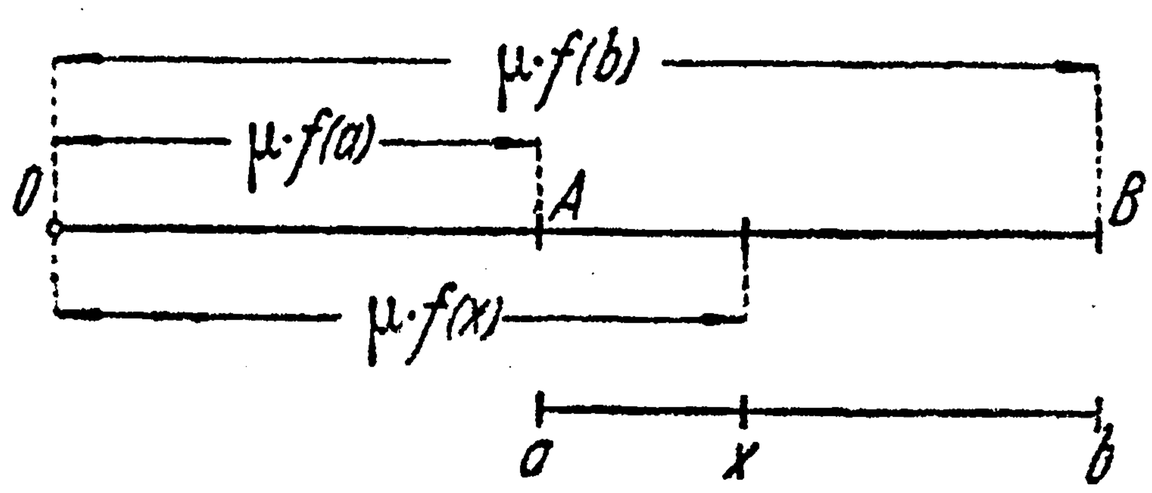
* Во избежание путаницы в отсчетах подобные шкалы строят лишь для функций, изменяющихся в одном направлении, т. е. либо постоянно возрастающих, либо постоянно убывающих. Мы, главным образом, имеем в виду случай возрастающей функции. Ср. ниже, 337, зад. 4.

в начале шкалы будет отсчет „a“, а в конце — отсчет „b“), то начало шкалы будет отстоять от начальной точки на оси на отрезок длины $\mu \cdot f(a)$ (где μ — выбранный масштаб), а конец — на отрезок длины $\mu \cdot f(b)$; в таком случае длина всей шкалы окажется равной (черт. 569)

$$l = \mu [f(b) - f(a)]. \qquad (1)$$

Разумеется, фактически нет надобности вычерчивать части оси, лежащие за пределами интересующего нас отрезка AB: вместо того, чтобы откладывать отрезки $f(x)$, длины $\mu \cdot f(x)$, от начальной точки O на оси, можно непосредственно от начала A шкалы откладывать отрезки $f(x) - f(a)$, длины

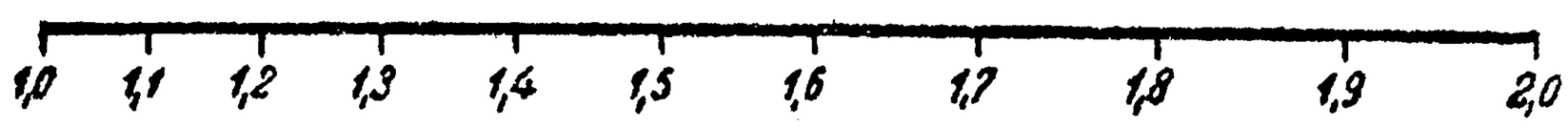
$$\mu \cdot [f(x) - f(a)].$$



Черт. 569.

Располагая масштабом μ, можно придать длине l шкалы [см. (1)] требуемую величину.

Пусть, напр., нужно построить шкалу для функции $f(x) = x^2$, с отметками x, в промежутке от $a = 1$ до $b = 2$, причем желательно, чтобы длина шкалы была равна $l = 10$ (см). Так как здесь $f(a) = 1$, $f(b) = 4$, то по формуле (1) для масштаба μ получаем значение $\frac{10}{3}$ (см). В случаях, когда длина шкалы задана лишь примерно, предпо-



Черт. 570.

читают выбирать более простой масштаб, хотя бы ценой изменения длины шкалы; мы возьмем $\mu = 3$ см, так что у нас $l = 9$ см. Довольствуясь значениями x через 0,1, составим табличку:

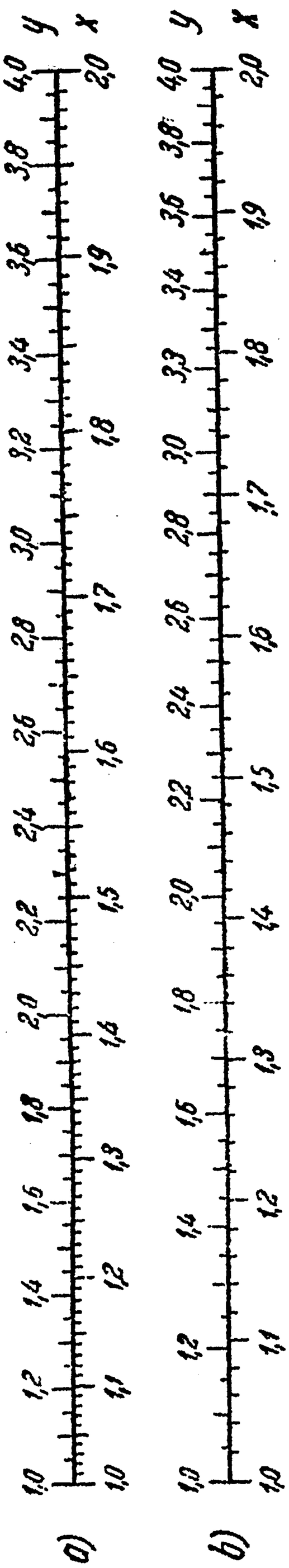
x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
x^2	1,00	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4,00
$x^2 - 1$	0,00	0,21	0,44	0,69	0,96	1,25	1,56	1,89	2,24	2,61	3,00
$3(x^2-1)$ см	0,00	0,63	1,32	2,07	2,88	3,75	4,68	5,67	6,72	7,83	9,00

Отложим теперь от начала шкалы ряд отрезков, длины которых показаны в последней строке, и пометим их значениями x из первой

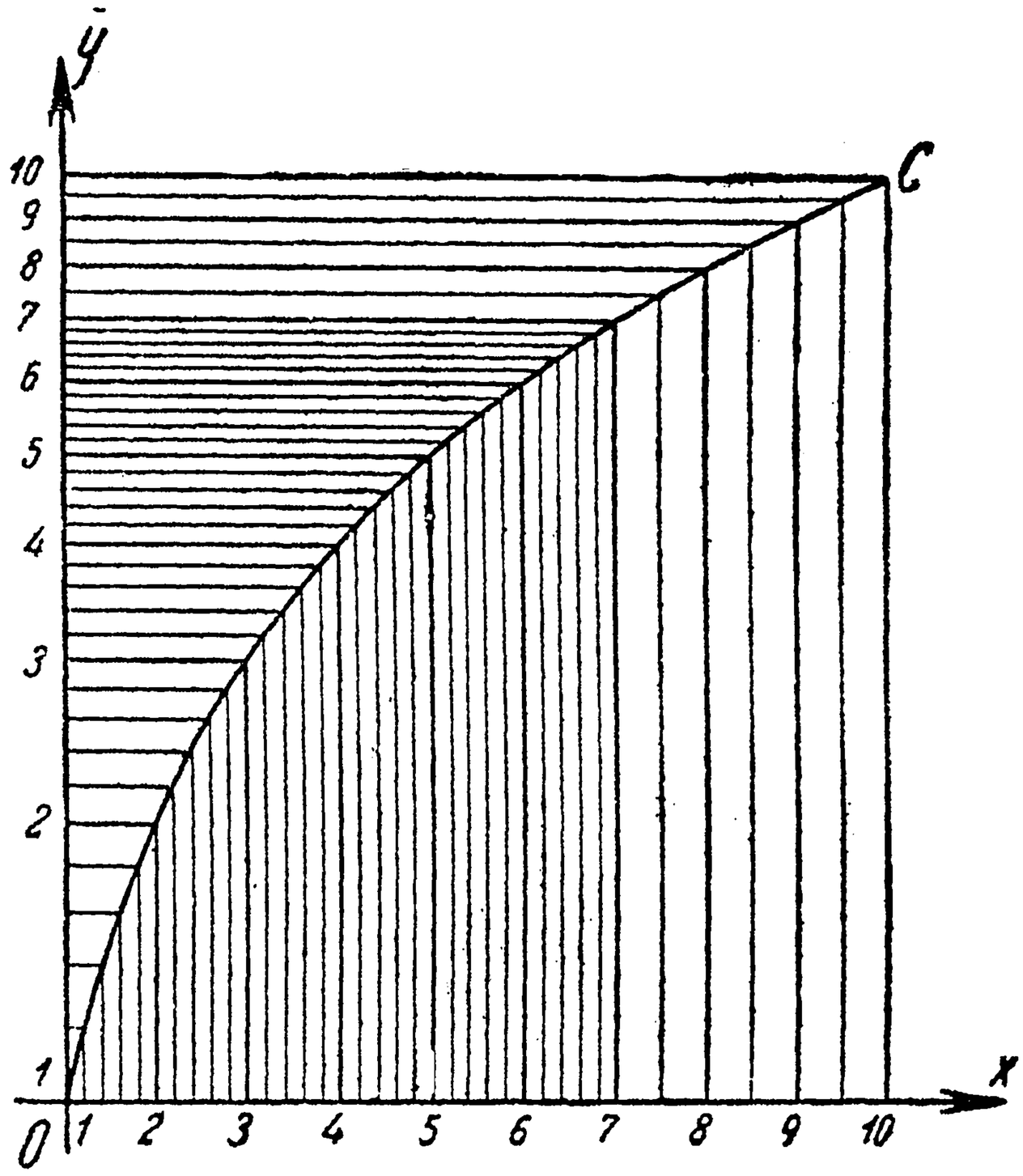
строки; таким путем и получится нужная нам шкала, изображенная на черт. 570.

Для того чтобы облегчить вычисление значений $y=f(x)$ по заданному x (и обратно), по другую сторону той же прямой, на которой нанесена шкала функции $f(x)$ (с отсчетами x), наносят в том же масштабе обыкновенную — *нормальную* — шкалу величины y (с отсчетами y). Если требуется небольшая точность, то такая *двойная шкала* дает очень удобный способ для перехода от x к y или от y к x. Мы им уже пользовались в 94 для установления связи между шкалами Цельсия и Фаренгейта (черт. 131). На черт. 571 *а*) представлена двойная шкала для функции x^2, причем для достижения большей точности взят вдвое больший масштаб $\mu=6$ см.* и нанесены более мелкие деления, чем выше. При $x=1{,}46$, напр., легко находим (интерполируя на-глаз) $y=x^2=2{,}13$; наоборот, при $y=2{,}76$ имеем $x=\sqrt{y}=1{,}66$.

Любопытно сопоставить с этой двойной шкалой другую, построенную для обратной



Черт. 571. (4/5)*



Черт. 572.

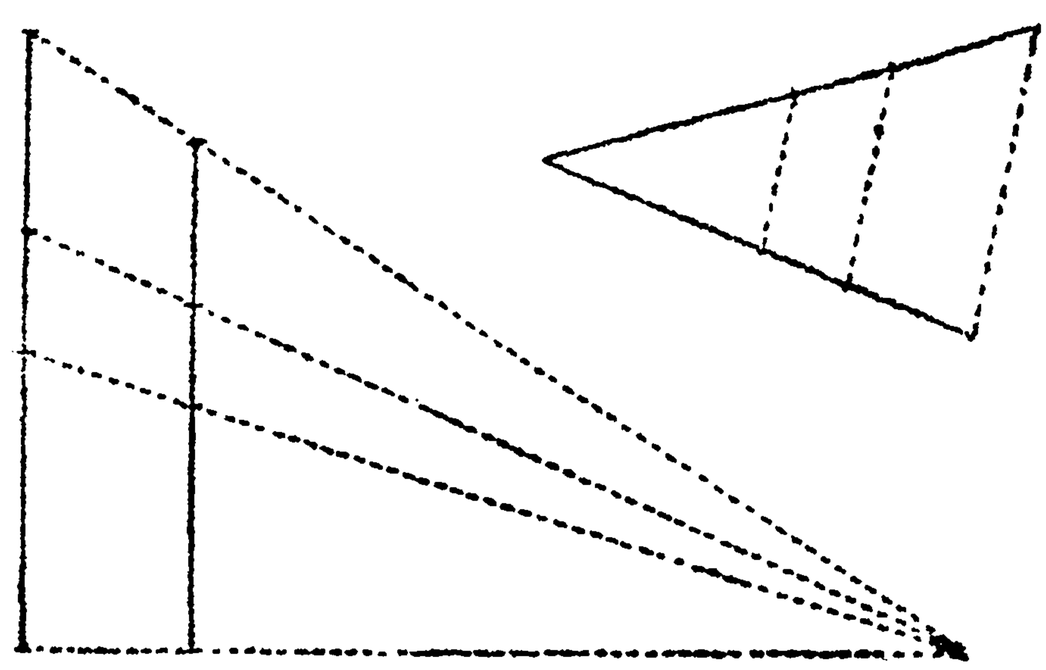
* Число 4/5, помещенное под чертежом в скобках, указывает, что он в этом отношении уменьшен по сравнению с оригиналом. Подобные указания будут делаться и впредь. Следует иметь, впрочем, в виду, что при воспроизведении номограмм все же допускались небольшие уклонения от указываемого уменьшения.

функции $x=\sqrt{y}$ (в промежутке от $y=1$ до $y=4$). Сохраняя такую же длину шкалы $l=18$ см, имеем для x масштаб $\mu=18$ см. На этот раз составляем такую табличку (ограничиваясь и здесь лишь грубыми делениями):

y	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
$\sqrt{y}$	1,000	1,095	1,183	1,265	1,342	1,414	1,483	1,549	1,612	1,673	1,732	1,789	1,844	1,897	1,949	2,000
$\sqrt{y}-1$	0	0,095	0,183	0,265	0,342	0,414	0,483	0,549	0,612	0,673	0,732	0,789	0,844	0,897	0,949	1,000
$18(\sqrt{y}-1)$ см	0	1,71	3,29	4,77	6,16	7,45	8,69	9,88	11,02	12,11	13,18	14,20	15,19	16,15	17,08	18,00

Соответствующая двойная шкала изображена на черт. 571 *b*.) Хотя деления на обеих шкалах, для x и для y, сдвинуты по сравнению с прежним их расположением, но соответствие между x и y осталось прежнее. Новая шкала, подобно прежней, позволяет определять и $x=\sqrt{y}$ по y, и $y=x^2$ по x.

Существует тесная связь между представлением функциональной зависимости между переменными x и y с помощью графика функции $y=f(x)$ и с помощью соответствующей функциональной шкалы. Поясним это на примере функции $y=\log x$. На черт. 572 кривая OC представляет график этой функции (причем, для сохранения места, ось Oy перемещена параллельно самой себе на единицу). Отрезок (1,10) на оси Ox разделен на девять равных частей (первые шесть из них разделены снова, каждая на пять частей, а последние три — пополам), и из чертежа ясно, как на оси Oy получается шкала, соответствующая рассматриваемой функции (в данном случае — *логарифмическая шкала*). Наоборот, если бы на оси Oy была дана эта шкала, то, взяв на оси Ox упомянутую нормальную шкалу для x и восставляя перпендикуляры к обеим осям в точках деления, в пересечении соответствующих перпендикуляров получили бы ряд точек нашего графика, по которым нетрудно было бы восстановить и всю кривую.



Черт. 573.

323. Важнейшие функциональные шкалы. В номографии часто приходится пользоваться *логарифмической шкалой*, с которой читатель знаком. Такую шкалу обычно снимают с логарифмической линейки или с логарифмической бумаги. Но полученная этим путем шкала имеет определенную длину, которая может оказаться для нас неудобной. Существуют простые геометрические приемы, позволяющие пропорциональным изменением шкалы придать ей любую наперед указанную длину; приемы эти ясны из

черт. 573. На черт. 574 приведены логарифмические шкалы длиною в 5, $7^1/_2$, 10, $12^1/_2$ и 15 см.

Остановимся теперь на другом типе функциональных шкал, также часто встречающемся на практике — на *проективной шкале*. Рассмотрим две оси (черт. 575), Cx и Cy, пересекающиеся под произвольным углом, и, выбрав на них по произволу начальные точки O и O', станем откладывать на них (в одном масштабе) отрезки $x = OA$ и $y = O'B$. При этом мы следующим образом установим соответствие между точками A на оси Ox и точками B на оси $O'y$: взяв некоторую точку P вне осей, спроектируем точку A из этого центра на ось $O'y$ и проекцию B будем считать ей соответствующей. Точка C, в которой оси пересекаются, будет, очевидно, соответствовать сама себе. Легко определить зависимость, связывающую соответственные значения x и y. Из подобных треугольников ABC и APD имеем:

$$\frac{CB}{DP} = \frac{CA}{DA}$$

или

$$\frac{s+y}{t} = \frac{r+x}{q+x},$$

откуда

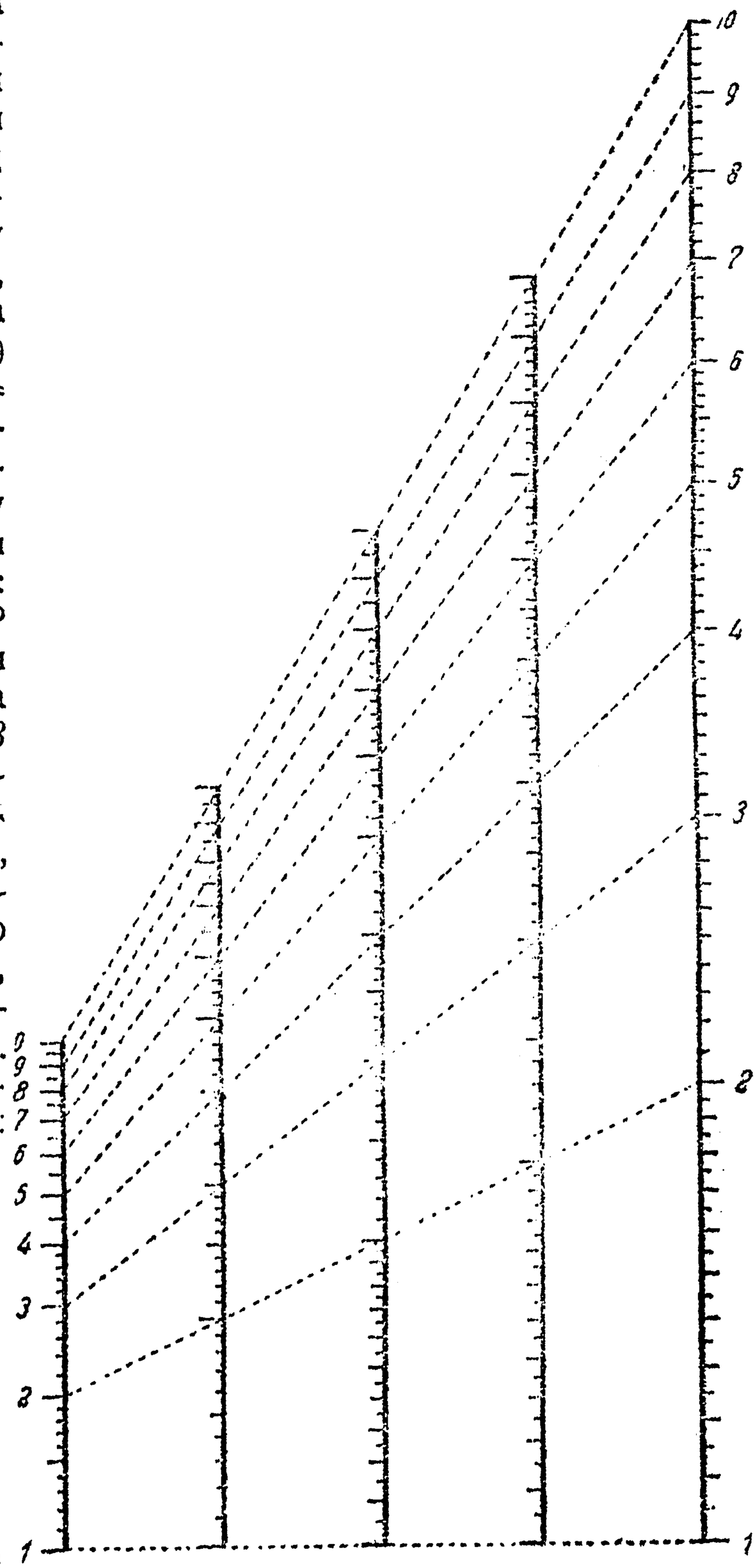
$$y = \frac{(t-s)x + (tr-qs)}{x+q}$$

или, проще,

$$y = \frac{mx+n}{x+q}, \qquad (2)$$

если положить

$$t - s = m, \quad tr - qs = n.$$

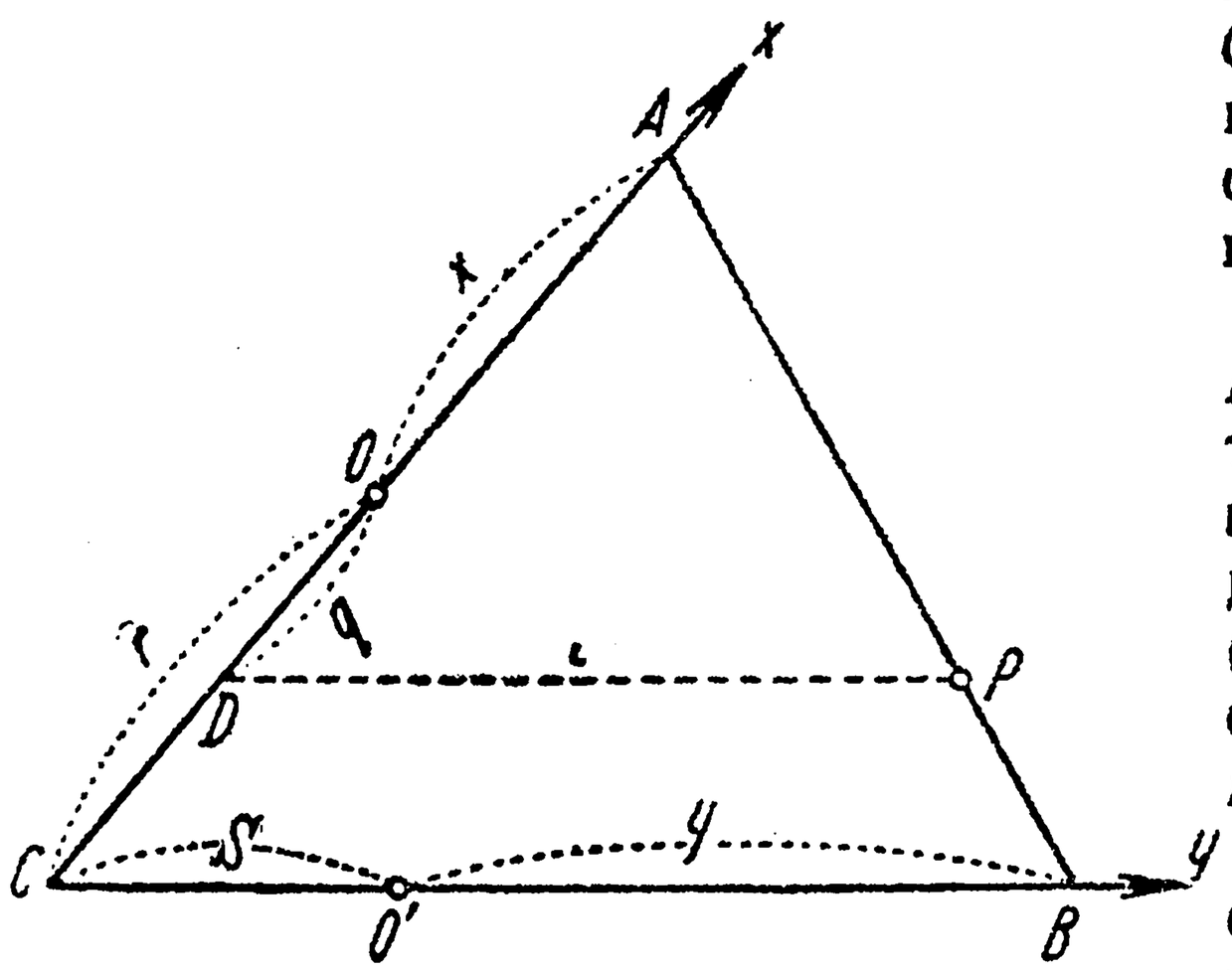


Черт. 574.

Таким образом, y оказывается *дробно-линейной функцией* от x!

Очевидно, за счет выбора отрезков r, s, t можно получить лю-

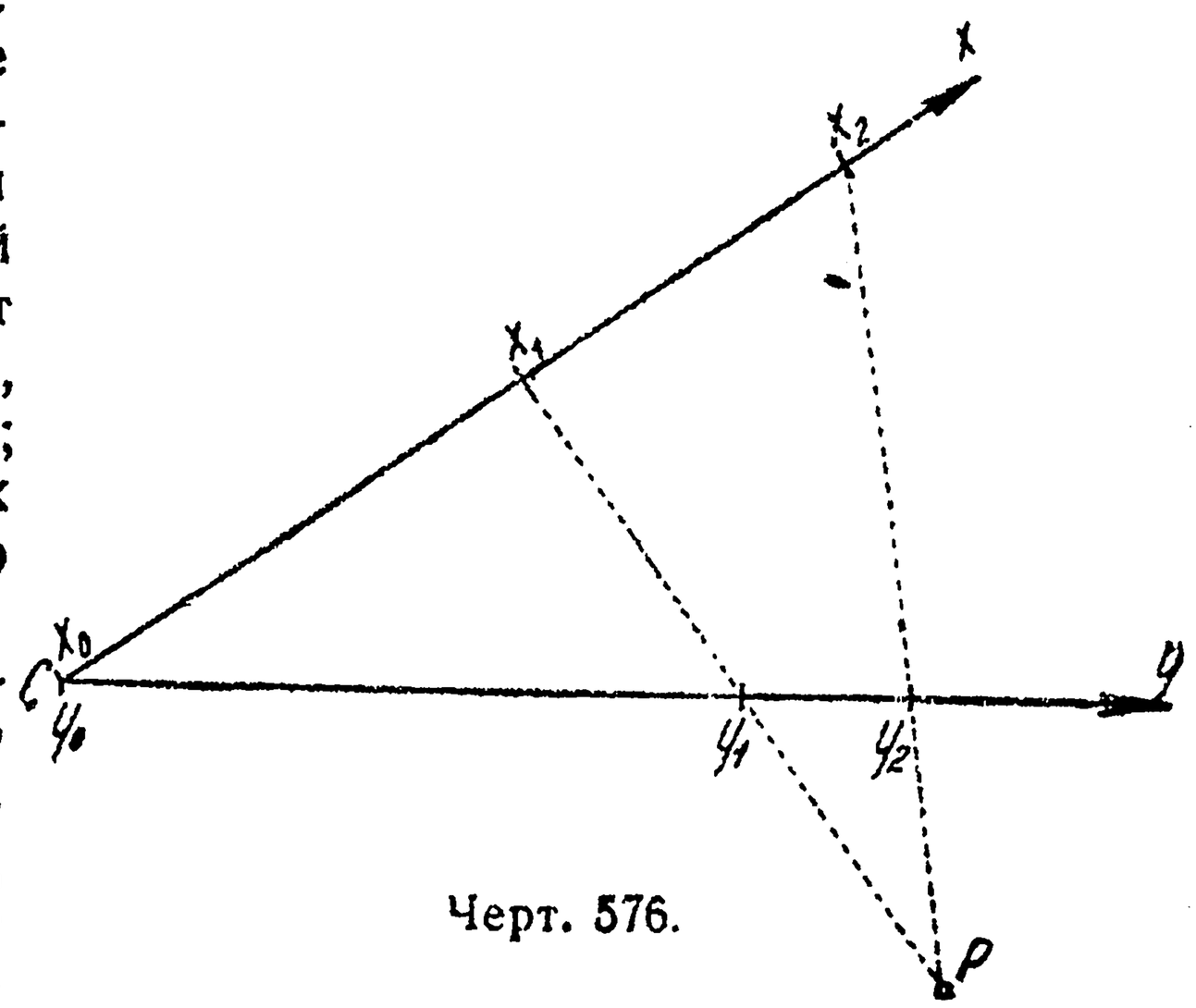
бые наперед заданные значения для коэффициентов m и n, т. е. путем указанного построения можно реализовать произвольную дробно-линейную зависимость. При этом даже можно наперед фиксировать по желанию одну из величин r или s, т. е. произвольно выбрать положение одной из начальных точек O, O'. Положение вещей существенно не изменится, если отрезки x и y откладывать в разных масштабах.



Черт. 575.

Если на оси $O'y$ у точек B поместить отсчеты x, то получим функциональную шкалу для x, определяемую дробно-линейной функцией (2). Эту шкалу по способу ее построения и называют *проективной*.

При фактическом построении проективной шкалы по заданной зависимости (2) обыкновенно поступают так. Взяв любое значение $x = x_0$ (чаще всего — одно из крайних значений x), вычисляют по формуле (2) соответствующее значение $y = y_0$, и с этой парой (x_0, y_0) связывают точку C пересечения осей. Затем, выбрав удобные масштабы, наносят на осях, соответственно, нормальные шкалы для x и y (положение которых условием относительно точки C уже вполне определяется). После этого отмечают на построенных шкалах еще две пары соответственных значений (x_1, y_1), (x_2, y_2) и соединяют прямыми отмеченные точки, как показано на черт. 576; в пересечении этих прямых и получится искомый центр проекций P.



Черт. 576.

Действительно, если соответствие между x и y установить с помощью проектирования из этого центра, то, во всяком случае, y будет дробно-линейной функцией от x вида:

$$y = \frac{m'x + n'}{x + q'}.$$

Так как при **трех** значениях x: x_0, x_1, x_2 эта формула должна дать те же значения для y, что и формула (2) (именно: y_0, y_1, y_2), то не-

трудно видеть, что все три коэффициента m', n', q' этой формулы тождественны с коэффициентами m, n, q данной формулы (2). Таким образом, проектирование из центра P реализует именно данную зависимость и позволяет построить на оси Cy определяемую ею проективную шкалу.

В главе IV были указаны удобные графические приемы для построения по точкам графиков некоторых простейших функций:

$$y = ax^2, \quad y = ax^3, \quad y = \frac{a}{x}, \quad y = ax^{\frac{3}{2}}$$

и др. Мы видели в предыдущем n⁰, что по графику легко строится соответствующая функциональная шкала. Таким образом, упомянутые приемы могут быть использованы для графического построения простейших функциональных шкал. Между прочим, приведенное только что построение проективной шкалы, т. е. функциональной шкалы для дробно-линейной зависимости, связано с обобщением (на случай косоугольной системы координатных осей) построения гиперболы по точкам [n⁰ 41].

Обратимся теперь к примерам.

324. Примеры и задачи. 1. Пользуясь приводимыми в справочниках таблицами, построить шкалы для следующих функций (с отметками x):

$$a)\ y = \frac{1}{x} \text{ (от } x = 0{,}5 \text{ до } x = 20),$$

$$b)\ y = x^2 \text{ (от } x = 0 \text{ до } x = 10),$$

$$c)\ y = x^3 \text{ (от } x = 0 \text{ до } x = 5),$$

$$d)\ y = \sin x \text{ (от } x = 0^\circ \text{ до } x = 90^\circ).$$

Длина шкалы l должна быть (примерно) 10 см. По другую сторону функциональной шкалы для x наметить нормальную шкалу для y, т. е. построить *двойную шкалу* для каждой из указанных функций.

2. Построить двойные шкалы для функций, обратных рассмотренным выше (с отметками y):

$$b)\ x = \sqrt{y} \text{ (от } y = 0 \text{ до } y = 100),$$

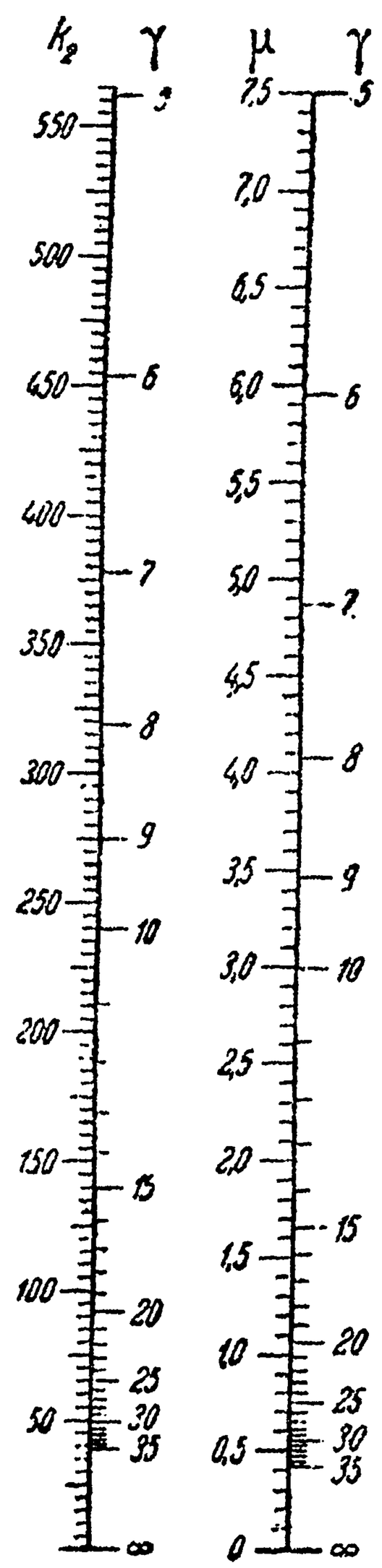
$$c)\ x = \sqrt[3]{y} \text{ (от } y = 0 \text{ до } y = 125),$$

$$d)\ x = \arcsin y \text{ (от } y = 0 \text{ до } y = 1).$$

[Для случая a) обратная функция, очевидно, не дает ничего нового.] Длина шкалы (примерно) та же.

3. В виде примера более сложных вычислений предлагается читателю построить двойные шкалы для функций (которые встречаются при расчете железобетонных балок):

$$\mu = \frac{750}{\gamma(15+\gamma)}, \qquad k_2 = \frac{15(10+\gamma)}{2\gamma(15+\gamma)^3},$$



Черт. 577. (1/2)

изменяя переменную γ от 5 до 35. Шкалы эти приведены на черт. 577 в масштабе 400 см для k_2 и 3 см для μ; заметим лишь, что — для удобства — значения k_2 выражены в десятитысячных долях, т. е. умножены на 10^4. [Впоследствии, в 335, 3, мы эти шкалы используем.]

4. Читатель обратил внимание на то, что функциональная шкала вообще оказывается *неравномерной*, так что равноотстоящим значениям x (отсчетам) соот-

ветствуют неравноотстоящие деления шкалы. Доказать, что единственной функцией $f(x)$, шкала которой (с отсчетами x) оказывается *равномерной*, будет линейная: $f(x) = ax + b$.

Указание. Вспомнить характерное свойство линейной функции [ч. I, 33].

5. Если принять, что на уровне моря атмосферное давление измеряется 760 мм ртутного столба, то, по известной барометрической формуле [ср. ч. I, 24, (18)], высота h места над уровнем моря выражается через отсчет b барометра в нем следующим образом:

$$h = 18\,400(\log 760 - \log b)$$

(при этом влиянием температуры мы пренебрегаем).

Построить для этой функциональной зависимости номограмму в виде двойной функциональной шкалы, в пределах для b от 760 до 190 (мм), следовательно, для h от 0 до 11 077 (м). С этой целью представим наше уравнение в виде:

$$\log b = \log 760 - \frac{h}{18\,400},$$

затем, взяв отрезок длиною 10 см (черт. 578), построим с одной стороны его логарифмическую шкалу для b, а с другой — функциональную шкалу для h, определяемую линейным двучленом

$$\log 760 - \frac{h}{18\,400}. \tag{3}$$

Если логарифмическую шкалу снять с линейки в 25 см, на которой отрезок, отвечающий промежутку от 760 до 190, равен 15,05 см, то придется уменьшить его в отношении 3 : 2. Что касается шкалы линейной функции (3), то она будет равномерной (см. зад. 4) и вполне определяется вычисленными крайними значениями h: 0 и 11 077 (м). На 1000 м приходится $\frac{10 \cdot 1000}{11\,077} = 0{,}90$ см.

6. Период T свободных колебаний оси, напр., опертой по концам и несущей посередине груз, определяется по стреле прогиба f формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{f}{g}},$$

где $g = 981$ (см/сек.^{2}). Построить номограмму этой зависимости, в пределах для f от 0 до 1 (см) и следовательно для T от 0 до 0,20 сек.

Указание. Для этого естественнее всего прибегнуть к двойной шкале, построив для f функциональную шкалу — по функции

$$2\pi\sqrt{\frac{f}{g}} = 0{,}2006\sqrt{f},$$

а с другой стороны поместив нормальную шкалу для T.

7. Скорость резания v (м/мин.) и площадь поперечного сечения стружки F (мм^2) связаны формулой вида:

$$v = \frac{c}{\sqrt[s]{F}}.$$

Постоянные c и s для мартеновской стали имеют значения $c = 36$, $s = 2{,}44$. Построить номограмму этой зависимости в пределах от 1 до 50 для F.

Можно было бы и здесь поступить так же, как и в предыдущей задаче; однако в виду сложности выкладок, предпочтительнее другой путь. Прологарифмировав данное соотношение, представим его в виде

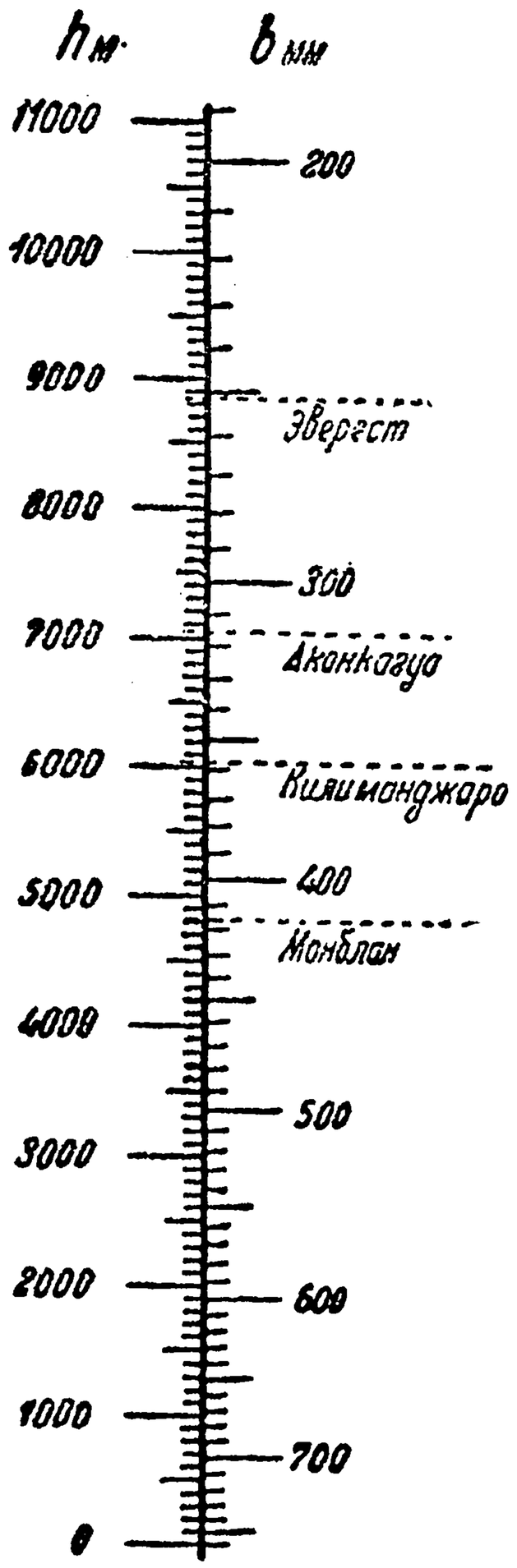
$$\log v = \log 36 - \frac{1}{2{,}44}\log F,$$

или

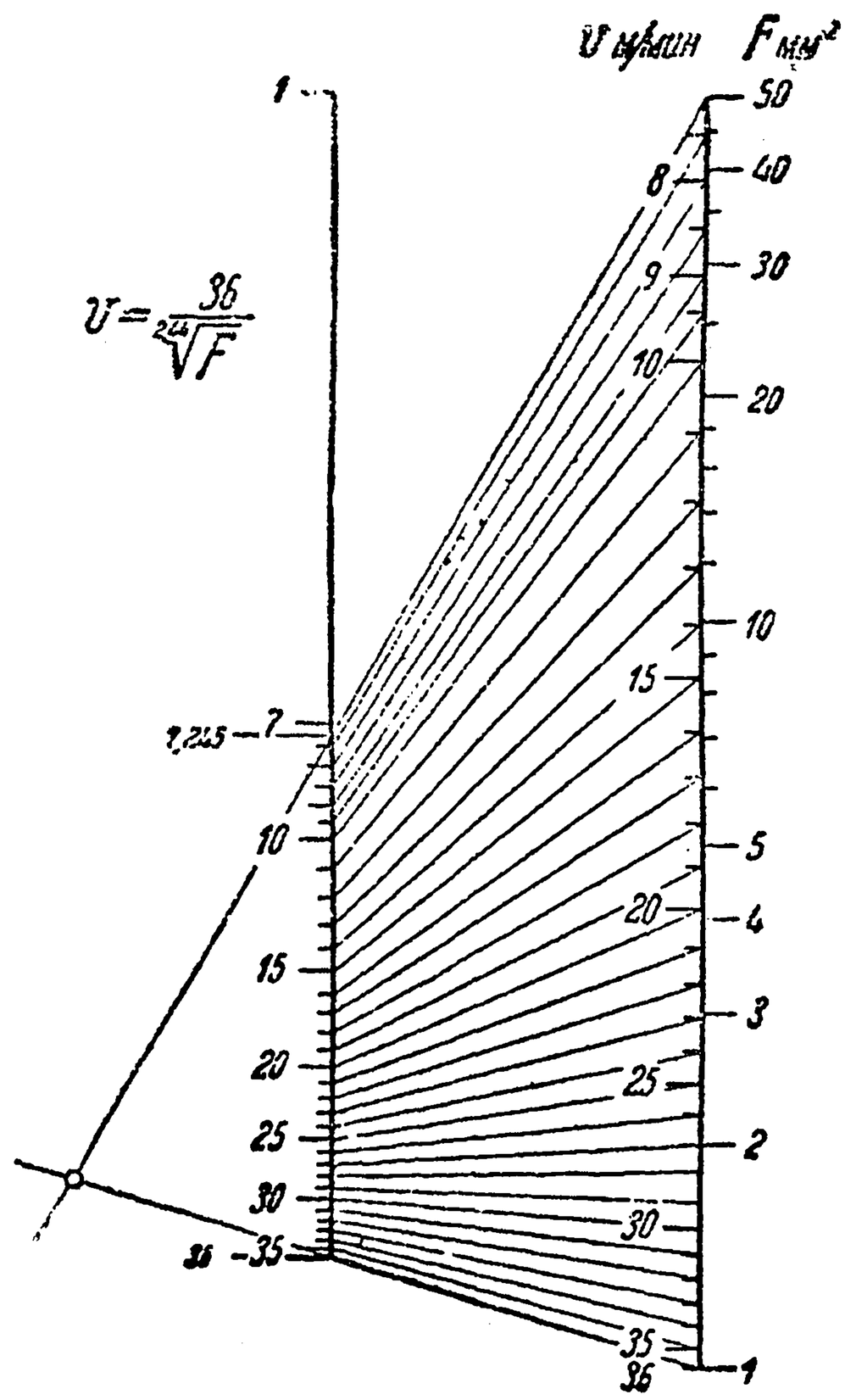
$$2{,}44 \cdot \log v = 3{,}797 - \log F;$$

теперь уже ясно, что дело сведется к построению логарифмических шкал. Так как возрастанию F отвечает убывание v, то шкалы F и v должны итти в противоположных направлениях. Если шкалу F снять с логарифмической бумаги,

с масштабной единицей в 10 см, то вся длина ее будет $(\log 50 - \log 1) \cdot 10 \doteq 17$ см. Шкала функции $\log v$, снятая с той же бумаги, будет естественно в 2,44 раза короче (крайними значениями v будут 36 и 7,245). Ее нужно, пропорционально увеличив, довести до той же длины, что и у шкалы для F. На черт. 579 представлены обе шкалы (в уменьшенном вдвое виде); воспользовавшись одним из указанных в начале этого n⁰ приемов, мы не только доводим меньшую шкалу до нужной длины, но и достигаем надлежащего их взаимного расположения, поскольку отсчет 1 на шкале



Черт. 578. (1/1)



Черт. 579. (1/2)

(F) оказывается как раз против отсчета 36 на шкале (v), соответствующего ему по нашей формуле.

Обращаем внимание читателя на то, что здесь обе шкалы, (v) и (F), оказываются неравномерными; это нисколько не мешает определять с помощью построенной двойной шкалы v по F и F по v.

8. Функциональные шкалы можно строить и для эмпирически получаемых функций, не прибегая к их аналитическим выражениям. Для примера, предлагаем читателю построить двойную шкалу, воспроизводящую зависимость между давлением p (в мм ртутного столба) и температурой t° С насыщенного водяного пара, пользуясь результатами опытов Реньо (Regnault):

t	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
p	92	149	233	355	526	760	1075	1489	2026	2710	3570	4635	5939	7517	9407	11622

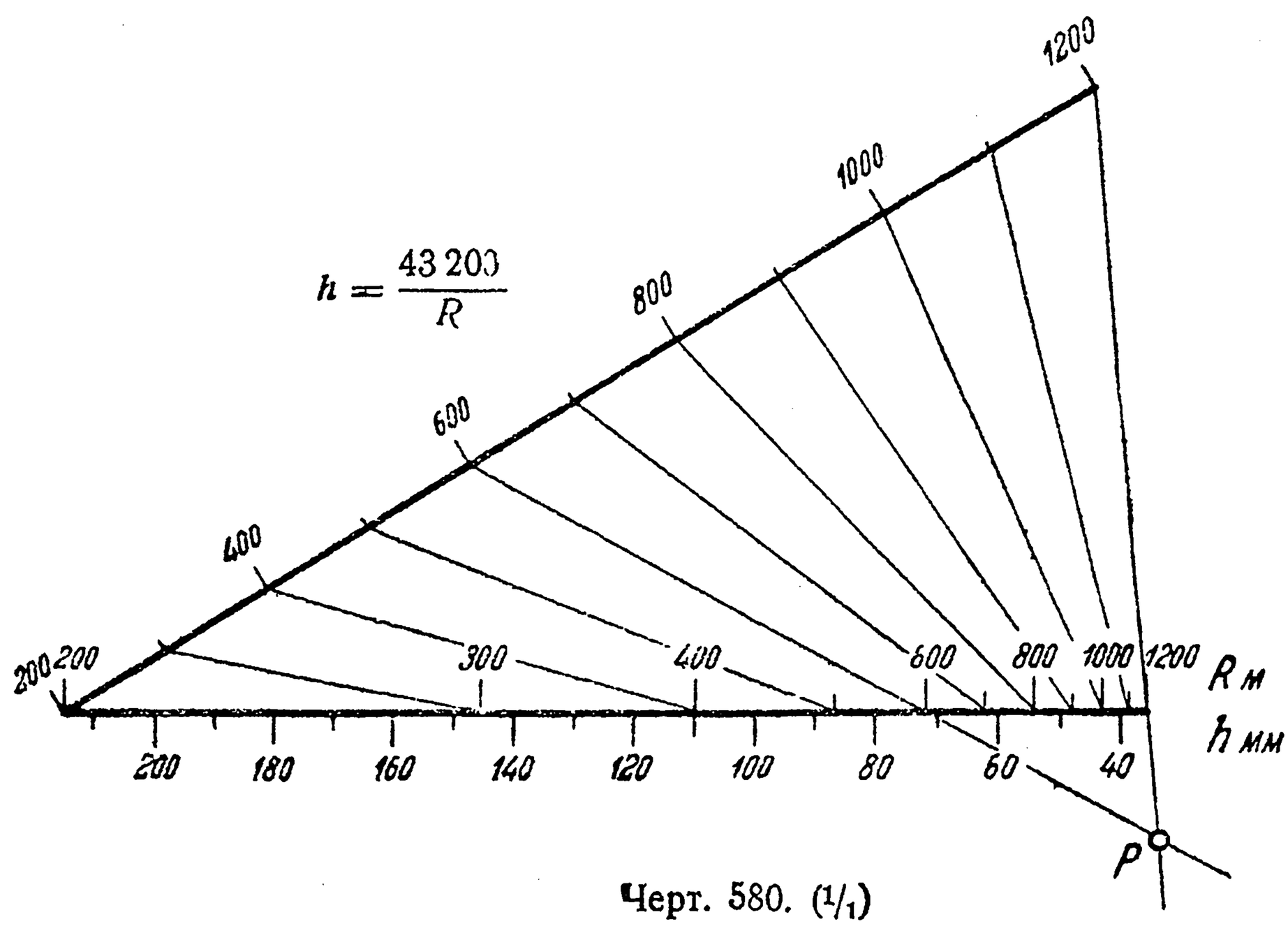
Слишком большая разница между крайними значениями p, 92 и 11 622, создает затруднения в построении и пользовании этой номограммой. Беде можно помочь, если ввести $\log p$. Пусть читатель построит двойную шкалу, откладывая по обеим ее сторонам значения $\log p$, но снабжая одну шкалу пометками „p", а другую — пометками „t". И на этот раз обе шкалы будут неравномерными!

9. Если наибольшая скорость движения на железнодорожном участке достигает 60 км/час, то возвышение h наружного рельса на закруглениях выражается в мм формулой:

$$h = \frac{43\,200}{R},$$

где R — радиус кривизны закругления в метрах. Построить номограмму для определения h по R, в пределах изменения R от 200 до 1200 м.

Легко видеть, что h изменяется от $43\,200 : 200 = 216$ мм до $43\,200 : 1200 = 36$ мм. Если нормальную шкалу для h объединить с проективной шкалой для R, опре-



Черт. 580. (1/1)

деляемой функцией $43\,200/R$, то получаемая двойная шкала и даст искомую номограмму. Построим на двух пересекающихся осях (черт. 580) сначала нормальные шкалы для обеих переменных. Шкалу (h) возьмем длиною в 9 см (масштаб: $\frac{216-36}{90} = 2$ мм в 1 мм), а шкалу (R) — в 10 см (масштаб: $\frac{1200-200}{10} = 100$ м в 1 см). Для определения центра P проектирования прежде всего соединим прямой концы двух шкал; затем, берем, напр., $R = 600$, $h = 43\,200 : 600 = 72$ и проводим вторую прямую через соответствующие точки. Этими прямыми и устанавливается положение точки P. Остальное ясно из чертежа.

10. Пусть для определения неизвестного сопротивления y пользуются мостиком Витстона, по схеме черт. 581. Тогда, в зависимости от положения подвижного контакта D, определяемого отрезком $x = AD$, будем иметь:

$$y = \frac{Rx}{a-x},$$

где a есть длина линейки AC, по которой передвигается контакт D. Предположим теперь, что $a = 50$ см, а известное сопротивление $R = 5$ омам. Тогда формула, определяющая y, примет вид:

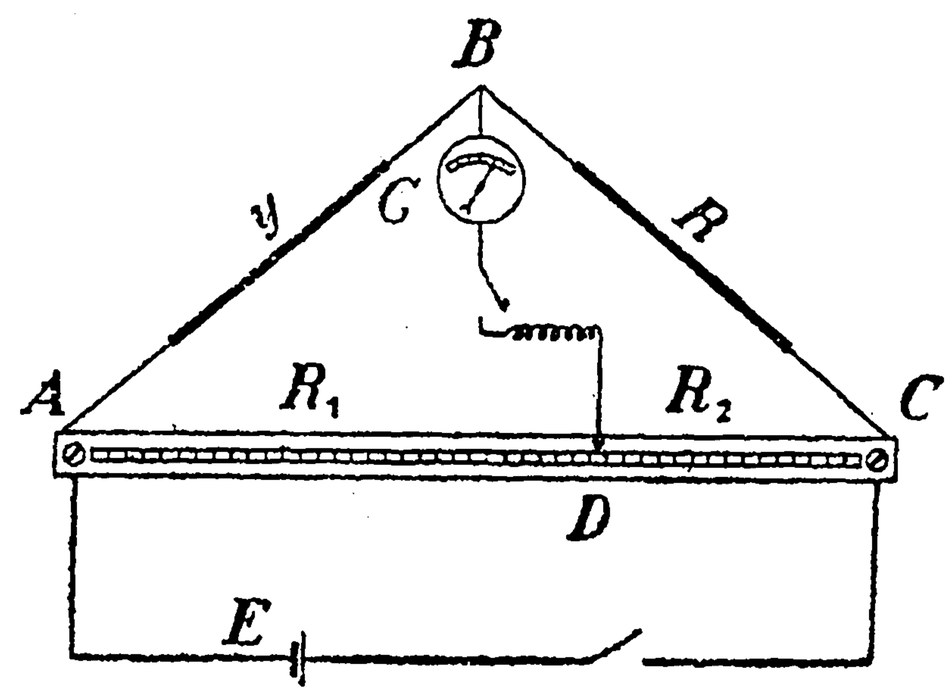
$$y = \frac{5\,x}{50-x}, \tag{4}$$

откуда, в свою очередь,

$$x = \frac{50\,y}{y+5}. \qquad (4\,a)$$

Задача состоит в градуировании линейки AC так, чтобы положение контакта непосредственно указывало величину искомого сопротивления y.

Для решения ее нужно на отрезке AC нанести проективную шкалу для y, определяемую функцией (4 a). Построение ясно из черт. 582. Положение точки P определяется прямыми, проведенными через соответствующие отсчеты, напр., $x = 25$ и $y = 5$, $x = 40$ и $y = 20$. Так как отсчету $x = 50$ отвечает отсчет $y = \infty$ [знаменатель в формуле (4) обращается в нуль!], то можно было бы определить точку P также лучом, проведенным через отсчет 50 шкалы (x) так, чтобы он встретил прямую, несущую на себе шкалу (y), в бесконечности, иначе говоря, — параллельным этой прямой (см. чертеж.)



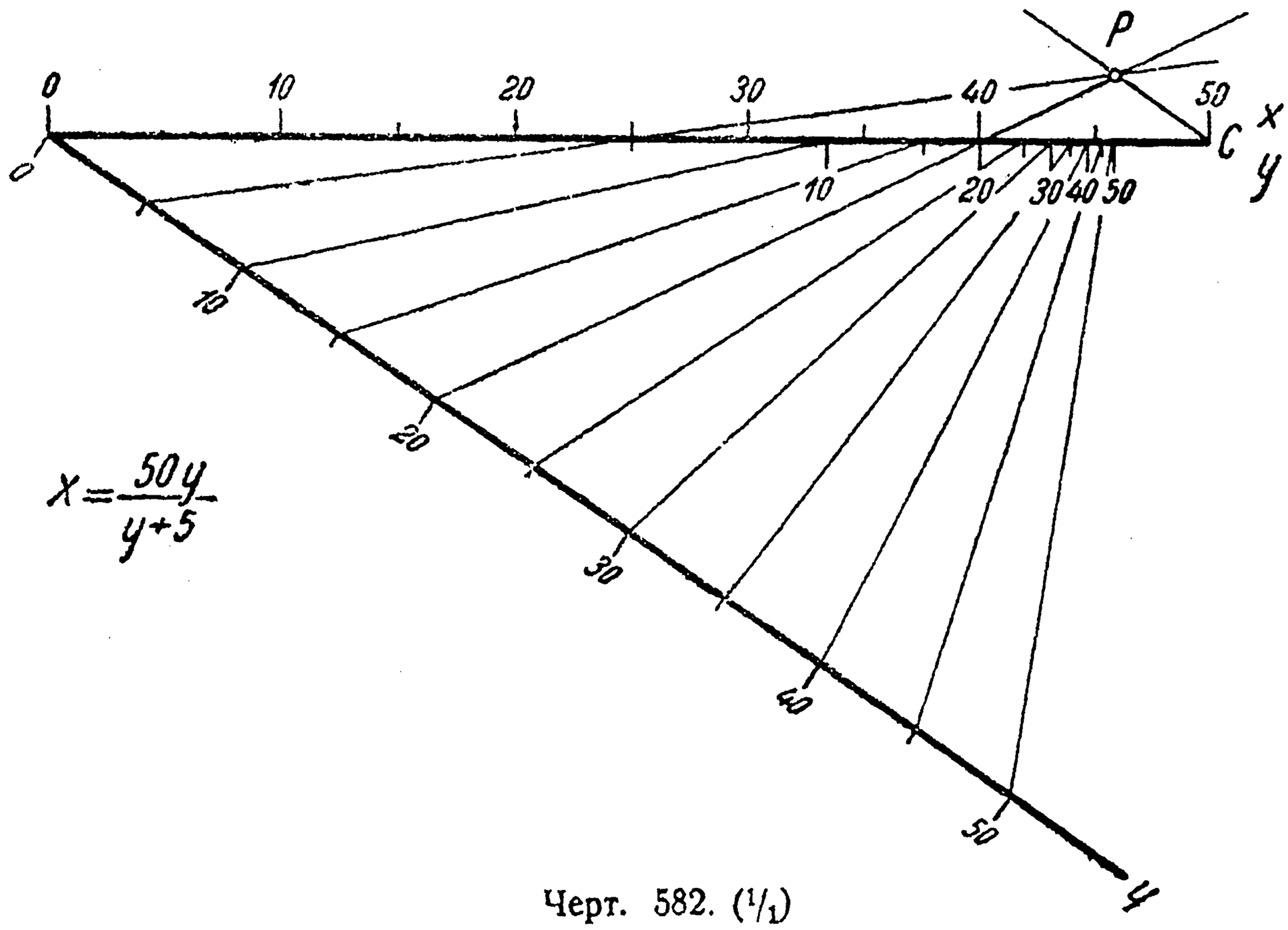
Черт. 581.

11. Построить номограммы зависимостей:

$$a)\ \mu = 0{,}46\,\frac{1+0{,}013\,v}{1+0{,}066\,v},$$

где μ — коэффициент трения скольжения между тормозными колодками литой стали и стальными бандажами, а v — скорость поезда в км/час (в пределах от 10 до 100 для v);

$$b)\ \sigma = 0{,}18 - \frac{0{,}13}{\mu - 0{,}5},$$



Черт. 582. ($^1/_1$)

где μ — коэффициент трения, а σ — скольжение (в %) для фрикционных передач из фибры (в пределах от 0,1 до 0,5 для μ).

12. Построить номограмму для так называемой малой формулы Куттера (Kutter):

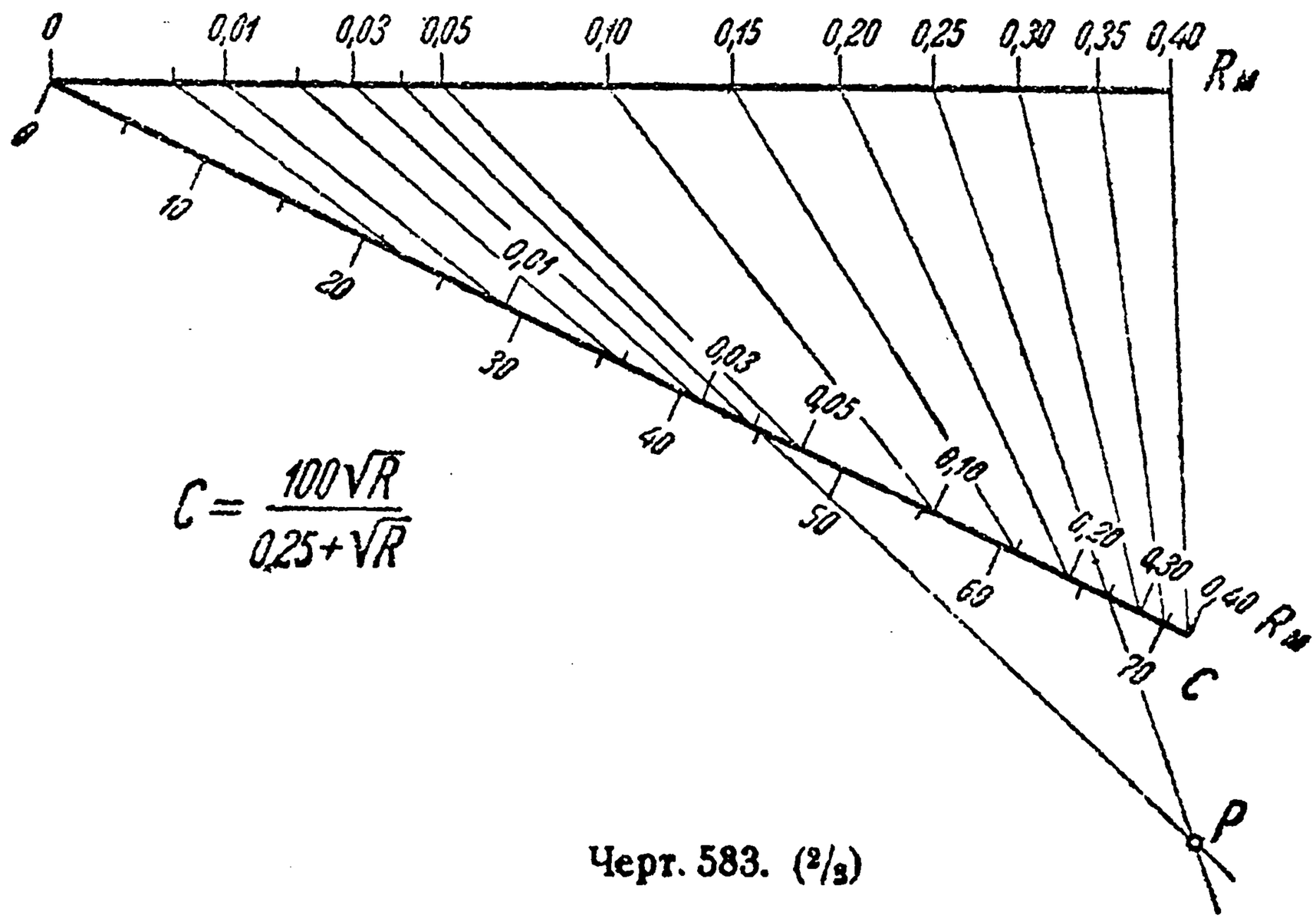
$$C = \frac{100\sqrt{R}}{0{,}25 + \sqrt{R}},*$$

дающей зависимость коэффициента трения или скоростного коэффициента C от гидравлического радиуса R. Пределы изменения R пусть будут 0 и 0,4 м.

Если положить $\sqrt{R} = \rho$, то

$$C = \frac{100\,\rho}{0{,}25 + \rho}$$

окажется дробно-линейной функцией от ρ. Номограмму этой зависимости легко получить обычным путем, построив на пересекающихся прямых нормальные шкалы для C и для ρ, и спроектировав вторую из них на первую, из надлежаще выбранного центра. Для того же чтобы получить номограмму для формулы Куттера, нужно лишь заменить в этом построении нормальную шкалу для ρ — шкалой для функции $\rho = \sqrt{R}$ с отметками R. Построение выполнено на черт. 583. Центр про-



Черт. 583. (2/3)

екции определен по двум парам соответственных значений, напр., $R = 0{,}25$, $C = 66{,}7$ и $R = 0{,}04$, $C = 44{,}5$.

Мы воспользуемся этим примером, чтобы установить понятие, которое иной раз бывает полезно. Именно, мы обобщим понятие о *проективной шкале*. Вместо того чтобы исходить из нормальной шкалы для x, мы станем проектировать из некоторого центра функциональную шкалу, построенную по функции $f(x)$. Получаемая в результате шкала с пометками x называется *проективной шкалой для функции* $f(x)$.

Таким образом построенная только что шкала является проективной шкалой для функции $\sqrt{R}$.

Проективная шкала для функции $f(x)$ отвечает некоторой дробно-линейной функции от $f(x)$:

$$y = \frac{mf(x) + n}{f(x) + q}$$

---

* Собственно формула Куттера имеет вид:

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}},$$

где m — коэффициент шероховатости. Мы взяли $m = 0{,}25$, как это обыкновенно делают при водопроводных расчетах.

Обратно, каждому выражению такого типа отвечает некоторое проективное построение, исходящее из шкалы для функции $f(x)$. Центр проекций, как видно из приведенного выше примера, находится теми же приемами, что и в случае проективной шкалы в узком смысле.

325. Зависимость между тремя переменными. Номограммы из помеченных линий (абаки). Перейдем теперь к номограммам, выражающим функциональную зависимость между тремя переменными, скажем, x, y и z. В общем виде эта зависимость может быть представлена в форме уравнения.

$$F(x, y; z) = 0. \tag{5}$$

Для графического представления такой зависимости существуют разные методы. Мы сначала изложим более старый метод — *метод семейства кривых*, который и посейчас находит частое применение. В простейшей форме его сущность сводится к следующему.

Читатель знает, что уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными представляет на плоскости xOy некоторую кривую — геометрическое место точек, координаты x, y которых ему удовлетворяют. Если же в уравнение, кроме x и y, входит еще третья переменная z (которую будем называть *параметром*, чтобы отличить ее от координат), т. е. если дано уравнение вида (5), то стоит лишь приписать z какое-либо постоянное значение z_0, чтобы получилось уравнение

$$F(x, y; z_0) = 0 \tag{6}$$

с двумя переменными, которое даст нам кривую. Если взяты такие значения x_0, y_0 переменных x, y, что точка (x_0, y_0) оказывается лежащей на этой кривой (6), то им несомненно отвечает именно значение z_0 переменной z, поскольку значения x_0, y_0, z_0 совместно удовлетворяют уравнению (5). Точно также по значениям $z = z_0$ и, напр., $x = x_0$, с помощью этой же кривой, нетрудно усмотреть соответствующее значение $y = y_0$ (если кривая проведена на мелкой сетке, напр., на миллиметровой бумаге). Но кривая эта может служить лишь для взятого значения z_0; для других значений z нужны другие кривые.

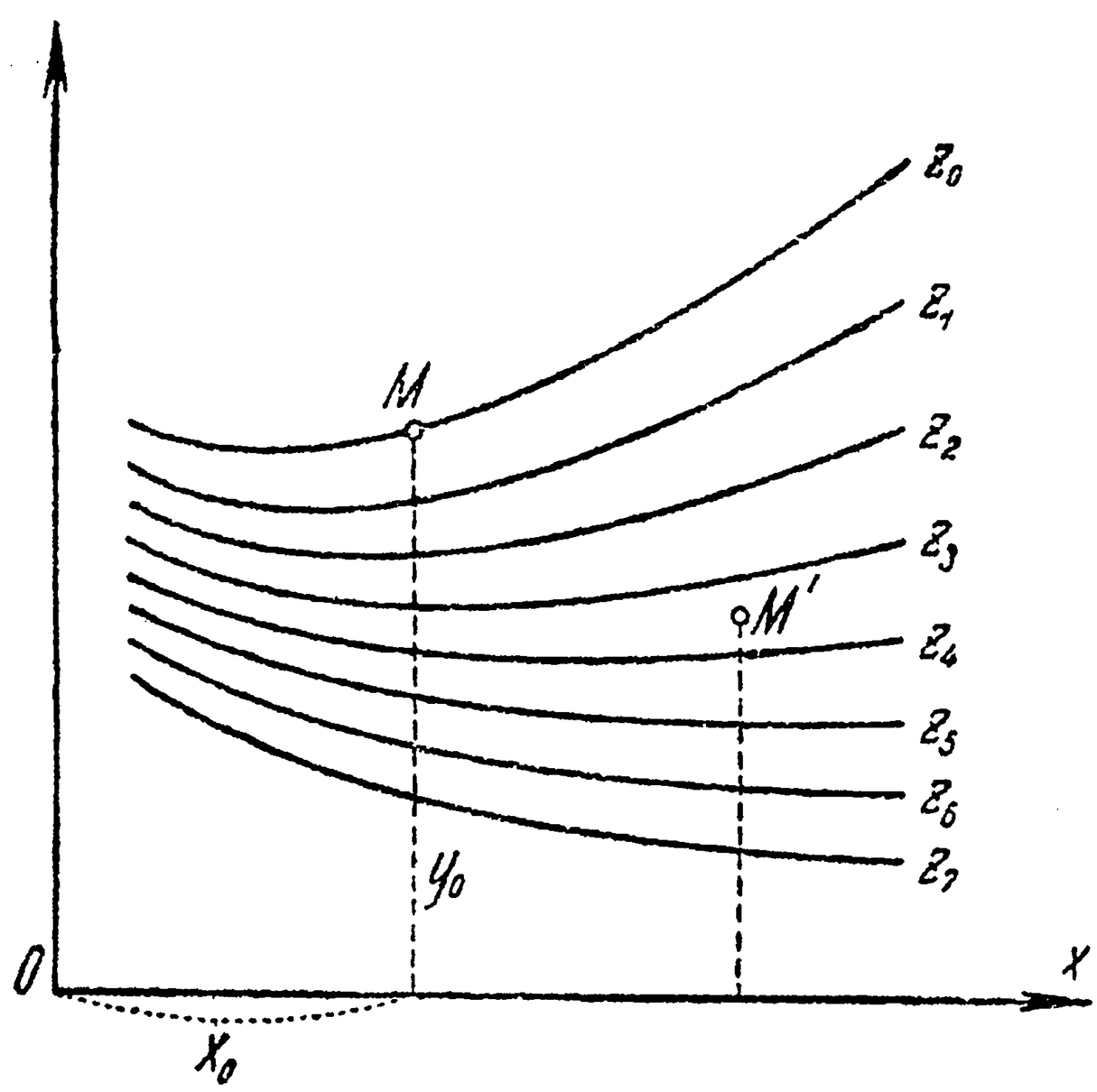
Очевидно, каждому значению z параметра соответствует своя кривая, которая с изменением этого значения будет перемещаться или деформироваться; мы коротко будем называть ее *кривой* (z). Из всех кривых (z) составится некоторое *семейство кривых*. [В предыдущем изложении такие семейства кривых встречались нам часто: в главе IV, где мы рассматривали зачастую семейства кривых определенного вида, и особенно в главе XVI, когда мы истолковывали геометрически понятие об общем интеграле дифференциального уравнения первого порядка, 263]. С помощью семейства кривых (z) задача о нахождении значения одной из переменных x, y, z по заданным значениям двух других решается легко.

Конечно, все кривые этого семейства (заполняющие сплошь часть плоскости) начертить невозможно. Поэтому приписывают z в уравнении (5) последовательно ряд отдельных значений: z_0, z_1, z_2, z_3, ...

(обыкновенно — равноотстоящих) и чертят соответствующие этим именно значениям кривые:

$$F(x, y; z_0) = 0,$$
$$F(x, y; z_1) = 0,$$
$$F(x, y; z_2) = 0,$$
$$\dots\dots\dots,$$

снабдив их пометками $z_0, z_1, z_2, \dots$ (черт. 584). Получающийся чертеж носит название *номограммы из помеченных линий* (или *абака*). Пусть теперь заданы значения x_0, y_0 переменных x, y и мы желаем определить то значение z, которое им соответствует в силу уравнения (5). Для этого достаточно посмотреть, куда попадет точка с координатами (x_0, y_0). Если она (подобно точке M на чертеже) лежит как раз на одной из начерченных кривых семейства, напр. на кривой (z_0), то число z_0, надписанное на этой кривой, и будет искомым. Если же эта точка (как точка M') попадает между двумя кривыми (z), скажем между (z_3) и (z_4), то соответствующее ей значение z, очевидно, лежит между z_3 и z_4; тогда либо одно из чисел z_3, z_4 принимают приближенно за искомое значение, либо интерполируют на-глаз. Аналогично обстоит дело и с определением значения одной из переменных x или y по заданным значениям z и другой из этих переменных. Во всех случаях точность получаемого приближенного значения будет тем больше, чем меньше промежутки между взятыми значениями $z_0, z_1, z_2, \dots$, т. е. чем теснее примыкают одна к другой начерченные кривые нашего семейства.



Черт. 584.

326. Примеры и задачи. 1. На черт. 585 изображено семейство кривых, соответствующих уравнению

$$z = xy;$$

очевидно, это будут гиперболы [ч. I, 41]. Этот абак может служить не только для умножения, но и для деления.

Если переписать наше уравнение в виде:

$$y = \frac{z}{x}$$

и, при постоянном x, трактовать z и y, как абсциссу и ординату точки, то уравнение выразит прямую, исходящую из начала. Новый абак, составленный из прямых с пометками x, служит тем же целям, что и старый. Этот пример поучителен, ибо показывает, что данную зависимость можно выражать разными абаками;

предпочесть следует тот, который строится проще и позволяет точнее производить вычисление значений переменных.

2. В виду того, что прямая строится проще и точнее других линий, предпочитают абаки, составленные из прямых. Такого типа абак легко получается для уравнений, содержащих две из переменных, напр., x и y, линейно:

$$\varphi(z)\cdot x+\chi(z)\cdot y=\psi(z);$$

действительно, при постоянном z и $\varphi(z)$, $\chi(z)$, $\psi(z)$ будут иметь постоянные значения, так что уравнение выразит прямую.

Эти соображения, в частности, применимы к составлению номограмм для решения *трехчленных уравнений*, т. е. уравнений типа:

$$z^m+p\cdot z^n+q=0. \tag{7}$$

Здесь роль x и y играют коэффициенты p и q. Придавая z различные постоянные значения, мы на плоскости pq получим ряд прямых.

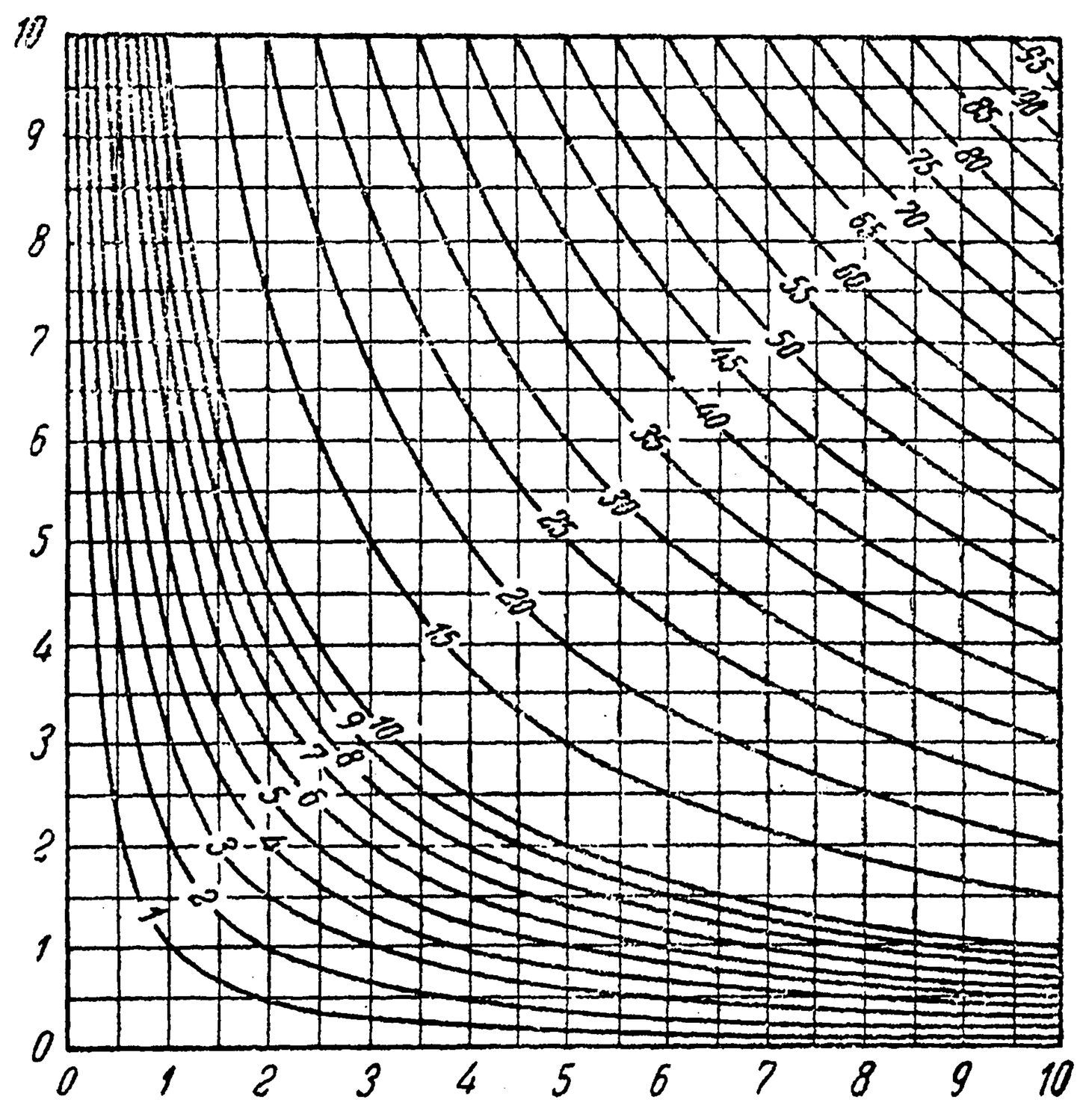
Пусть, напр., имеем квадратное уравнение:

$$z^2+pz+q=0. \tag{8}$$

Придавая z последовательно значения:

$$-10, -9, -8, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, 8, 9, 10,$$

мы получим прямые, изображенные на черт. 586; надпишем на них соответствующие значения z*. Предположим теперь что дано уравнение $z^2-z-6=0$, так что $p=-1$, $q=-6$. Отыскав точку с этими координатами, видим, что она лежит сразу на двух прямых семейства с надписями $z=-2$ и $z=3$; следовательно, эти значения и удовлетворяют нашему уравнению, т. е. будут его корнями. В этом случае z оказывается вообще двузначной функцией от p и q, как и можно было предвидеть; графически это обстоятельство проявляется в том, что прямые нашего семейства взаимно пересекаются. Уравнению $z^2-z+6=0$ соответствует точка с координатами $p=-1$, $q=6$; она не только не лежит ни на одной из начерченных прямых, но и вблизи ее эти прямые не проходят. Отсюда заключаем, что данное уравнение вещественных корней не имеет, в чем легко убедиться и непосредственно.

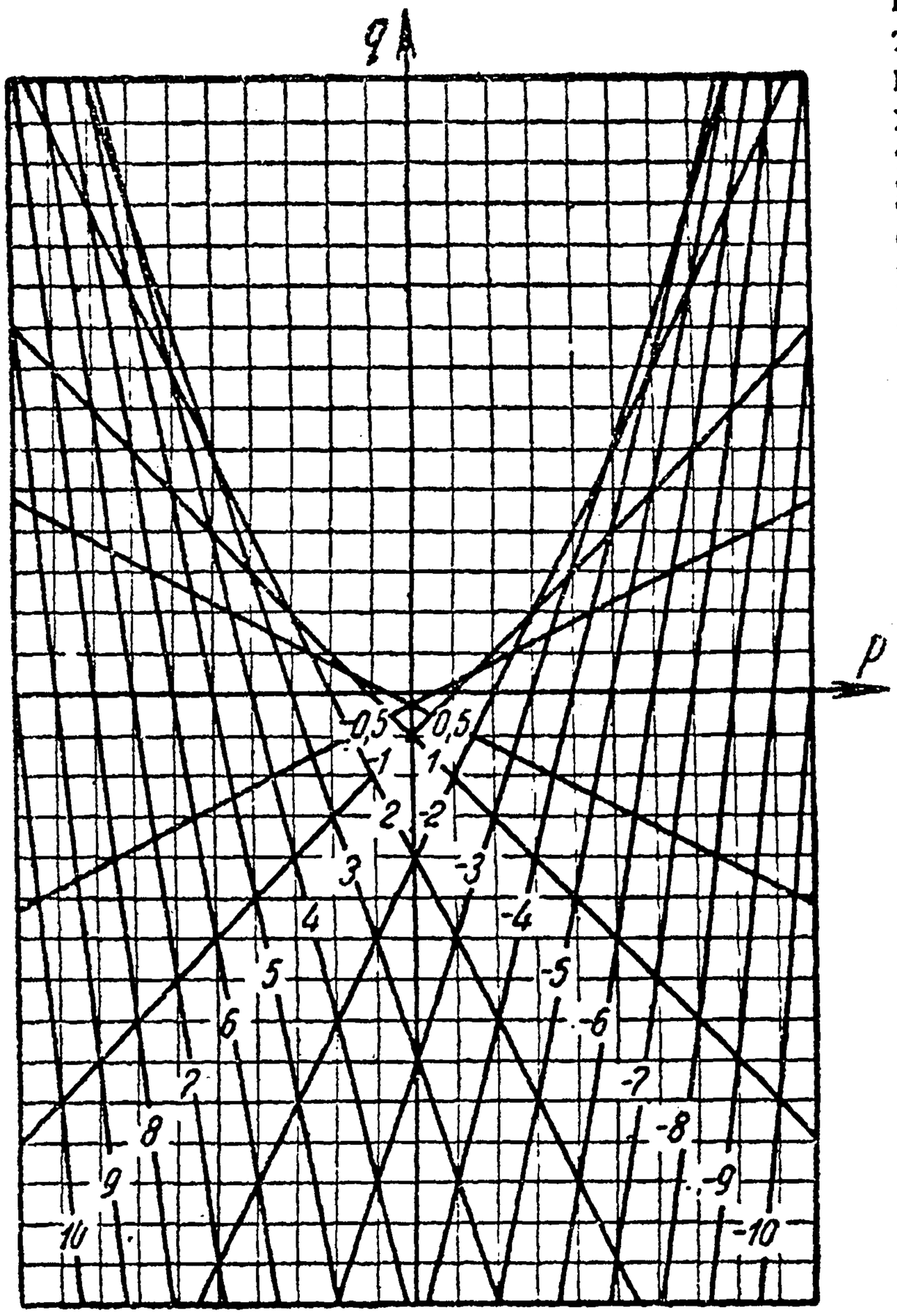


Черт. 585. (1/1)

Читатель легко заметит, что все проведенные прямые лежат вне параболы

* Конечно, для того, чтобы номограмма была, действительно, полезной, значения z следовало взять более близкими. Однако мы желаем здесь только выяснить принцип; ниже [335, 1] будет дана практически более удобная номограмма для той же цели.

$4q = p^2$, сколько угодно близко к ней подходя и даже касаясь. При этом через каждую точку (p, q) части плоскости, лежащей вне параболы, проходят **две** прямые [что даст **два** корня для соответствующего уравнения (8)!]. Через точки в части плоскости, ограниченной параболой, не проходит ни одна прямая [уравнение (8) не имеет вещественных корней!]. Наконец, через любую точку на самой параболе, разграничивающей эти две области, проходит лишь одна прямая — касательная к параболе (один корень!). Это обстоятельство вполне согласуется с известными свойствами квадратного уравнения, если заметить, что для точек первой области $4q < p^2$ или $p^2 - 4q > 0$, для точек второй области $4q > p^2$ или $p^2 - 4q < 0$, а для точек параболы, разумеется, $4q = p^2$ или $p^2 - 4q = 0$.



Черт. 586.

Подобным же образом можно построить абаки и для других уравнений типа (7).

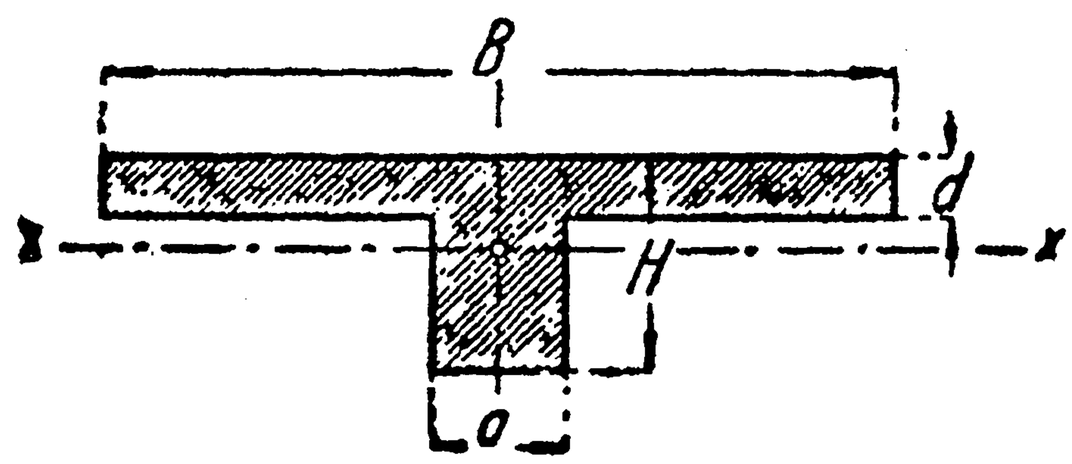
3. В виде упражнения предлагается построить номограммы из помеченных линий для следующих формул:

$$a)\quad v = \frac{40}{\pi}\frac{Q}{d^2}$$

где d (см) — диаметр водопроводной трубы, Q (л/сек) — расход воды, а v (м/сек) — скорость ее течения. При этом d изменяется от 0 до 200, Q — от 0 до 2500, v — от 0 до 1,50. Если за „координаты" выбрать v и Q, то абак составится из **прямых** (с пометками d).

$$b)\quad k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

где k (кал/м^2 · час · °C) — коэффициент теплопередачи, а α_1 и α_2 (кал/м^2 · час · °C) — коэффициенты теплоперехода, соответственно, на обогреваемой и на охлаждаемой стороне поверхности нагрева (в предположении, что можно пренебречь сопротивлением теплопереходу через самую стенку. Изменение k — в пределах от 0 до 60, α_1 — то же, α_2 — от 0 до ∞. Гиперболы в координатах $\alpha_1 k$, с пометками α_2.



Черт. 587.

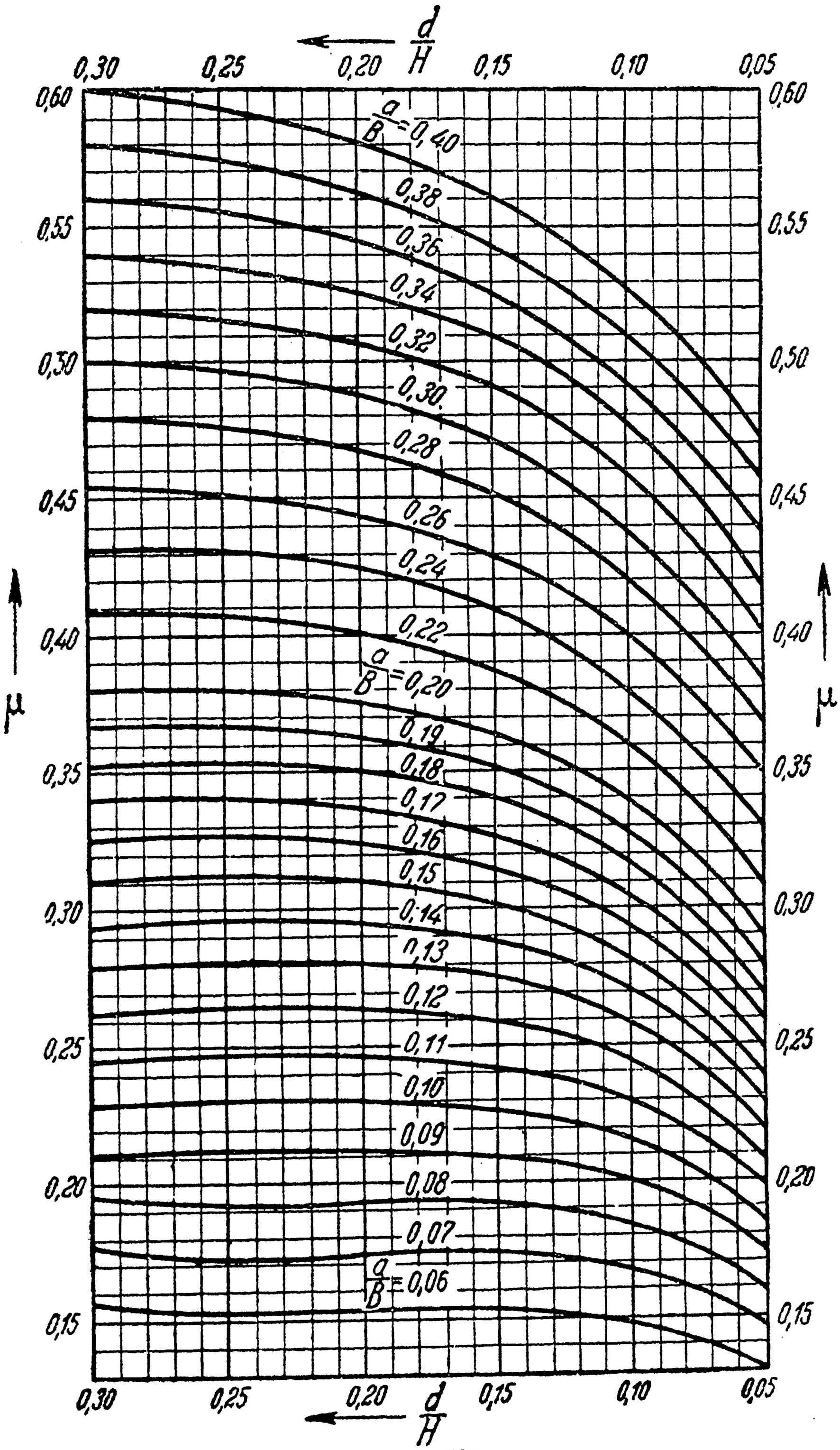
$$c)\quad C = \frac{100\sqrt{R}}{m + \sqrt{R}},$$

где C — коэффициент трения или скоростный коэффициент, R — гидравлический радиус (в метрах), а m — коэффициент шероховатости (зависящий от рода стенок открытого русла или трубы) [ср. зад. 12, 324]. Пусть R изменяется от 0 до 4,0 (м), m — от 0,1 до 2,5, C — от 0 до 100. Кривые в координатах RC, с пометками m.

4. Особенно ценную помощь при расчетах оказывает абак в случае очень сложных формул. Прекрасными примерами такого абака могут служить общеизвестные **диаграммы Моллье**, относящиеся к водяному пару.

Приведем еще такой пример. Момент инерции J таврового сечения, при обозначениях черт. 587, имеет значение:

$$J = \frac{1}{3}(Be_1^3 - bh^3 + ae_2^3),$$



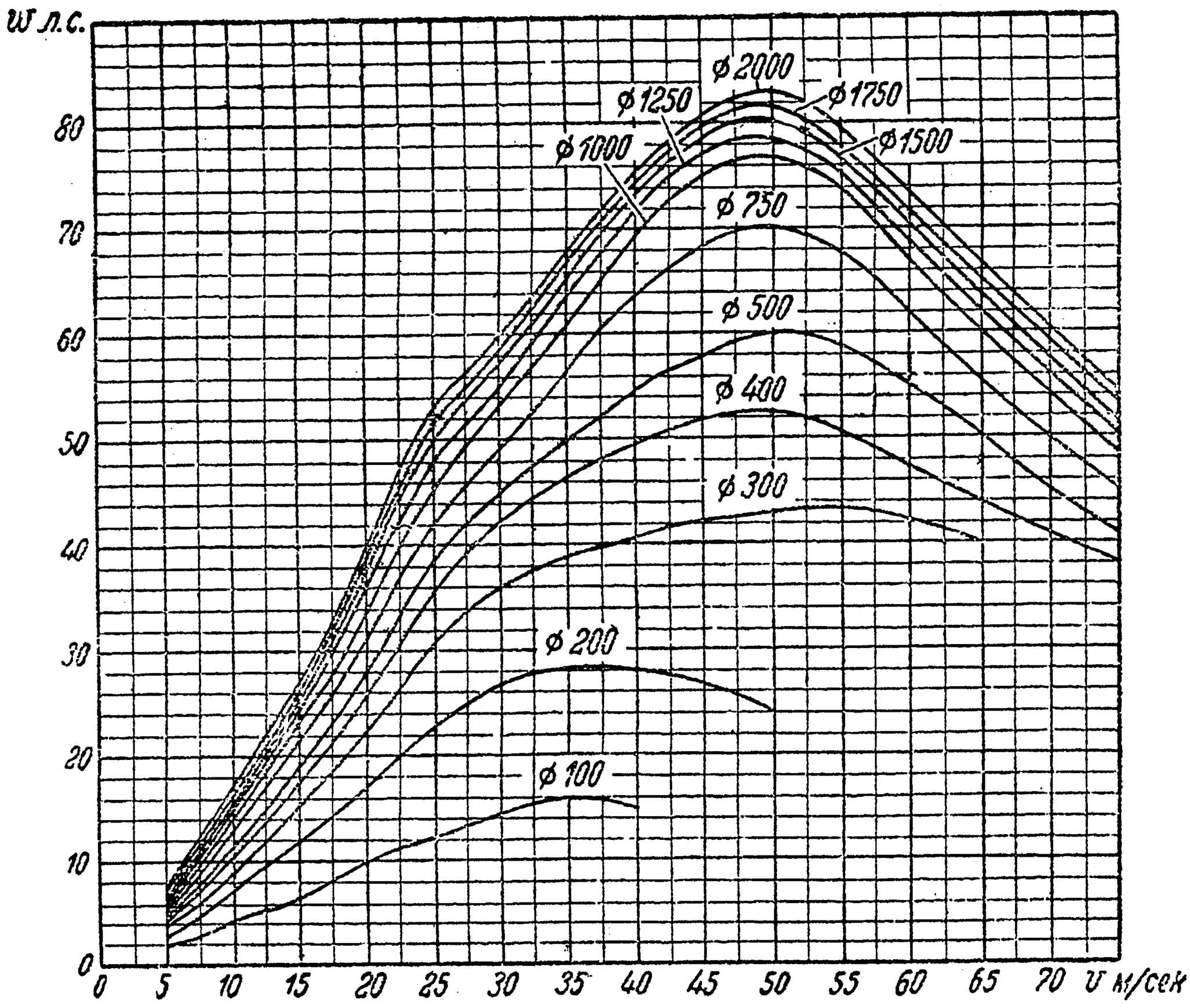
Черт. 588.

где

$$b = B - a, \quad e_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{aH^2 + bd^2}{aH + bd}, \quad e_2 = H - e_1.$$

Вычисление по этим формулам довольно утомительно. Обыкновенно сравнивают этот момент инерции с моментом инерции фиктивного прямоугольного сечения:

$$J_0 = \frac{BH^3}{12},$$



Черт. 589.

полагая $J = \mu \cdot J_0$. Коэффициент μ, как нетрудно убедиться с помощью простых преобразований, представляется в виде рациональной функции от двух аргументов $\frac{a}{B}$ и $\frac{d}{H}$:

$$\mu = R\left(\frac{a}{B}, \frac{d}{H}\right).$$

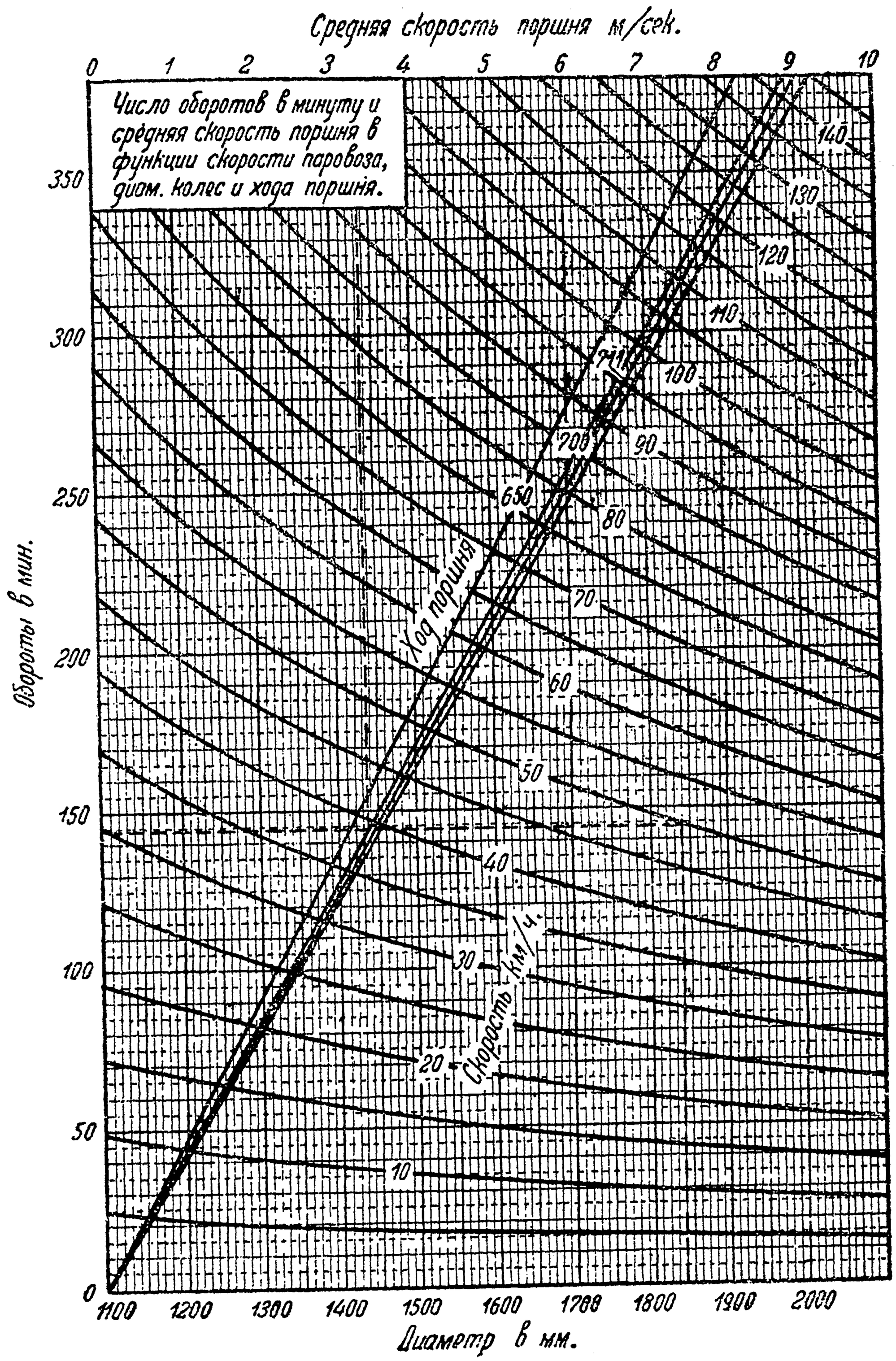
На черт. 588 представлен абак для этой зависимости; он состоит из кривых в координатах $\frac{d}{H}$ и μ, с пометками $\frac{a}{B}$.

Если дано, напр., что $d = 8$ см, $H = 40$ см, $a = 20$ см, $B = 120$ см, то

$$\frac{d}{H} = 0{,}20, \quad \frac{a}{B} \doteq 0{,}17$$

и по номограмме находим соответствующее $\mu = 0{,}337$. Так как в этом случае $J_0 = 64 \cdot 10^4$ (см^4), то искомое $J \doteq 21{,}6 \cdot 10^4$ (см^4).

5. Номограммы рассматриваемого типа могут строиться и на основе опытных данных. Пример такой номограммы приведен на черт. 589. Она дает зависимость



Черт. 590.

мощности w (в лош. силах), передаваемой каждыми 100 мм ширины ремня при различных скоростях v (м/сек) и различных диаметрах шкивов d (мм).

6. Иногда представляется удобным наложить одну на другую две номограммы из помеченных линий. Так, представленная на черт. 590 номограмма устанавливает зависимость между скоростью V (км/час) паровоза, диаметром D (мм) движущих колес, ходом поршня l (мм), с одной стороны, и числом оборотов n в минуту и средней скоростью c (м/сек) поршня — с другой. Названные величины связаны двумя уравнениями:

$$V=\frac{\pi D\cdot n\cdot 60}{10^6}=\frac{6\pi Dn}{10^5},\quad c=\frac{2l\cdot n}{60\cdot 10^3}=\frac{ln}{3\cdot 10^4}. \tag{9}$$

Остановимся на первом из них. Если рассматривать D и n соответственно как абсциссу и ординату точки, то это уравнение — при постоянном V — выразит гиперболу. На чертеже значения D отложены понизу, а значения n — слева, и построен ряд упомянутых гипербол, с пометками V на них. В этой части номограмма позволяет по двум из величин V, D, n найти третью. Напр., по $D=1500$, $V=50$ находим $n\doteq 177$.

Перейдем теперь ко второму из уравнений (9), и станем рассматривать c и n как текущие координаты точки, а l — как параметр. Значения c отложены поверху, чтобы не путать их с отсчетами D. При этом начальная точка шкалы (c) лежит в левом конце ее [в то время как начальная точка шкалы (D) лежала вне чертежа]. Уравнение наше на плоскости cn, очевидно, выражает прямую, проходящую через начало координат (левую нижнюю вершину). На чертеже дано несколько таких прямых с соответствующими отметками l. Если рассматривать только относящуюся сюда часть номограммы (не обращая внимания на гиперболы), то снова по двум из величин c, l, n можно найти третью. Напр., при $l=650$ и $n=300$, находим $c=6{,}5$.

Благодаря тому, что шкалы (n) на обеих номограммах совмещены, облегчается совместное пользование этими номограммами для того, чтобы по D, V, l находить последовательно n и c. Пунктирная линия на чертеже показывает, напр., что при $D=1840$ (мм), $V=50$ (км/час) и $l=700$ (мм) имеем $n=144$ (оборота в минуту) и $c=3{,}37$ (м/сек).

327. Применение функциональных сеток. Анаморфоза. В предыдущей главе [пп° 312, 313] мы познакомились с применением логарифмической и полулогарифмической бумаги. В основе изображенных на них сеток лежит замена — на обеих осях одновременно, либо же на одной из них — обычной нормальной шкалы логарифмической шкалой. Благодаря этому оказалось возможным представить прямыми линиями степенную и показательную зависимости:

$$y=c\cdot x^{\alpha},\quad y=\beta\cdot e^{\gamma x},$$

которые на обычной равномерной сетке (на миллиметровой бумаге) изображаются кривыми.

Ясно, что можно заменить логарифмическую шкалу какой-либо другой функциональной шкалой и таким путем создать другого типа функциональную сетку. Удачным выбором этой сетки можно сложную кривую, изображающую рассматриваемую зависимость, свести к простой (напр., к прямой).

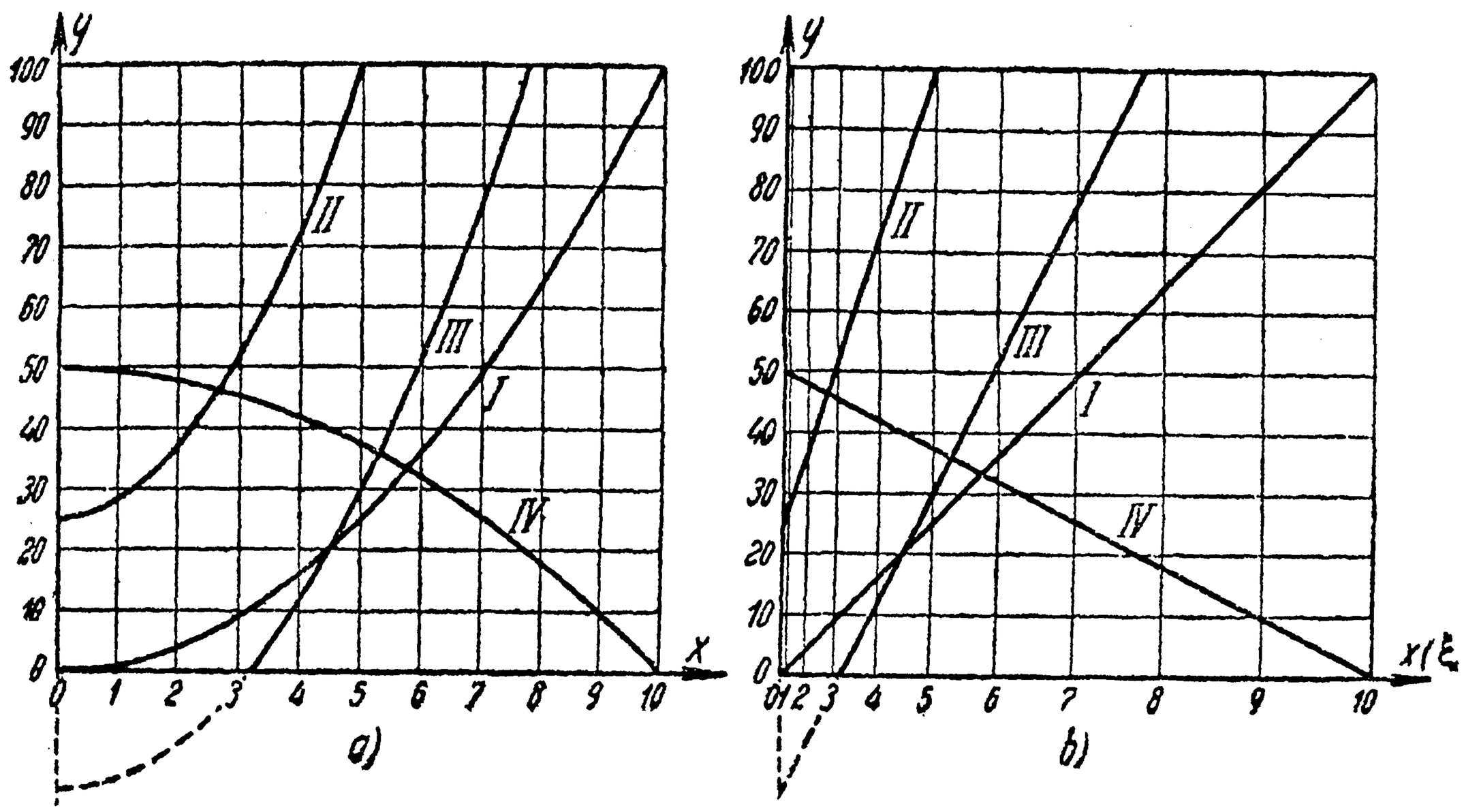
На черт. 591 a), напр., изображено несколько парабол, выражающих зависимость вида

$$y=ax^2+b, \tag{10}$$

при разных значениях a и b:

I) $y=x^2$. (II) $y=3x^2+25$, (III) $y=2x^2-20$, (IV) $y=-\frac{1}{2}x^2+50$.

Прибегнем теперь к функциональной сетке, заменив на горизонтальной оси нормальную шкалу для x шкалой для функции $\xi = x^2$ с отметками x; такая сетка дана на черт. 591 b).



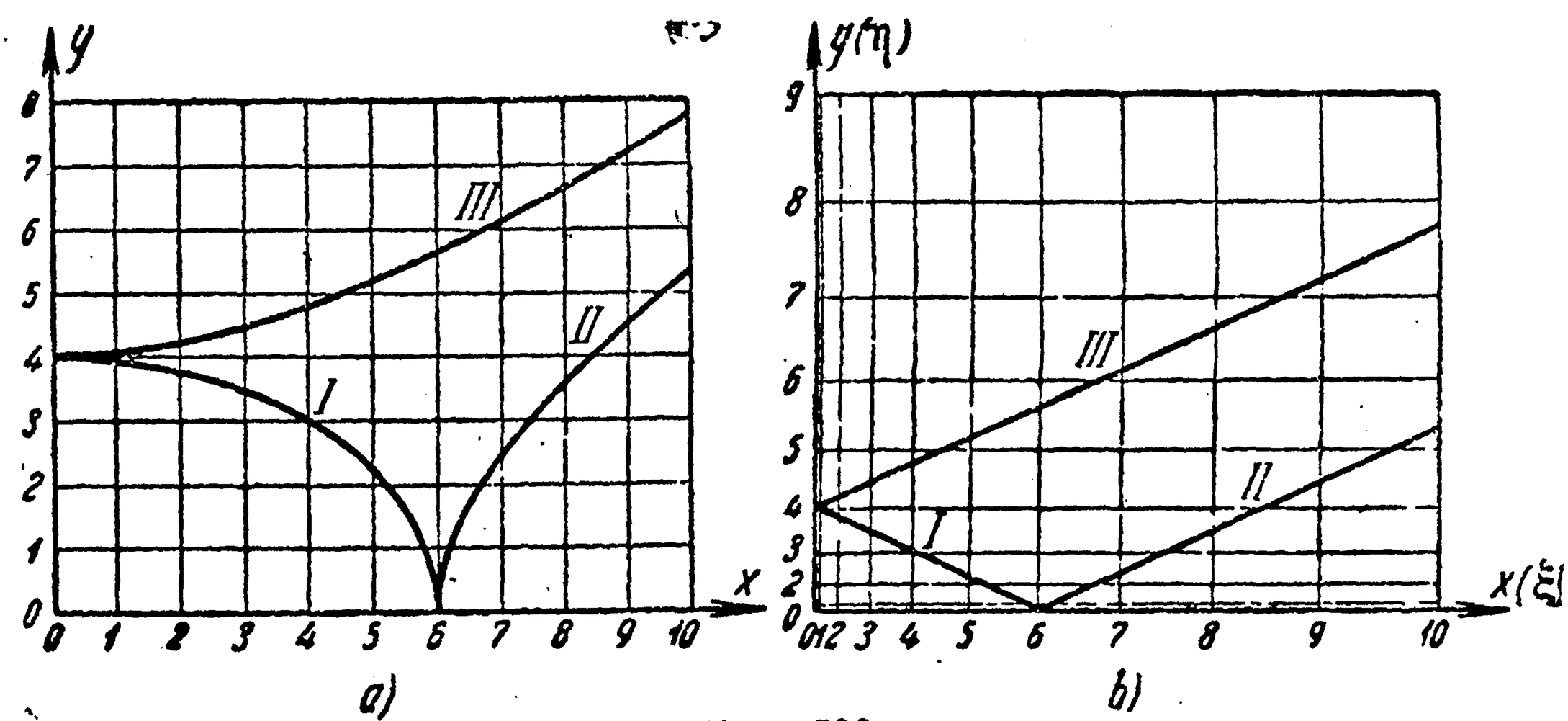
Черт. 591.

Так как зависимость (10) приводится к линейной:

$$y = a\xi + b,$$

то на новой сетке прежние параболы заменяются уже прямыми:

$$\text{(I) } y = \xi, \ \text{(II) } y = 3\xi + 25, \ \text{(III) } y = 2\xi - 20, \ \text{(IV) } y = -\frac{1}{2}\xi + 50.$$



Черт. 592.

Другой пример: на черт. 592 a) представлены эллипс и гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

(при $a=6$, $b=4$, ограничиваясь первым квадрантом); они выражают, таким образом, частные случаи зависимости:

$$y^2 = Ax^2 + B.$$

Если на обеих осях заменить нормальную шкалу шкалой квадратов, то получится сетка, изображенная на черт. 592 *b*). На ней линейная зависимость между квадратами переменных также изображается уже в виде прямых.

Подобное преобразование графика функциональной зависимости с помощью функциональной сетки называется его *анаморфозой*. Анаморфозой пользуются чаще всего для преобразования семейства кривых, составляющих абак, в семейство прямых, чем повышаются простота его построения и точность отсчетов по нему.

Самое общее уравнение, допускающее прямолинейный абак, имеет вид:

$$\varphi(x) f_1(z) + \psi(y) f_2(z) + f_3(z) = 0.$$

В самом деле, по горизонтальной оси нанесем функциональную шкалу для x, определяемую функцией $\xi = \varphi(x)$, а по вертикальной оси — шкалу для y, определяемую функцией $\eta = \psi(y)$, и на этих шкалах построим функциональную сетку. Легко видеть, что на этой сетке написанное уравнение, при постоянном z, действительно, изобразится прямой, ибо приводится к линейному соотношению

$$\xi \cdot f_1(z) + \eta \cdot f_2(z) + f_3(z) = 0.$$

328. Примеры и задачи. Так как наибольшее распространение получила логарифмическая анаморфоза, то мы ей посвятим наибольшее число примеров.

1. Возвращаясь к зад. 1 n⁰ **326**, прологарифмируем соотношение $z = xy$:

$$\log z = \log x + \log y. \tag{11}$$

На логарифмической бумаге отсчеты x и y на осях отвечают фактически отрезками $\xi = \log x$ и $\eta = \log y$; зависимость (11), которую можно переписать в виде:

$$\log z = \xi + \eta,$$

при постоянном z выразит прямую. Номограмма умножения олагодаря анаморфозе приобретает вид, чрезвычайно удобный и для построения, и для пользования (см. черт. 593.). Цифры, помещенные внизу и слева, играют двоякую роль — отсчетов по осям и пометок на прямых (z); цифры справа и сверху служат исключительно пометками на прямых (z).

2. Построить номограммы из помеченных прямых (прибегнув к логарифмической анаморфозе) для следующих формул:

$$a)\ Q = 20\,000\sqrt{d^5 \cdot J},\ ^*$$

где Q — расход воды (л/сек.), d — диаметр водопроводной трубы (м), а J — пьезометрический уклон. При этом пусть d изменяется от 0,01 до 2 м (или от 1 до 200 см), J — от 0,0001 до 0,01 (обычно отмечают значения не J, а 1000 J), Q — от 0,1 до 1000 л/сек. Семейство прямых в координатах $\log d$ и $\log J$, с пометками Q.

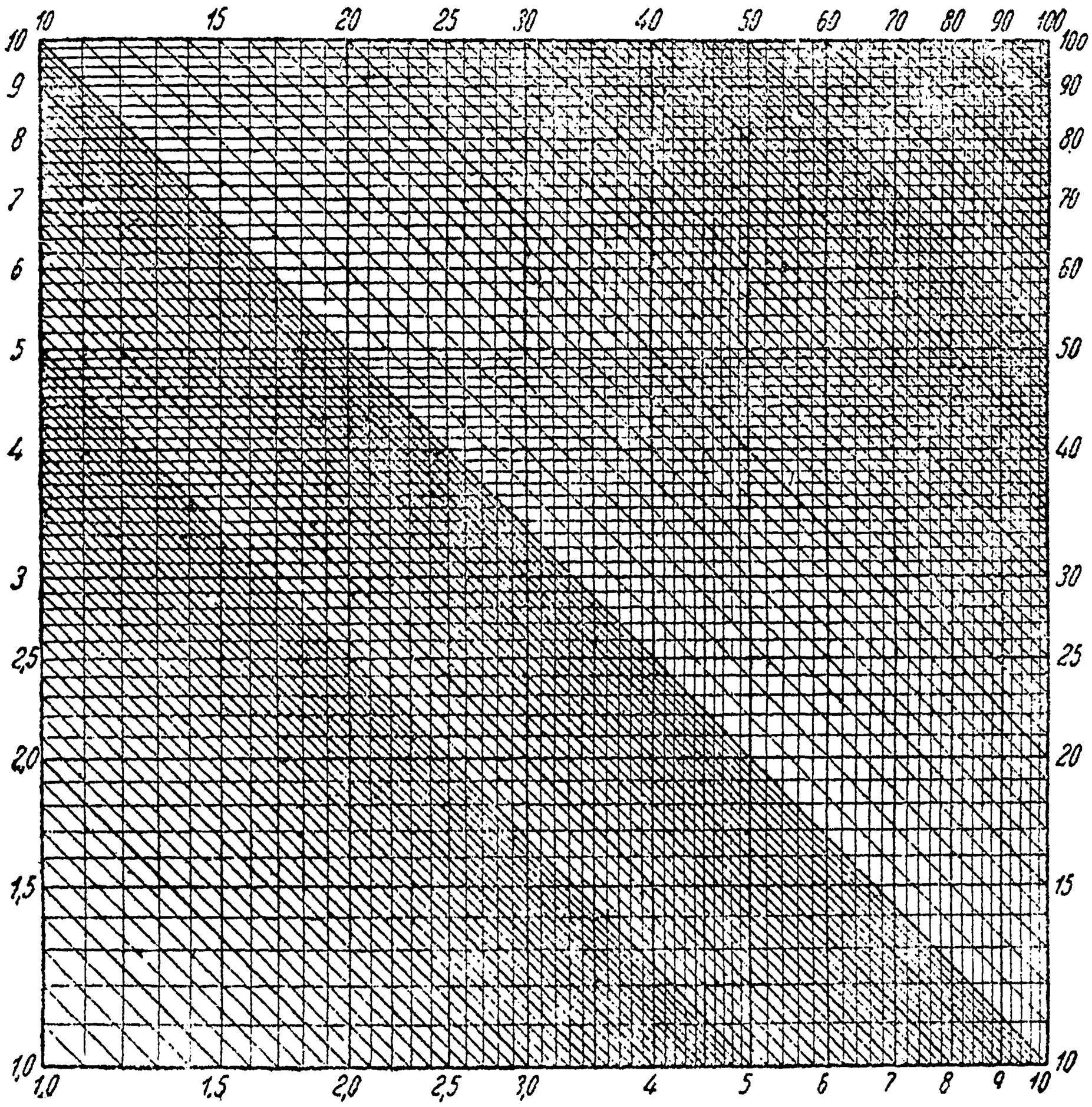
$$b)\ d = 10\sqrt[3]{\frac{1600\ M_d}{\pi \cdot k_d}},$$

* Формула Дюпюи-Эйтельвейна (Dupuit-Eytelwein).

где d — диаметр сплошного вала (мм), M_d — скручивающий момент (кг-м), k_d — допускаемое напряжение кручения (кг/см²). Изменение d от 20 до 200 мм, M_d — от 10 до 20 000 кг-м, k_d — от 100 до 1500 кг/см². Семейство прямых в координатах $\log d$ и $\log k_d$, с пометками M_d.

3. На черт. 594 дана номограмма для вычисления окружных скоростей трансмиссионных шкивов v (м/сек), в зависимости от диаметров d (мм) и чисел n оборотов в минуту, по формуле

$$v = \frac{\pi d \cdot n}{1000 \cdot 60}.$$



Черт. 593. (1/2)

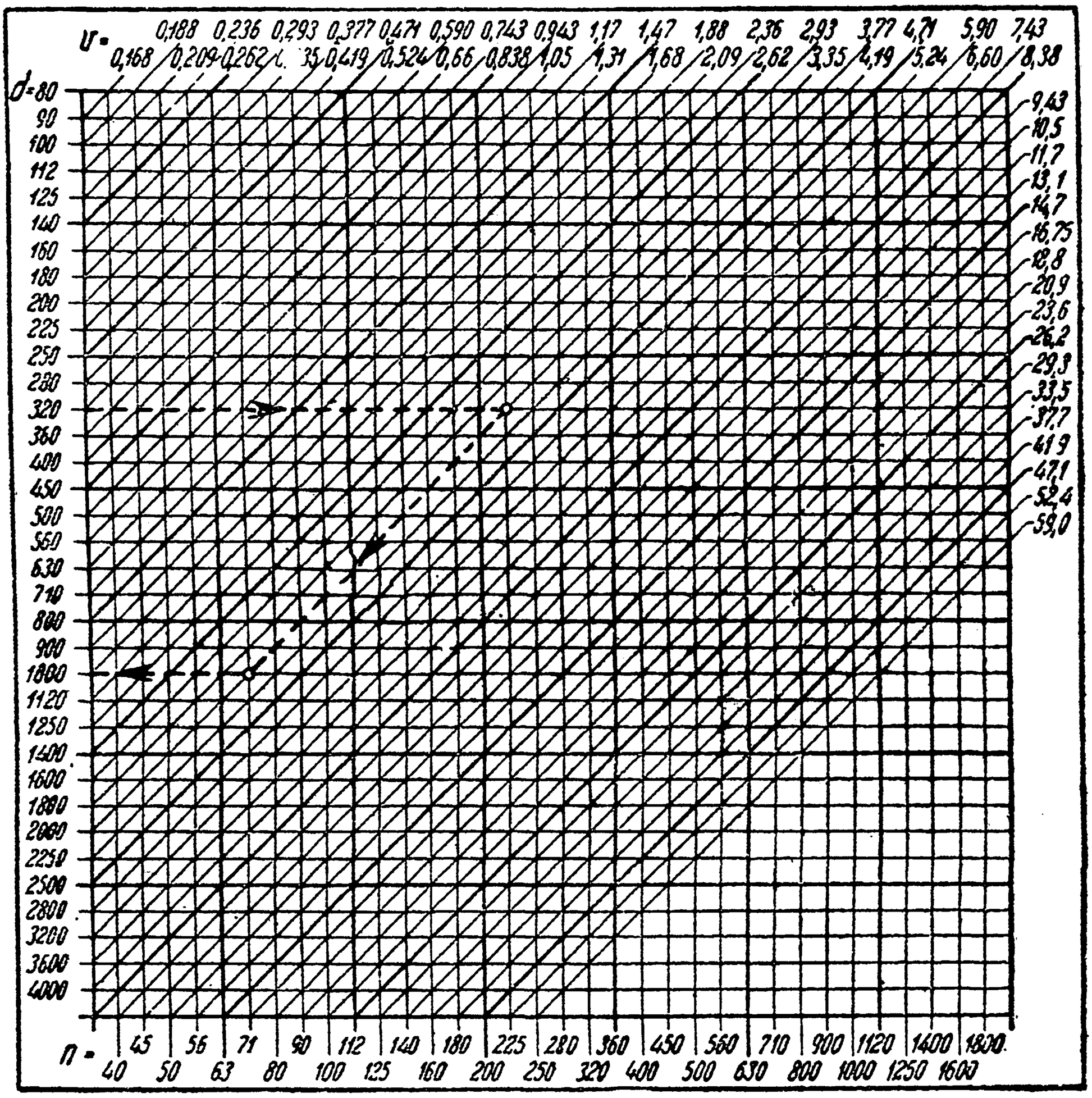
Хотя в основе лежит логарифмическая анаморфоза, но начерченная сетка производит впечатление почти равномерной; причиной этого является то, что по осям отмечены неравноотстоящие значения n и d, в соответствии с нормальными числами оборотов трансмиссий по ОСТ 1656 и диаметрами ременных шкивов по ОСТ 1655. Пунктирная линия по номограмме показывает примерное решение задачи: по данному диаметру 320 мм одного из двух связанных передачей шкивов и числу оборотов в минуту — 225 найти диаметр второго шкива, если требующееся число оборотов в минуту — 71. Ответ: 1000 мм.

4. Полезная номограмма для расчетов, связанных с протекающими в паровом или газовом двигателе процессами, изображена на черт. 595. Обычно принимают, что процессы эти протекают по политропическому закону, в согласии с уравнениями

$$pv^n = \text{пост. и } Tv^{n-1} = \text{пост.},$$

где n есть некоторый показатель, обычно содержащийся между 1 (чему отвечает *изотермический* процесс) и $k = \frac{c_p}{c_v}$ * (чему отвечает *адиабатический* процесс). Если обозначить через p_1, v_1, T_1 и p_2, v_2, T_2, величины, характеризующие соответственно начальное и конечное состояние газа, то будем иметь

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n \text{ и } \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{n-1}.$$

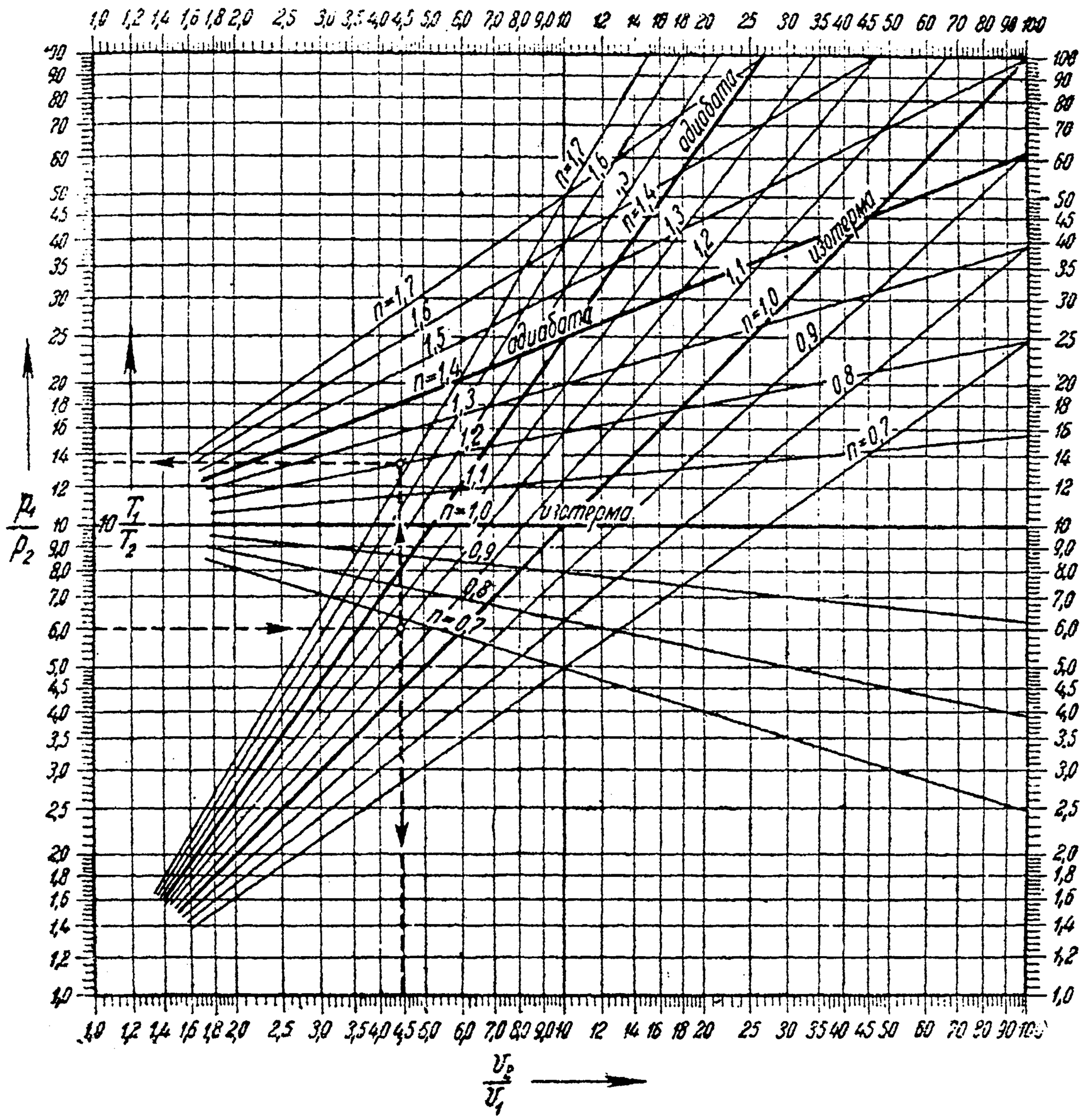


Черт. 594. (1/1)

Если на логарифмической бумаге понизу отсчитывать $\frac{v_2}{v_1}$, а сбоку $\frac{p_1}{p_2}$ или $\frac{T_1}{T_2}$, то — при постоянных n — получим ряд прямых, исходящих из начала. Для того, чтобы не путать между собою прямых одного и другого пучка, мы перенесли начальную точку для шкалы $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$ вверх на единицу, пользуясь известной *периодичностью* логарифмической шкалы; в связи с этим, разумеется, отсчеты на боковой шкале, если их относить к $\frac{T_1}{T_2}$, должны быть уменьшены в 10 раз. Пусть,

* Для воздуха и двухатомных газов $k = 1{,}41$.

напр., $\frac{p_1}{p_2} = 6$ и $n = 1{,}2$; тогда $\frac{v_2}{v_1} = 4{,}45$ и затем $\frac{T_1}{T_2} = 1{,}35$. Пунктирная линия на черт. 595 показывает, как эти величины находятся. Если начальное состояние газа дано, то по этим отношениям можно установить конечное его состояние.



Черт. 595. (1/2)

Приведем примеры анаморфозы с помощью сетки, отличной от логарифмической.

5. Расчет газопровода (при нормальном давлении) производится по формуле Поле:

$$h = 660 \cdot M \cdot \frac{Q^2 \cdot s \cdot l}{d^5},$$

где h — потеря давления в мм водяного столба, M — коэффициент трения, Q — расход газа в м³/час, s — удельный вес газа, d — внутренний диаметр трубопровода в см. Полагая $M = 0{,}003$, $s = 0{,}4$, $l = 1000$ м, будем иметь:

$$h = 792 \cdot \frac{Q^2}{d^5}.$$

Предлагается построить для этой формулы номограмму из прямых с пометками d Воспользоваться функциональной сеткой, построенной на нормальной

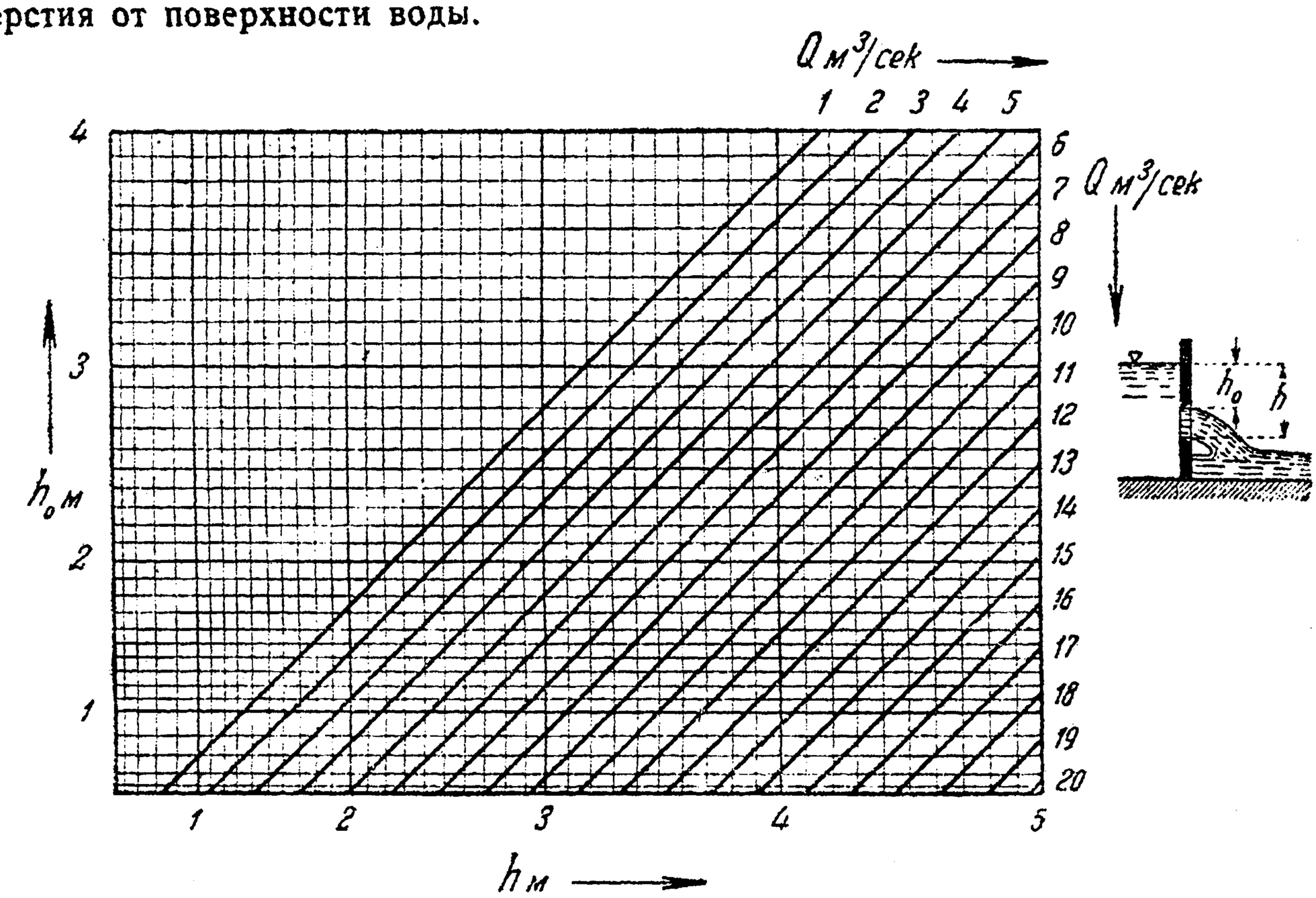
шкале (h) по горизонтальной оси и на шкале функции Q^2 с отметками Q — по вертикальной. Промежуток изменения h — от 0 до 100, Q — от 0 до 1000, d — от 100 до 600.

6. Расход воды Q (м³/сек) через прямоугольное отверстие в вертикальной тонкой стене, на каждый метр ширины, выражается формулой

$$Q = \frac{2}{3} \cdot 0{,}62 \cdot \sqrt{2g}\,(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}) =$$

$$= 1{,}82\,(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}),$$

где h_0 и h (м) представляют расстояния, соответственно, верхнего и нижнего краев отверстия от поверхности воды.



Черт. 596. (4/5)

На черт. 596 приведен абак для этой формулы, построенный на функциональной сетке, в основу которой положены шкалы для функций $h^{\frac{3}{2}}$ и $h_0^{\frac{3}{2}}$ с отметками h и h_0.

Замечание. Мы рассмотрели для уравнения вида (5) абаки лишь простейшего вида. В них фигурировали три семейства линий: 1) семейство вертикальных прямых с пометками x, 2) семейство горизонтальных прямых с пометками y и, наконец, 3) семейство кривых (или прямых) с пометками z. Более общий прием построения абака допускает и в первых двух случаях семейства любых кривых. Так как в технической практике такие абаки, в виду большей трудности их построения, встречаются редко, то мы на них не останавливаемся.

329. Метод выровненных точек. Номограммы с тремя параллельными шкалами. Мы переходим к изложению самого важного и практически наиболее удобного метода номографии, который получил название *метода выровненных точек.* Основная идея этого метода заключается в следующем. Имея зависимость между тремя переменными x, y, z, стараются расположить шкалы, по которым отсчитываются эти величины, так, чтобы соответствующие точки этих

шкал всегда лежали на одной прямой (отсюда и название самого метода!). Тогда достаточно соединить точки на шкалах (x) и (y), имеющие отсчеты x и y, прямой линией, чтобы в пересечении ее со шкалой (z) можно было прочитать соответствующий отсчет z.

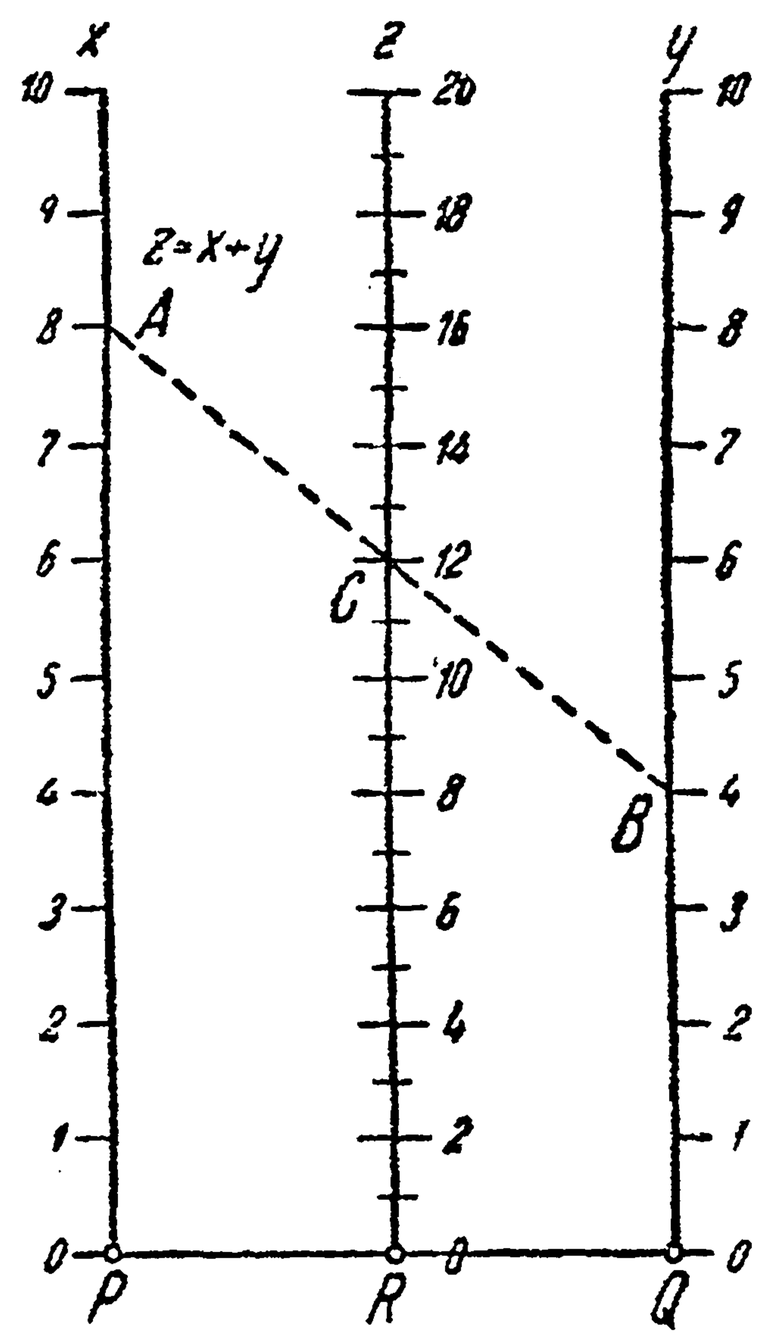
В большинстве случаев, встречающихся на практике, все шкалы располагаются на прямых. Мы остановимся здесь на случае трех параллельных шкал, и начнем с примера, который сразу же введет нас в существо вопроса.

Возьмем три параллельные оси (черт. 597), на равных расстояниях друг от друга, и пересечем их двумя прямыми PRQ и ACB. По свойству средней линии трапеции сразу ясно, что отрезок RC равен полусумме отрезков PA и QB. Если бы мы нанесли на всех трех осях равномерные шкалы в одном масштабе, выбрав за начальные точки, соответственно, P, Q, R, то отсчеты x, y, z, отвечающие точкам A, B, C, оказались бы связанными соотношением:

$$z = \frac{1}{2}(x + y).$$

Если же мы для шкалы (z) выберем вдвое меньший масштаб (отчего отсчеты на ней удвоятся), то получим:

$$z = x + y. \qquad (12)$$



Черт. 597. (2/3)

Таким образом, это простое построение приводит нас к *номограмме для сложения*, которая схематически изображена на том же чертеже; линия ACB, напр., дает сумму: $8 + 4 = 12$.

Предположим далее, что, вместо нормальных шкал, мы нанесем на наших осях логарифмические шкалы (сохраняя для средней шкалы вдвое меньший масштаб). Тогда новые отсчеты x, y, z, вместо (12), будут связаны соотношением:

$$\log z = \log x + \log y$$

или

$$z = xy.$$

Мы получаем *номограмму для умножения* (черт. 598); пунктирные линии дают произведения: $2 \cdot 2 = 4$, $3 \cdot 5 = 15$, $1{,}5 \cdot 6 = 9$. Мы избегали мелких делений, довольствуясь выяснением принципа; но уже из приведенного схематического чертежа ясно, насколько эта номограмма умножения удобнее, чем те, которые были построены для той же цели в 326 (зад. 1) и 328 (зад. 1), особенно — в виду *легкости интерполирования*!

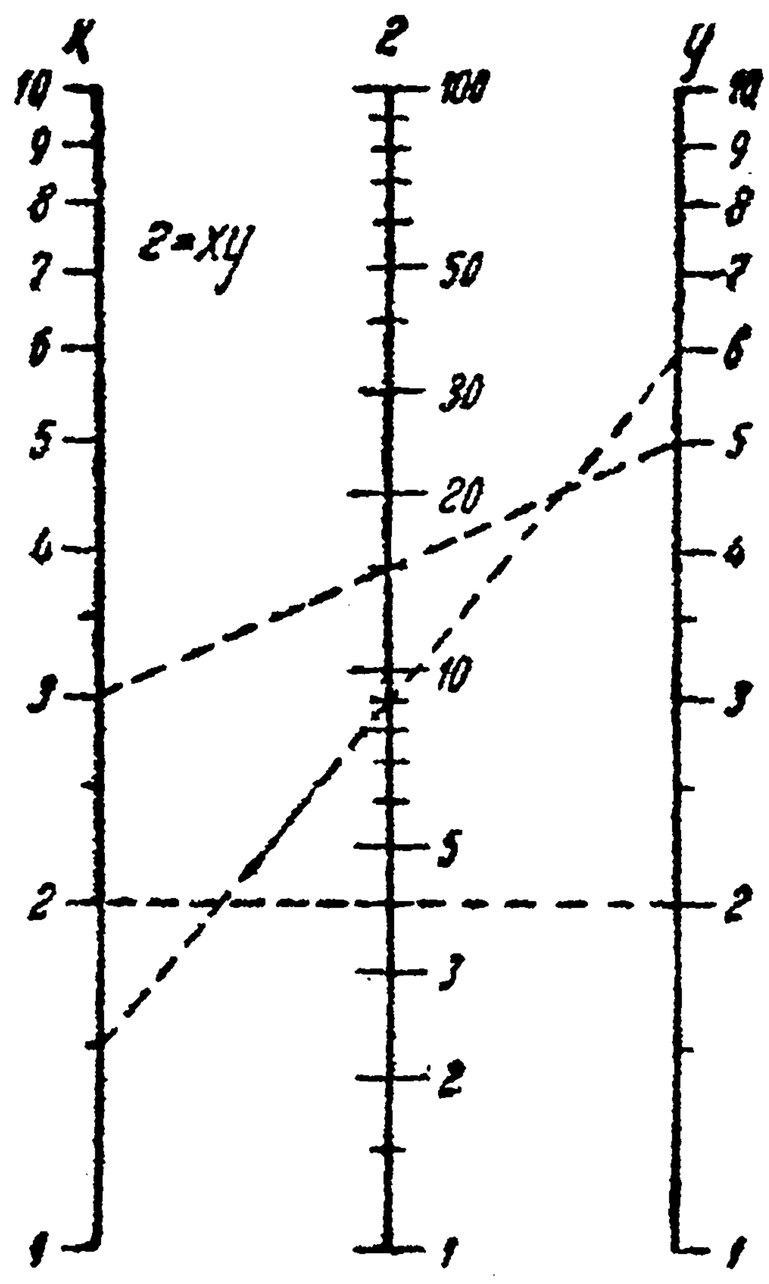
Прибегнув к шкалам квадратов, мы получим *номограмму Пифагоровой теоремы* (черт. 599), осуществляющую соотношение:

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

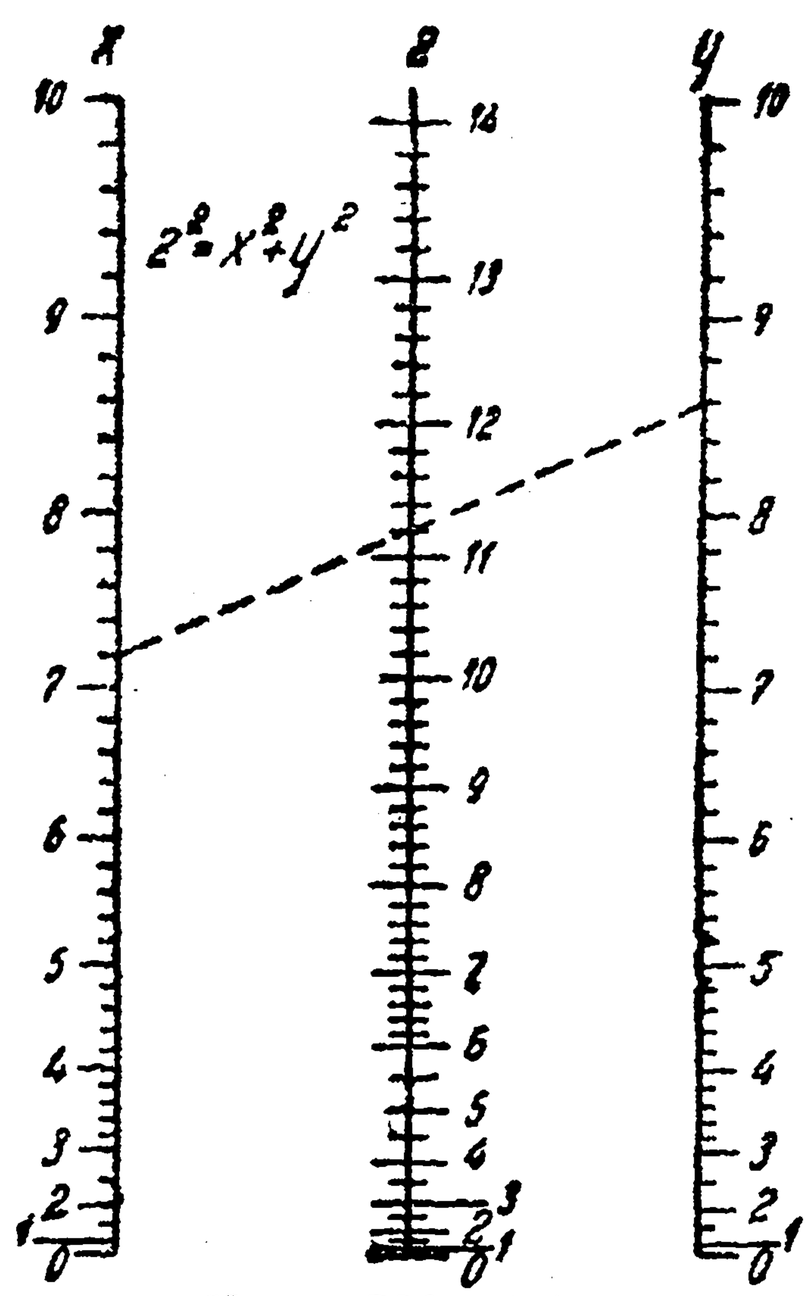
и т. д. Пользуясь, вообще, надлежащими *функциональными шкалами* для x, y, z, можно таким путем построить номограмму для любого соотношения вида:

$$\varphi(z)=f(x)+g(y). \tag{13}$$

Перейдем теперь к несколько более общим построениям, представляющим на практике большую свободу действий и позволяющим придавать номограмме более удобный для пользования ею вид. Именно, возьмем снова три параллельные оси (черт. 600), причем на этот раз пусть средняя из них делит расстояние между крайними в произволь-



Черт. 598. (2/3)



Черт. 599. (2/3)

ном отношении s. Снова выберем начальные точки P, R, Q этих осей на одной прямой и пересечем их произвольной прямой в точках A, C, B. Проведя через точку C прямую $A'B'$, параллельную PQ, и полагая

$$PA=u,\ QB=v,\ RC=w,$$

из подобия $\triangle\triangle\ ACA'$ и BCB' имеем:

$$\frac{AA'}{B'B}=\frac{A'C}{CB'}=s, \quad \text{т. е.} \quad \frac{w-u}{v-w}=s,$$

откуда

$$w=\frac{1}{s+1}u+\frac{s}{s+1}v. \tag{14}$$

Возьмем, далее, для осей PA, QB и RC произвольные масштабы λ, μ, ν, т. е. будем на этих осях выражать число 1 соответственно отрезками длины λ, μ, ν, и нанесем на них равномерные шкалы.

Если через x, y, z обозначить отсчеты, которые отвечают точкам A, B, C, то, очевидно: $u = x\lambda$, $v = y\mu$, $w = z\nu$. Подставляя эти выражения отрезков u, v, w в соотношение (14), найдем, что отсчеты x, y, z точек, лежащих на одной прямой, постоянно связаны равенством:

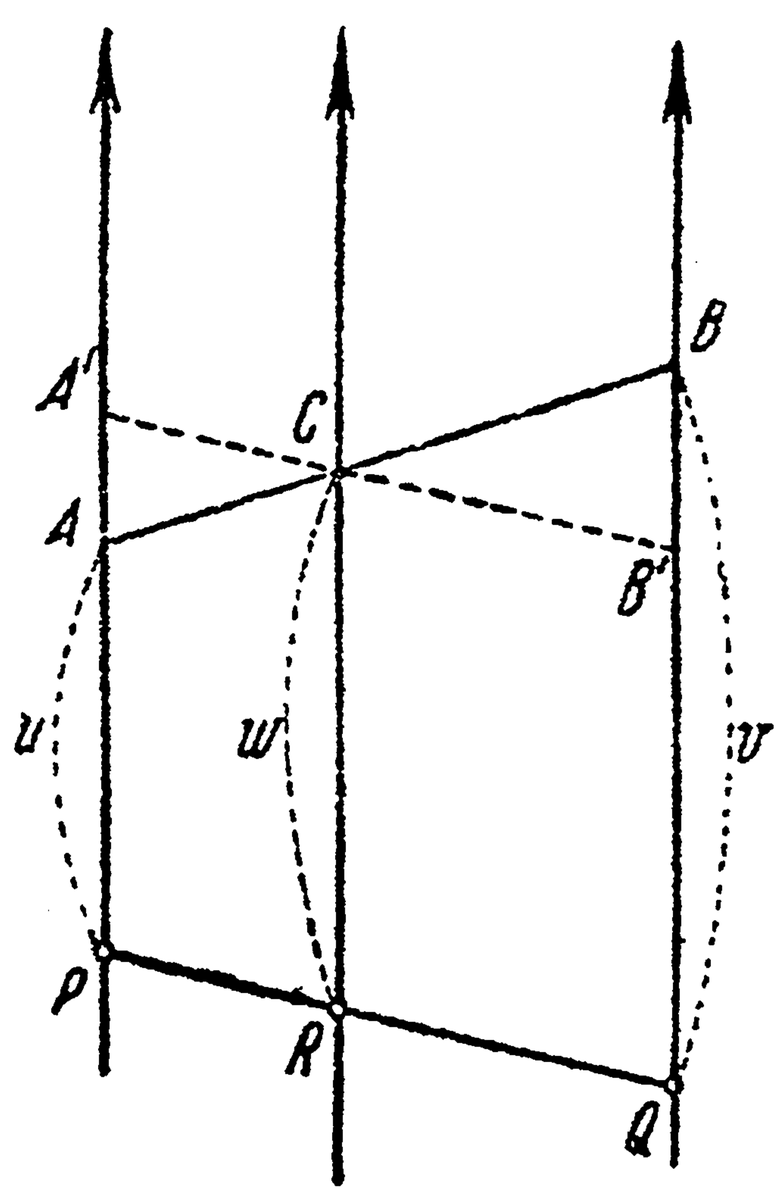
$$z\nu = \frac{\lambda}{s+1}x + \frac{s\mu}{s+1}y \quad \text{или} \quad z = \frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{1}{s+1}x + \frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{s}{s+1}y.$$

Полагая

$$\frac{\lambda}{\nu}\cdot\frac{1}{s+1} = a, \qquad \frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{s}{s+1} = b, \tag{15}$$

перепишем последнее уравнение в виде:

$$z = ax + by. \tag{16}$$



Черт. 600.

Такова зависимость между тремя переменными x, y, z, которая дается построенной номограммой.

Не трудно видеть, что какие бы наперед ни взять коэффициенты a, b, всегда можно подобрать отношение s и масштабы λ, μ, ν так, чтобы номограмма выражала зависимость (16) именно при выбранных коэффициентах. В самом деле, разделив второе из равенств (15) на первое, находим, что

$$s = \frac{b}{a}\cdot\frac{\lambda}{\mu}; \tag{17}$$

подставляя же в первое равенство (15) это выражение, получим:

$$\nu = \frac{\lambda\mu}{b\lambda + a\mu}. \tag{18}$$

Наоборот, при выполнении этих условий выполняются и равенства (15). Таким образом, для нашей цели достаточно выбрать s и ν в согласии с этими формулами, причем λ и μ могут быть взяты произвольно (по соображениям удобства чертежа). Если, как это часто делают, положить $\mu = \lambda$, то формулы (17) и (18) примут простой вид:

$$s = \frac{b}{a}, \quad \nu = \frac{\lambda}{a+b}. \tag{19}$$

Если начальную точку на шкале (z) взять не на одной прямой с начальными точками на шкалах (x), (y), а выше или ниже, то это,

очевидно, приведет к появлению нового постоянного слагаемого c в правой части формулы (16):

$$z = ax + by + c. \tag{20}$$

Это — самый общий вид зависимости, которая может быть осуществлена номограммой рассматриваемого типа, если пользоваться только равномерными шкалами.

Заметим, что коэффициенты a, b здесь положительны. Однако, если изменить положительное направление одной из осей, напр., оси (y) на обратное, то отсчет y заменится через $-y$, а соотношение (20) перейдет в следующее:

$$z = ax - by + c.$$

Аналогично этому, изменение направления оси (x) повлекло бы за собой замену коэффициента a на $-a$. Таким образом, в соотношении (20) можно мыслить себе коэффициенты числами любого знака, помня лишь о связи между знаком коэффициента и направлением соответствующей оси. В формулах (17), (18) или (19) отрицательный коэффициент, очевидно, должен быть заменен его абсолютной величиной.

Теперь предположим, что равномерные шкалы на наших осях заменены функциональными шкалами, соответствующими функциям $f(x)$, $g(y)$ и $\varphi(z)$, с отсчетами x, y и z. Тогда зависимость, осуществляемая номограммой, примет более общий вид:

$$\varphi(z) = a \cdot f(x) + b \cdot g(y) + c. \tag{21}$$

Можно было бы, конечно, включить множители a, b в обозначения функций f и g, равно как и слагаемое c отнести к любой из трех функций, и написать зависимость (21) в виде (13).

Если сделать это, но сохранить длины шкал (x), (y) прежними, то придется масштабы λ, μ заменить на $\frac{\lambda}{a}$, $\frac{\mu}{b}$. Читатель легко убедится, что если в формулах (17) и (18) положить $a = b = 1$, но одновременно произвести указанную замену масштабов, то ничто не изменится. Таким образом, включение постоянных множителей в обозначение функций никак не отражается на виде номограммы. Обыкновенно от этого воздерживаются.

Перед тем как перейти к примерам, сделаем важное практическое указание. Шкалы строятся только для тех значений переменной, которые представляют интерес в рассматриваемом вопросе. При этом легко может случиться, что *начальная точка* той или иной шкалы окажется вне ее *рабочей части*. Так как для шкалы (x) и (y) положение начальных точек (в роде точек P и Q на черт. 600) совершенно безразлично, то ими обычно не интересуются и строят непосредственно рабочие части обеих крайних шкал (примерно одной длины и на одной высоте). Иначе обстоит дело со средней шкалой (z). При отсутствии свободного члена c в формуле (20) или (21) — начальная точка средней шкалы должна лежать на одной прямой

с начальными точками крайних шкал (как точка R на черт. 600); при наличии члена c — она должна лежать соответственно выше или ниже этой прямой. Во всяком случае ее положение уже не произвольно! В то же время устанавливать это положение было бы весьма громоздко. Чтобы избежать затруднений, обычно поступают так. Взяв на крайних шкалах какие-нибудь две точки с отсчетами x_0 и y_0, соединяют их прямой; в пересечении ее со средней шкалой помещают отсчет z_0, соответствующий взятым отсчетам x_0 и y_0 по формуле. По этому отсчету ориентируют всю шкалу (z); всего проще это сделать, если x_0 и y_0 выбраны так, чтобы отсчет z_0 отвечал как раз началу (или концу) рабочей части шкалы (z).

330. Примеры и задачи. 1. Вернемся к формуле

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

[зад. 3 b), n° 326], которую можно переписать в виде:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}.$$

Все три величины k, α_1, α_2 выражаются в кал./м^2 · час. · °С. Пусть промежутки изменения будут:

для α_1 — от 5 до 50,
„ α_2 — от 10 до ∞
„ k — от 5 до 50.

Для шкалы (α_1) выберем масштаб $\lambda = 100$ см; тогда длина шкалы (построенной по функции $\frac{1}{\alpha_1}$) будет

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{50}\right) \cdot 100 = 18 \text{ см.}$$

Для шкалы (α_2) (в виду необходимости откладывать небольшие значения $\frac{1}{\alpha_2}$, отвечающие большим значениям α_2) выберем вдвое больший масштаб: $\mu = 200$ см. Длина соответствующей шкалы будет:

$$\frac{1}{10} \cdot 200 = 20 \text{ см.}$$

Наконец, по формулам (17), (18) имеем (так как здесь $a = b = 1$)

$$s = \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3} \text{ см},$$

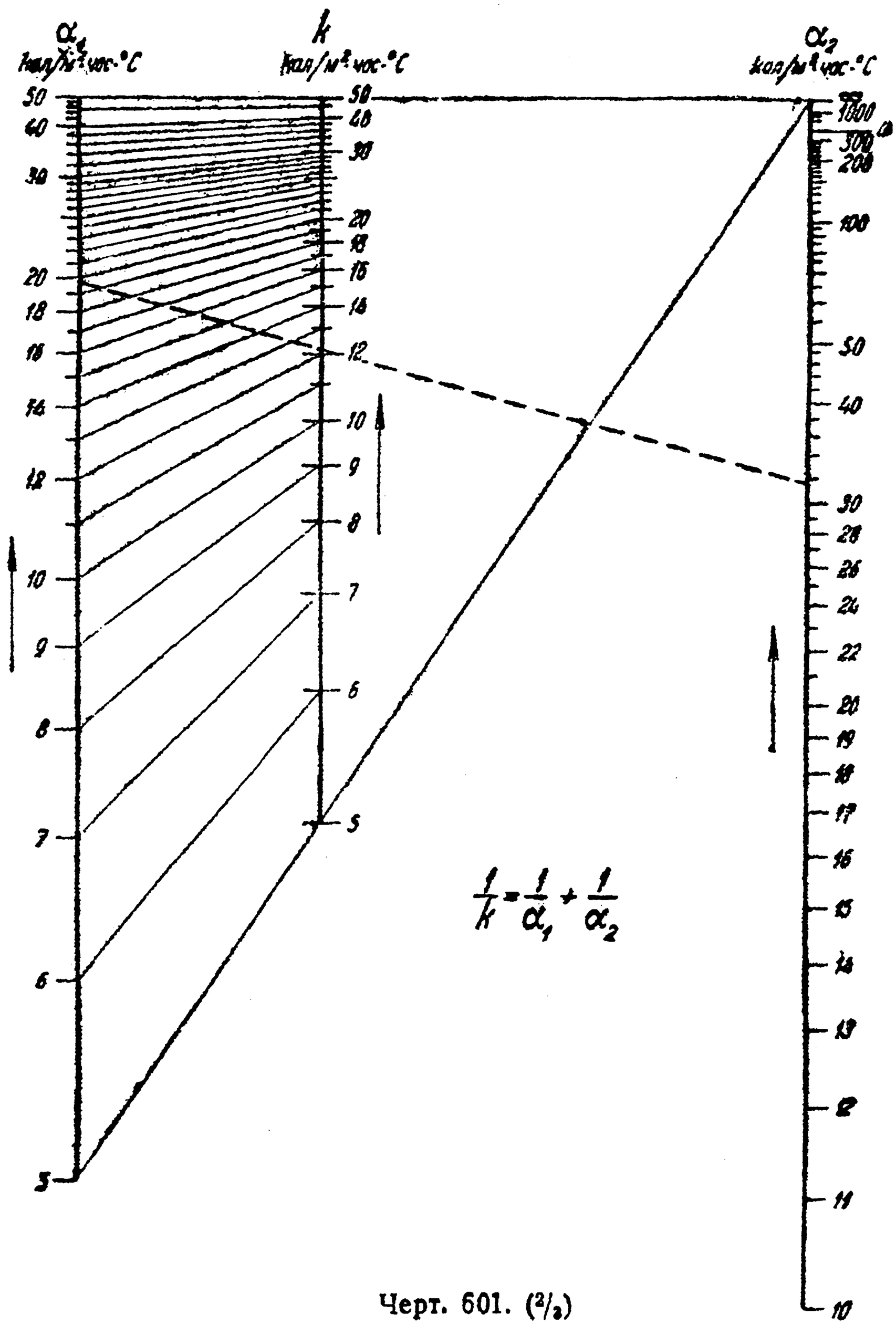
так что длина шкалы (k) (построенной по функции $\frac{1}{k}$) будет:

$$\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{50}\right) \cdot \frac{200}{3} = 12 \text{ см.}$$

Шкалы (α_1) и (α_2) строятся либо вычислительным путем, либо с применением известного построения проективной шкалы. Так как при $\alpha_2 = \infty$ имеем $k = \alpha_1$, то шкалу (k) проще всего получить, спроектировав шкалу (α_1) из точки шкалы (α_2) с отсчетом $\alpha_2 = \infty$.

Соответствующая номограмма (в уменьшенном виде) представлена на черт. 601.

Если, скажем, для воздухоподогревателя коэффициенты теплоперехода были определены: от газа к стенкам трубок $\alpha_1 = 19{,}7$ кал/м² · час · °С, а от стенок трубок к воздуху $\alpha_2 = 31{,}6$ кал/м² · час · °С, то, как показано пунктирной линией, коэффициент теплопередачи k оказывается равным 12,1 кал/м² · час · °С.



Черт. 601. (2/3)

Неудобство этой номограммы, очевидно, в том, что отсчеты по шкале (α_2), при больших значениях α_2, не могут быть произведены сколько-нибудь точно. Ниже будет указан другой тип номограммы, освобожденный от этого неудобства [333, черт. 617].

2. Предлагается представить номограммой соотношение

$$Q = 1{,}82\,(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}),$$

[Ср. зад. 6. n° 328]. Промежутки изменения:

для h — от 0 до 5 (м),
» h_0 — от 0 до 4 (м),
» Q — от 0 до 20 (м³/сек).

Переписав данное соотношение в виде:

$$\frac{Q}{1{,}82} = h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}, \tag{22}$$

возьмем для шкалы (h), определяемой функцией $h^{\frac{3}{2}}$, масштаб $\lambda = 1$ см (длина шкалы 11,18 см), аналогично и для шкалы h_0 пусть масштаб $\mu = 1$ см (длина шкалы 8 см). Тогда по формулам (19) (где b в нашем случае следует заменить через $|b|$)

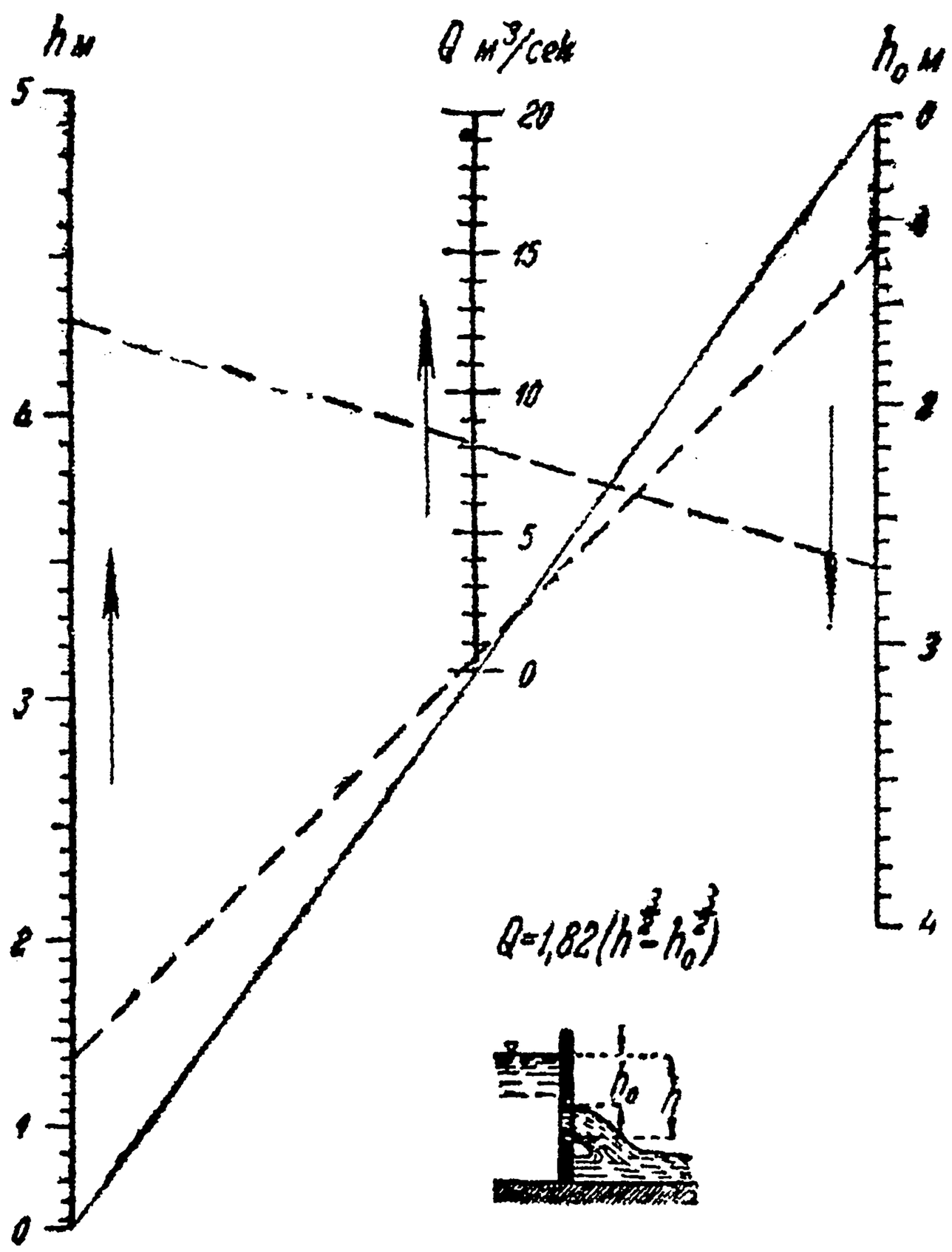
$$s = 1, \quad \nu = \frac{1}{2} \text{ (см)}$$

и длина шкалы (Q), которую надлежит построить по функции $\frac{Q}{1{,}82}$, будет

$$\frac{20}{1{,}82} \cdot \frac{1}{2} \doteq 5{,}5 \text{ см.}$$

В виду наличия минуса в формуле (22), шкала (h_0) имеет направление сверху вниз. Начальные точки всех шкал — на одной прямой. Номограмма изображена на черт. 602. (Пунктирная линия показывает, напр., что при $h = 4{,}3$ и $h_0 = 2{,}7$ получается $Q = 8{,}15$.)

Разумеется, одно и то же соотношение всегда может быть различными способами развернуто в номограмму рассматриваемого типа. Попробуем, для примера, исходить из другой формы соотношения (22) (уже без минуса!)



Черт. 602. (4/5)

$$h^{\frac{3}{2}} = h_0^{\frac{3}{2}} + \frac{Q}{1{,}82}. \tag{22 a}$$

Если для шкалы (h_0) взять $\lambda = 1{,}5$ см (длина шкалы $8 \cdot 1{,}5 = 12$ см), для шкалы (Q) положить $\mu = 1$ см (длина шкалы $\frac{20}{1{,}82} \doteq 11$ см), то

$$s = \frac{3}{2}, \quad \nu = \frac{3}{5} \text{ см}$$

(так что длина шкалы для h будет: $11{,}18 \cdot \frac{3}{5} = 6{,}71$ см). Новая номограмма, в схематическом виде, дана на черт. 603.

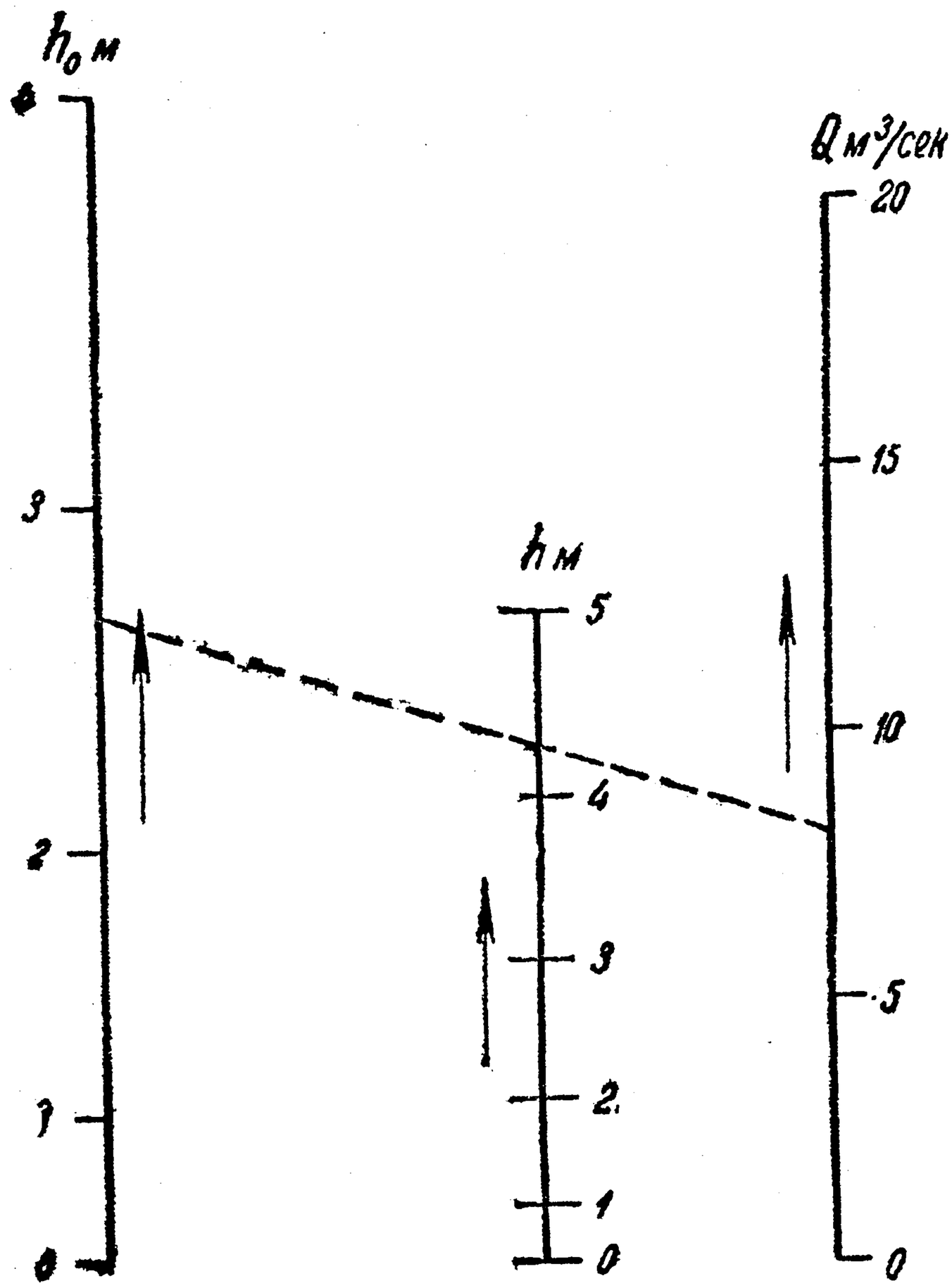
Нужно сказать, что номограммами рассматриваемого типа чаще всего в технике пользуются для представления зависимостей вида:

$$z = C \cdot x^a \cdot y^b, \tag{23}$$

которые логарифмированием приводятся непосредственно к виду:

$$\log z = a \cdot \log x + b \cdot \log y + c, \tag{24}$$

если положить $c = \log C$. В этом случае для отсчета каждой из трех величин x, y, z придется наносить логарифмические шкалы. В виду широкого применения в технике формул вида (23), мы подробнее осветим их примерами.



Черт. 603. (4/5)

3. Момент инерции I прямоугольника, с основанием b (см) и высотой h (см), относительно оси, проходящей через центр параллельно основанию, выражается формулой:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}.$$

Построим номограмму для этой формулы, изменяя b и h от 1 до 20 (см).

Коэффициенты a и b формулы (24) здесь равны 1 и 3. Взяв $\lambda = \mu = 10$ см, получим шкалы b и h длиною

$$(\log 20 - \log 1) \cdot 10 \doteq 13 \text{ см}.$$

Затем, по формулам (19), имеем

$$s = 3, \ \nu = \frac{10}{4} = 2{,}5 \text{ см}.$$

Крайними значениями для I будут $\frac{1}{12}$ и $\frac{40\,000}{3} = 13\,333{,}...$; для удобства градуирования шкалы (I) мы заменим их близкими к ним числами 0,1 и 14 000. Длина шкалы (I) будет примерно такая же, как и у двух других шкал:

$$(\log 14\,000 - \log 0{,}1) \cdot 2{,}5 \doteq 12{,}9 \text{ см}.$$

Положение шкалы (I) на соответствующей оси определяется положением одной ее точки; напр., точка с отсчетом $I = 10$ получается, очевидно, при $b = 15$ и $h = 2$. Номограмма представлена на черт. 604.

На том же чертеже дана номограмма для вычисления момента сопротивления:

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

Шкалы (b) и (h) остались прежние и только добавлена новая шкала (W). Предлагаем читателю самому разобраться в ее построении.

4. Построить номограммы для формул:

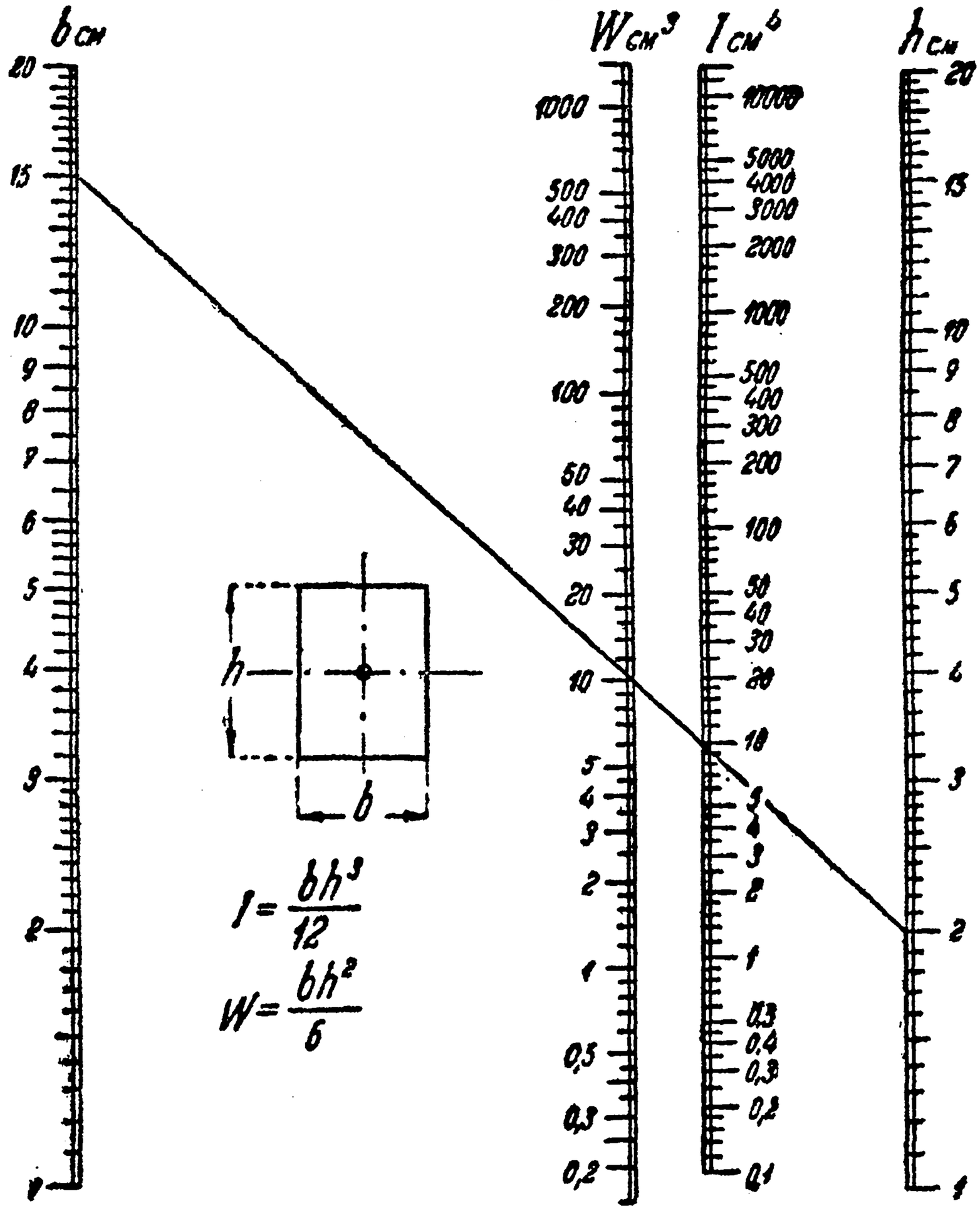
$$a)\ v = \frac{\pi d \cdot n}{1000 \cdot 60}$$

(при обозначениях задачи 3, nº 328) для указанных на черт. 594 значений d и n (установленных ОСТ) и для значений v от 0,15 до 60,0;

$$b)\ h = 79^2 \frac{Q^2}{d^5}$$

(при обозначениях задачи 5, nº 328), изменяя d от 10 до 600, Q от 1 до 1000 и h от 1 до 10 000;

$$c)\ v = \frac{40\,Q}{\pi\, d^2}$$



Черт. 604. (4/5)

(при обозначениях задачи 3, nº 326) изменяя Q от 0,1 до 2500, d от 1 до 200 и v от 0,05 до 10;

$$d)\ Q = 20\,000 \sqrt{d^5 \cdot J}$$

(при обозначениях задачи 2a), nº 328), изменяя d от 0,01 до 2, J от 0,0001 до 0,01 и Q от 0,1 до 1000;

$$e)\ d = 10 \sqrt[3]{\frac{1600}{\pi} \cdot \frac{M_d}{k_d}}$$

(при обозначениях задачи 2b), nº 328), изменяя M_d от 10 до 20 000, k_d от 100 до 1500 и d от 20 до 200.

Указания и решение. *a*) Здесь показатели a и b формулы (23), а следовательно и коэффициенты формулы (24) будут оба единицей. Взяв $\lambda = \mu = 10$ см, получим шкалы (d) и (n), соответственно, длины

$$(\log 4000 - \log 80) \cdot 10 \doteq 17 \text{ см}, \qquad (\log 1800 - \log 40) \cdot 10 \doteq 16{,}5 \text{ см}.$$

Тогда по формулам (19)

$$s = 1, \ \nu = \frac{10}{2} = 5 \text{ см},$$

так что длина шкалы (v) будет

$$(\log 60{,}0 - \log 0{,}15) \doteq 13 \text{ см}.$$

Шкалы (d) и (n) размещаем произвольно, шкалу же (v) — посередине между ними, определяя положение, напр., отсчета $v = 1$ по отсчетам $n = 100$ и $d = 191$.

b) $a = 2$, $b = -5$; логарифмическая шкала для d имеет обратное направление. Длина промежутка изменения $\log Q$ равна 3, взяв $\lambda = 5$ см, получим шкалу (Q) длины 15 см. Промежуток изменения $\log d$ имеет меньшую длину: $\log 600 - \log 10 = 1{,}77815$; возьмем $\mu = 10$ см, так что шкала (d) будет длины 17,8 см. По формулам (17) и (18), где b нужно заменить в нашем случае через $|b|$:

$$s = \frac{5}{4}, \ \nu = 1{,}11 \text{ см},$$

так что длина шкалы (h) оказывается всего 4,4 см.

Чтобы избежать столь маленького масштаба, можно переписать данное соотношение в виде:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{792}} \cdot h^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{5}{2}}$$

и рассматривать Q как функцию от h и d. Взяв $\lambda = 4$ см и $\mu = 10$ см, что обеспечивает шкалам (h) и (d) длины 16 см и 17,8 см, будем иметь на этот раз $\left(\text{при } a = \frac{1}{2}, \ b = \frac{5}{2}\right)$

$$s = 2, \ \nu = 2\frac{2}{3} \text{ см},$$

так что длина шкалы (Q) будет 8 см.

В обоих случаях положение промежуточной шкалы может быть определено, напр., по системе соответственных значений: $h = 100$, $d = 24$, $Q = 1000$.

c) Лучше исходить из другой формы того же соотношения:

$$Q = \frac{\pi d^2 \cdot v}{40} \quad \text{или} \quad d = \sqrt{\frac{40}{\pi}} \cdot Q^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}}.$$

Во втором случае, напр., $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ (логарифмическая шкала для v имеет обратное направление) и можно взять

$$\lambda = 3 \text{ см}, \ \mu = 6 \text{ см}, \ \text{откуда} \ s = \frac{3}{5} \ \text{и} \ \nu = 4 \text{ см},$$

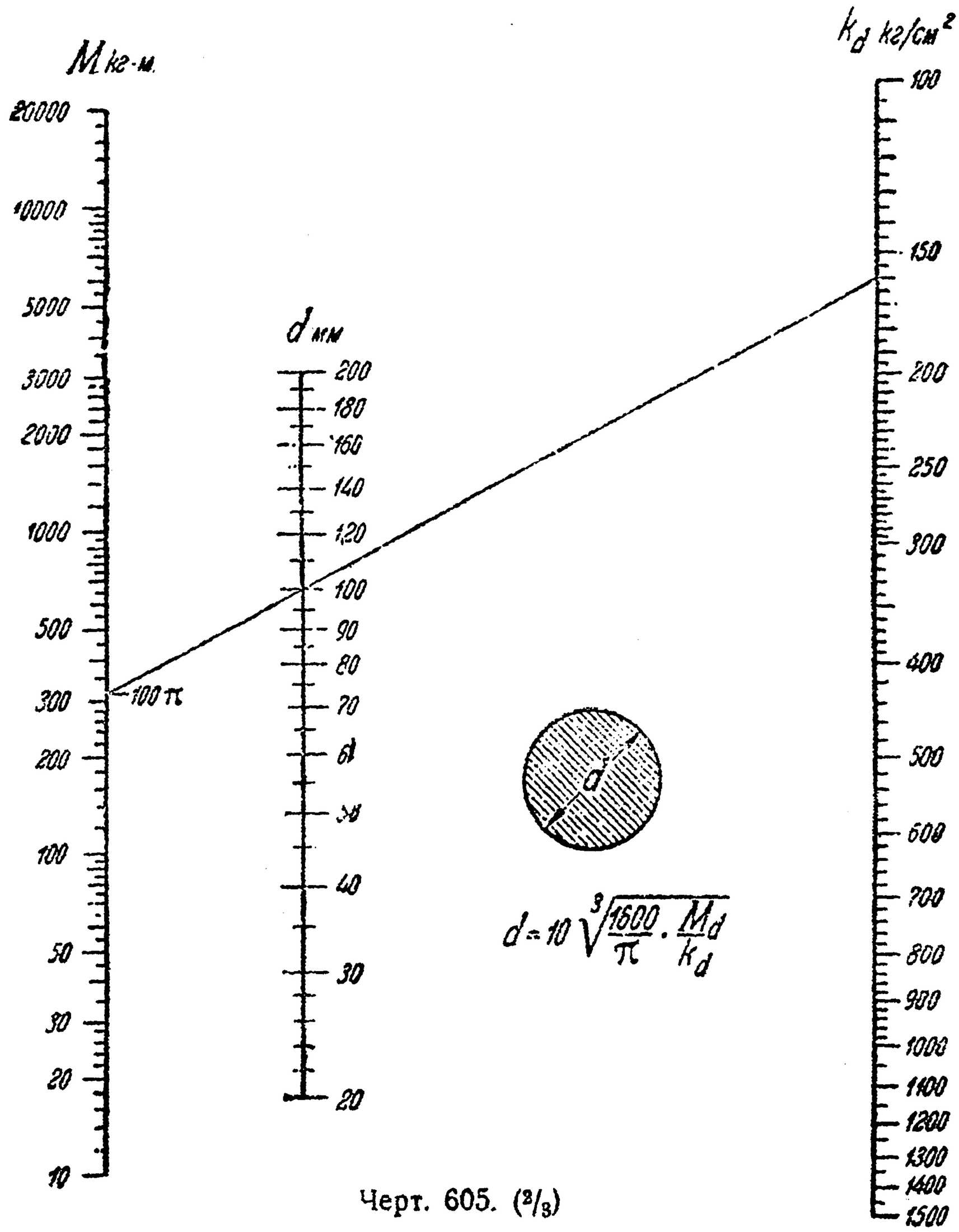
так что длины шкал (Q), (v) и (d), соответственно, будут 13,2, 13,8 и 9,2 см. Положение шкалы (d) определяется по отсчету $d = 10$, который отвечает $v = 1$ и $Q = 7{,}85$. Сравните номограммы, получаемые для различных форм данного соотношения.

d) $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{1}{2}$. Если взять $\lambda = 7$ см и $\mu = 5$ см, то $s = \frac{7}{25}$, $\nu = 2{,}19$ см и длины шкал (d), (J) и (Q), соответственно, будут 16,1, 10 и 8,8 см. Система соответствующих значений: $d = 1$, $J = 0{,}0025$, $Q = 1000$.

e) $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$ (логарифмическая шкала для k_d имеет обратное направление). Если взять $\lambda = 5$ см и $\mu = 15$ см, то $s = \frac{1}{3}$ и $\nu = 11{,}25$ см и длины

шкал (M_d), (k_d) и (d), соответственно, будут 16,5, 17,64 и 11,25 см. Для определения положения шкалы (d) замечаем, что при $M_d = 100\pi$ и $k_d = 160$ имеем $d = 100$. Номограмма изображена на черт. 605.

Сравнивая полученные номограммы из выровненных точек с ранее построенными для тех же формул номограммами из помеченных линий, читатель легко убе-



Черт. 605. (2/3)

дится в ценных преимуществах нового типа номограмм. Номограммы из выровненных точек прежде всего делают интерполирование чрезвычайно легким; затем, самый чертеж крайне прост и не загромождён массой линий, как в случае абака, так что остающееся свободным место может быть использовано для всевозможных вспомогательных чертежей и таблиц.

Логарифмирование предложенной формулы, очевидно, может быть с успехом применено и в случае формулы

$$\psi(z) = \varphi(x) \cdot \chi(y) \tag{25}$$

или более общей формулы

$$\psi(z) = \varphi(x)^a \cdot \chi(y)^b, \tag{26}$$

ибо получающаяся отсюда формула:

$$\log \psi(z) = \log \varphi(x) + \log \chi(y)$$

или, соответственно,

$$\log \psi(z) = a \log \varphi(x) + b \log \chi(y)$$

уже имеет вид (21).

5. Термический коэффициент полезного действия η_t идеального цикла Дизеля выражается формулой

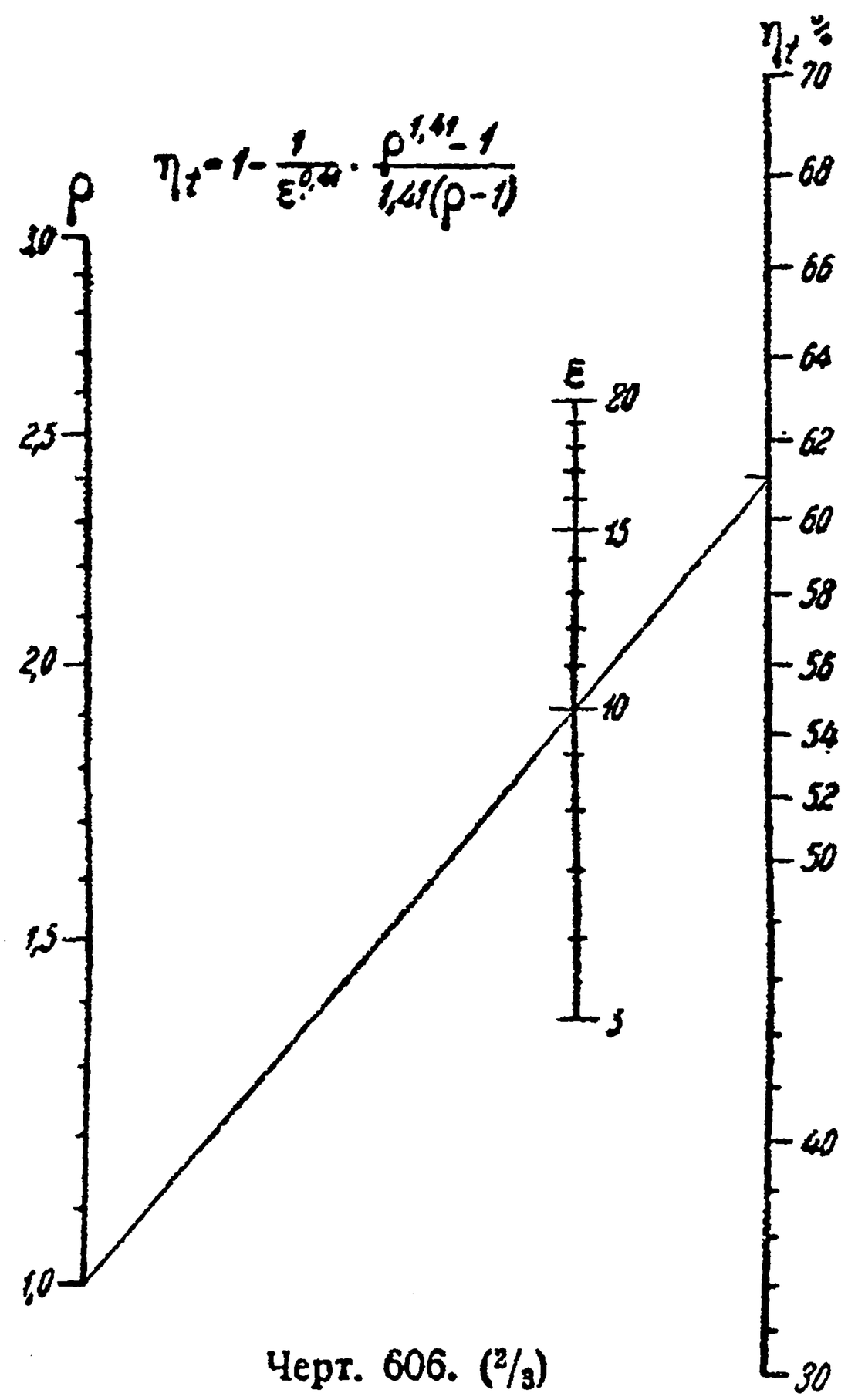
$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{0,41}} \cdot \frac{\rho^{1,41} - 1}{1,41(\rho - 1)},$$

где ε — степень сжатия, а ρ — степень предварительного расширения ($1 < \rho < \varepsilon$). Для построения номограммы этой зависимости представим ее в виде [ср. (26)]

$$\varepsilon^{0,41} = \frac{\frac{\rho^{1,41} - 1}{1,41(\rho - 1)}}{1 - \eta_t}.$$

После логарифмирования получим

$$\log \varepsilon = \frac{1}{0,41} \log \frac{\rho^{1,41} - 1}{1,41(\rho - 1)} + \frac{1}{0,41} \log \frac{1}{1 - \eta_t},$$



Черт. 606. (2/3)

так что $a = \frac{1}{0,41}$, $b = \frac{1}{0,41}$.

Будем изменять ρ от 1 до 3, η_t от 0,30 до 0,70, наконец, ε от 5 до 20. Выражение

$$\frac{\rho^{1,41} - 1}{1,41(\rho - 1)} \qquad (27)$$

при $\rho = 1$ обращается в единицу* и, с возрастанием ρ до 3, само возрастает до 1,314, так что логарифм его изменяется от 0 до 0,1186. Взяв, скажем, масштаб $\lambda = 100$ см, мы доведем длину шкалы (ρ) до 11,9 см.

При изменении η_t от 0,3 до 0,7, $1 - \eta_t$ изменяется в тех же пределах в обратном порядке, так что длина промежутка изменения $\log \frac{1}{1 - \eta_t}$ будет

$$-\log 0,3 - (-\log 0,7) = \\ = \log 0,7 - \log 0,3 = 0,37.$$

Пусть $\mu = 40$ см, тогда длина шкалы (η_t) равна 14,8 см. Заметим, что шкалу для логарифма $\frac{1}{1 - \eta_t}$ нужно откладывать в прямом направле-

* Если положить $\rho = 1 + \alpha$ (где α — бесконечно малая величина), то выражение (27) перепишется так:

$$\frac{(1 + \alpha)^{1,41} - 1}{1,41 \cdot \alpha}.$$

Так как знаменатель здесь есть главная часть числителя, то предел их отношения при $\alpha \to 0$, действительно, будет единица [ч. I, пп° 25, 26].

нии; так как функция $\frac{1}{1-\eta_t}$, а следовательно и $\log\frac{1}{1-\eta^t}$ возрастает с возрастанием η_t, то и для η_t получится функциональная шкала с отсчетами, возрастающими в нормальном направлении.

Теперь, по формулам (17) и (18), имеем

$$s=\frac{5}{2} \text{ и } \nu=11{,}7 \text{ см}.$$

Таким образом, и длина шкалы ε будет удобной:

$$(\log 20-\log 5)\cdot 11{,}7\doteq 7 \text{ см}.$$

Ориентацию шкалы (ε) можно произвести, напр. по отсчету $\varepsilon=10$, который отвечает $\rho=1$ и $\eta_t=0{,}611$. Номограмма представлена на черт. 606.

6. Согласно Ламе и Рэнкину, толщина δ (см) трубопровода, подвергнутого внутреннему давлению p (кг/см²), выражается формулой:

$$\delta=r\left(\sqrt{\frac{k+p}{k-p}}-1\right),$$

где r — внутренний радиус трубопровода, а k — допустимое напряжение материала стенок (кг/см²). Для того чтобы свести дело к трем величинам, введем отношение

$$m=\frac{\delta}{r}.$$

Оно выражается формулой:

$$m=\sqrt{\frac{k+p}{k-p}}-1,$$

для которой и построим номограмму.

С этой целью предварительно преобразуем ее:

$$(m+1)^2=\frac{k+p}{k-p}=\frac{\frac{k}{p}+1}{\frac{k}{p}-1};$$

определяя отсюда отношение $\frac{k}{p}$, получим:

$$\frac{k}{p}=\frac{(m+1)^2+1}{(m+1)^2-1}.$$

Это соотношение имеет уже форму (25); из него логарифмированием находим:

$$\log\frac{(m+1)^2+1}{(m+1)^2-1}=\log k-\log p.$$

Предположим теперь, что промежутки изменения будут: для k от 300 до 1500, для p от 100 до 1200, а для m — от 0,1 до 2. Взяв $\lambda=\mu=10$ см, получим шкалы (k) и (p) длины, соответственно, в 7 и 10,8 см. Затем $s=1$, $\nu=5$ см и длина шкалы (m) получается в

$$\left(\log\frac{2{,}21}{0{,}21}-\log\frac{10}{8}\right)\cdot 5\doteq 4{,}6 \text{ см}.$$

Ориентацию средней шкалы можно произвести, напр., по системе соответственных значений: $k=1050$, $p=100$, $m=0{,}1$.

Предлагается читателю выполнить номограмму.

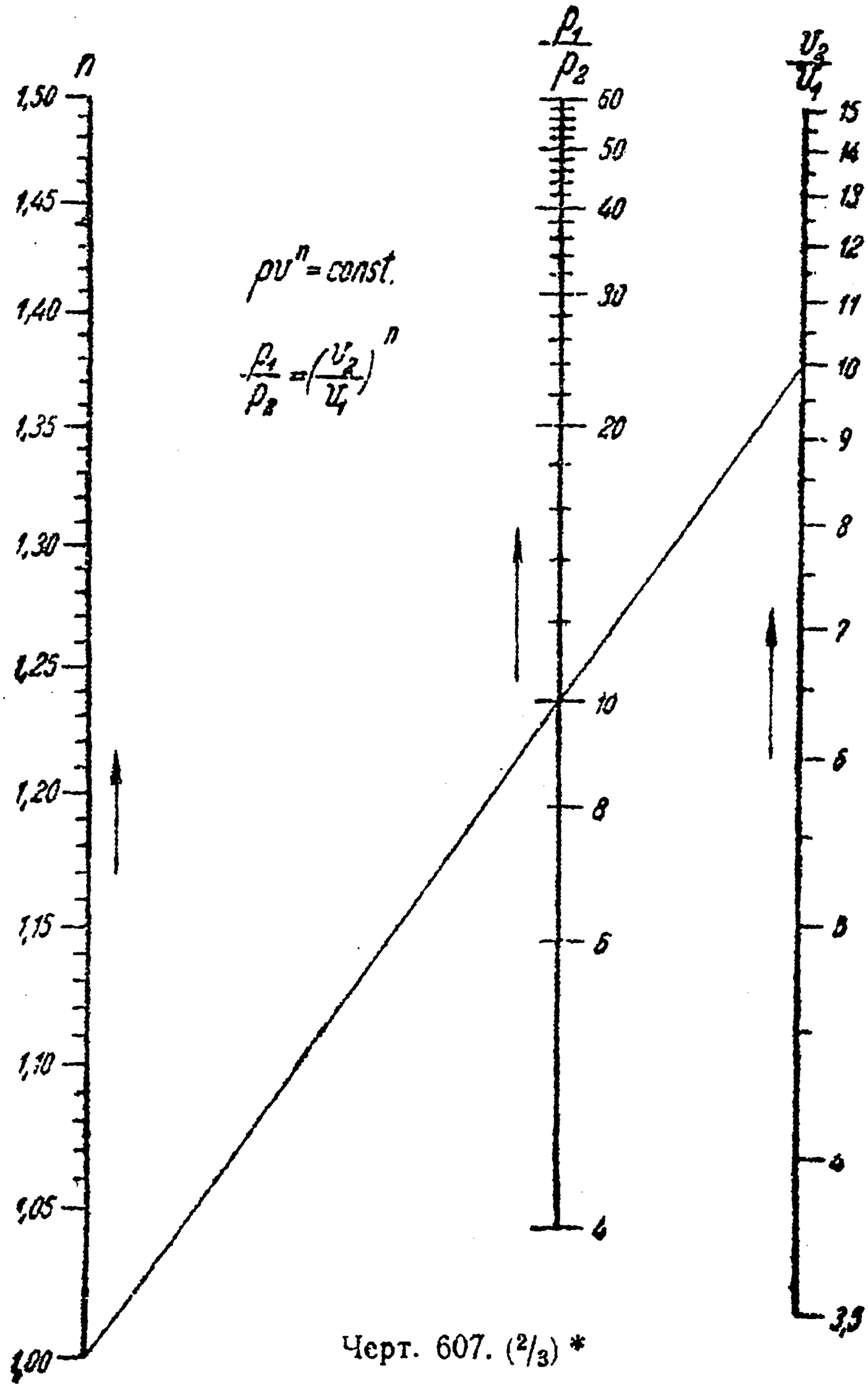
7. Возвращаясь к задаче 4, n⁰ 328, дадим сейчас более удобную номограмму для формулы

$$\frac{p_1}{p_2}=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n,$$

связывающей начальное и конечное состояние газа при политропическом процессе. Переменными здесь являются два отношения $\frac{p_1}{p_2}$, $\frac{v_2}{v_1}$ и показатель политропы n.

Логарифмируя эту формулу:

$$\log \frac{p_1}{p_2} = n \cdot \log \frac{v_2}{v_1},$$



Черт. 607. (2/3) *

мы приведем ее лишь к виду (25), так что нам понадобится еще одно логарифмирование:

$$\log \log \frac{p_1}{p_2} = \log n + \log \log \frac{v_2}{v_1}.$$

Пусть теперь n изменяется в пределах от 1,05, до 1,5, отношение $\frac{v_2}{v_1}$ от 3,5 до 15, наконец, отношение $\frac{p_1}{p_2}$ — от 4 до 60.

Взяв $\lambda = 100$ см, мы сведем шкалу (n) к длине

$$(\log 1{,}5 - \log 1{,}05) \cdot 100 \approx 15{,}5 \text{ см}.$$

* Деление „6" на средней шкале помещено неверно (слишком высоко).

Если $\mu = 50$ см, то длина шкалы $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$ будет

$$(\log\log 15 - \log\log 3{,}5)\cdot 60 \doteq 16{,}7 \text{ см}.$$

Затем, очевидно,

$$s = 2, \quad \nu = \frac{100}{3} \text{ см},$$

так что длина шкалы $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ оказывается равной

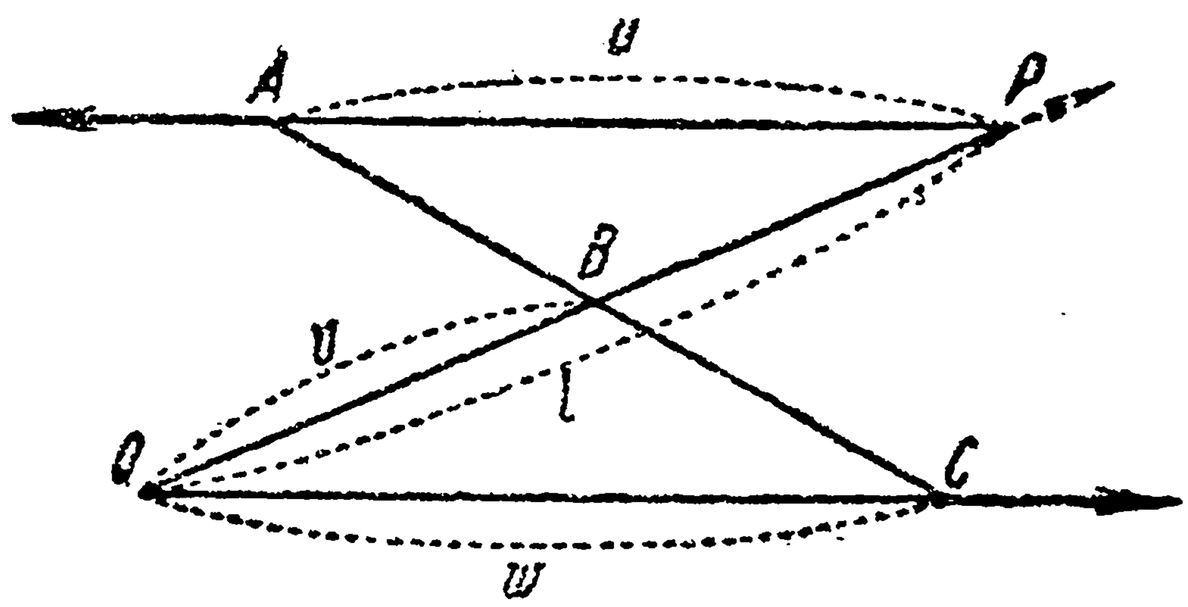
$$(\log\log 60 - \log\log 4)\frac{100}{3} \doteq 15{,}7 \text{ см}.$$

Ориентация шкалы $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ может быть произведена по значению $\frac{p_1}{p_2} = 10$, которое отвечает $n = 1$ и $\frac{v_2}{v_1} = 10$.

Номограмма дана на черт. 607. Сравнивая ее с прежней номограммой (черт. 593) читатель снова видит, насколько предпочтительнее номограммы из выровненных точек!

331. Зетовые номограммы. В некоторых случаях прибегают к другому расположению шкал. Рассмотрим две параллельные оси PA и QC (черт. 608) и третью ось QP, наклонную к ним. Если пересечь все три оси какой-нибудь прямой ABC, то из подобия $\triangle\triangle ABP$ и CBQ будем иметь:

$$\frac{PA}{QC} = \frac{BP}{QB} = \frac{QP - QB}{QB}.$$



Черт. 608.

Положив

$$PA = u, \quad QB = v,$$
$$QC = w, \quad QP = l,$$

перепишем полученную пропорцию:

$$\frac{u}{w} = \frac{l - v}{v},$$

откуда

$$w = u\cdot\frac{v}{l - v}. \qquad (28)$$

Выбрав для осей PA, QB и QC масштабы λ, μ, ν и взяв на первой из них за начало точку P, а на двух последних — точку Q, нанесем на них **нормальные** шкалы для переменных x, y, z, так что

$$u = \lambda x, \quad v = \mu y, \quad w = \nu z.$$

Подставив эти выражения в равенство (28), найдем, что x, y и z связаны соотношением:

$$\nu z = \lambda x \cdot \frac{\mu y}{l - \mu y} \quad \text{или} \quad z = x \cdot \frac{\frac{\lambda}{\nu} y}{\frac{l}{\mu} - y}.$$

Полагая

$$\frac{\lambda}{\nu} = a, \quad \frac{l}{\mu} = b,$$

можно переписать последнюю формулу в виде:

$$z = x \cdot \frac{ay}{b - y}. \tag{29}$$

Итак, мы установили, какого рода зависимость может быть осуществлена номограммой рассматриваемого типа, при пользовании лишь нормальными шкалами. Этим, конечно, не ограничивается область применения нашей номограммы.

Прежде всего, полагая, для простоты, $\mu = l$, введем переменную

$$t = \frac{ay}{b - y} = \frac{\lambda y}{\nu - \nu y};$$

эта переменная связана с x и z равенством:

$$z = x \cdot t. \tag{30}$$

При этом

$$y = \frac{\nu t}{\nu t + \lambda}, \tag{31}$$

т. е. является дробно-линейной функцией от t. Таким образом, если мы на оси QP, вместо нормальной шкалы для y, нанесем проективную шкалу [323], соответствующую функции (31), с отметками t, то преобразованная номограмма осуществит зависимость (30). Мы получаем новую *номограмму для умножения*, уже не требующую, как в n⁰ 329, построения логарифмической шкалы.

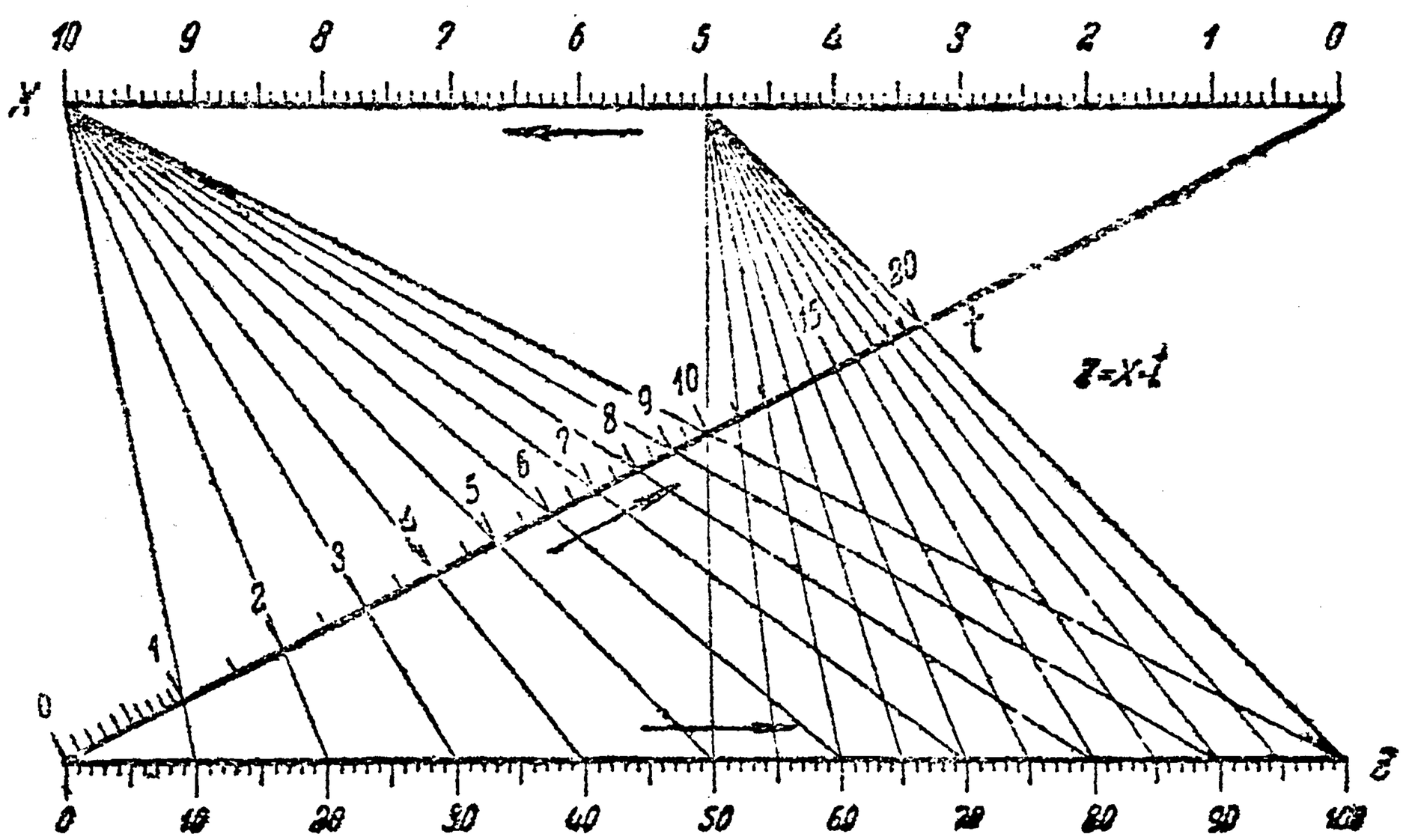
Для фактического построения номограммы возьмем промежутки изменения: для x — от 0 до 10, для z — от 0 до 100; желая обеим шкалам придать длину в 10 см, выберем соответственно масштабы: $\lambda = 1$ см и $\nu = 0{,}1$ см и нанесем (черт. 609) на двух параллельных отрезках (взятых на расстоянии, скажем, в 5 см один от другого) равномерные шкалы (x) и (z). На наклонной прямой надлежит нанести проективную шкалу (t), определяемую функцией

$$y = \frac{0{,}1\,t}{0{,}1\,t + 1} = \frac{t}{t + 10}. \tag{32}$$

Для этого можно использовать обычные приемы построения проективных шкал [323]. Впрочем, в данном случае сама номограмма (в ее построенной уже части) позволяет сразу градуировать шкалу (t). Если в формуле (30) взять $x = 10$, то получим:

$$t = \frac{1}{10} z;$$

таким образом, если точку с отсчетом $x=10$ на верхней шкале соединить прямыми с точками на нижней шкале, имеющими отсчеты $z=10, 20, \ldots, 100$, то в пересечении их с наклонной прямой следует проставить отсчеты $t=1, 2, \ldots, 10$. Если бы мы хотели продолжить шкалу (t), то можно было бы продолжить шкалу (z) и сохранить прежний центр проектирования. Но это было бы нецелесообразно, так как проектирующие лучи пересекали бы наклонную прямую под очень острыми углами и точки пересечения получались бы неотчетливо. Ни-



Черт. 609. (1/1)

что не мешает в подобном случае переменить центр проектирования; читатель легко сообразит по чертежу, как с помощью точки $x=5$ получены на шкале (t) деления от 10 до 20.

Построенная номограмма имеет вид буквы Z; в связи с этим номограммы изучаемого типа и носят название *зетовых номограмм*, или *Z-номограмм*. То же название сохраняется и при другой ориентации осей.

Если равномерные (нормальные) шкалы для x и z заменить функциональными, построенными, соответственно, по функциям $f(x)$ и $\varphi(z)$, то и в соотношении (30), связывающем наши переменные, нужно будет заменить x и z на $f(x)$ и $\varphi(z)$. Точно так же и переменную t в (30) можно заменить любой ее функцией $g(t)$, если ту же замену произвести и в формуле (31), т. е. на наклонной прямой, вместо прежней, нанести функциональную шкалу, определяемую функцией

$$y=\frac{\nu g(t)}{\nu g(t)+\lambda}.\ ^{*} \tag{33}$$

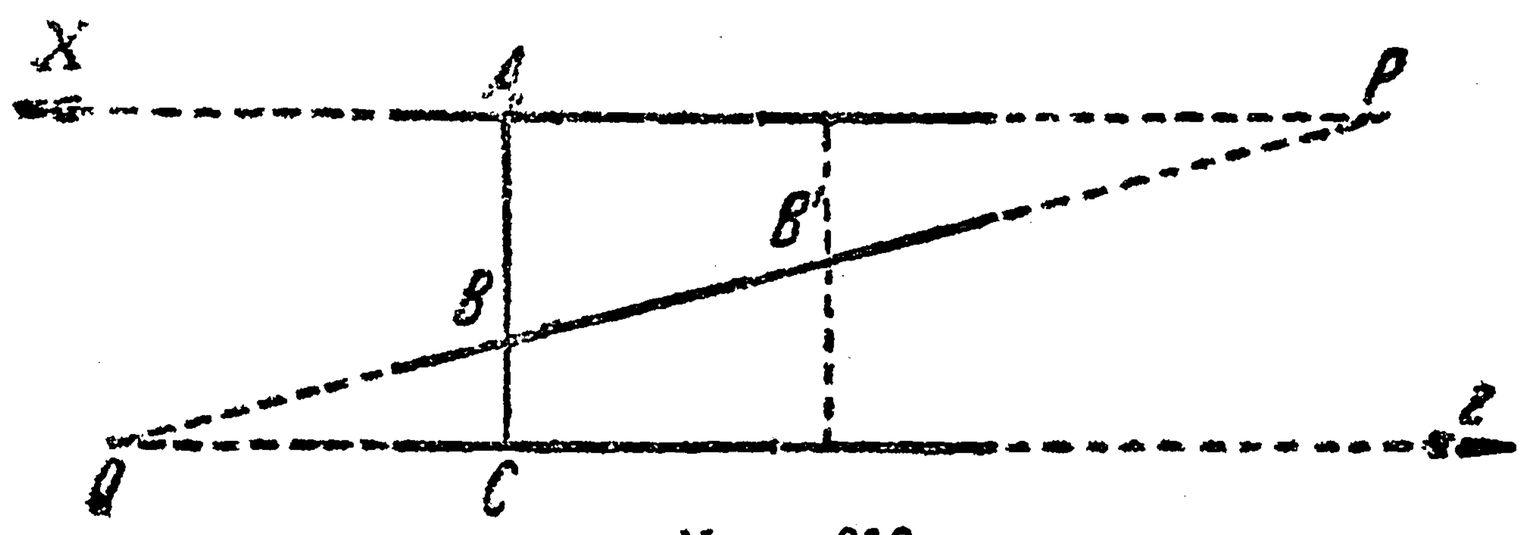
При этих условиях соотношение (30) заменится таким:

$$\varphi(z)=f(x)\cdot g(t); \tag{34}$$

это—самый общий вид зависимости, которая может быть осуществлена зетовой номограммой.

*) Эта шкала является проективной шкалой для функции $g(t)$. См. замечание в конце n° 324.

Формула (34), с помощью логарифмирования, может быть (как мы знаем) развернута и в номограмму с тремя параллельными шкалами. Но логарифмирование зачастую усложняет построение шкалы; кроме того, оно предполагает, что значения всех трех функций в (34) всегда положительны, чем стесняется выбор промежутков изменения рассматриваемых переменных. Оба эти замечания превосходно иллюстрируются только что построенной номограммой умножения: раньше мы не могли начинать изменение переменных от 0, к тому же и само построение шкал теперь оказалось несравненно более простым.



Черт. 610.

Бывают случаи, когда та или другая из точек P, Q черт. 608 остается вне рабочей части чертежа; это будет тогда, когда начальная точка для той или другой шкалы на деле лежит вне рабочей части этой шкалы. В подобном случае для определения положения наклонной прямой нужно уметь точно фиксировать одну или две ее точки. Из подобия $\triangle\triangle$ ABP и CBQ (черт. 610) следует:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{PA}{QC}.$$

Если x и z суть отсчеты точек A и C на соответствующих шкалах, то

$$PA = \lambda \cdot f(x), \quad QC = \nu \cdot \varphi(z).$$

Таким образом, если отрезок AC разделить в точке B в отношении

$$\frac{\lambda \cdot f(x)}{\nu \cdot \varphi(z)},$$

то точка B будет лежать на искомой прямой.

Шкалы (x) и (z) можно строить на параллельных прямых в произвольном месте, не интересуясь наперед положением начальных точек (которое, разумеется, попутно уже само собою однозначно устанавливается). Иначе обстоит дело с наклонной шкалой (t), для которой начальная точка уже фиксирована наперед. Для ориентировки этой шкалы достаточно построить, как разъяснено выше, две ее точки (скажем, B и B') и одновременно подсчитать по основному уравнению (34) соответствующие отсчеты t и t'; измерив (в см) длину l' отрезка BB', легко установить масштаб шкалы (t):

$$l = l' : \left\{ \frac{\nu\, g(t')}{\nu\, g(t') + \lambda} - \frac{\nu\, g(t)}{\nu\, g(t) + \lambda} \right\}.$$

Обычно подбирают значения x, z и t по возможности более простыми.

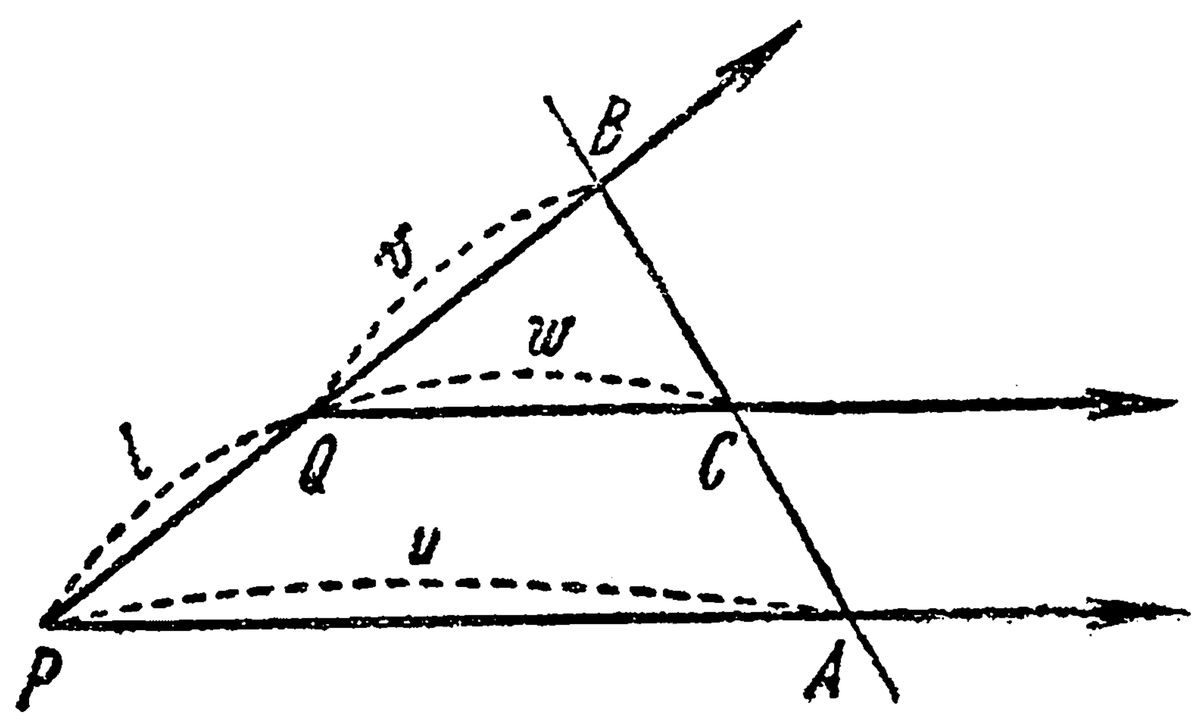
Заметим, что на подобие того, как шкала для функции (31) может быть получена проектированием из нормальной шкалы для t, так и шкала для функции (33) проектированием же получается из функциональной шкалы, определяемой функцией $g(t)$ [ср. замечание в конце n° 324]. Впрочем, при построении Z-номограмм часто сама номограмма помогает строить шкалу (t), как это было в приведенном выше простейшем примере.

Иной раз оказывается более удобным *вынести наклонную шкалу наружу*, располагая оси так, как указано на черт. 610 *a*). Читатель легко получит для этого случая такое соотношение между отрезками u, v, w:

$$w = u \cdot \frac{v}{l+v}, \qquad (28\,a)$$

которое лишь знаком отличается от исходной формулы (28). Нанеся на осях шкалы для функций

$$f(x), \quad \frac{\nu g(t)}{\lambda - \nu g(t)} \quad \text{и} \quad \varphi(z),$$



Черт. 610 *a*).

соответственно, в масштабе λ, $\mu = l$ и ν, получим также номограмму для зависимости (34). Предлагаем читателю подтвердить это выкладками, взяв за образец проведенные в тексте.

332. Примеры и задачи. 1. Формула

$$\varepsilon = 0{,}00016pt \qquad (35)$$

выражает поправку, которую следует отнять от отсчета p (в мм ртутного столба) ртутного барометра с латунной шкалой при температуре t°C ($t > 0$), чтобы привести показание барометра к 0° [см. 26, 5]. Построим для нее Z-номограмму, изменяя p от 500 до 800 (мм), t от 0° до 50° и ε от 0 до 6 (мм).

Для $0{,}00016\,p$ и ε построим равномерные шкалы на параллельных прямых длиною в 6 см каждая; соответственно этому придется положить

$$\lambda = \frac{6}{0{,}00016 \cdot 800 - 0{,}00016 \cdot 500} = 125 \text{ см}, \quad \nu = 1 \text{ см}.$$

Расстояние между прямыми возьмем равным 4 см (черт. 611).

Для определения положения наклонной прямой, по сделанному выше замечанию, соображаем, что отрезок, соединяющий, напр., точки с отсчетами $p = 500$ и $\varepsilon = 6$, рассекается этой прямой в отношении

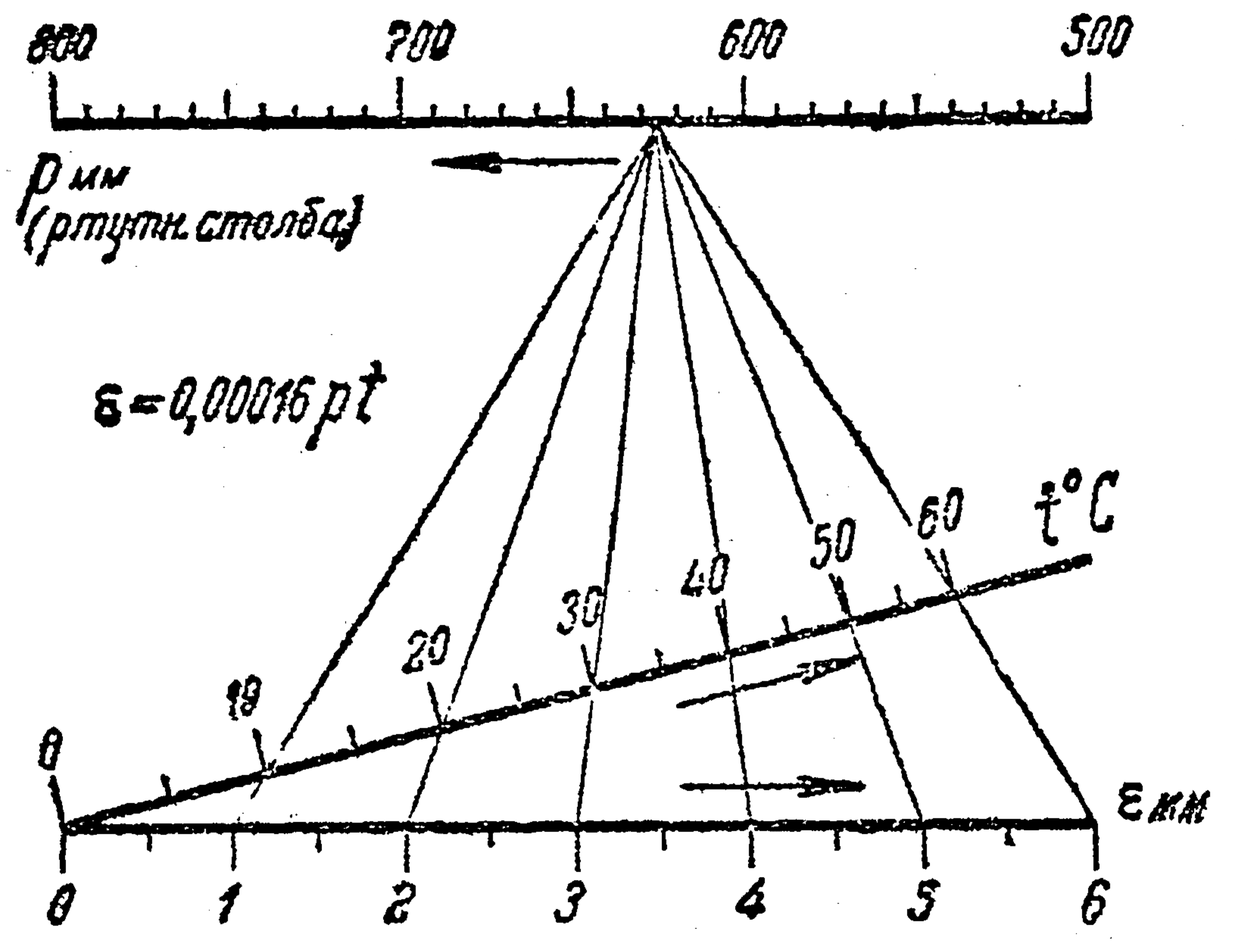
$$\frac{0{,}00016 \cdot 500 \cdot 125}{6 \cdot 1} = \frac{5}{3}.$$

Что же касается самого градуирования шкалы (t), то его можно очень просто выполнить, заметив, что при $p = \frac{10000}{16} = 625$ соотношение (35) дает

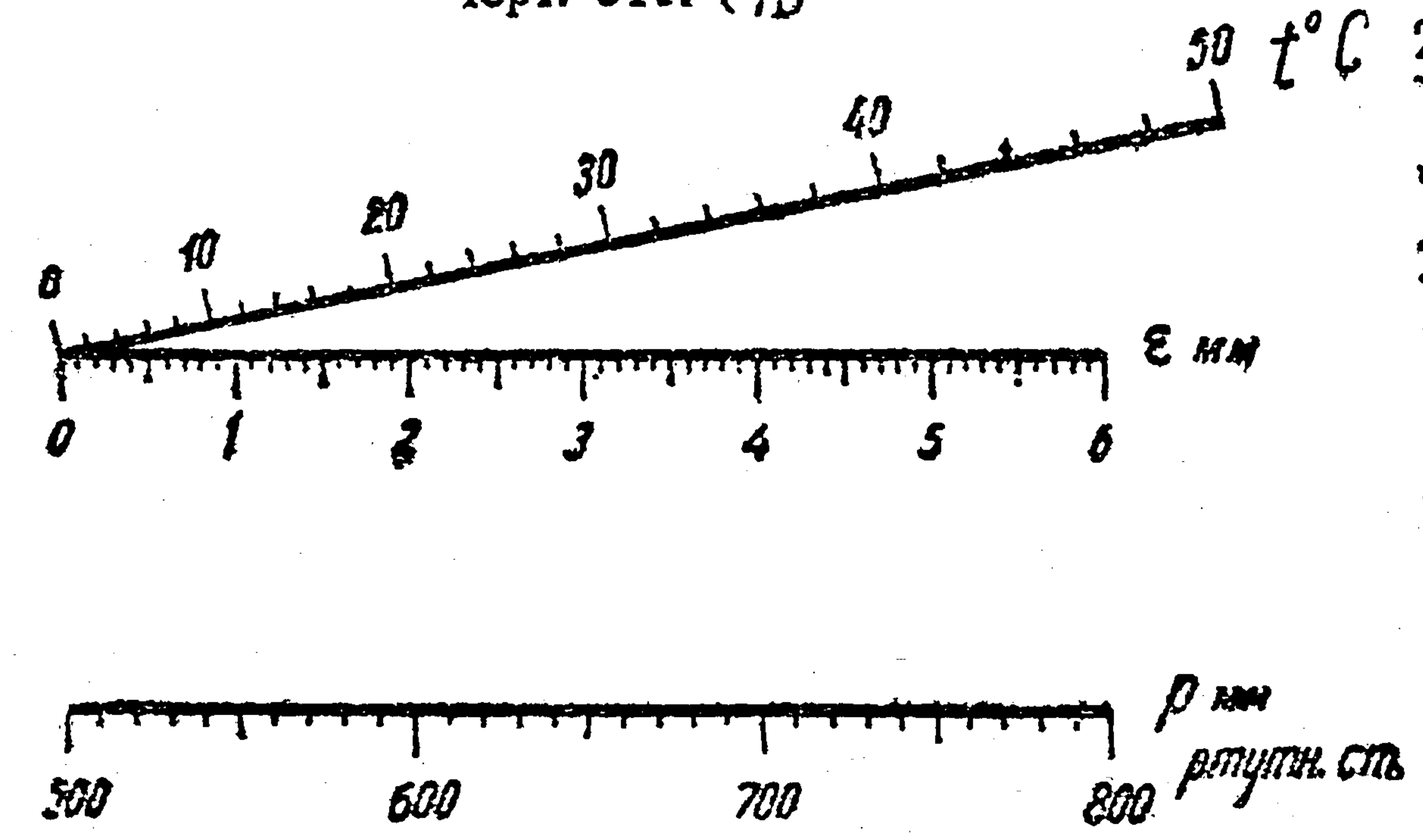
$$\varepsilon = \frac{1}{10} t \text{ или } t = 10\varepsilon.$$

Таким образом, если из точки $p = 625$ спроектировать шкалу ε на наклонную прямую, увеличив при этом отсчеты в 10 раз, то и получится искомая шкала.

Можно вынести наклонную шкалу и наружу. Уменьшим расстояние между параллельными осями до 2 см и сохраним для них прежние масштабы. Тогда мы должны будем провести наклонную шкалу (продолжение которое пересекает ось p в ее начальной точке), очевидно, с уклоном $^1/_5$. Градуировка наклонной шкалы производится как и выше. Новая номограмма приведена на черт. 611 *а*).



Черт. 611. ($^1/_1$)



Черт. 611 *а*). ($^1/_1$)

2. Построить номограмму для формулы

$$W = \frac{bh^2}{6},$$

выражающей момент сопротивления балки (доски) прямоугольного сечения. Промежутки изменения: для b от 5 до 75 (см), для h от 1 до 5 (см), наконец, для W от 1 до 300 (см³).

Напишем нашу формулу в виде:

$$W = \frac{h^2}{6} \cdot b. \qquad (36)$$

Так как $\frac{h^2}{6}$ изменяется от $\frac{1}{6}$ до $\frac{25}{6}$, то, взяв $\lambda = 3$ см, получим шкалу (h) длины в 12 см. Для шкалы (W) возьмем $\nu = 0{,}04$ см, чтобы получить шкалу примерно той же длины. Поместим эти шкалы одну под другой на расстоянии, скажем, 6 см. На наклонном отрезке длины

$$\sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 13{,}42 \text{ см}$$

нужно построить проективную шкалу для b, по функции

$$\frac{0{,}04\,b}{0{,}04\,b + 3} = \frac{b}{b + 75},$$

взяв весь отрезок за единицу масштаба.

Вместо этого, если шкалы (h) и (W) допускают продолжение, можно было бы спроектировать из точки $h = 6$ шкалу (W) на наклонную прямую, одновременно деля отсчеты на шесть; действительно, при $h = 6$ формула (36) дает:

$$W = 6b.$$

3. Построить номограмму для формулы Дюпюи-Эйтельвейна

$$v = \sqrt{6{,}484\,DJ}, \qquad (37)$$

дающей скорость течения воды по трубам (м/сек), в зависимости от диаметра D (см) трубы и ее пьезометрического уклона J. Промежутки изменения: для D — от 0 до 100, для J от $\frac{1}{2000}$ до $\frac{1}{100}$, для v — от 0 до 1.

Указание. Представим формулу в виде:

$$D = N \cdot \frac{v^2}{6{,}484},$$

где $J = \frac{1}{N}$, так что N изменяется от 100 до 2000; для простоты будем считать (0, 200) его промежутком изменения. При $\lambda = 0{,}008$ см и $\nu = 0{,}16$ см обе шкалы (N) и (J) будут длины в 16 см. Пусть расстояние между ними равно 8 см.

Согласно (33), на наклонной оси длины

$$\sqrt{16^2 + 8^2} = 17{,}89 \text{ см}$$

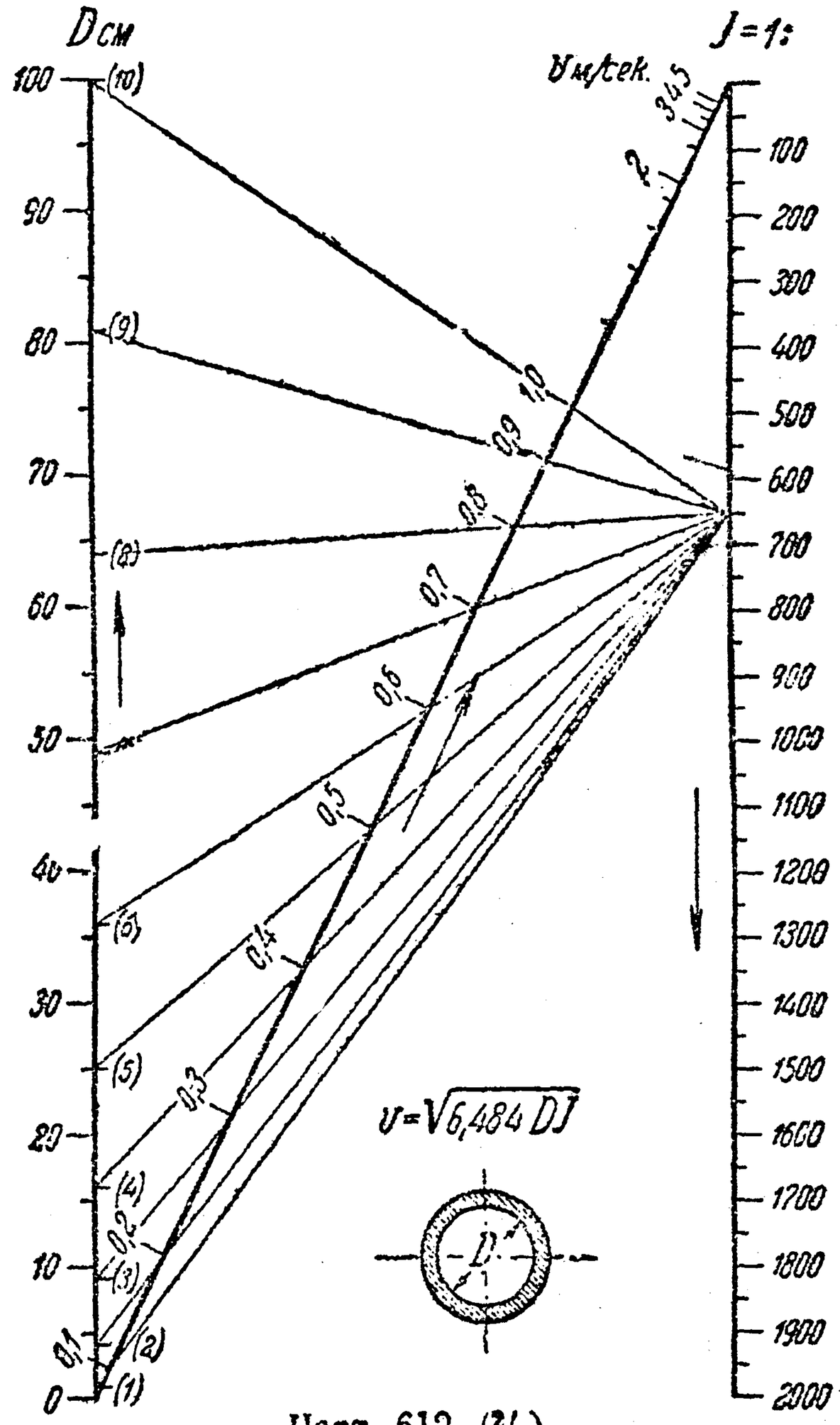
должна быть нанесена функциональная шкала по функции

$$y = \frac{v^2}{v^2 + 0{,}3242}$$

(в масштабе $\mu = 17{,}89$ см). Она является проективной для функции v^2 [см. замечание в конце п° 324] и, следовательно, может быть получена проектированием шкалы квадратов v^2. Впрочем, полагая в нашей формуле $N = 648{,}4$, будем иметь:

$$D = 100v^2 = (10v)^2.$$

Таким образом, если на оси (D) нанести шкалу квадратов и спроектировать ее на наклонную ось из точки с отсчетом $N = 648{,}4$, то стоить лишь вдесятеро уменьшить отсчеты шкалы квадратов, чтобы получить на наклонной оси искомую шкалу (v). Этот процесс и указан на номограмме, которая изображена на черт. 612.



Черт. 612. (2/3)

4. Построить номограмму для встречающейся в сферической тригонометрии формулы

$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

где α, β, γ — углы, изменяющиеся от 0° до 90°.

Указание. Шкалы (α) и (γ), тождественные между собой, строятся при помощи таблицы натуральных тригонометрических величин. Шкала (β) может быть получена проектированием шкалы (γ) из точки шкалы (α) с пометкой $\alpha = 90°$.

5. Давление зерна в силосе определяется по формулам Янсена, для вертикального давления (кг/м²) на глубине h (м):

$$p = \frac{\gamma S}{\mu k P}\left(1 - e^{-\frac{\mu k P}{S} h}\right), \qquad (38)$$

а для бокового давления:

$$p_s = kp.$$

[Относительно обозначений см. 231, 2]. Если ввести *гидравлический радиус*

$$R = \frac{S}{P}$$

и, полагая

$$h = \alpha R,$$

выражать глубину в долях гидравлического радиуса (постоянного для каждого силоса), то формула (38) примет простой вид:

$$p = \frac{\gamma R}{\mu k}\left(1 - e^{-\mu k \cdot \alpha}\right).$$

Взяв (скажем, для пшеницы) $\mu = 0{,}40$, $k = 0{,}44$, $\gamma = 800$ (кг/м³) и выражая давление в кг/см², получим окончательно:

$$p = 0{,}4545\, R \cdot (1 - e^{-0{,}176\alpha}).$$

Построить для этой формулы номограмму, имея в виду промежутки изменения: для R — от 0 до 3 (м), для α — от 0 до 25, для p — от 0 до 1,2 (кг/см²).

Указание. На параллельных прямых построить шкалы (α) и (p), а на наклонной проективную шкалу (R). Если взять $\lambda = 12$ см, $\nu = 10$ см, то длины шкал (α) и (p) будут соответственно равны 11,85 см и 12 см. Проективную шкалу для (R) строить по функции:

$$\frac{10 \cdot 0{,}4545\, R}{10 \cdot 0{,}4545\, R + 12} = \frac{303\, R}{303\, R + 800};$$

если параллельные прямые взять на расстоянии 6 см, то масштаб этой шкалы будет $\sqrt{144 + 36} = \sqrt{180} = 13{,}42$ см.

Проще подобрать такое значение α, чтобы при этом значении было:

$$p = \frac{2}{5} R \text{ или } R = \frac{5}{2} p;$$

изменению p от 0 до 1,2 будет отвечать как раз изменение R от 0 до 3. Упомянутое значение α определяется из условия

$$0{,}4545\left(1 - e^{-0{,}176\alpha}\right) = \frac{2}{5}$$

и оказывается равным 12,05.

При построении шкалы α рекомендуется использовать таблицу значений показательной функции.

По другую сторону шкалы p полезно нанести шкалу для $p_s = 0{,}44\, p$.

6. Вернемся к формуле Ламе и Рэнкина:

$$m = \sqrt{\frac{k + p}{k - p}} - 1,$$

для которой мы уже строили номограмму в зад. 6 n⁰ 330. Пусть теперь k изменяется от 300 до 1500, p — от 0 до 1200, m — от 0,1 до 2. Представив нашу формулу в виде:

$$k = p \cdot \frac{(m+1)^2 + 1}{(m+1)^2 - 1},$$

построим шкалы (p) и (k) на параллельных прямых, а шкалу (m)—на наклонной. Если взять $\lambda = \nu = 0{,}015$ см, то обе шкалы (p) и (k) окажутся длиною в 18 см; поместим их рядом на расстоянии 10 см (см. черт. 613).

Обратимся к третьей шкале. Положение наклонной прямой определяется, напр., ее точкой на отрезке, соединяющем точки с отсчетами $p = 1200$ и $k = 300$; эта точка делит упомянутый отрезок в отношении $1200 : 300 = 4$. Шкала на наклонной прямой строится по функции вида (33), где следует положить $\lambda = \nu = 0{,}015$ и заменить $g(t)$ выражением

$$\frac{(m+1)^2 + 1}{(m+1)^2 - 1};$$

таким образом, окончательно, нужно построить шкалу для функции

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(m+1)^2+1}{(m+1)^2}, \tag{39}$$

с отсчетами m. Эта шкала является **проективной** для функции $(m+1)^2$ [см. замечание в конце n⁰ 324].

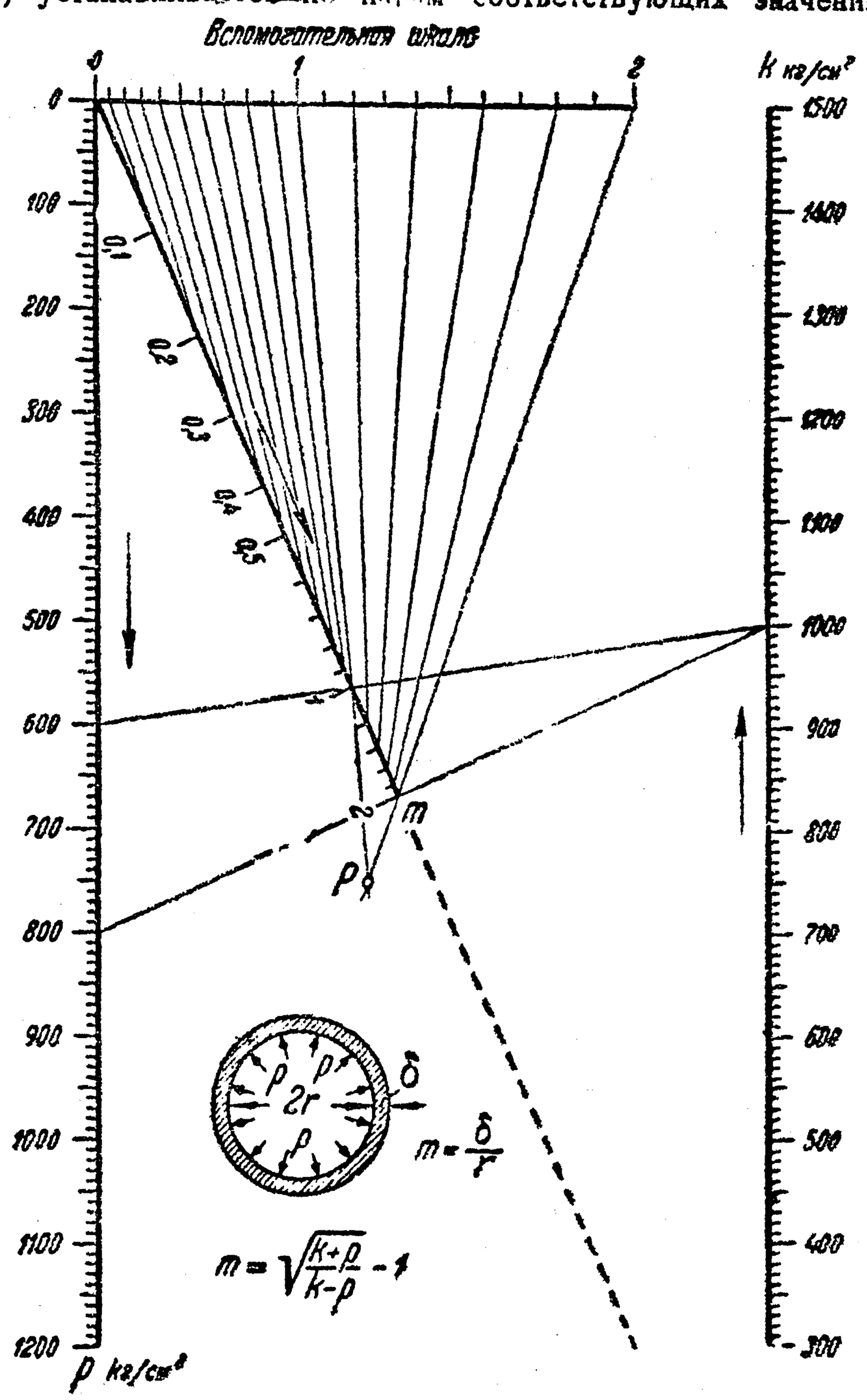
Положение двух точек этой шкалы, отличных от точки $m=0$ (с отсчетами, скажем, $m=1$ и $m=2$) устанавливается по парам соответствующих значений p и k (напр., по $p=600$, $k=1000$ и $p=800$, $k=1000$). Шкала функции (39) может быть получена из *вспомогательной шкалы* функции $(m+1)^2$ проектированием; все построение показано на чертеже.

Если шкалу (m) построить на вертикальной, а шкалу (p) на наклонной прямой, то получится другая номограмма той же зависимости. Другие две номограммы получатся, исходя из формулы

$$p=k\cdot\frac{(m+1)^2-1}{(m+1)^2+1}$$

Предлагается читателю построить все эти номограммы.

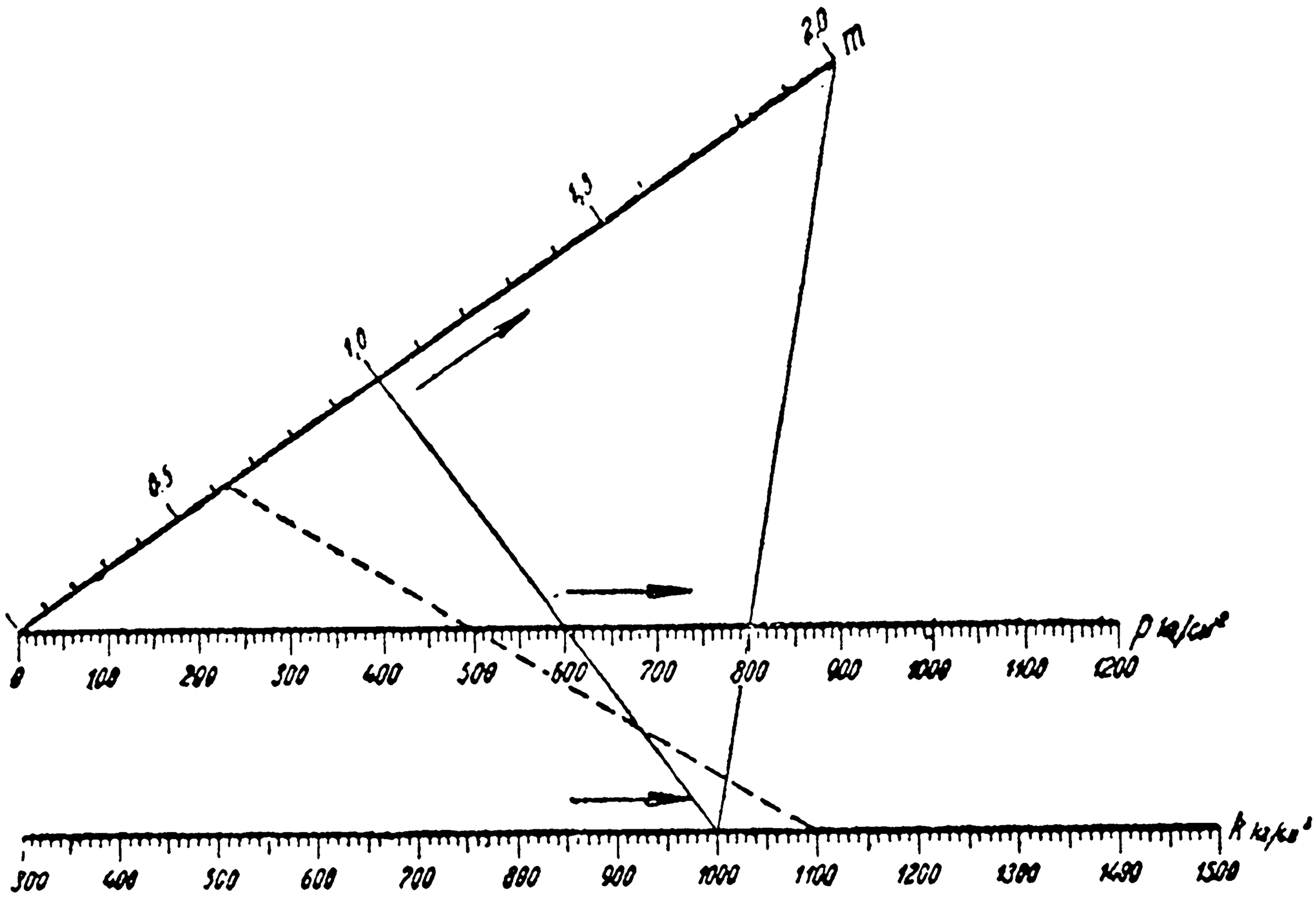
Исходя из последней формы нашей зависимости, целесообразно построить номограмму с вынесенной наружу наклонной шкалой. Мы сдвинем параллельные оси до 3 см; масштаб на оси (k) сохраним, а на оси (p) чуть уменьшим, доведя длину шкалы до 16,5 см. Так как продолжение наклонной оси должно пересечь нижнюю ось в ее начальной точке, то уклон первой будет $\frac{2}{3}$. Градуировка наклонной оси производится как и выше. Номограмма приведена на черт. 613 *а*; подробности построения опущены.



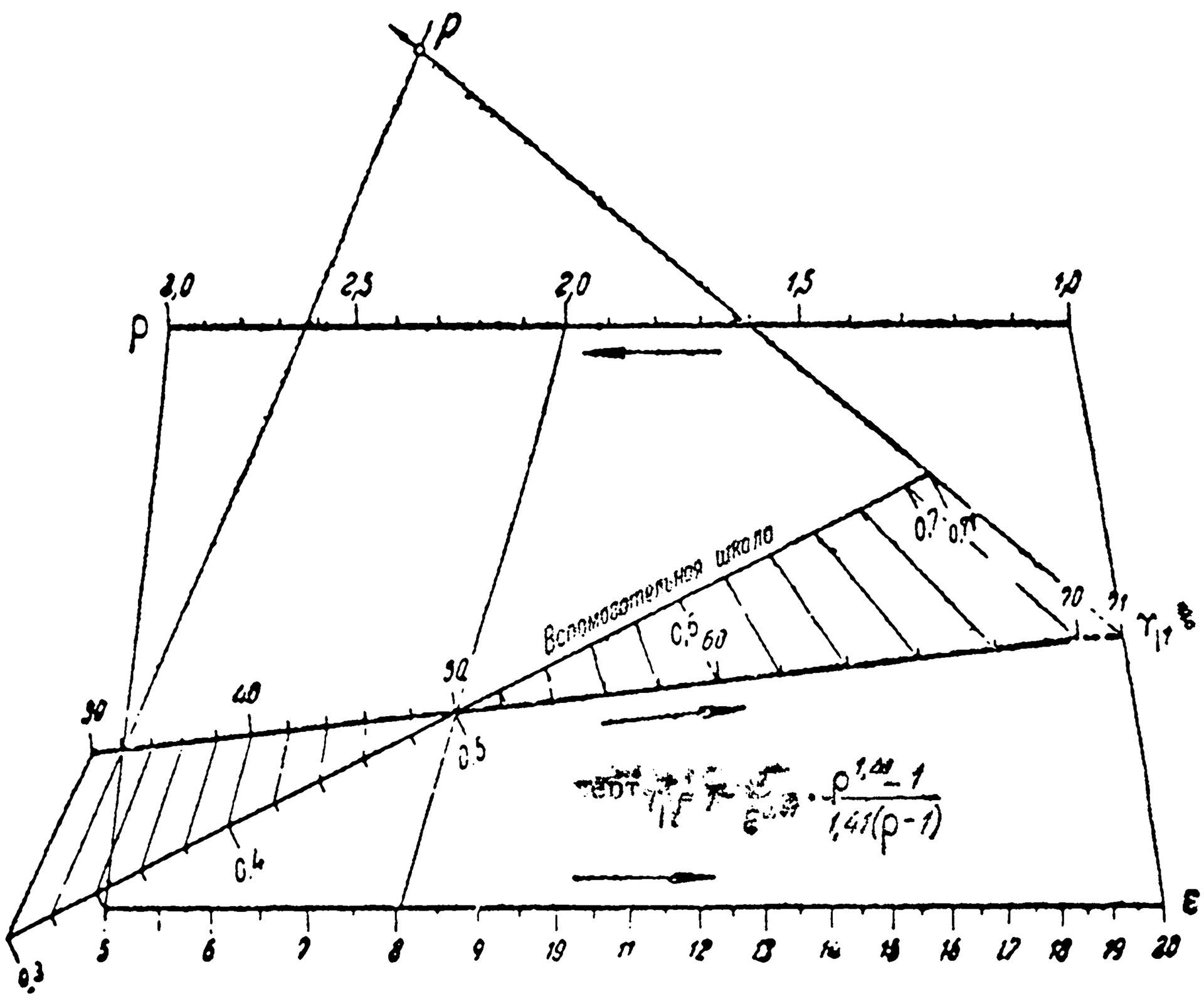
Черт. 613 (2/8).

Заметим вскользь, что маленькое изменение масштаба шкалы (p) вызвано желанием несколько приблизить **центр проектирования**, при помощи которого получается шкала (m) из вспомогательной шкалы функции $(m+1)^2$. Без этого упомянутый центр получается вне эпюра чертежа (проверьте!).

Благодаря вынесению наружу длина наклонной шкалы увеличилась и деления ее сделались более равномерными. Этим повышается точность получаемых с ее



Черт. 613 *а*). (²/₈)



Черт. 614. (²/₃)

помощью результатов. Для примера пунктирная линия на чертеже устанавливает, что при $k = 1100$ и $p = 500$ (кг/см²) отношение $m = 0{,}623$.

7. Мы уже строили номограмму с тремя параллельными шкалами для формулы

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{0,41}} \cdot \frac{\rho^{1,41} - 1}{1,41 \cdot (\rho - 1)}$$

[см. зад. 5, n° 320]. Построим для нее же Z-номограмму, изменяя ε, ρ и η_t в прежних пределах.

Переписав данное соотношение в виде:

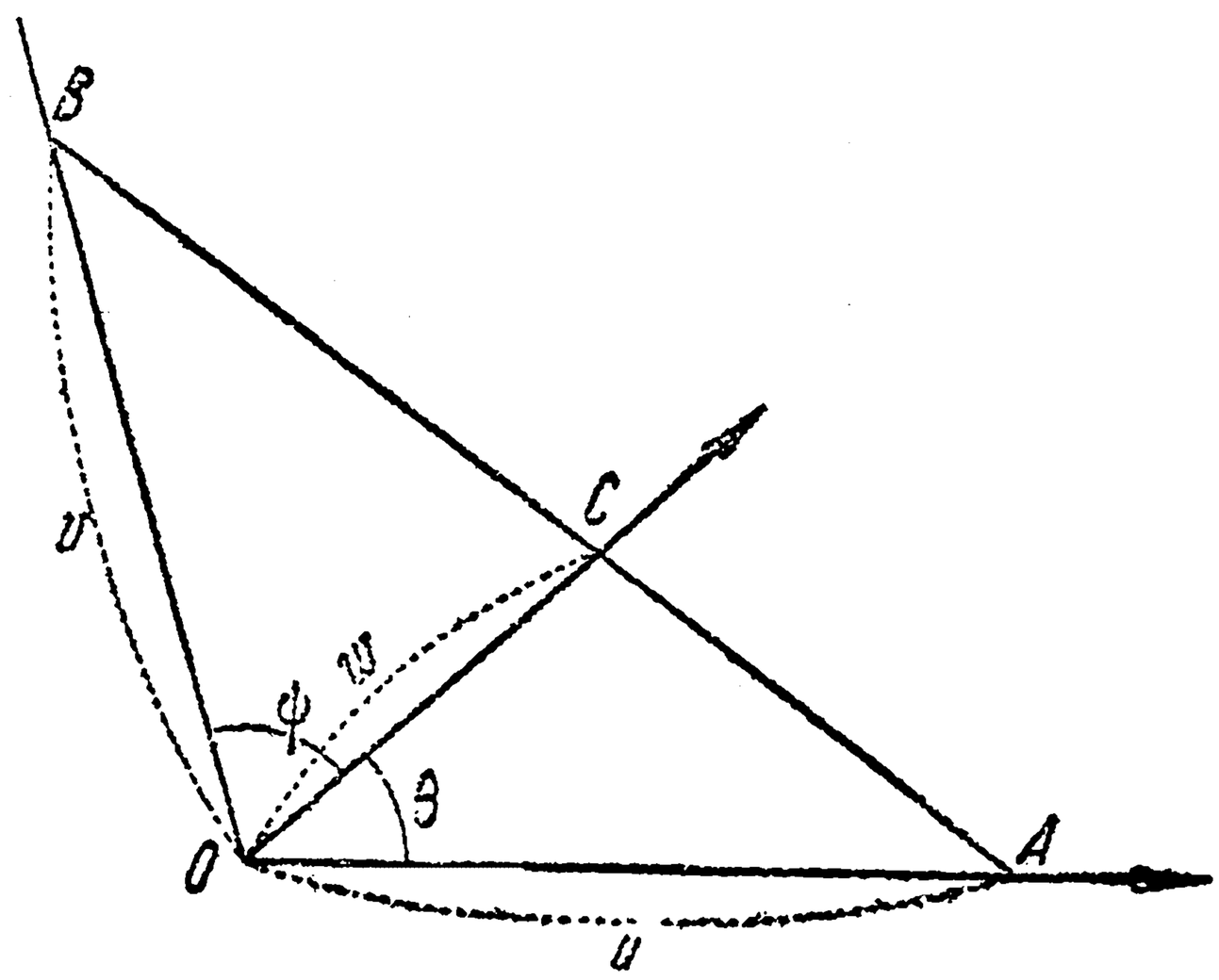
$$\frac{\rho^{1,41} - 1}{1,41\ (\rho - 1)} = \varepsilon^{0,41} \cdot (1 - \eta_t),$$

построим шкалы (ρ) и (ε) на двух параллельных прямых, а шкалу (η_t) на наклонной прямой. Так как, при изменении ρ между 1 и 3 выражение слева растет от 1 до 1,314, то, взяв $\lambda = 40$ см, доведем длину шкалы (ρ) до $0{,}315 \cdot 40 = 12{,}60$ см. При изменении ε от 5 до 20, $\varepsilon^{0,41}$ растет от 1,935 до 3,415; если положить $\lambda = 10$ см, то длина шкалы ε будет равна $1{,}480 \cdot 10 = 14{,}8$ см. Расположим эти шкалы непосредственно одну под другой (черт. 614), на расстоянии 8 см.

Положение наклонной прямой определим с помощью точек пересечения ее с отрезками, соединяющими точки $\rho = 3$, $\varepsilon = 5$ или $\rho = 1$, $\varepsilon = 20$. Эти отрезки делятся в названных точках соответственно в отношении 2,72 и 1,17; отсчеты шкалы (η) в этих точках будут $\eta_t = 0{,}32$ и $\eta_t = 0{,}71$. Нам понадобится еще одна точка шкалы: напр., точка с отсчетом $\eta_t = 0{,}50$ определяется значениями $\varepsilon = 8{,}04$ и $\rho = 2$. По трем точкам проективной шкалы (η_t), с соответствующими отметками, эта шкала может быть построена методами n° 323 (что и выполнено на чертеже, с привлечением вспомогательной равномерной шкалы).

333. Радиальные номограммы. Упомянем еще об одном расположении трех прямолинейных шкал, когда они исходят в виде радиусов из одной точки. Подобного вида номограммы и носят название *радиальных* (или *радиантных*).

Рассмотрим три оси OA, OB и OC, исходящие из одной точки O (черт. 615), и пересечем их произвольной прямой ACB. Эта прямая отсечет на осях отрезки $u = OA$, $v = OB$ и $w = OC$, зависимость между которыми легко найти следующим образом. Очевидно,



Черт. 615.

$$\text{пл. } \triangle AOB = \text{пл. } \triangle COB + \text{пл. } \triangle AOC.$$

Вспоминая известное из тригонометрии выражение площади треугольника через две стороны и синус заключенного между ними угла, перепишем это соотношение:

$$\frac{1}{2}\, uv \cdot \sin\ (\theta + \psi) = \frac{1}{2}\, vw \cdot \sin \psi + \frac{1}{2}\, uw \cdot \sin \theta;$$

отсюда, разделив на $\frac{1}{2}\, uvw$,

$$\frac{\sin\ (\theta + \psi)}{w} = \frac{\sin \psi}{u} + \frac{\sin \theta}{v}.$$

Если на осях OA, OB, OC откладывать соответственно значения трех величин x, y, z в масштабе λ, μ, ν, так что $u = \lambda x$, $v = \mu y$, $w = \nu z$, то эти величины окажутся связанными соотношением:

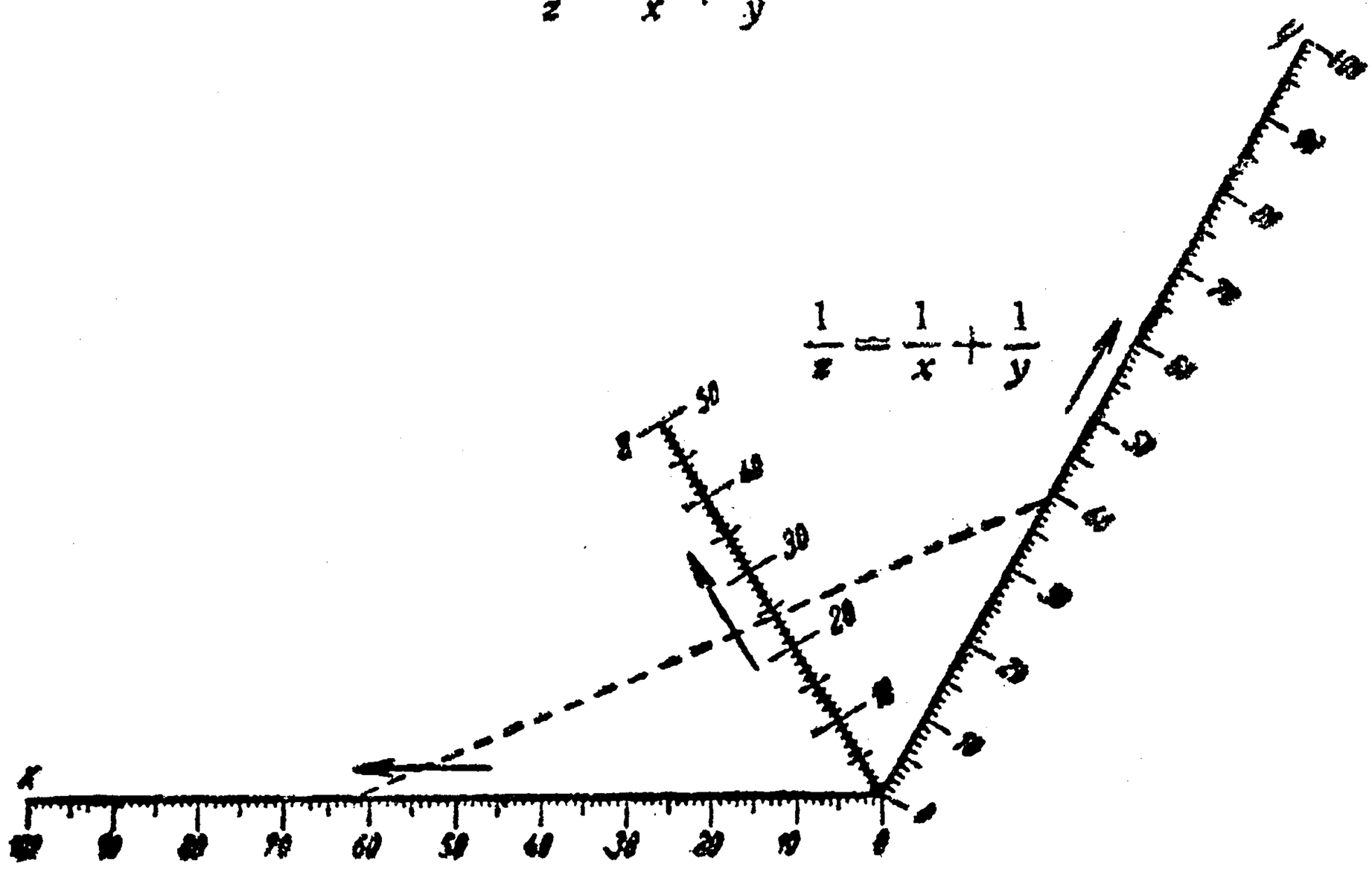
$$\frac{\sin(\theta + \psi)}{\nu z} = \frac{\sin\psi}{\lambda x} + \frac{\sin\theta}{\mu y}.$$

Разделив на коэффициент при $\frac{1}{z}$ и полагая

$$a = \frac{\nu}{\lambda} \cdot \frac{\sin\psi}{\sin(\theta + \psi)}, \quad b = \frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin(\theta + \psi)}, \tag{40}$$

приведем его к виду:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}. \tag{41}$$



Черт. 616. (2/3)

Наоборот, если дано соотношение (41) с произвольными (положительными) коэффициентами a, b, то можно многообразно выбрать углы θ, ψ и масштабы λ, μ, ν так, чтобы выполнялись равенства (40). При $a = b = 1$, т. е. в случае соотношения

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \tag{42}$$

для этого достаточно взять углы θ, ψ и масштабы λ, μ на осях (x), (y) под условием:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\sin\psi}{\sin\theta}, \tag{43}$$

а затем положить

$$\nu = \lambda \cdot \frac{\sin(\theta + \psi)}{\sin\psi} = \mu \cdot \frac{\sin(\theta + \psi)}{\sin\theta} \tag{44}$$

Если, как это чаще всего бывает, берут

$$\lambda = \mu \quad \text{и, следовательно,} \quad \psi = \theta, \tag{45}$$

то формулы (44) заменяются более простыми:

$$\nu = \lambda \cdot 2\cos\theta = \mu \cdot 2\cos\theta. \tag{46}$$

Наконец, при $\theta = 60^\circ$ (так как $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$) будет просто:

$$\nu = \lambda = \mu. \tag{47}$$

Таким образом, выбрав углы наклона осей и масштабы под условиями (43), (44) [или—в более общем случае—под условиями (40)] и нанеся на осях нормальные шкалы (x), (y), (z), мы получим номограмму из выровненных точек, осуществляющую зависимость (42) [или—соответственно—(41)]. На черт. 616 дана, для примера, номограмма зависимости (42) при простейших предположениях: $\theta = \psi = 60^\circ$, $\lambda = \mu = \nu = 10$ см. (Пунктирная линия на ней при $x = 62$ и $y = 39$ дает $z \doteq 24$). Замечательно, что мы не пользуемся здесь никакими шкалами, кроме равномерных!

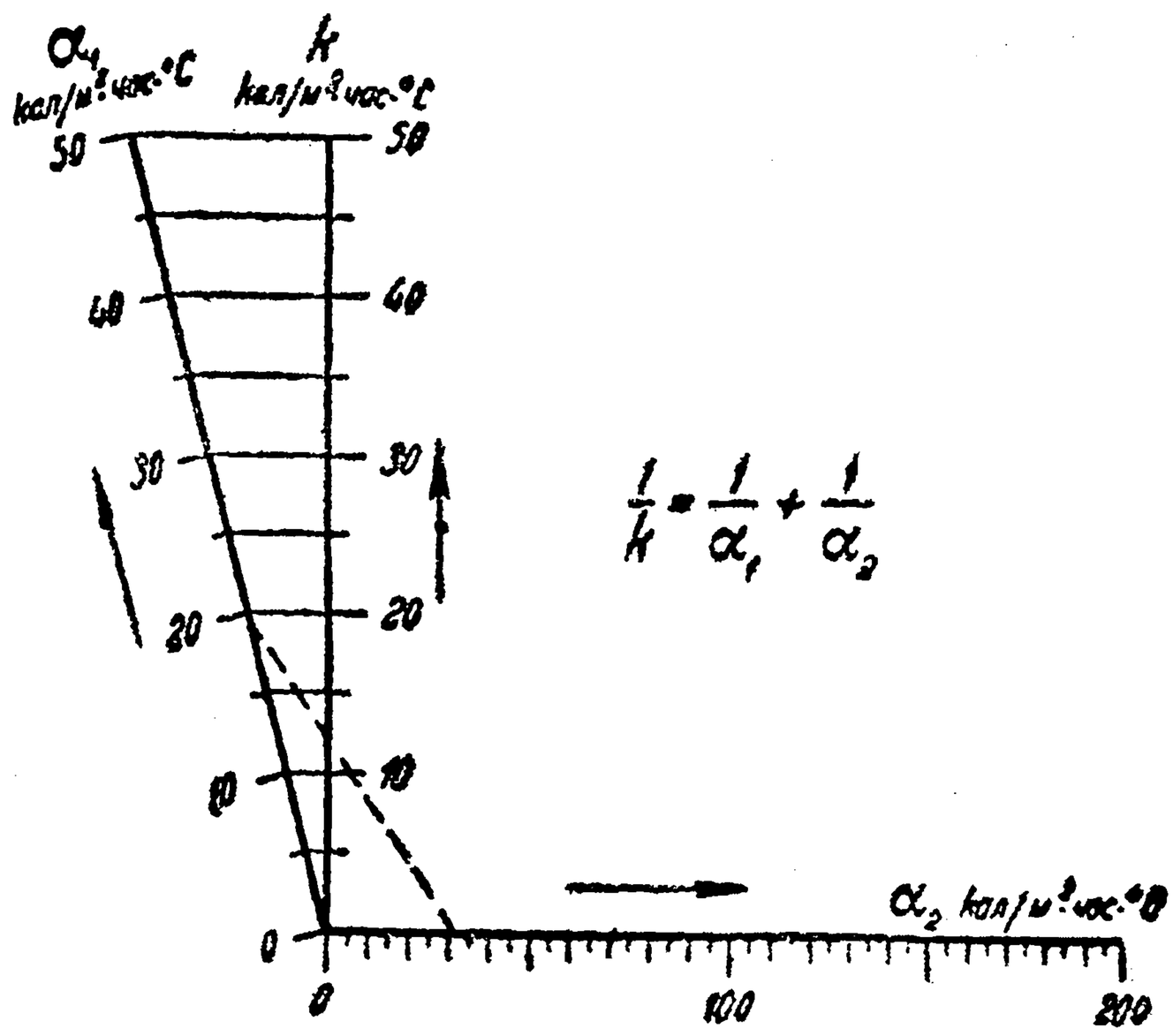
Если промежутки изменения величин x и y разнятся, так что масштабы λ и μ приходится брать **неравными**, тогда и углы θ, ψ не равны и ось (z) не будет биссектрисой угла между двумя другими осями. Вернемся к задаче 3 *b*) n⁰ 326 [ср. и задачу 1 n⁰ 330] и построим радиальную номограмму для соотношения [того же типа, что и (42)]:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2},$$

изменяя α_1 и k от 0 до 50 (кал/м² · час · °C), а α_2—от 0 до 200 (кал/м² · час · °C).

Для того чтобы шкалы (α_1) и (α_2) были примерно одной длины, масштаб μ нужно взять примерно вчетверо меньшим, чем λ. Имея в виду (43), мы выберем углы θ и ψ так: положим $\psi = 90^\circ$, так что

$$\sin\psi = 1,$$



Черт. 617. (²/₃)

а θ возьмем так, чтобы было:

$\sin\theta = \frac{1}{4}$ (угол θ приблизительно равен 15°). При этих условиях, в силу (43), как раз и получается:

$$\frac{\lambda}{\mu} = 4.$$

Взяв, напр., $\lambda = 0{,}16$ см, $\mu = 0{,}04$ см, мы для обеих шкал (α_1), (α_2) получим одну и ту же длину—8 см. Номограмма изображена на черт. 617. Для построения шкалы (k) нет надобности вычислять масштаб ν. Ясно, что при $\alpha_2 = \infty$ имеем $k = \alpha_1$; проводя через деления шкалы (α_1) прямые, параллельные оси (α_2) (они и „пересекают" эту ось в „бесконечности"!), мы получим на оси (k) точки с теми же отсчетами.

[Если бы промежуток изменения величины α_2 был еще больше, пришлось бы удлинять шкалу, ибо уменьшение угла θ создало бы неудобства при пользовании номограммой.]

Как и в предыдущих типах номограмм, построив на осях, вместо нормальных, **функциональные** шкалы, мы осуществим, вместо зависимостей (41) или (42), более общую зависимость

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{a}{f(x)} + \frac{b}{g(y)}$$

или, соответственно,

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(y)}. \tag{48}$$

Мы предлагаем читателю, заменив на номограмме черт. 616 нормальные шкалы — шкалами квадратов, построить таким образом номограмму зависимости

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

Зависимость вида:

$$\varphi(z) = f(x) + g(y) \tag{49}$$

также иной раз представляют радиальной номограммой. Действительно, переписав ее в форме

$$\frac{1}{1/\varphi(z)} = \frac{1}{1/f(x)} + \frac{1}{1/g(y)}, \tag{49 a}$$

мы и получим соотношение вида (48): роль функций φ, f, g здесь играют $1/\varphi$, $1/f$, $1/g$. Если какие-либо из функций φ, f, g (которые вообще предполагаются положительными обращаются в нуль, то для обратных величин пришлось бы рассматривать шкалы бесконечной длины. Для того чтобы избежать этого, вводят положительные постоянные c_1, c_2, переписывая соотношение (49) так:

$$\varphi(z) + c_1 + c_2 = [f(x) + c_1] + [g(y) + c_2] \tag{50}$$

и, в связи с этим, соотношение (49 a) в виде:

$$\frac{1}{1/\varphi(z) + c_1 + c_2} = \frac{1}{1/f(x) + c_1} + \frac{1}{1/g(y) + c_2}. \tag{50 a}$$

Рассмотрим для примера зависимость

$$Q = 1{,}82\left(h^{3/2} - h_0^{3/2}\right).$$

для которой мы уже строили номограммы в 330 (черт. 602, 603). Ее можно представить в форме (49):

$$h^{3/2} = h_0^{3/2} + \frac{Q}{1{,}82}.$$

Пусть h_0 и h изменяются от 0 до 5, а Q — от 0 до 20. Мы сталкиваемся здесь как раз с тем обстоятельством, о котором только что была речь: все три функции обращаются в 0! Взяв $c_1 = c_2 = 1$, перепишем наше соотношение в форме (50):

$$h^{3/2} + 2 = \left(h_0^{3/2} + 1\right) + \left(\frac{Q}{1{,}82} + 1\right)$$

или (50 a):

$$\frac{1}{1/h^{3/2} + 2} = \frac{1}{1/h_0^{3/2} + 1} + \frac{1}{1/\frac{Q}{1{,}82} + 1}.$$

Наибольшее значение функции

$$\frac{1}{h_0^{3/2} + 1},$$

отвечающее $h_0 = 0$, равно 1; ему отвечает наиболее отдаленная точка шкалы (h_0). Аналогичное замечание можно сделать и относительно шкалы (Q), определяемой функцией

$$\frac{1}{\frac{Q}{1{,}82} + 1} = \frac{1{,}82}{Q + 1{,}82}.$$

Возьмем $\theta = \psi = 45°$ и $\lambda = \mu = 10$ см [см. (45)]. Тогда длины шкал (h_0) и (Q) (считая от точки пересечения осей, которая служит начальной точкой отсчета на обеих) будут обе равны 10 см. Для градуировки шкалы h достаточно проектировать шкалу (h_0) на биссектрису из точки $Q = 0$, ибо при $Q = 0$, очевидно, $h = h_0$. Номо-

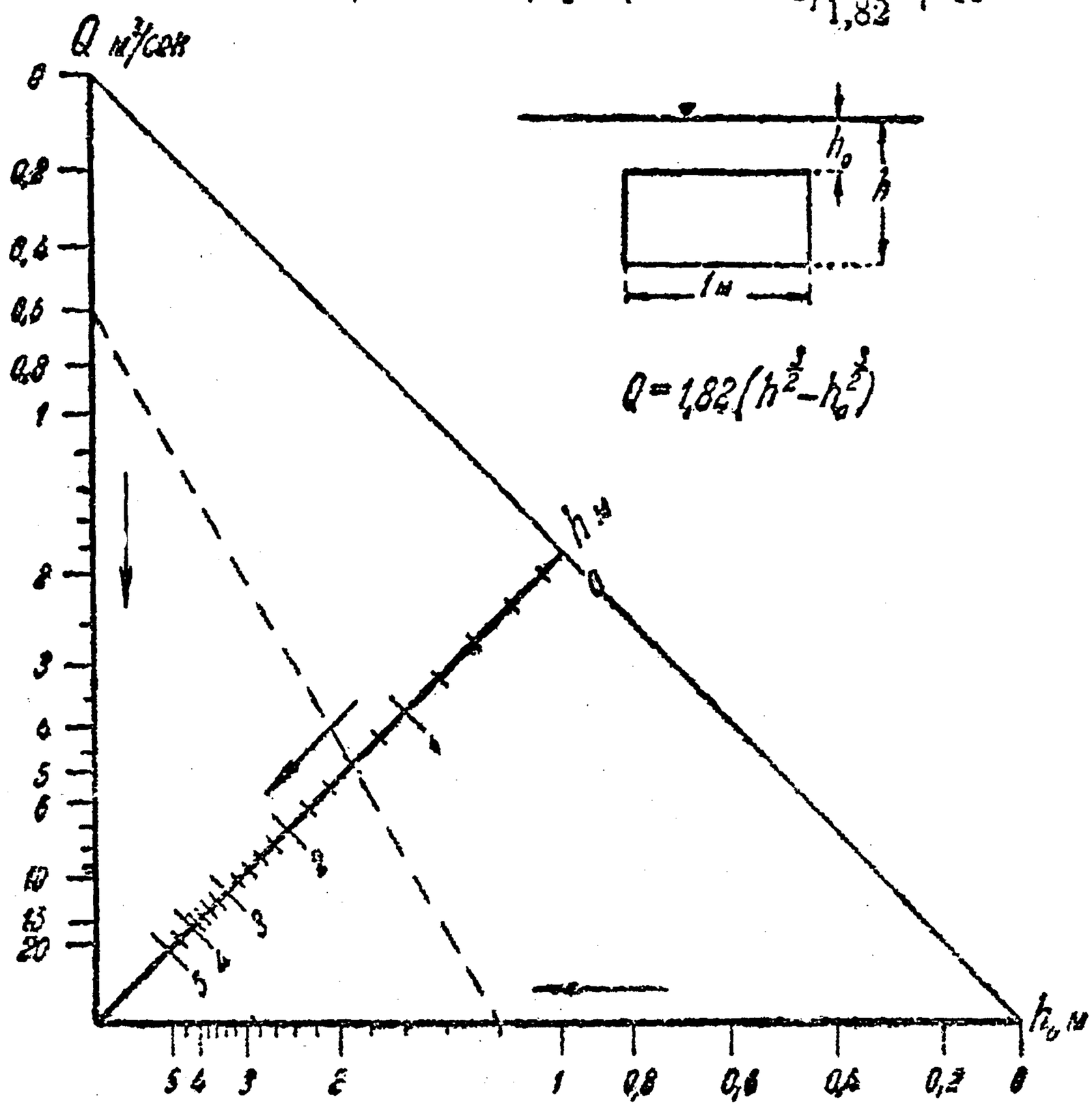
грамма дана на черт. 618; пунктирная линия дает $Q = 0{,}6$ (м³/сек) при $h = 1{,}4$ и $h_0 = 1{,}2$ (м).

Бросается в глаза грубая неравномерность делений на всех шкалах, которая затрудняет применение номограммы на практике. Мы воспользуемся этим примером, чтобы показать, как подобный недостаток может быть ослаблен надлежащим выбором постоянных c_1 и c_2. Возьмем значительно бо́льшие значения их: $c_1 = c_2 = 10$ и перепишем соотношение в виде

$$h^{3/2} + 20 = \left(h_0^{3/2} + 10\right) + \left(\frac{Q}{1{,}82} + 10\right)$$

или

$$\frac{1}{1/h^{3/2} + 20} = \frac{1}{1/h_0^{3/2} + 10} + \frac{1}{1/\frac{Q}{1{,}82} + 10}.$$



Черт. 618. (1/5)

Наличие большого слагаемого 10 в знаменателях дробей

$$\frac{1}{h_0^{3/2} + 10}, \quad \frac{1}{\frac{Q}{1{,}82} + 10}$$

несколько „ослабляет" их зависимость от изменения первых слагаемых. Правда, при изменении h_0 и Q в указанных выше пределах эти дроби изменяются, соответственно, от 0,0472 до 1 или 0,0476 до 1. Таким образом около половины каждой из шкал (h_0), (Q), считая от общей им начальной точки, остается неиспользованной! Но мы на чертеже сохраним лишь рабочие части шкал, и номограмма примет вид, изображенный на черт. 619. Здесь взято $\lambda = \mu = 200$ см, так что длины рабочих частей упомянутых шкал будут около 10 см. [Заметим, что вовсе нет надобности строить оси до точки их пересечения. Взяв горизонтальные расстояния верхних точек шкал (h_0) и (Q) от вертикали произвольными, но равными (на на-

шем чертеже они равны 5 см), расстояния нижних точек мы определяем из подобия треугольников, и т. д. Предоставляем читателю самому в этом разобраться.]

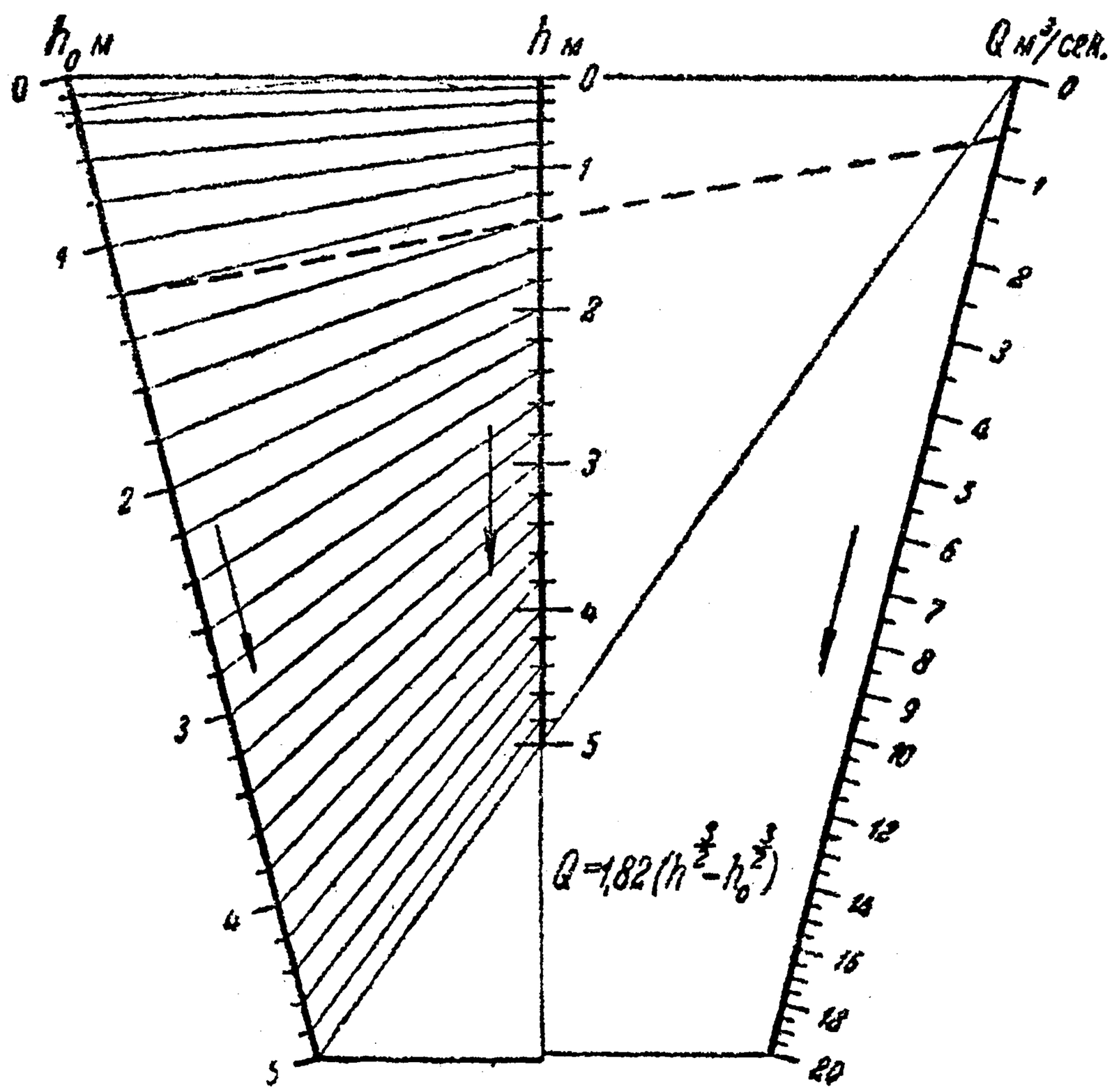
Преобразование соотношения (49) к форме (49 *a*) — с последующим построением радиальной номограммы — особенно полезно в тех случаях, когда те или иные из функций φ, f, g обращаются в бесконечность. Тогда при построении, скажем, номограммы с тремя параллельными шкалами пришлось бы иметь дело со шкалами бесконечной длины. Здесь же этого не будет, так как бесконечным значениям функций φ, f или g отвечают нулевые значения обратных величин.

В качестве последнего примера рассмотрим снова уравнение

$$\sin\gamma = \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

при изменении углов α, β, γ от 0° до 90° [ср. зад. 4, 332]. Логарифмируя, приводим его к виду (49):

$$\log\sin\gamma = \log\sin\alpha + \log\sin\beta$$



Черт. 619. (4/5)

или, меняя знаки (чтобы добиться положительности функций, ибо синус меньше единицы и его логарифм отрицателен):

$$-\log\sin\gamma = -\log\sin\alpha + (-\log\sin\beta).$$

При $\alpha = \beta = \gamma = 0°$ все три функции обращаются в бесконечность, так что естественно перейти к форме (49 *a*). Правда, при $\alpha = \beta = \gamma = 90°$ эти функции обращаются в нуль, так что придется предварительно ввести постоянные слагаемые c_1, c_2; мы положим $c_1 = c_2 = 0{,}15$ и перепишем наше соотношение в виде:

$$0{,}30 - \log\sin\gamma = (0{,}15 - \log\sin\alpha) + (0{,}15 - \log\sin\beta)$$

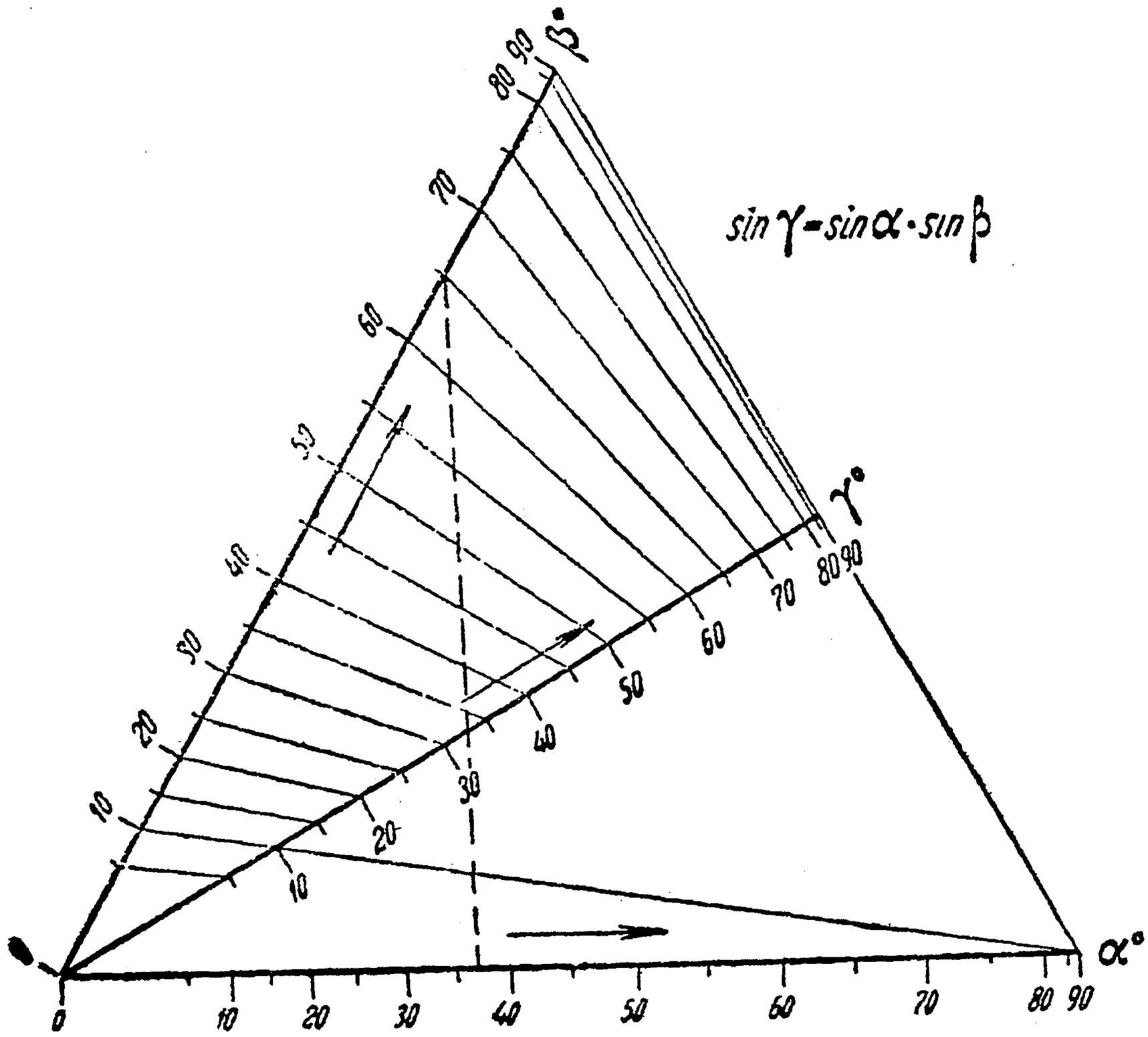
или, окончательно:

$$\frac{1}{1/0{,}30 - \log\sin\gamma} = \frac{1}{1/0{,}15 - \log\sin\alpha} + \frac{1}{1/0{,}15 - \log\sin\beta}.$$

Шкалы α и β совершенно тождественны. Наибольшее значение дроби

$$\frac{1}{0{,}15 - \log \sin \alpha}$$

достигается при $\alpha = 90°$ и равно $\frac{1}{0{,}15} = \frac{20}{3} = 6{,}6\ldots$ Постоянная c_1 взята примерно равной $-\log \sin 45° = 0{,}15051$ именно для того, чтобы при значении $\alpha = 45°$ (среднем между 0° и 90°) дробь принимала значение, равное примерно половине наибольшего; этим мы в меру возможности предохраняем себя от чрезмерного скучивания делений шкалы в той или иной ее части. Шкала γ получается проектированием



Черт. 620 (2/3)

шкалы β из точки $\alpha = 90°$, ибо при $\alpha = 90°$ имеем $\gamma = \beta$. Номограмма дана на черт. 620, причем взято $\theta = \psi = 30°$ и $\lambda = \mu = 2$ см. (Пунктирная линия показывает, что при $\alpha = 37°$ и $\beta = 65°$ имеем $\gamma = 33°$).

334. Номограммы с криволинейной шкалой. До сих пор мы рассматривали лишь шкалы, нанесенные на прямую линию, которая служила *носителем* шкалы или *опорой*. Для построения номограмм более сложных зависимостей приходится прибегать к *криволинейным шкалам*, для которых носителем является уже та или иная кривая линия. Пользование такими номограммами не представляет затруднений; напр., по номограмме для поправки дальномера на черт. 621 читатель легко установит, что значениям $C = 82°$ и $\rho = 675$ отвечает $\varepsilon = -70$ (см. пунктирную линию!). Что же касается построения их, то в нашем кратком очерке мы ограничимся лишь такими номограммами, которые содержат две параллельных прямолинейных шкалы и одну криволинейную. Прежде всего выясним, какие зависимости между тремя переменными (скажем, x, y и z) могут быть развернуты в номограмму именно этого типа.

Возьмем две параллельные оси PA и QB (черт. 622) и на них по произволу выберем начальные точки P и Q; рассмотрим, кроме того, еще некоторую кривую KC.

Пересечем все три линии произвольной прямой, соответственно, в точках A, B, C и положим

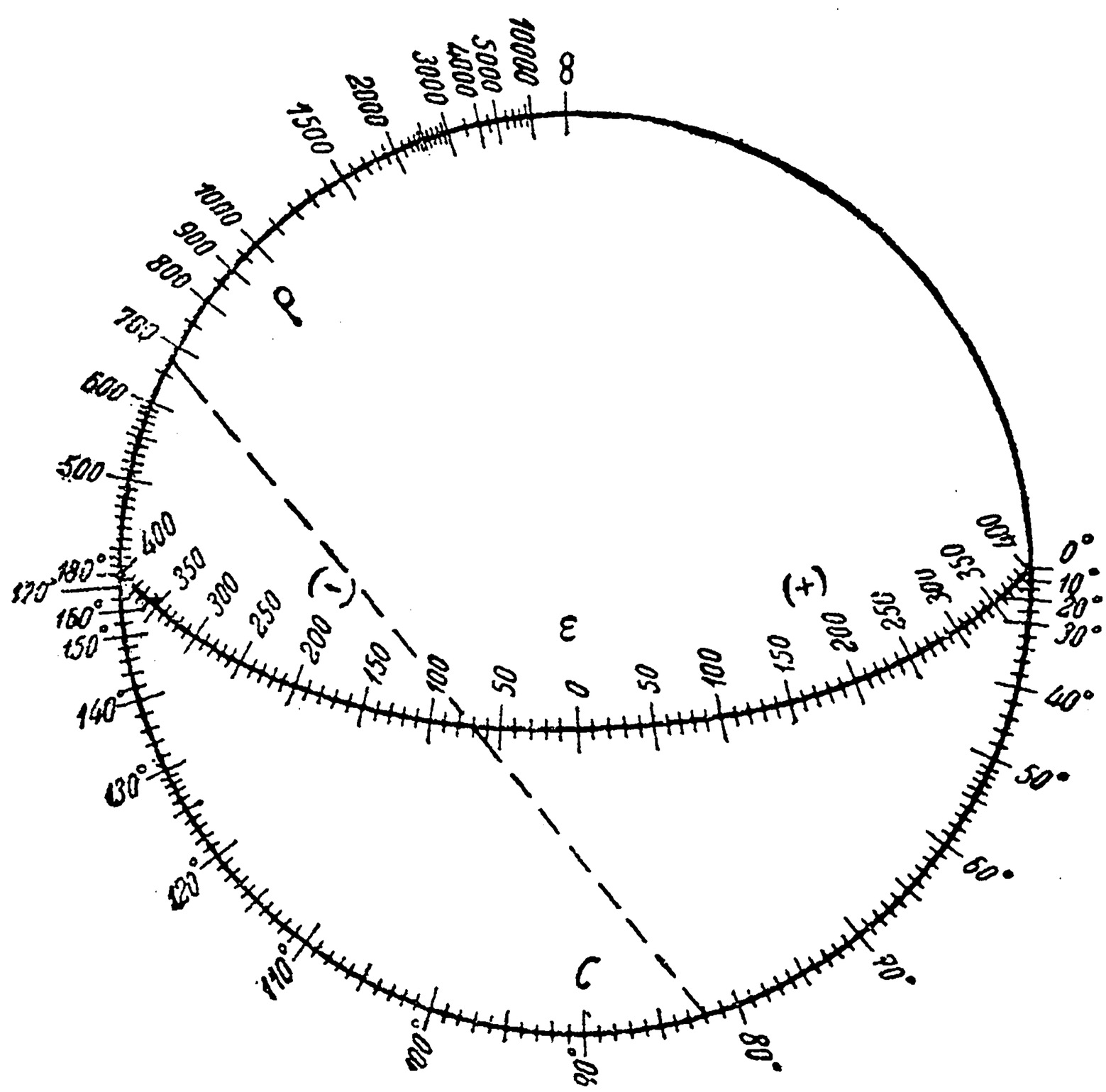
$$PA = u,\ QB = v,\ PR = \xi,\ RC = \eta,\ PQ = l.$$

Если через точку C провести прямую $A'B'$, параллельную PQ, то из подобия $\triangle\triangle$ ACA' и BCB' [как и в n⁰ 329 по черт. 600] получим:

$$\frac{AA'}{B'B} = \frac{A'C}{CB'} = \frac{PR}{RQ}$$

или

$$\frac{\eta - u}{v - \eta} = \frac{\xi}{l - \xi}.$$



Черт. 621.

Отсюда

$$l \cdot \eta = u \cdot (l - \xi) + v \cdot \xi. \tag{51}$$

Нанесем на осях PA и QB нормальные шкалы величин x и y, соответственно в масштабе λ и μ; если x и y будут отсчеты, отвечающие точкам A и B, то $u = \lambda x$, $v = \mu y$. Переходя к кривой KC, заметим, что отрезки ξ и η вполне определяют положение точки C кривой и служат ее координатами.* Представим себе, что эти координаты заданы в виде функций от некоторого *параметра* z, так что мы имеем *параметрическое представление* кривой [110]:

$$\xi = \xi(z), \quad \eta = \eta(z). \tag{52}$$

Нанесем на кривой — шкалу величины z, относя к каждой точке C, в качестве отсчета, соответствующее ей значение параметра. Подставляя в (51), вместо u, v, ξ и η, их выражения, получим соотношение:

$$l \cdot \eta(z) = \lambda [l - \xi(z)] \cdot x + \mu \xi(z) \cdot y. \tag{53}$$

* В случае, если оси PQ и PA не ортогональны, мы имеем дело с так называемой *косоугольной* системой координат. Это не создает никаких затруднений.

Обращаем внимание читателя на то, что координаты здесь непривычным образом обозначены через ξ и η и что x, y отнюдь не обозначают координат.

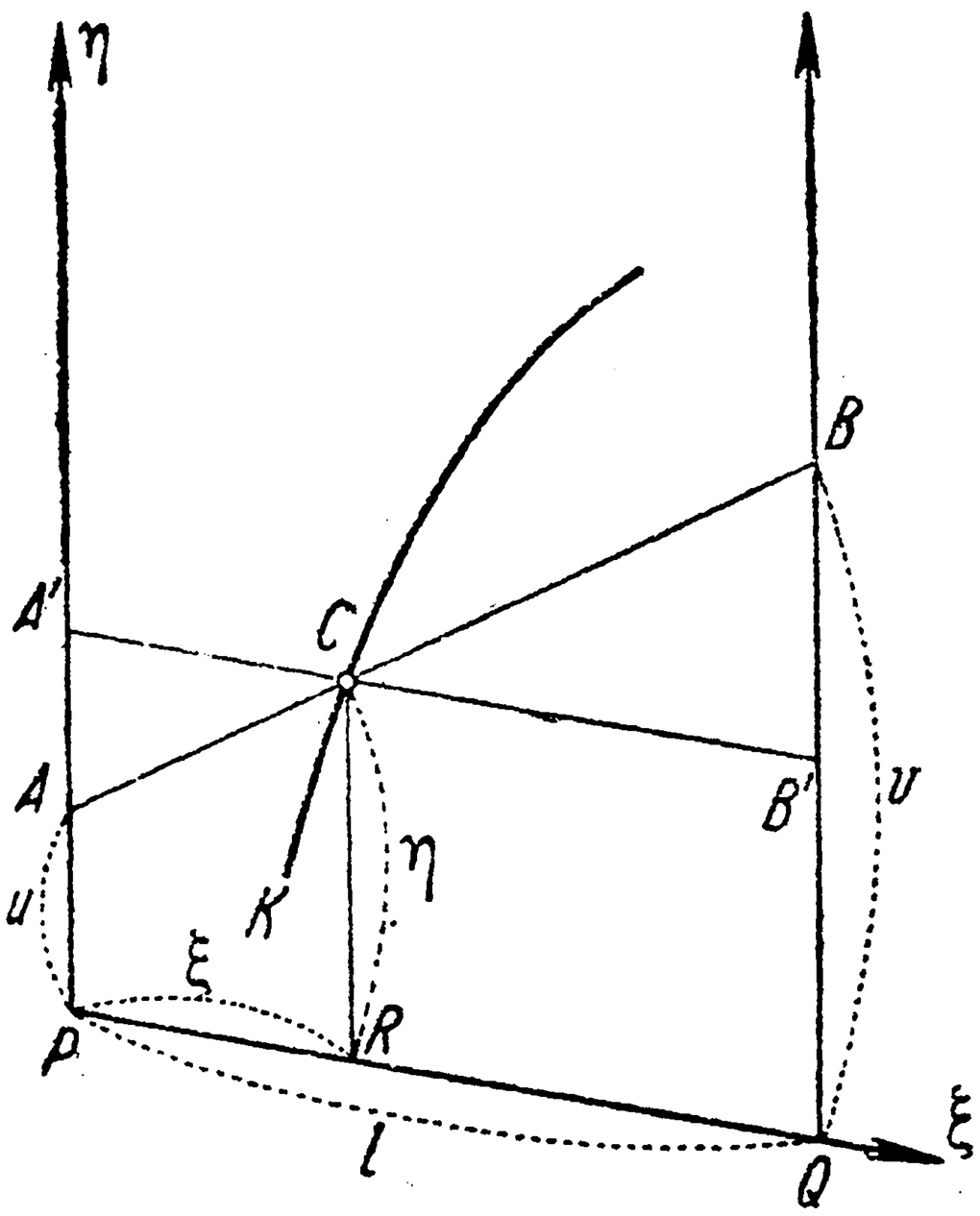
Это соотношение и связывает, как мы видим, отсчеты x, y, z наших трех шкал, соответствующие точкам их пересечения с любой прямой. Мы имеем номограмму из выравненных точек, представляющую именно зависимость (53).

Если обозначить коэффициенты при x и y в этом равенстве через $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, а свободный член через $\psi(z)$, то оно перепишется так:

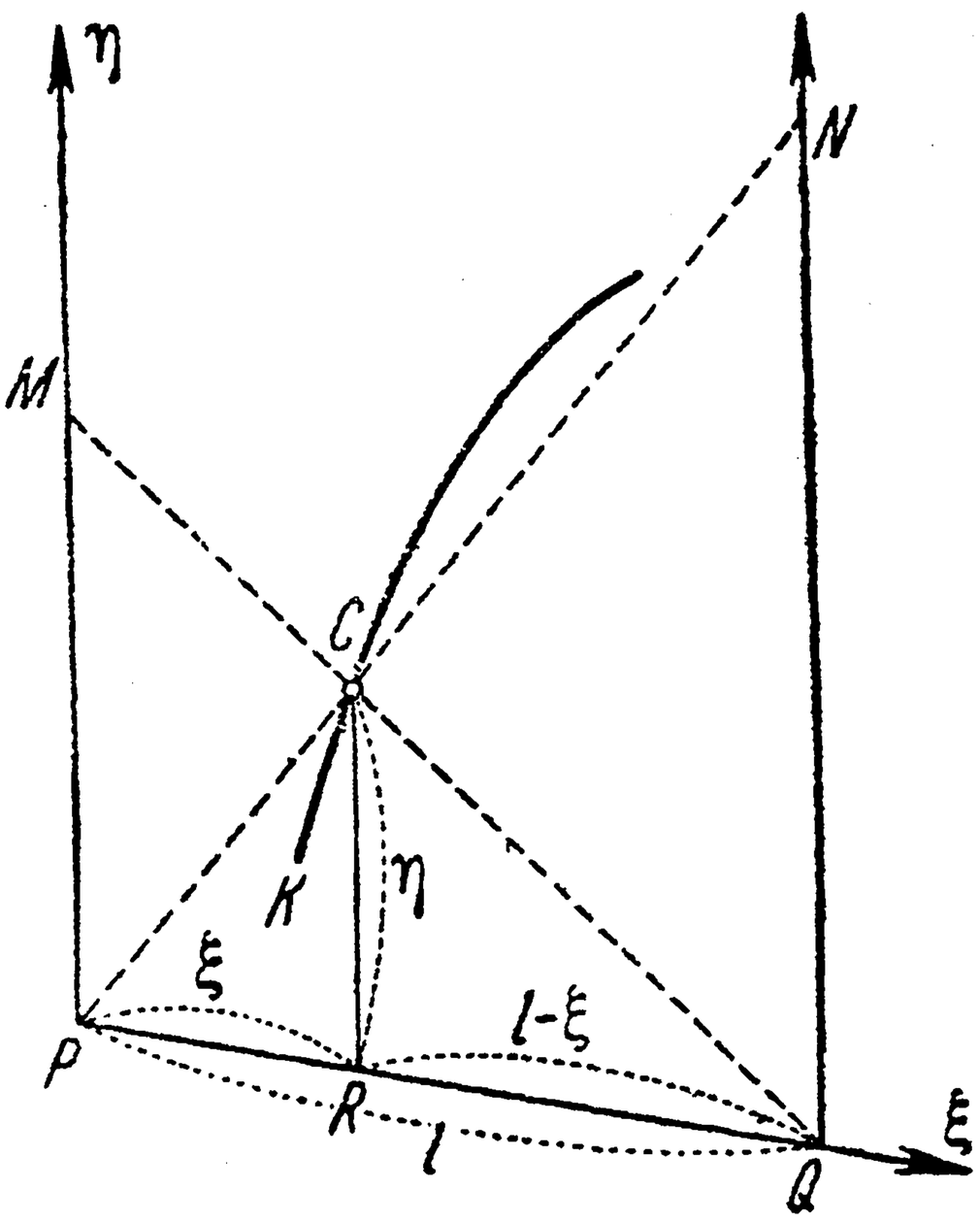
$$\varphi(z)\cdot x+\chi(z)\cdot y=\psi(z). \tag{54}$$

Покажем теперь, что каждое уравнение этого вида, *содержащее x и y линейно*, разворачивается в номограмму рассматриваемого типа, каковы бы ни были функции φ, χ, ψ от z. С этой целью, выбрав l, λ и μ по произволу, постараемся подобрать кривую KC так, чтобы соотношение (53) оказалось равносильно предложенному уравнению (54). Для этого нужно, чтобы выполнялись пропорции:

$$\frac{\lambda\cdot(l-\xi)}{\varphi(z)}=\frac{\mu\cdot\xi}{\chi(z)}=\frac{l\cdot\eta}{\psi(z)}. \tag{55}$$



Черт. 622.



Черт. 623.

Из этих двух уравнений с двумя неизвестными ξ, η легко находим:

$$\xi=\frac{l\lambda\cdot\chi(z)}{\lambda\cdot\chi(z)+\mu\cdot\varphi(z)},\qquad \eta=\frac{\lambda\mu\cdot\psi(z)}{\lambda\cdot\chi(z)+\mu\cdot\varphi(z)}. \tag{56}$$

Таким образом, координаты ξ, η выражены в функции от z, т. е. восстановлены параметрические уравнения (52) искомой кривой! Все элементы номограммы для зависимости (54) налицо.

Самое построение кривой KC производится по точкам. Придавая z последовательно ряд близких между собою „круглых" значений: z_1, z_2, z_3,..., определяют по уравнениям (56) положение соответствующих точек, у которых и помещают эти же значения, как отсчеты. Через построенные точки проводится плавная кривая.

Обыкновенно построение облегчают тем, что заранее наносят на оси PQ *в масштабе l* шкалу функции

$$\frac{\lambda\cdot\chi(z)}{\lambda\cdot\chi(z)+\mu\cdot\varphi(z)}, \tag{57}$$

с отсчетами z. На вертикалях, проходящих через ее точки деления, и будут лежать точки криволинейной шкалы с теми же отсчетами [см. первое из уравнений (56)]. Непосредственное откладывание по этим вертикалям значений η [согласно второму

из уравнений (56)] также может быть заменено построением соответствующей шкалы на одной из вертикальных осей. Конечно, особо благоприятным является тот случай, когда та или другая из этих шкал строится графически, без вычислений.

На практике, однако, чаще определяют положение точек C кривой пересечением упомянутых вертикалей с лучами, исходящими из точки P или Q. Если (черт. 623) провести луч PC до пересечения его в точке N со второй вертикальной осью, то из подобия $\triangle\triangle$ PRC и PQN вытекает пропорция:

$$\frac{QN}{PQ}=\frac{RC}{PR} \text{ или } \frac{QN}{l}=\frac{\eta}{\xi},$$

откуда

$$QN=l\cdot\frac{\eta}{\xi}.$$

Пользуясь выражениями (56) для ξ и η [или — проще — одной из пропорций (55), из которых они получаются], находим:

$$QN=\mu\cdot\frac{\psi(z)}{\chi(z)}. \tag{58}$$

Таким образом, если нанести на оси QN (*в масштабе* μ) вспомогательную шкалу функции

$$\frac{\psi(z)}{\chi(z)}, \tag{59}$$

с отсчетами z, и соединить точку P лучами с ее точками деления, то в пересечении этих лучей с соответствующими вертикалями (о которых была речь выше) и будут получаться точки нашей криволинейной шкалы. Аналогичную роль могут сыграть и лучи QM, исходящие из точки Q; в этом случае на оси PM строят (*в масштабе* λ) вспомогательную шкалу функции

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}, \tag{60}$$

с отсчетами z. И здесь наиболее благоприятно такое положение, когда функциональную шкалу можно построить без вычислений.

В каждом данном случае прибегают к тому из указанных приемов, который для этого случая оказывается проще.

Отметим, что наши рассуждения не требуют того, чтобы кривая KC располагалась во что бы то ни стало между прямолинейными осями. Если же дополнительно поставить такое условие, то это наложит определенные требования на знаки функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$. Именно, в этом случае и ξ, и $l-\xi$ должны быть положительны; как видно из (55), для этого φ и χ должны быть одного знака, скажем, обе положительны [если они обе отрицательны, то легко вернуться к этому случаю, изменив знаки в обеих частях уравнения (54)].

Если же, напр., $\varphi<0$, а $\chi>0$, то либо $\xi<0$, либо $l-\xi<0$, т. е. $\xi>l$, так что во всяком случае кривая лежит вне полосы между вертикальными осями. Этого, впрочем, легко избежать, если знак ($-$) функции φ отнести к x; замена x на $(-x)$ равносильна, очевидно, изменению направления отсчета величины x (при сохранении направления отсчета η).

Читатель помнит, что на вертикальных осях мы все время имели дело с нормальными шкалами для x и y. Если заменить их произвольными функциональными шкалами, построенными, соответственно, по функциям $f(x)$ и $g(y)$, то придется и в соотношении (54) заменить x на $f(x)$ и y на $g(y)$. Таким образом, мы получим номограмму такой зависимости:

$$\varphi(z)\cdot f(x)+\chi(z)\cdot g(y)=\psi(z). \tag{61}$$

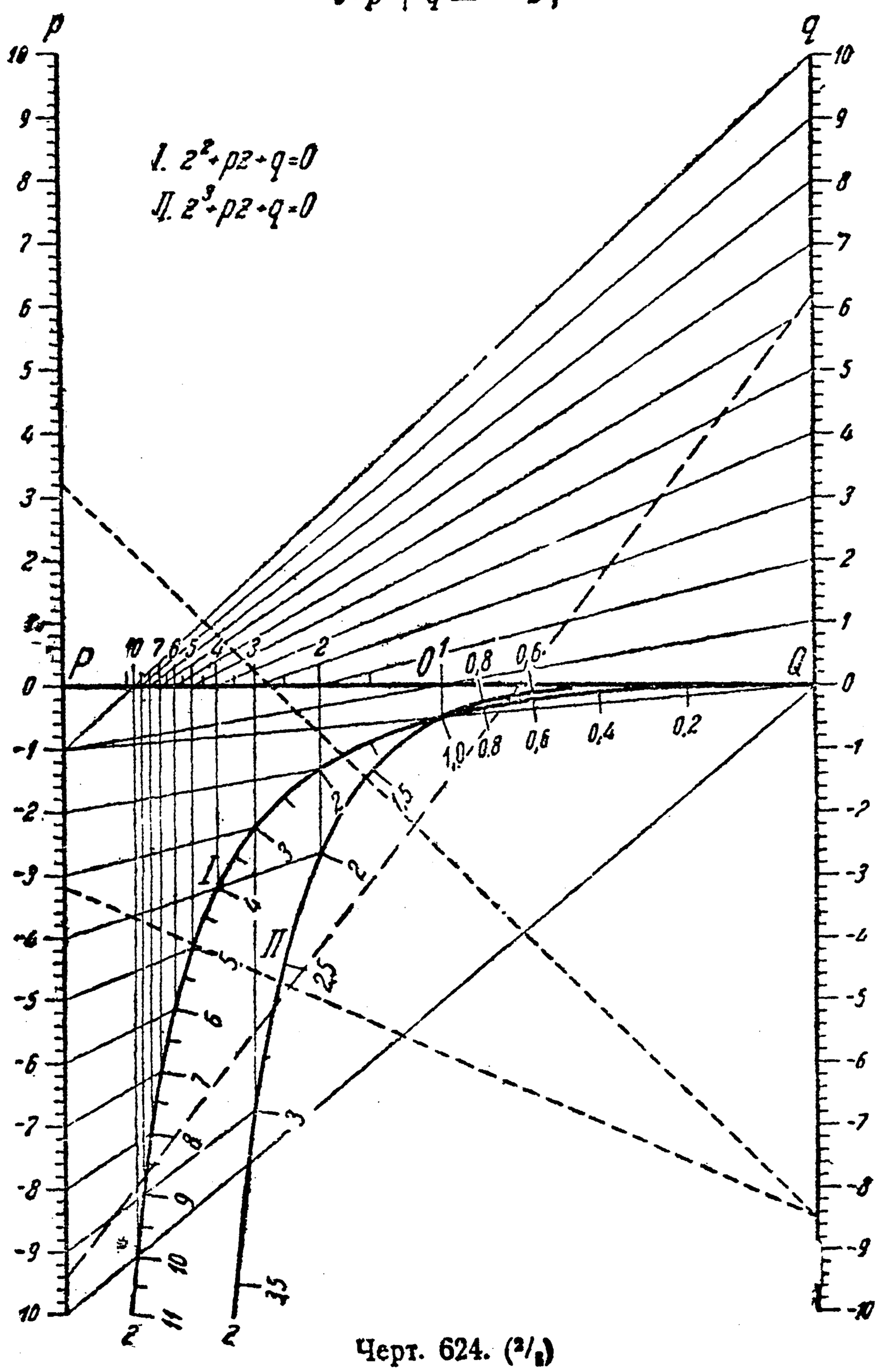
Это и есть самый общий вид зависимости, которая может быть представлена номограммой изучаемого типа.

335. Примеры. 1. Построим номограмму для решения квадратного уравнения:

$$z^2+pz+q=0. \tag{62}$$

Коэффициенты p и q мы рассматриваем как переменные, которые изменяются, скажем, в промежутке от — 10 до 10; они играют роль переменных x и y нашего общего рассуждения. Искомый корень z зависит от их значений. Если представить наше уравнение в виде:

$$z \cdot p + q = -z^3,$$



Черт. 624. (2/3)

то ясно, что в этом случае

$$\varphi(z) = z, \qquad \chi(z) = 1, \qquad \psi(z) = -z^3,$$

Мы ограничимся положительными значениями z, т. е. будем искать лишь положительные корни уравнения (62) [ниже будет разъяснено, как находить и отрицательные корни]; таким образом, у нас обе функции φ и χ положительны.

Возьмем $\lambda = \mu = 1$ см и $l = 12$ см, и построим на вертикальных осях нормальные шкалы (p) и (q) (черт. 624)

Перейдем к криволинейной шкале. По формулам (56):

$$\xi = \frac{12}{z+1}, \qquad \eta = -\frac{z^2}{z+1}. \tag{63}$$

Прежде всего, нанесем на горизонтальной оси в масштабе $l = 12$ см проективную шкалу, определяемую дробно линейной функцией

$$\frac{1}{z+1},$$

с отсчетами z. Приняв шкалу (q) за нормальную шкалу (z), видим, что точке Q пересечения обеих шкал отвечает на обеих значение $z = 0$; поэтому искомая шкала может быть получена из упомянутой нормальной простым проектированием. Так как значению $z = \infty$ отвечает точка P горизонтальной шкалы, а значению $z = 1$ — ее середина O, то, соединяя эти точки с соответствующими точками нормальной шкалы, легко установим, что за центр проекций надлежит взять точку с отсчетом $p = -1$ на оси p. Через точки деления полученной шкалы проведем вертикали.

Далее, так как в нашем случае

$$\frac{\psi(z)}{\chi(z)} = -z^2, \qquad \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = -z$$

и второе отношение проще, то нужно на левой оси нанести (в масштабе $\lambda = 1$ см) шкалу функции $-z$ и точку Q лучами соединить с ее точками деления. На деле, конечно используется нижняя часть шкалы (p), отсчеты которой берутся без знака (—). Все построение видно на чертеже.

Обратимся к применению построенной номограммы. Пусть дано уравнение

$$z^2 - 9{,}4\,z + 6{,}2 = 0,$$

так что $p = -9{,}4$, $q = 6{,}2$; прямая, соединяющая точки с этими отсчетами (показанная на чертеже пунктиром) пересекает кривую в двух точках и дает два положительных корня: $z_1 \doteq 0{,}72$, $z_2 \doteq 8{,}7$. Нахождение отрицательных корней производится на основании следующего простого замечания: если $z = -\zeta$ есть отрицательный корень уравнения (62), то

$$(-\zeta)^2 + p\cdot(-\zeta) + q = 0$$

или

$$\zeta^2 - p\zeta + q = 0, \tag{62 a}$$

т. е. $\zeta = -z$ является корнем (очевидно, положительным) преобразованного уравнения (62 a). Итак, положительные корни уравнения (62 a) с измененными знаками дадут нам отрицательные корни исходного уравнения. Напр., для уравнения

$$z^2 - 3{,}2\,z - 8{,}5 = 0$$

сразу находим по номограмме положительный корень $z_1 \doteq 4{,}9$; так как, аналогично, для преобразованного уравнения

$$\zeta^2 + 3{,}2\,\zeta - 8{,}5 = 0$$

получаем: $\zeta \doteq 1{,}7$, то исходное уравнение имеет еще отрицательный корень $z_2 \doteq -1{,}7$. Наконец, заметим, что нашей номограммой можно пользоваться и в тех случаях, когда коэфициенты p и q выходят за пределы установленного для них промежутка (— 10, 10). Напр., уравнение

$$z^2 - 32\,z - 850 = 0$$

можно переписать в виде:

$$\left(\frac{z}{10}\right)^2 - 3{,}2\left(\frac{z}{10}\right) - 8{,}5 = 0;$$

приняв $z/10$ за неизвестную, находим для нее значения 4,9 и — 1,7, так что $z_1 \doteq 49$, $z_2 \doteq -17$.

2. На том же черт. 624 дана номограмма для решения кубического уравнения (в приведенной форме):

$$z^3 + pz + q = 0.$$

Шкалы (p) и (q) тождественны с прежними. Кривая же имеет уравнения:

$$\xi = \frac{12}{z+1}, \quad \eta = -\frac{z^3}{z+1}. \tag{64}$$

Шкала на горизонтальной оси = та же, что и раньше: точки на обеих кривых с одинаковыми отсчетами лежат на одной вертикали. Но здесь

$$\frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \frac{-z^3}{z} = -z^2,$$

и на левой вертикальной оси приходится строить шкалу функции ($-z^2$), вместо ($-z$). Отрицательные корни $z = -\zeta$ определяются по положительным корням ζ преобразованного уравнения:

$$-\zeta^3 - p\zeta + q = 0 \quad \text{или} \quad \zeta^3 + p\zeta - q = 0.$$

Аналогично могут быть построены номограммы для любого трехчленного уравнения:

$$z^m + pz^n + q = 0.$$

Исключая z из параметрических уравнений (63) или (64), найдем явные уравнения наших кривых, соответственно:

$$\eta = -\frac{(12-\xi)^2}{12\xi} \quad \text{или} \quad \eta = -\frac{(12-\xi)^3}{12\xi^2};$$

из них непосредственно видим, что при $\xi = 0$ в обоих случаях $\eta = -\infty$, т. е. левая вертикальная ось служит асимптотой для обеих кривых.

3. При расчете сечения прямоугольной железобетонной балки в случае внецентренного сжатия или растяжения, величина μ_s необходимой площади арматуры в процентах от полезной площади сечения определяется из соотношения

$$\mu = \pm 100\, k_2\left(\frac{h}{e}\right) + \mu_s, \tag{65}$$

с ($+$) для сжимающей силы и ($-$) для растягивающей силы. При этом h есть полезная высота сечения, e — плечо силы от центра тяжести растянутой арматуры, μ — величина, аналогичная μ_s, но для центрально действующей силы, наконец k_2 — некоторый коэффициент. Две последние величины являются функциями от отношения

$$\gamma = \frac{\sigma_e}{\sigma_b}$$

напряжения в растянутом железе к напряжению в крайнем сжатом волокне бетона, именно:

$$\mu = \frac{750}{\gamma(15+\gamma)}, \quad k_2 = \frac{15(10+\gamma)}{2\gamma(15+\gamma)^2}. \tag{66}$$

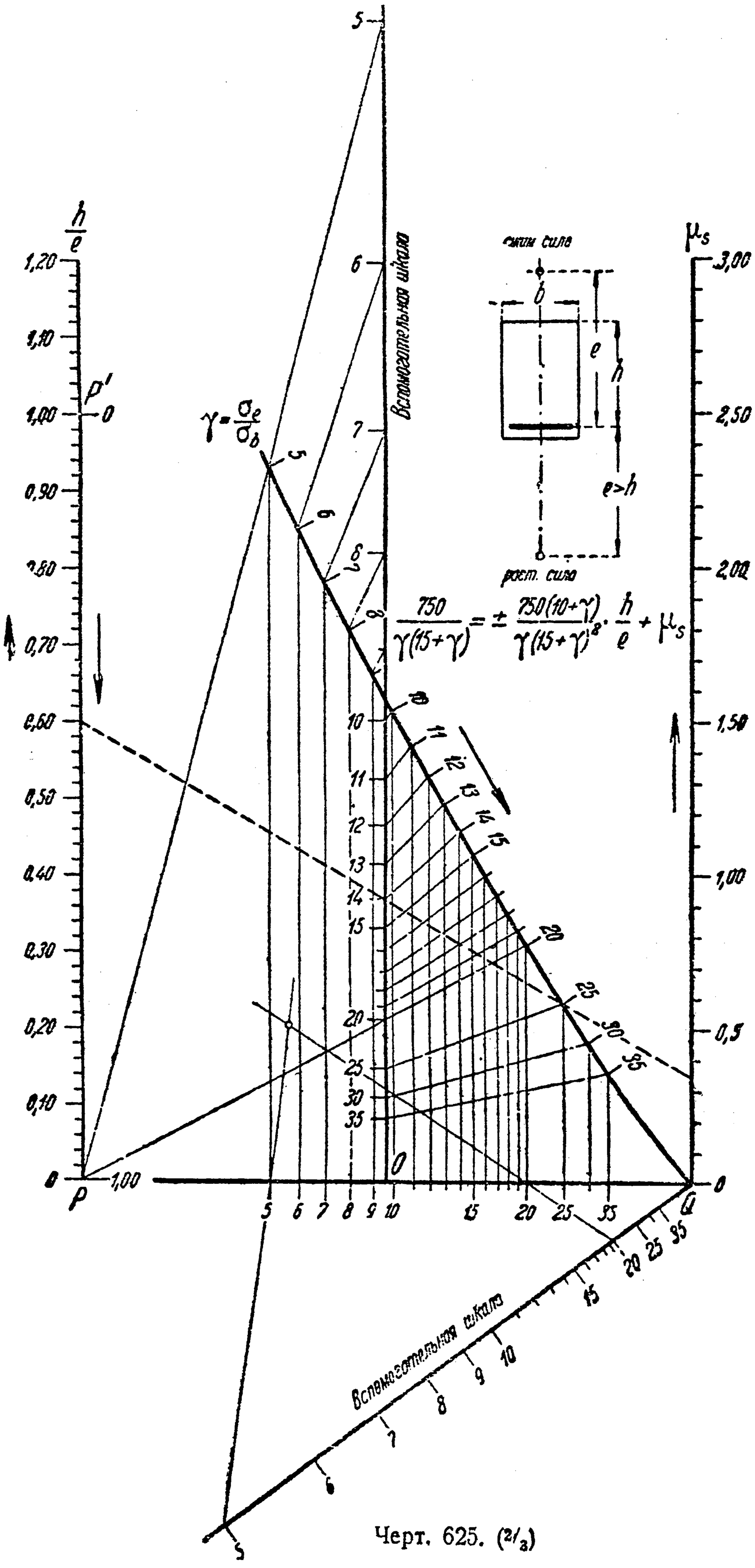
Подставляя эти выражения, получим такую зависимость между тремя величинами $\frac{h}{e}$, μ_s и γ:

$$\pm\frac{750(10+\gamma)}{\gamma(15+\gamma)^2}\cdot\frac{h}{e} + \mu_s = \frac{750}{\gamma(15+\gamma)}.$$

Построим для нее номограмму, ограничиваясь поначалу случаем сжатия.

Здесь $\frac{h}{e}$ играет роль x, μ_s — роль y, а γ — роль z общего рассуждения; при этом

$$\varphi = \frac{750(10+\gamma)}{\gamma(15+\gamma)^2}, \quad \chi = 1, \quad \psi = \frac{750}{\gamma(15+\gamma)}.$$


$\frac{h}{e}$
μ_s
$\gamma = \frac{\sigma_e}{\sigma_b}$
$\frac{750}{\gamma(15+\gamma)} = \pm \frac{750(10+\gamma)}{\gamma(15+\gamma)^2} \cdot \frac{h}{e} + \mu_s$
Вспомогательная шкала
сжим. сила
растяж. сила
e>h
P
Q

Черт. 625. (2/3)

Пусть отношение $\frac{h}{e}$ изменяется от 0 до 1,2, μ_s — от 0 до 3 (%), наконец, γ — от 5 до 35. Для первой величины возьмем масштаб $\lambda = 15$ см, так что длина всей шкалы $\left(\frac{h}{e}\right)$ будет 18 см; для второй выберем масштаб $\mu = 6$ см*, чтобы довести шкалу (μ_s) до той же длины. Расстояние между шкалами возьмем равным $l = 12$ см (см. черт. 625).

Кривая будет иметь, в силу (56), уравнения:

$$\xi = 12 \cdot \frac{15}{15 + 600 \cdot \frac{15(10+\gamma)}{2\gamma(15+\gamma)^2}}, \qquad \eta = \frac{90 \cdot \frac{750}{\gamma(15+\gamma)}}{15 + 600 \cdot \frac{15(10+\gamma)}{2\gamma(15+\gamma)^2}}.$$

Координаты ее точек могут быть вычислены по этим формулам. Мы, однако, постараемся избежать вычислений, использовав уже имеющиеся в нашем распоряжении шкалы функций (66) [см. задачу 3, **324**, черт. 577].

Шкалу функции

$$\frac{15}{15 + 600 \cdot \frac{15(10+\gamma)}{2\gamma(15+\gamma)^2}} = \frac{15}{15 + 6 \cdot 100 k_2}$$

на горизонтальной оси, с отметками γ, строим как проективную шкалу для функции k_2, пользуясь шкалой этой последней (уменьшенной, для удобства, по сравнению с черт. 577). Это и выполнено на чертеже: обе шкалы пересекаются в точке Q с отсчетом $\gamma = \infty$, центр проекций определен по двум парам точек с отсчетом $\gamma = 5$ и $\gamma = 20$ на обеих шкалах.

Из выражений $\frac{\psi}{\chi}$, $\frac{\psi}{\varphi}$ здесь проще первое:

$$\frac{\psi}{\chi} = \psi = \frac{750}{\gamma(15+\gamma)}.$$

На правой оси нам нужна была бы шкала этой функции в масштабе $\mu = 6$ см, у нас же имеется такая шкала в вдвое меньшем масштабе (3 см)**. Мы поместим ее на половинном расстоянии $\frac{1}{2} l = 6$ см, и точку P соединим лучами с ее точками деления; результат, очевидно, будет тот же. Итак, построение криволинейной шкалы выяснено.

Пунктирная линия дает $\mu_s = 0{,}35$ (%) при $\gamma = 25$ и $\frac{h}{e} = 0{,}60$.

Для случая растягивающей силы в уравнении (65) нужно взять знак (—). Все построение остается в силе, лишь шкалу $\left(\frac{h}{e}\right)$ нужно откладывать от точки P вниз. Для того чтобы избежать чрезмерного растягивания номограммы, можно поступить и иначе: перенести начальную точку P вверх на 15 см, в положение P', так чтобы на новой шкале $\left(\frac{h}{e}\right)$ отсчет 0 приходился у точки P', а отсчет 1 — у точки P (они отмечены справа от оси). Криволинейная шкала γ должна быть заменена в этом случае новой. Нетрудно сообразить, что построенная сетка вертикалей сохраняет свое значение. Ординаты η равны прежним, но должны откладываться от новой оси $P'Q$; такой перенос ординат легко выполняется графически. Предоставляем его читателю.

---

* Не следует путать этого обозначения μ масштаба, привычного нам и фигурирующего в формулах n° 333, и других величин, обозначаемых той же буквой в рассматриваемом примере.

** Обращаем внимание на то, что оригинальные чертежи 577 и 625 уменьшены, при их воспроизведении: первый—в отношении $\frac{1}{2}$, авторой—в отношении $\frac{2}{3}$!

4. Рассмотрим теперь такой вопрос: В электрической машине при пуске тока происходит постепенное повышение температуры, скажем, на θ°, которое возрастает до некоторого предельного значения Θ, называемого *стационарным превышением температуры*, по закону:

$$\theta = \Theta(1 - e^{-bt}).$$

Здесь t означает время, протекшее от момента пуска, а b есть некоторая постоянная, зависящая от электрических и тепловых свойств машины. Попытаемся по двум наблюденным в моменты t_1 и t_2 превышениям температуры θ_1 и θ_2 установить величину стационарного превышения температуры Θ.

С этой целью перепишем наше соотношение в виде:

$$\frac{\Theta}{\Theta - \theta} = e^{bt} \qquad \text{или} \qquad bt = \log \Theta - \log(\Theta - \theta).$$

Подставим сюда $t = t_1$ и $t = t_2$ (причем, соответственно, $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$). Разделив одно на другое полученные равенства, придем к соотношению:

$$\frac{\log \Theta - \log(\Theta - \theta_2)}{\log \Theta - \log(\Theta - \theta_1)} = \frac{t_2}{t_1}.$$

Будем считать (для упрощения дальнейших выкладок), что второе измерение произведено через двойной промежуток времени, т. е. что $t_2 = 2t_1$. Тогда из предыдущего соотношения, в котором правую часть заменяем через 2, получим:

$$\log(\Theta - \theta_2) + \log \Theta = 2\log(\Theta - \theta_1),$$

так что (потенцируя)

$$\Theta(\Theta - \theta_2) = (\Theta - \theta_1)^2.$$

Отсюда, наконец

$$\Theta = \frac{\theta_1^2}{2\theta_1 - \theta_2}.$$

По этой формуле Θ сразу определяется, лишь только измерены θ_1 и θ_2. Построим для нее номограмму.

Перепишем формулу в виде:

$$\frac{\theta_1^2}{\Theta} + \theta_2 = 2\theta_1,$$

так что здесь роли x, y, z общего рассуждения играют, соответственно, величины Θ θ_2 и θ_1, и формула имеет форму (61), при

$$\varphi = \theta_1^2, \quad \chi = 1, \quad \psi = 2\theta_1, \quad f = \frac{1}{\Theta}, \quad g = \theta_2.$$

На одной вертикальной оси нам нужно построить шкалу обратной величины $\frac{1}{\Theta}$, а на другой — нормальную шкалу для θ_2. Криволинейная опора согласно (56) будет иметь уравнения:

$$\xi = \frac{l\lambda}{\lambda + \mu\theta_1^2}, \qquad \eta = \frac{2\lambda\mu\theta_1}{\lambda + \mu\theta_1^2}.$$

Отсюда легко исключить θ_1 и получить неявное уравнение нашей кривой в виде:

$$\xi^2 + \frac{l^2}{4\lambda\mu}\eta^2 = l\xi.$$

Вообще говоря, это будет эллипс; при соблюдении условия

$$l^2 = 4\lambda\mu \tag{67}$$

он превращается в окружность

$$\left(\xi - \frac{l}{2}\right)^2 + \eta^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Мы имеем здесь дело с любопытным случаем, когда криволинейная опора строится столь же просто, как и прямолинейная!

Пусть θ_1 и θ_2 изменяются от 0° до 30°, а Θ — от 5° до 50°; положим $\lambda = 50$ см, $\mu = 0{,}5$ см, так что шкалы (Θ) и (θ_2) будут длиной, соответственно, в 10 см и в 15 см. Если взять $l = 10$ см, то условие (67) выполнится, и криволинейная опора представится в виде полуокружности ($\eta > 0$!), описанной радиусом 5 см вокруг середины O отрезка PQ (черт. 626).

Для того чтобы градуировать криволинейную шкалу, мы воспользуемся тем, что

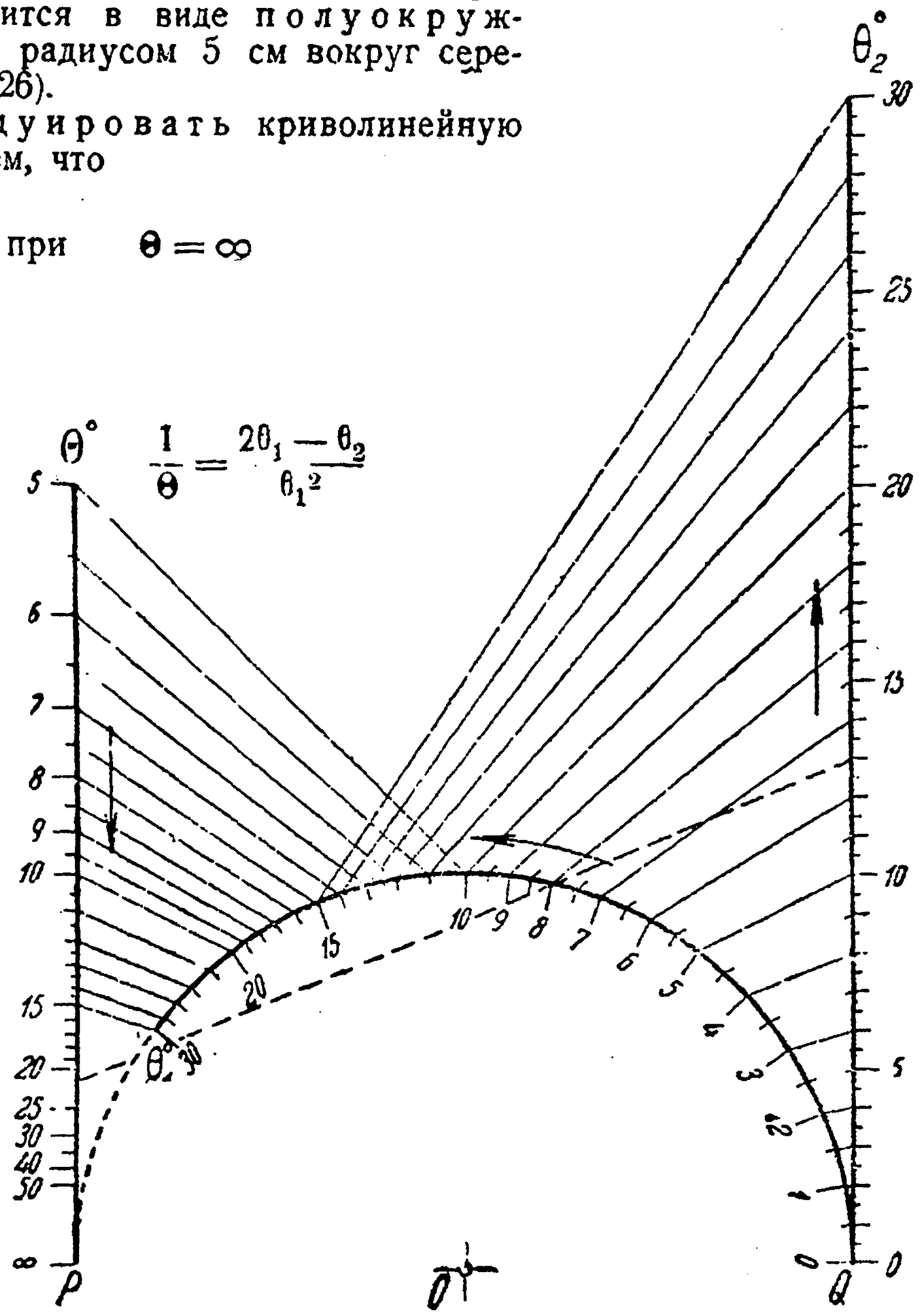
$$\theta_1 = \frac{1}{2}\theta_2 \quad \text{при} \quad \Theta = \infty$$

или

$$\theta_1 = 2\Theta \quad \text{при} \quad \theta_2 = 0.$$

Таким образом—можно либо из точки P спроектировать на полуокружность шкалу (θ_2)—уменьшая при этом отсчеты вдвое, либо же из точки Q спроектировать на ту же полуокружность шкалу (Θ) — удваивая отсчеты. Мы частично пользуемся обоими способами.

В виде примера пунктирная линия показывает, что если по истечении часа превышение температуры было $\theta_1 = 8°$, а по истечении двух часов $\theta_2 = 13°$, то окончательное (стационарное) превышение будет $\Theta = 22°$.



Черт. 626. (2/3)

336. Зависимость между четырьмя переменными. Номограммы из помеченных линий. Заканчивая очерк элементов номографии, мы остановимся еще на способах графического представления зависимости, связывающей четыре переменных x, y, z, t вида:

$$F(x, y, z, t) = 0. \tag{68}$$

Во многих случаях удается, вводя новую вспомогательную переменную u, заменить подобное соотношение вполне равносильной ему системой двух уравнений вида:

$$G(x, u, z) = 0, \qquad H(y, u, t) = 0, \tag{69}$$

каждое из которых содержит уже лишь три переменные. Связь между уравнением (68) и системой (69) должна быть такова, чтобы исключение из двух уравнений (69) переменной u вернуло нас к уравнению (68). Особенно легко получить систему (69), если оказывается

возможным так преобразовать предложенное уравнение, чтобы оно получило вид:

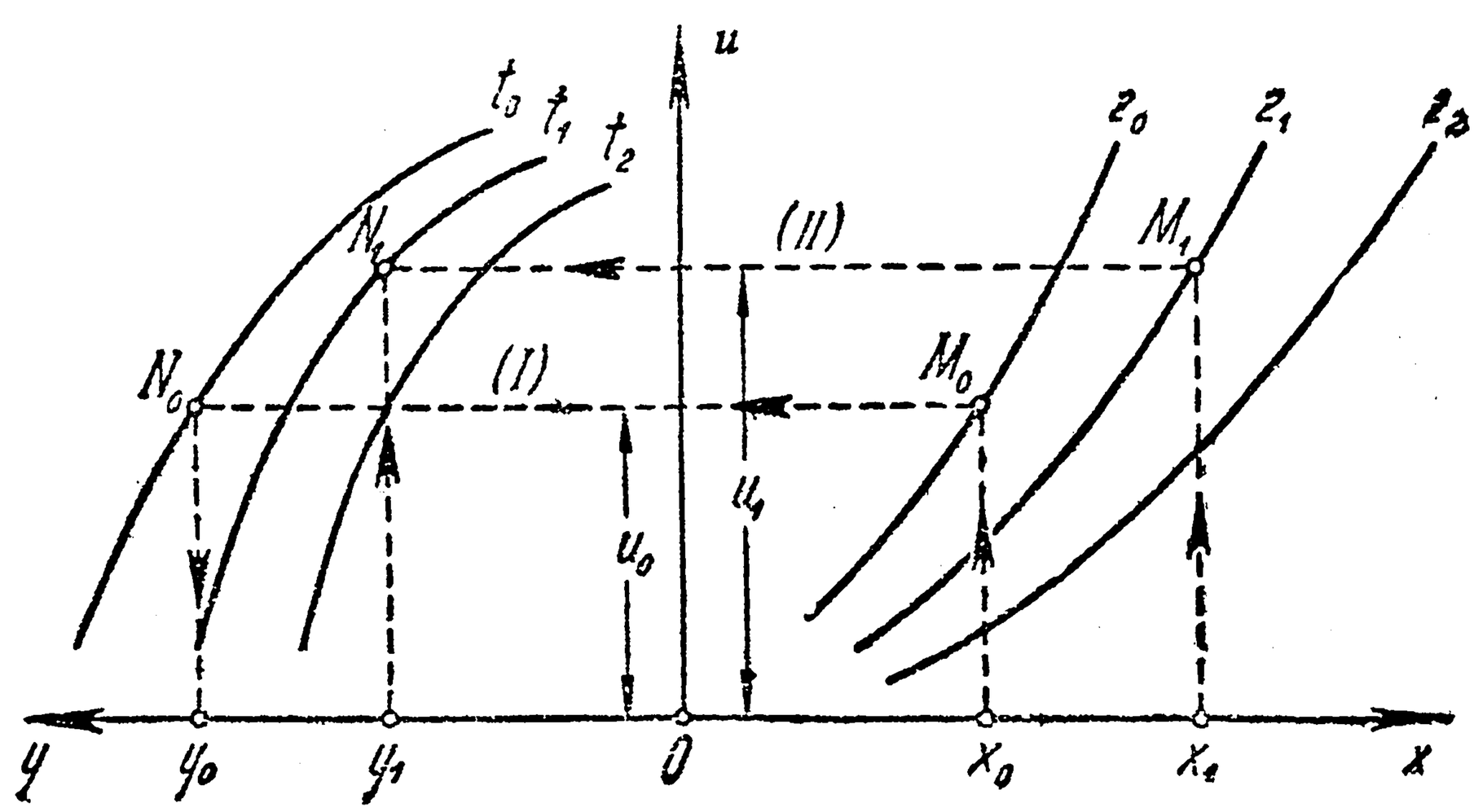
$$g(x, z) = h(y, t), \tag{68a}$$

т. е. чтобы каждая из частей уравнения содержала лишь по две переменных. Действительно, в этом случае достаточно обозначить через u общее значение обеих частей:

$$\underbrace{u = g(x, z), \qquad u = h(y, t),}_{} \tag{69a}$$

чтобы сразу получить систему требуемого вида.

В дальнейшем мы ограничимся предположением, что уравнение, связывающее наши переменные, заменено системой вида (69). Построим



Черт. 627.

теперь для каждого из двух составляющих ее уравнений абак [325, 327], но с соблюдением одного важного условия. Взяв уравнение

$$G(x, u, z) = 0,$$

станем рассматривать любую из переменных x или z (скажем x), как абсциссу точки, *но непременно переменную „u" — как ординату*, и построим на плоскости xOu семейство кривых с пометками „z" (черт. 627). Затем, исходя из уравнения

$$H(y, u, t) = 0,$$

примем y (или t) за абсциссу точки и *снова „u" — за ее ординату*, и построим на плоскости yOu семейство кривых с пометками „t". Совместив оси Ou обеих систем, можно придать им такое расположение, какое указано на черт. 627. Разумеется, *масштаб для величины u в обоих случаях должен быть один и тот же*; масштабы же величин x и y вполне произвольны.

Полученный чертеж позволяет графически установить значение любой из переменных, связанных зависимостью (68), если даны зна-

чения трех других. Так, на пунктирной линии (I) стрелки показывают схему нахождения по системе значений $x=x_0$, $z=z_0$, $t=t_0$ — соответствующего им значения $y=y_0$. Аналогично, на пунктирной линии (II) указано, как по значениям $x=x_1$, $z=z_1$, $y=y_1$ найти соответствующее значение $t=t_1$. Конечно, в случае надобности прибегают к интерполированию.

Ордината u_0 (или u_1) точек M_0, N_0 (M_1, N_1) дает попутно соответствующее значение вспомогательной величины u, *но нам его вовсе не нужно знать*, чтобы найти значение интересующей нас величины y (или t)! Важно одно — чтобы точки M_0, N_0 (или M_1, N_1) лежали на одной горизонтали. Поэтому ни в какой градуировке оси Ou мы не нуждаемся, она может оставаться *немой*; можно ее и вовсе опустить.

Отметим еще, что при построении абаков зависимостей (69) вполне дозволительно использовать и анаморфозу [327] — любые по осям Ox и Oy, но *одну и ту же для обоих абаков* — по оси Ou. Обратимся к примерам.

Примеры и задачи. 1. Для больших уклонов ($J \geqslant 0{,}0005$) скорость течения в каналах или трубах может быть выражена формулой Шези:

$$V=C\sqrt{RJ},$$

с коэффициентом C в форме Куттера:

$$C=\frac{100}{1+\frac{m}{\sqrt{R}}}.$$

Здесь V выражается в м/сек., гидравлический радиус R — в м; m есть коэффициент шероховатости. Поставим себе задачей построить номограмму для вычисления скорости по формуле

$$V=\frac{100\sqrt{RJ}}{1+\frac{m}{\sqrt{R}}}=\frac{100\sqrt{J}}{\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{m}{R}}$$

при промежутках изменения: от 0 до 5 (м) для R, от 0 до 2,5 для m, от 0,0005 до 0,01 для J и, наконец, от 0 до 10 (м/сек.) для V.

Легко представить эту формулу в виде (68*a*):

$$\frac{100\sqrt{J}}{V}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{m}{R} \tag{70}$$

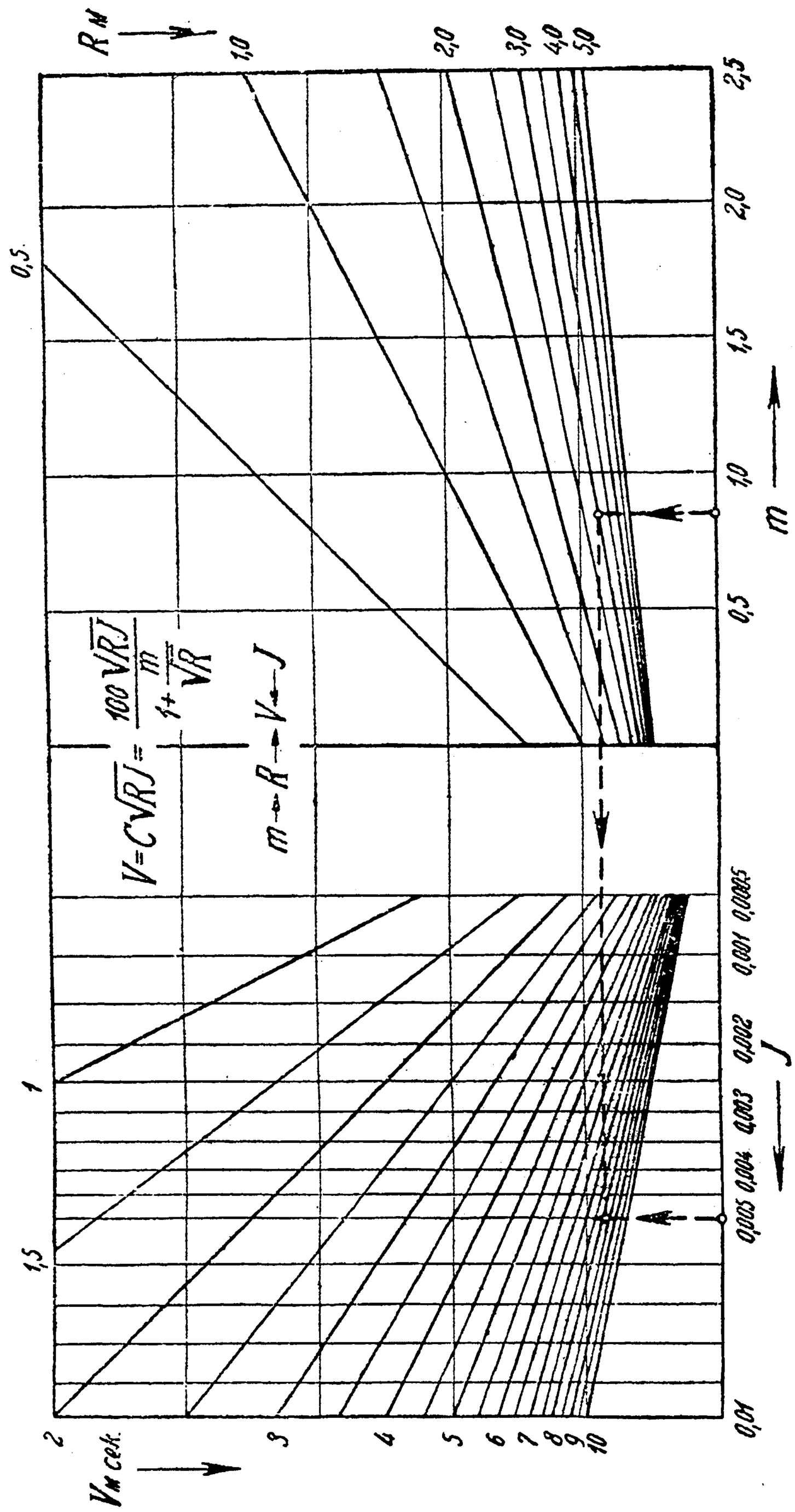
и заменить равносильной системой вида (69*a*):

$$u=\frac{100\sqrt{J}}{V}, \qquad u=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{m}{R}. \tag{71}$$

Во втором уравнении справа мы имеем линейную функцию от m, следовательно, взяв (u, m) за координаты точки, получим семейство прямых с пометками R. Для того чтобы и для первого уравнения иметь дело с прямыми, придется прибегнуть к анаморфозе: по горизонтальной оси нанесем функциональную шкалу для J, определяемую функцией $100\sqrt{J}$, и будем рассматривать эту величину $100\sqrt{J}$, как абсциссу, а u — как ординату точки. В результате получится семейство исходящих из начала лучей с пометками V. Номограмма

изображена на черт. 628, причем при построении взяты масштабы: 1 см для функциональной шкалы (J), 4 см для оси m и 2 см для „немой“ оси u.

Пунктирная линия показывает, что при $m = 0{,}85$, $R = 3$ м и $J = 0{,}005$ будем иметь $V = 8{,}2$ м/сек.



Черт. 628. (2/3)

2. Оба построенные абака связаны только общностью оси u, поэтому их можно произвольно перемещать один относительно другого в горизонтальном направлении, не сдвигая их по вертикали. Часто подобные абаки налагают один на другой, чтобы сделать номограмму более компактной.

Такое наложение для нашего случая произведено на черт. 629. При этом левый

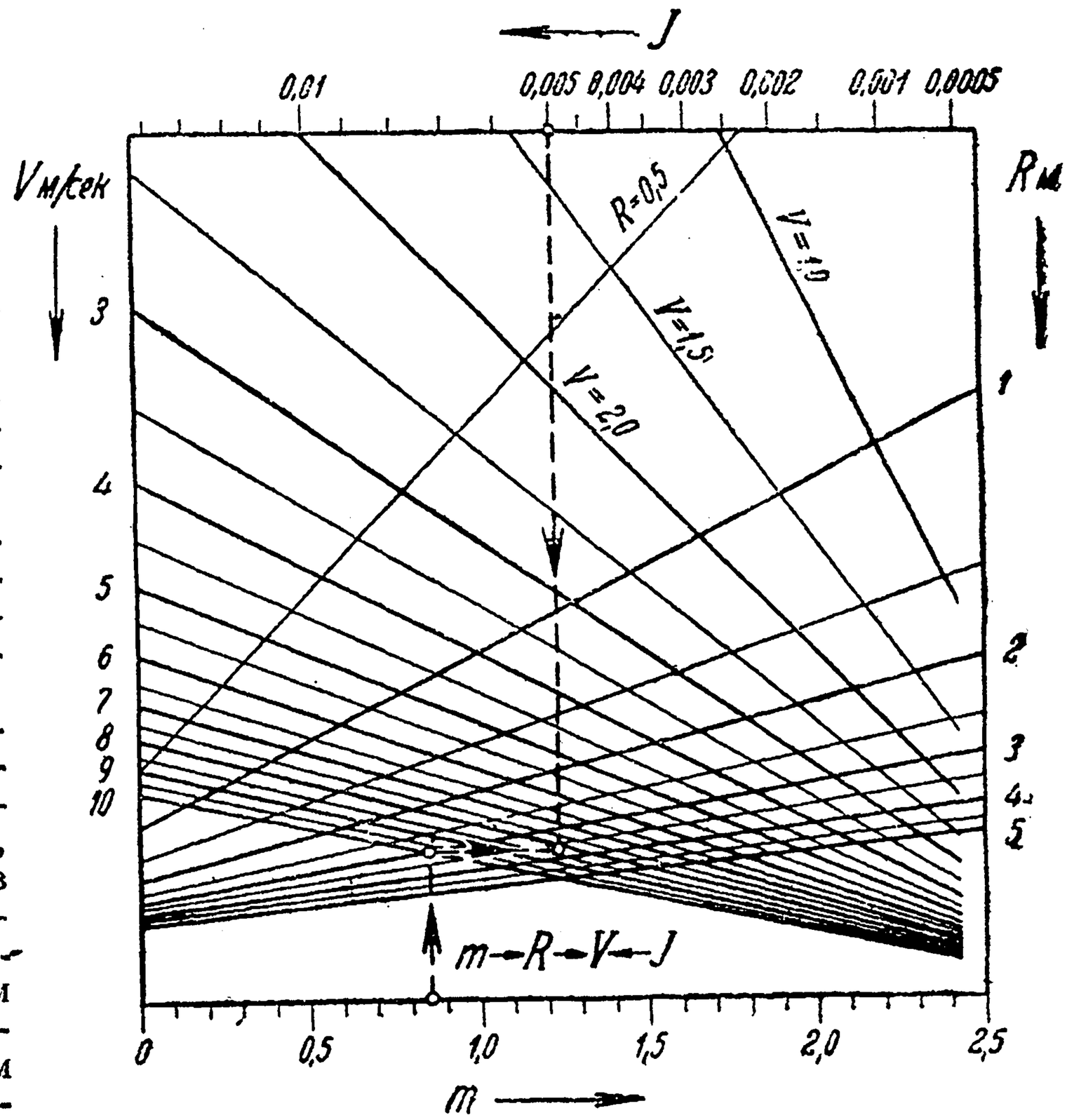
абак, чтобы ослабить сгущение линий, несколько сдвинут вправо; это позволило продолжить немного шкалу (J). Пометки „J", чтобы не путать их с пометками „m", нанесены поверху. От функциональной сетки пришлось отказаться, ограничившись нанесением поверху функциональной шкалы. Нахождение V этим не затрудняется (см. пунктирную линию, которая показывает решение прежней же задачи).

3. Для той же формулы (70) построим другую номограмму из помеченных линий. Именно, возьмем для первого из уравнений (71) переменные (V, u) за координаты точки и представим его (не прибегая к анаморфозе) семейством равнобочных гипербол [41] с пометками „J". Полученный абак наложим на прежний абак для второго из уравнений (71). Это выполнено на черт. 630 (для оси m взят масштаб 5 см и изменение m ограничено промежутком от 0 до 2).

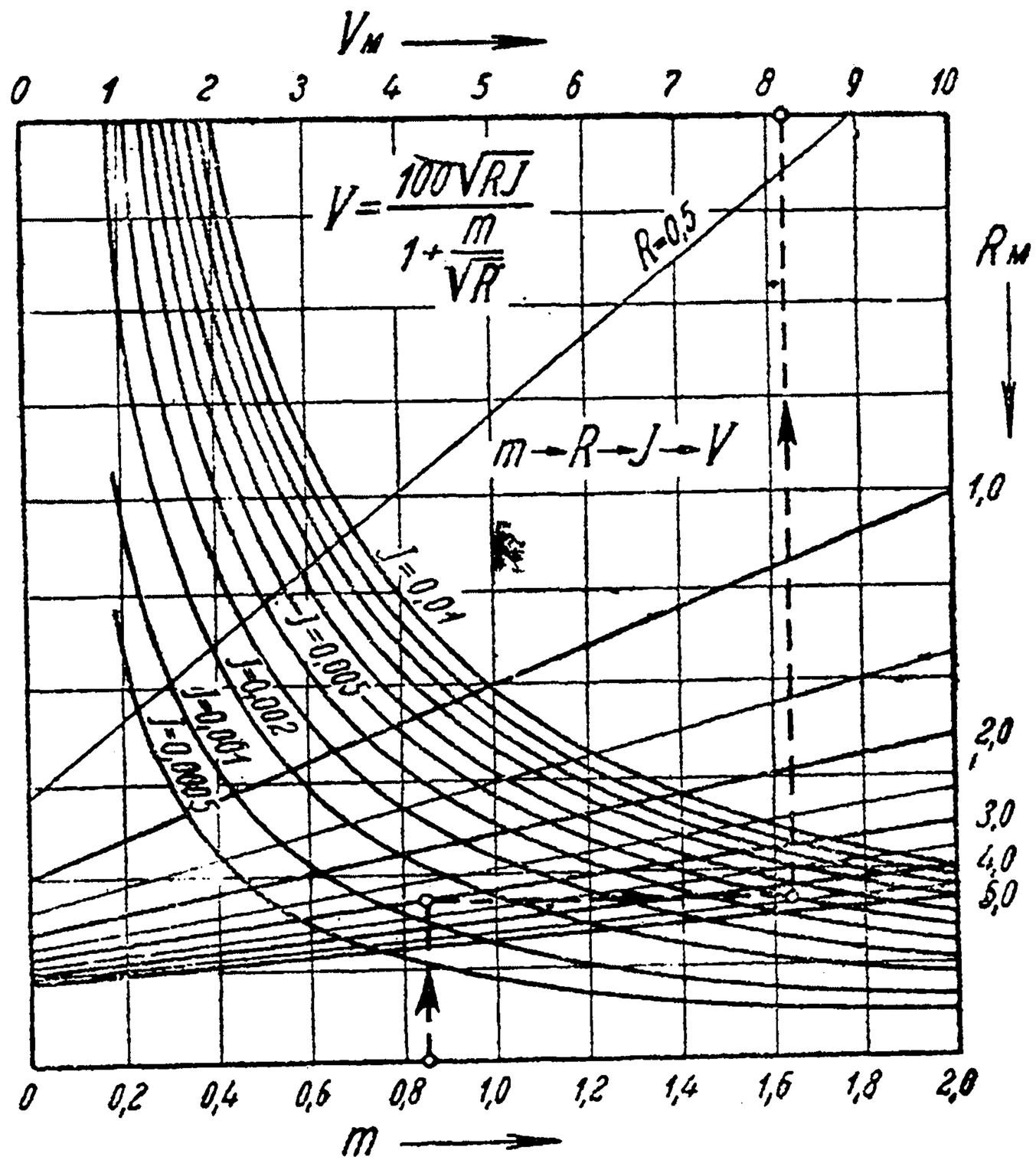
Всегда существует несколько вариантов номограмм для данной зависимости; из них выбирают тот, который проще и (это особенно важно!) удобнее для пользования.

4. В тех случаях, когда формула имеет „логарифмический вид", часто прибегают к логарифмированию и пользуются логарифмической анаморфозой. Рассмотрим для примера формулу, определяющую коэффициент n_s быстроходности гидравлических турбин:

$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H\sqrt[4]{H}},$$



Черт. 629. (2/3)



Черт. 630. (2/3)

где n — действительное число оборотов турбины в минуту, N — мощность турбины (лош. силы) и H — действительный напор (м). Представив эту формулу в виде (68a)

$$\frac{n_s}{N^{1/2}} = \frac{n}{H^{5/4}},$$

легко переходим от нее к системе уравнений:

$$u = \frac{n_s}{N^{1/2}}, \qquad u = \frac{n}{H^{5/4}}.$$

Теперь логарифмируем:

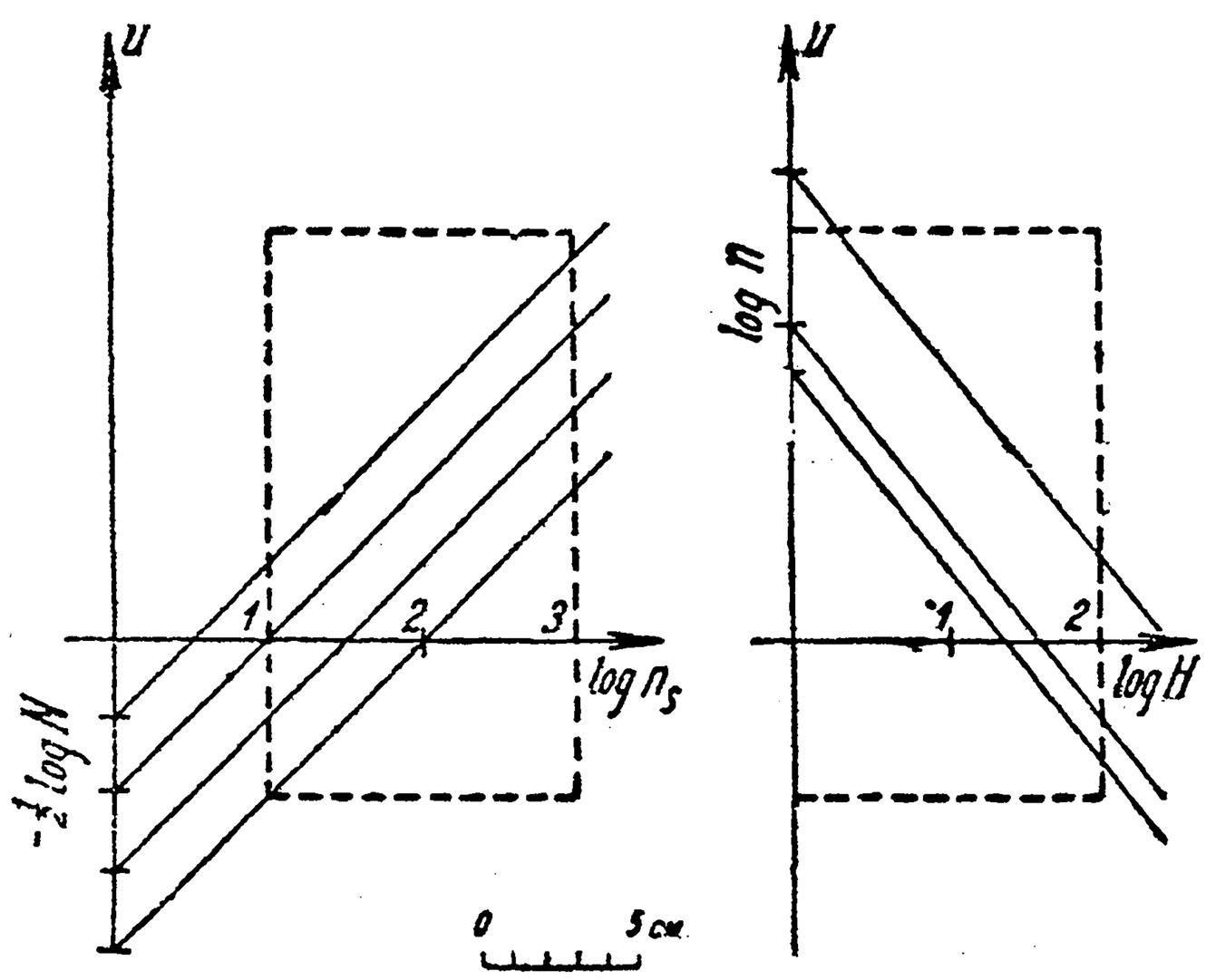
$$\log u = \log n_s - \frac{1}{2}\log N, \qquad \log u = -\frac{5}{4}\log H + \log n$$

и прибегнем к логарифмической анаморфозе. За координаты точек возьмем, соответственно, величины:

$$(\log n_s,\ \log u), \qquad (\log H,\ \log u).$$

Этот выбор мотивируется желанием получить в одном случае прямые с положительным угловым коэффициентом, а в другом — с отрицательным: такая сетка удобнее на практике.

Пусть n изменяется от 50 до 1000 (об./мин.), N — от 10 до 10 000 (лош. сил), H — от 1 до 100 (м), n_s — от 10 до 1000. Взяв на всех осях один и тот же масштаб — 5 см, сделаем сначала для ориентировки схематические наброски обоих абаков (см. черт. 631); на чертеже пунктиром отмечены те их части, которые мы наложим одну на другую (не стесняясь тем, что одну из них придется для этого сдвинуть в горизонтальном направлении!).



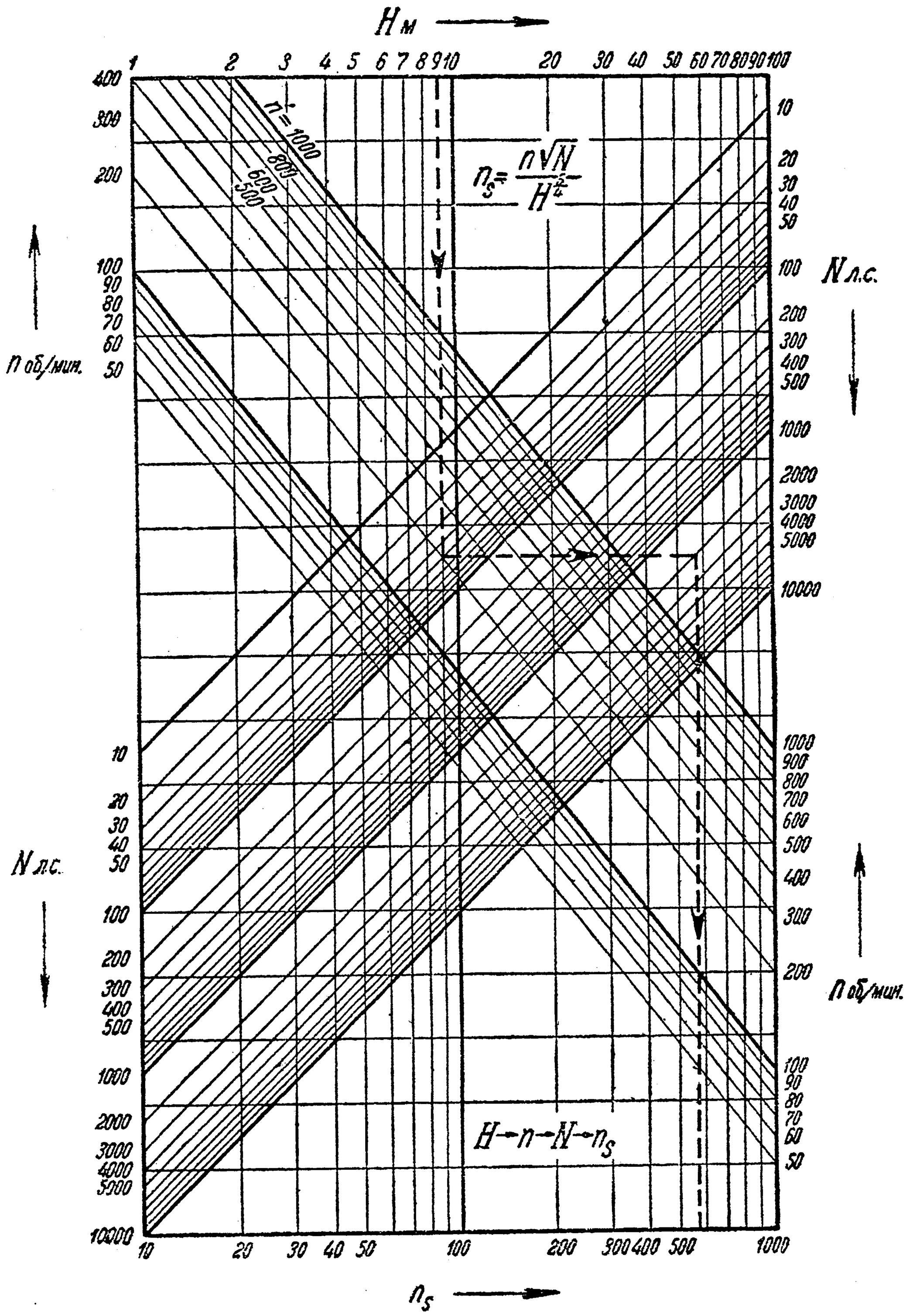
Черт. 631. ($^1/_5$)

Выполненная номограмма представлена на черт. 632. „Периодичность" логарифмической шкалы дала возможность в этом случае сохранить вертикальные прямые сетки, в соответствии одновременно и с нижней, и с верхней шкалами. Горизонтальные прямые нанесены равномерно и лишь для ориентировки: значения u нам не нужны. Для примера пунктирная линия дает при $H = 9$ (м), n — 200 (об./мин) и $N = 2000$ (лош. сил) значение коэффициента быстроходности $n_s = 575$.

5. В виде упражнения предлагается построить номограммы для следующих формул:

$$a)\quad P = 0{,}196\,\frac{d^3R}{r}$$

(P грузоподъемность цилиндрической винтовой пружины круглого сечения в кг, d — диаметр проволоки в мм, r — радиус витка спирали в мм, R — допустимое



Черт. 632. (1/5)

напряжение в кг/мм²) в пределах от 2 до 10 для d, от 10 до 50 для r, от 10 до 100 для R и от 5 до 500 для P;

$$b)\quad S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\omega}$$

(S_1 — натяжение в ведущем конце трансмиссионного ремня, S_2 — натяжение в ведомом конце, в кг, μ — коэффициент трения, ω — угол обхвата) в пределах от 1 до 10 для S_2, от 1 до 200 для S_1, от 0,1 до 0,5 для μ и от 0 до 4π для ω.

Указания. *a*) Если не прибегать к логарифмированию, то оба абака состоят из лучей, исходящих из начала; наложить их так (перевернув один из них), чтобы лучи одной системы шли навстречу лучам другой. С помощью логарифмирования получаются две системы параллельных прямых; относительно их расположения можно повторить то же замечание.

b) Прологарифмировать; угол ω обычно выражают в долях от 2π, т. е. заменяют отношением $n = \frac{\omega}{2\pi}$ (которое в нашем случае изменяется от 0 до 2). Получится:

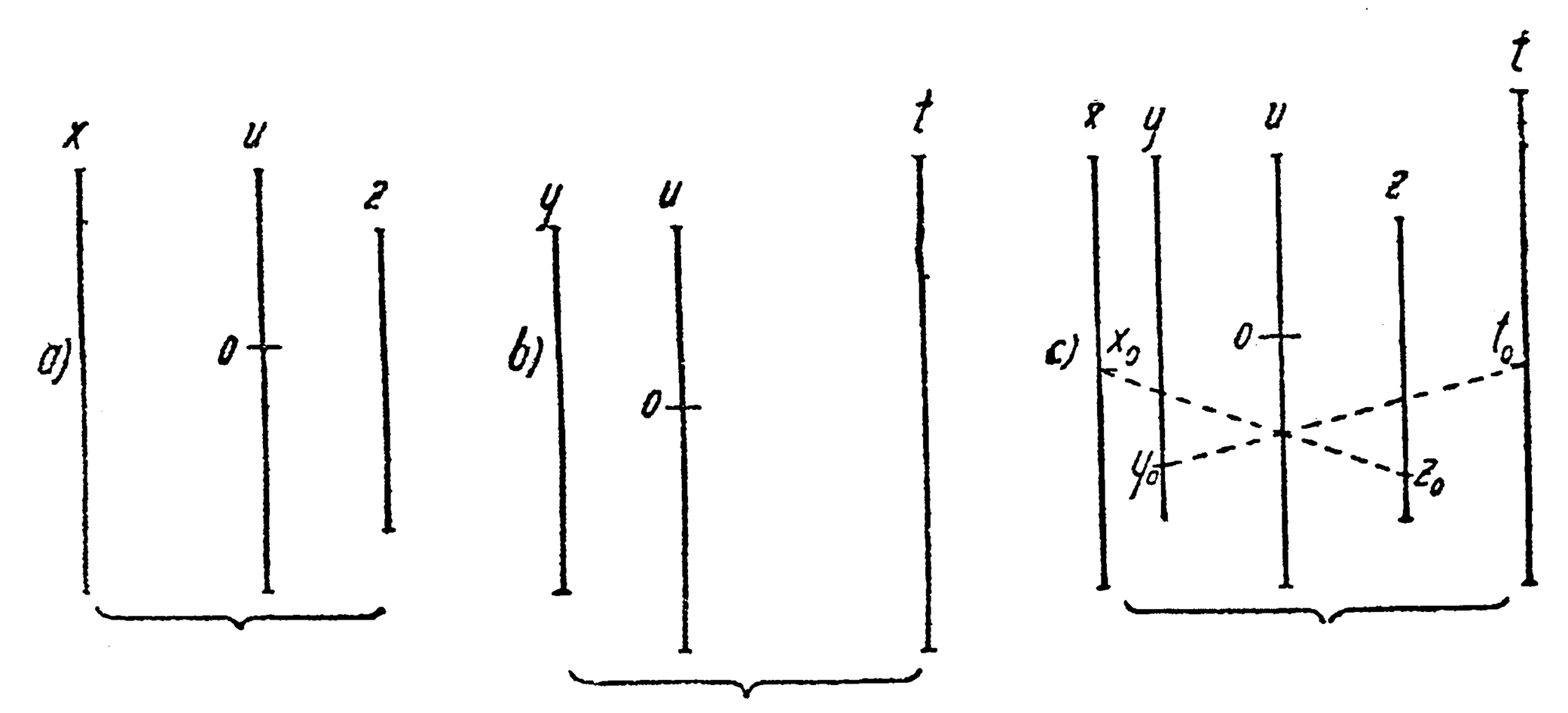
$$\log S_1 - \log S_2 = 2\pi M \cdot \mu n \quad (M = 0{,}4343)$$

или

$$u = \log S_1 - \log S_2, \quad u = 2\pi M \cdot \mu n.$$

В первом случае за координаты взять ($\log S_2$, u), во втором (μ, u) или (n, u) Система параллельных прямых налагается на систему исходящих из начала лучей.

337. Применение метода выровненных точек. И в случае зависимости вида (68), связывающей четыре переменные, снова метод выровненных точек дает номограммы, более удобные для пользования, чем соединенные абаки. Ограничиваясь, как и выше, тем случаем, когда предложенная зависимость (68) может быть заменена равносильной системой (69), мы каждое из составляющих ее уравнений в отдельности развернем в номограмму из выровненных точек (черт. 633,



Черт. 633.

a и *b*). Предполагая шкалу (u) в обоих случаях прямолинейной и масштаб для этой шкалы одним и тем в обеих номограммах, мы можем расположить эти номограммы так, чтобы обе *шкалы* (u) совпали; для этого достаточно, чтобы совпали *оси* (u) и, кроме того, какие-нибудь две точки на этих осях, имеющие на них одну и ту же пометку (напр., нулевые точки). Тогда получается соединенная номограмма, в роде изображенной на черт. 633 *c*). На ней пунктирные

линии показывают, как по значениям $x = x_0$ и $z = z_0$ получается соответствующая *точка* на оси (u), а затем по этой *точке* и по значению, скажем, $y = y_0$ находится соответствующее значение $t = t_0$. Мы видим, что на оси (u) нам нужна была лишь *точка* пересечения ее с первой пунктирной линией, а вовсе не отсчет „u", отвечающий этой точке. Поэтому шкалу (u) можно оставить неградуированной или, как говорят, *немой*. Немая шкала здесь вполне аналогична немой оси в номограммах из соединенных абаков.

Примеры и задачи. Рассмотрим вновь формулу

$$n_s = \frac{nN^{1/2}}{H^{5/4}}$$

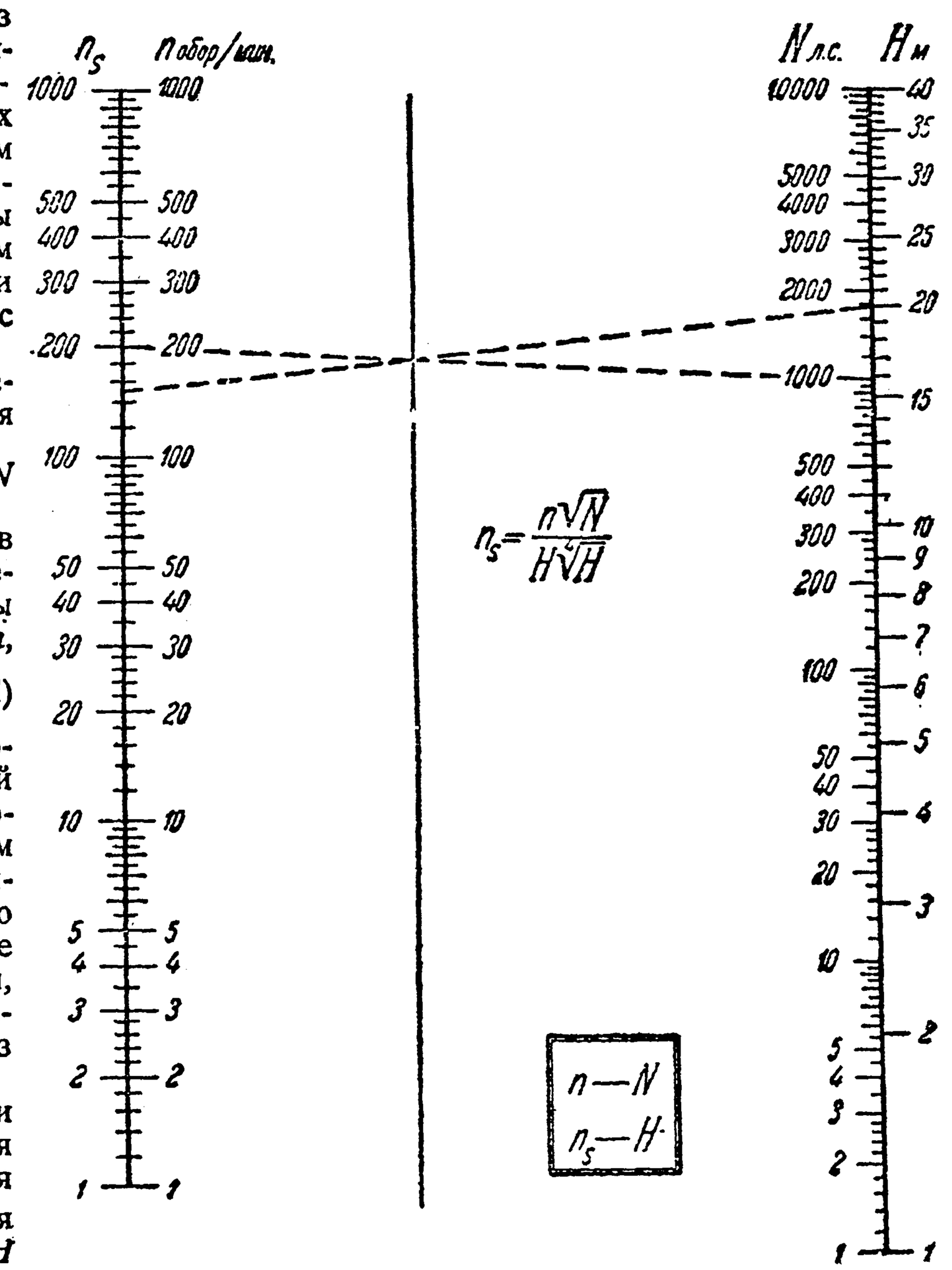
[см. зад. 4. предыдущего n⁰]. Мы видели, что она, в конечном счете, равносильна системе:

$$\log u = \log n_s - \frac{1}{2}\log N, \qquad \log u = \log n - \frac{5}{4}\log H.$$

Построим для каждой из этих зависимостей обычным порядком номограмму из трех параллельных шкал [32Э]. При этом постараемся так подобрать масштабы, чтобы оказалось возможным совместить все три оси одной номограммы с тремя осями другой.

Если обозначить через λ, μ, ν масштабы для функций $\log n_s$, $\frac{1}{2}\log N$ (а не $\log N$!) и $\log u$ в первой номограмме, а через λ', μ', ν' масштабы для функций $\log n$, $\frac{5}{4}\log H$ (а не $\log H$!) и $\log u$ во второй номограмме, то поставленной цели мы наверное достигнем, если возьмем $\lambda' = \lambda$ и $\mu' = \mu$. Действительно, тогда само собою и $\nu' = \nu$ и $s' = s$ (где s и s' суть отношения, определяющие положение оси u в каждой из двух номограмм).

Пусть промежутки изменения будут: для n_s — от 1 до 1000, для N — от 1 до 10 000, для n — от 1 до 1000, для H от 1 до 40. Если взять $\lambda' = \lambda = 5$ см, то длины



Черт. 634. (2/3)

шкалы (n_s) и (n) будут равны 15 см. Положим, затем, $\mu' = \mu \doteq 8$ см; тогда длина шкалы (N) будет $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$ см, а шкалы (H) — $\frac{5}{4} \cdot 1{,}602 \cdot 8 \doteq 16$ см. Остается определить отношение $s' = s$; по формуле (17), 329, оно равно $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{8}$.

Для упрощения наших соображений мы отнесли множители $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{4}$ к функциям $\log N$ и $\log H$, не выделяя их как коэффициенты. Но читателю ясно, что строить шкалы функций $\frac{1}{2}\log N$ и $\frac{5}{4}\log H$ в масштабе 8 см — все равно, что строить шкалу функции $\log N$ в масштабе $\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ см и шкалу функции $\log H$ в масштабе $\frac{5}{4} \cdot 8 = 10$ см.

Если совместить начальные точки шкал (n_s) и (n), с одной стороны, и шкал (H) и (N) — с другой, то для обеих налагаемых номограмм начальная точка шкалы (u) будет одна и та же. Номограмма изображена на черт. 634. Пунктирные линии дают при $n = 200$ (об./мин.), $H = 20$ (м) и $N = 1000$ (лош. сил) (г) значение коэффициента быстроходности $n_s \doteq 150$. Ср. с номограммой на черт. 632!

2. Возьмем формулу

$$M_d = \frac{\pi}{16 \cdot 10^5} \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2} \cdot k_d,$$

дающую зависимость скручивающего момента M_d (в кг-м) от внутреннего и внешнего диаметров d_1 и d_2 пустотелого вала (в мм) и допустимого напряжения на скручивание k_d (в кг/см²).

Легкое преобразование

$$\frac{M_d}{k_d} = \frac{\pi}{16 \cdot 10^5} \cdot \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}$$

позволяет сразу привести ее к системе:

$$M_d = \underbrace{u \cdot k_d, \quad u = \frac{\pi}{16 \cdot 10^5}}, \frac{d_2^4 - d_1^4}{d_2}.$$

Второе из этих уравнений преобразуем следующим образом:

$$u = \frac{\pi}{16 \cdot 10^5} \cdot d_2^3 \cdot \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right]$$

и примем отношение $\frac{d_1}{d_2}$ за новую переменную.

Промежутки изменения назначаем такие: от 1 до 30 000 для M_d, от 100 до 1500 для k_d, от 25 до 200 для d_2 и от 0,3 до 0,9 для отношения $\frac{d_1}{d_2}$.

Прологарифмируем оба уравнения:

$$\log M_d = \log u + \log k_d,$$

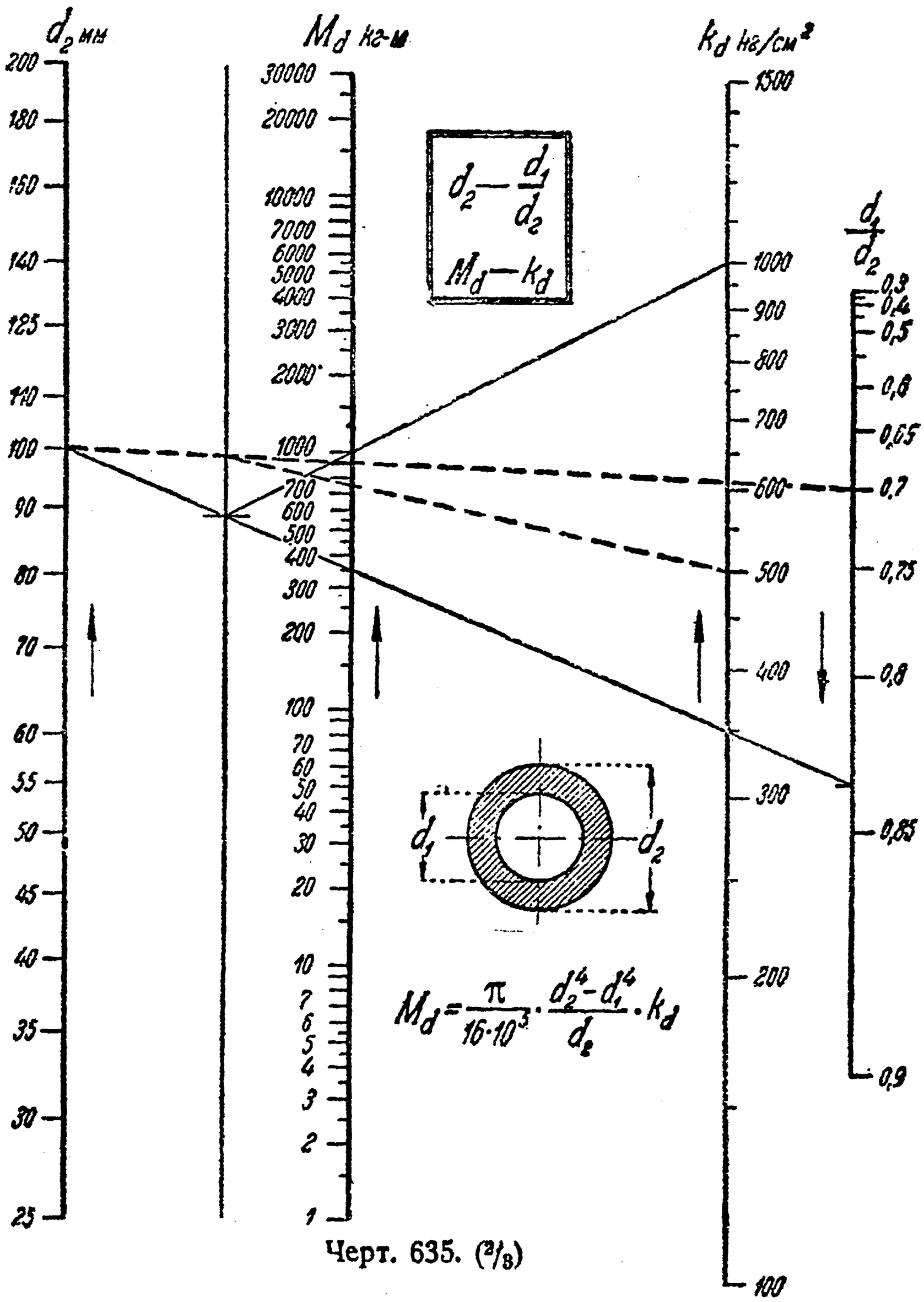
$$\log u = 3 \log d_2 + \log\left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right] + \log \frac{\pi}{16 \cdot 10^5},$$

и представим каждое из них номограммой с тремя параллельными шкалами.

Для шкалы (M_d) возьмем масштаб $\nu = 4$ см; длина шкалы тогда будет $4{,}477 \cdot 4 \doteq 17{,}9$ см. Масштаб шкалы (k_d) пусть будет $\mu = 16$ см, что доведет длину ее

до 1,176 · 16 ≐ 18,8 см. Для немой шкалы (u) масштаб λ определится, согласно (18), 329, из уравнения

$$4 = \frac{16\lambda}{\lambda + 16}, \quad \text{откуда } \lambda = \frac{16}{3} \text{ см.}$$



Черт. 635. (2/3)

По формуле (17), $s = \frac{1}{3}$; мы возьмем расстояния между осями в 2 см и 6 см. Положение начальной точки ($u = 1$) определяется, напр., по значениям $M_d = k_d = 1000$ (черт. 635).

Переходя ко второму уравнению, мы уже обязаны взять для шкалы (u) тот же масштаб, т. е. положить $\nu' = \lambda = \frac{16}{3}$. Для шкалы ($d_2$) положим $\lambda' = 20$ см, так что длина ее будет $0{,}903 \cdot 20 \doteq 18$ см. Наконец, масштаб μ' шкалы $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)$ определится по формуле (18) из уравнения

$$\frac{16}{3} = \frac{20\mu'}{20 + 3\mu'}, \quad \text{откуда } \mu' = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3} \text{ см.}$$

Тогда длина этой шкалы будет

$$[\log(1-0{,}3^4)-\log(1-0{,}9^4)]\cdot\frac{80}{3}\doteq 12{,}3 \text{ см},$$

Наконец отношение s' [см. (17)] равно $\frac{1}{4}$; пусть расстояния между осями будут, скажем, 2,5 см и 10 см.

Положение начальной точки на шкале (u) уже фиксировано; шкалу (d_2) разместим на ее оси по произволу. Положение же шкалы $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)$ уже не будет произвольным. Отметим на ее оси точку, отвечающую $u=1$ и $d_2=100$; легко вычислить из уравнения, что этой точке соответствует значение выражения

$$\log\left[1-\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right],$$

равное $\bar{1}{,}70697$. Вычитая этот логарифм из логарифмов, вычисленных для ряда равноотстоящих значений $\left(\frac{d_1}{d_2}\right)$, мы по найденной точке ориентируем всю шкалу.

По построенной таким образом номограмме (черт. 635) находим, напр., что при $d_2=100$ (мм), $\frac{d_1}{d_2}=0{,}7$ и $k_d=500$ (кг/см²), скручивающий момент может достигнуть величины $M_d=760$ кг-м.

3. Построить номограммы из параллельных шкал

a) для формулы

$$G=\frac{\pi d^2}{4}\cdot l\cdot\gamma,$$

выражающей вес G (г) стержня круглого сечения, если d — диаметр сечения (мм) l — длина стержня (м), γ — удельный вес материала (г/см³) (взять промежутки изменения — от 5 до 50 для d от 0,1 до 1,0 для l, от 1,7 до 9,0 для γ, от 5 до 20 000 для G);

b) для формулы

$$Q=\frac{2}{3}\gamma b\sqrt{2gh},$$

дающей расход Q (м³/сек) воды через прямоугольный водослив, где b — ширина порога (м), h — глубина погружения его, γ — коэффициент расхода (взять промежутки изменения — от 1 до 200 для b, от 0,1 до 10 для h, от 3 до 10, для γ, от 1 до 200 для Q.

Указания. a) Если положить

$$\frac{\pi d^2}{4}\cdot l=v,$$

то $G=v\cdot\gamma$; в данном случае введенная вспомогательная величина v имеет реальный смысл — это о б ъ е м стержня, выраженный в см³. Поэтому шкалу v полезно градуировать (но отсчет по ней не нужно п р о ч и т ы в а т ь, если объем не интересен). Обе формулы прологарифмировать. По значениям $d=10$ и $l=\frac{4}{10\pi}=0{,}127$ определяется положение точки с отсчетом $v=10$, а по этой точке и точке с отсчетом $G=20$ — положение точки с отсчетом $\gamma=2$; этим устанавливается ориентация шкалы (γ). Рекомендуется на шкале (γ) отметить точки, отвечающие удельным весам употребительных в технике металлов.

b) Положить

$$u=2{,}952\,\gamma\,h^{3/2},\quad u=\frac{Q}{b}.$$

Прологарифмировать. По значениям $h=1$ и $\gamma=\frac{1}{2{,}952}\doteq 0{,}34$ устанавливаем положение точки с отсчетом $u=1$, а по этой точке и точке $Q=1$ — положение начальной

точки шкалы (b). Отметим, что шкала (b) имеет направление, противоположное направлению других шкал.

4. Построить номограмму для формулы

$$E = J \cdot \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}},$$

которая выражает горизонтальную освещенность E (в люксах) в зависимости от силы света J (свечей) источника и от его горизонтального и вертикального расстояний, a и h (м), от освещаемой плоскости.

Преобразуем формулу, вводя отношение $m = \frac{h}{a}$:

$$E = \frac{J}{a} \cdot \frac{m}{(1 + m^2)^{3/2}}$$

и полагаем

$$u = \frac{J}{a^2},$$

так что и

$$u = E \cdot \frac{(1 + m^2)^{3/2}}{m}.$$

Прологарифмируем:

$$\log u = \log J - 2 \log a, \quad \log u = \log E + \log \frac{(1 + m^2)^{3/2}}{m}$$

и для обоих соотношений построим номограммы из параллельных шкал. Зададимся промежутками изменения: от 50 до 1000 для J, от 1 до 20 для a, от 0,1 до 5 для $m = \frac{h}{a}$ и от 0,5 до 50 для E.

Для первого соотношения это просто. Пусть $\lambda = \mu = 15$ см, тогда длины шкал (J) и (a) будут (приближенно) равны 20 ст; масштаб ν шкалы (u) будет 5 см, отношение $s = 2$. Возьмем расстояния между осями в 10 см и 5 см.

Второе соотношение представляет любопытную особенность. До сих пор мы имели дело лишь с функциями, изменяющимися в одном направлении, и лишь для таких функций строили функциональные шкалы. Выражение же

$$\frac{(1 + m^2)^{3/2}}{m}$$

(а с ним — и его логарифм) убывает с возрастанием m, покуда $m < \frac{1}{\sqrt{2}}$, при $m = \frac{1}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}7$ проходит через минимум, а затем возрастает. [Тот факт, что отношение $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ является **наивыгоднейшим** в смысле освещенности, нам уже известен по n⁰ 86!] Это вынуждает нас нанести (по разные стороны оси) **две** шкалы (m): одну для значений m от 0,1 до 0,7, а другую — для значений m от 0,7 до 5.

Возьмем для шкалы (m) масштаб $\mu' = 15$ см, длина шкалы будет

$$\left[\log \frac{(1 + 5^2)^{3/2}}{5} - \log \frac{(1 + 0{,}7^2)^{3/2}}{0{,}7}\right] \cdot 15 = 1{,}009 \cdot 15 \doteq 15{,}1 \text{ см}.$$

Масштаб λ' шкалы E определится из уравнения

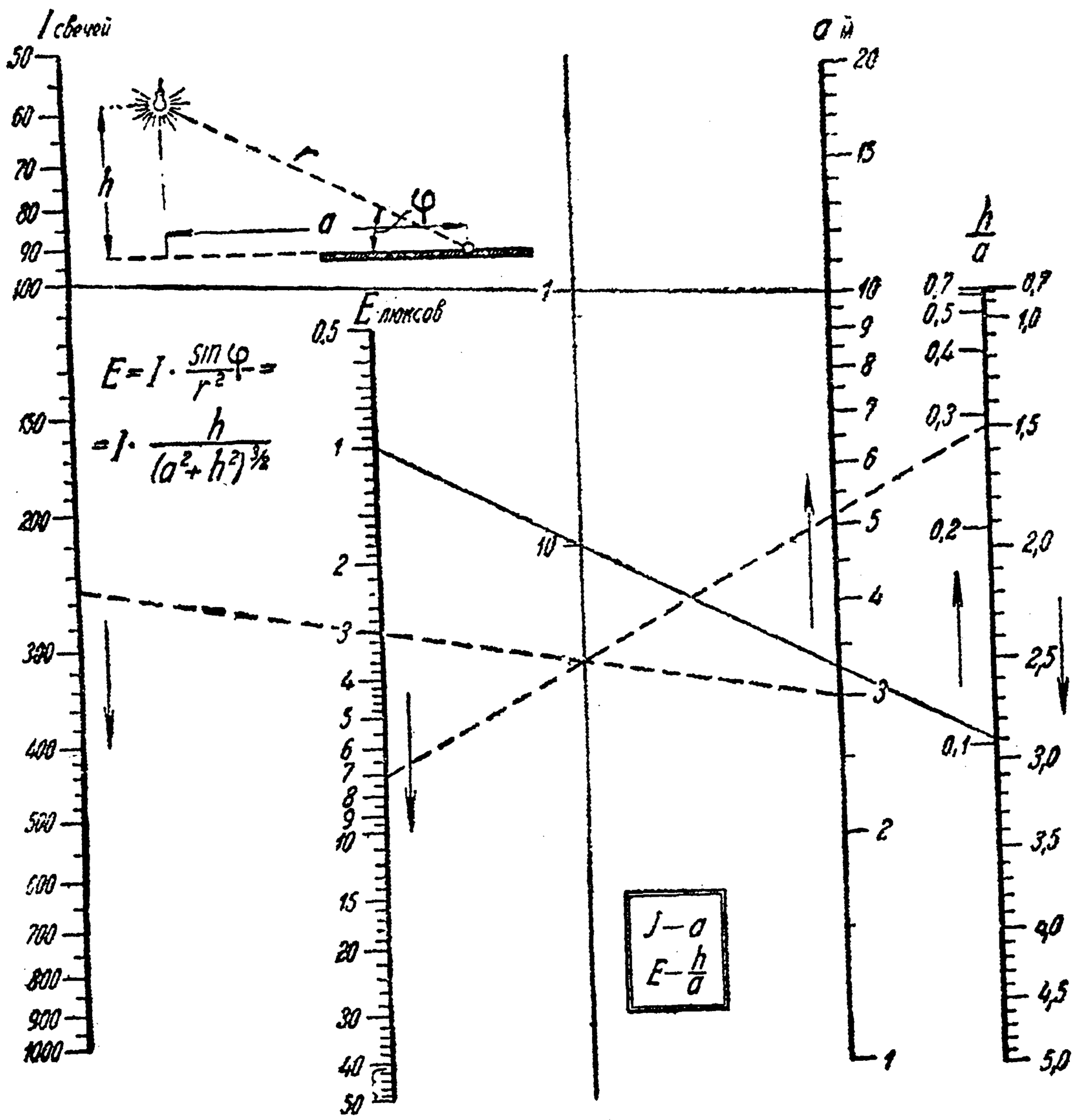
$$\nu' = \nu = 5 = \frac{\lambda' \cdot 15}{\lambda' + 15}, \text{ так что } \lambda' = 7{,}5 \text{ см};$$

длина этой шкалы будет $2 \cdot 7{,}5 = 15$ см. Отношение $s = \frac{1}{2}$; возьмем расстояния между осями в 4 см и 8 см.

Точки с отсчетами $a = 10$ и $J = 100$ определяют на оси (u) точку с отсчетом $u = 1$; легко отметить на ней и точку $u = 10$ (ведь масштаб известен!), а по ней и по точке оси (m), отвечающей значению выражения

$$\log \frac{(1 + m^2)^{3/2}}{m},$$

равному единице, устанавливается на оси (E) положение точки с отсчетом $E = 1$ а по ней ориентируется и вся шкала (E).



Черт. 636. (1/2)

Выполненная номограмма дана на черт. 636; пунктирная линия дает решение задачи об освещенности E при $J = 250$ (свеч.), $a = 3$ (м), $h = 4{,}5$ (м): E оказывается равным 7,1 (люкс.).

5. При расчете трансмиссий применяется формула Эйлера [260]:

$$S_1 = S_2 \cdot e^{\mu\omega},$$

связывающая натяжения S_1 и S_2 в ведущем и в ведомом концах ремня или каната (в кг), коэффициент трения μ и угол обхвата ω. Мы уже предлагали читателю построить для нее номограмму из соединенных абаков [зад. 5 *b*) предыдущего n°]. Теперь мы построим для нее же номограмму из выровненных точек.

Заметим, что угол ω обыкновенно выражают в долях от 2π. Пусть промежутки изменения будут: от 1 до 10 для S_2, от 1 до 200 для S_1, от 0,1 до 0,5 для μ и от 0 до 1 для отношения $n = \frac{\omega}{2\pi}$.

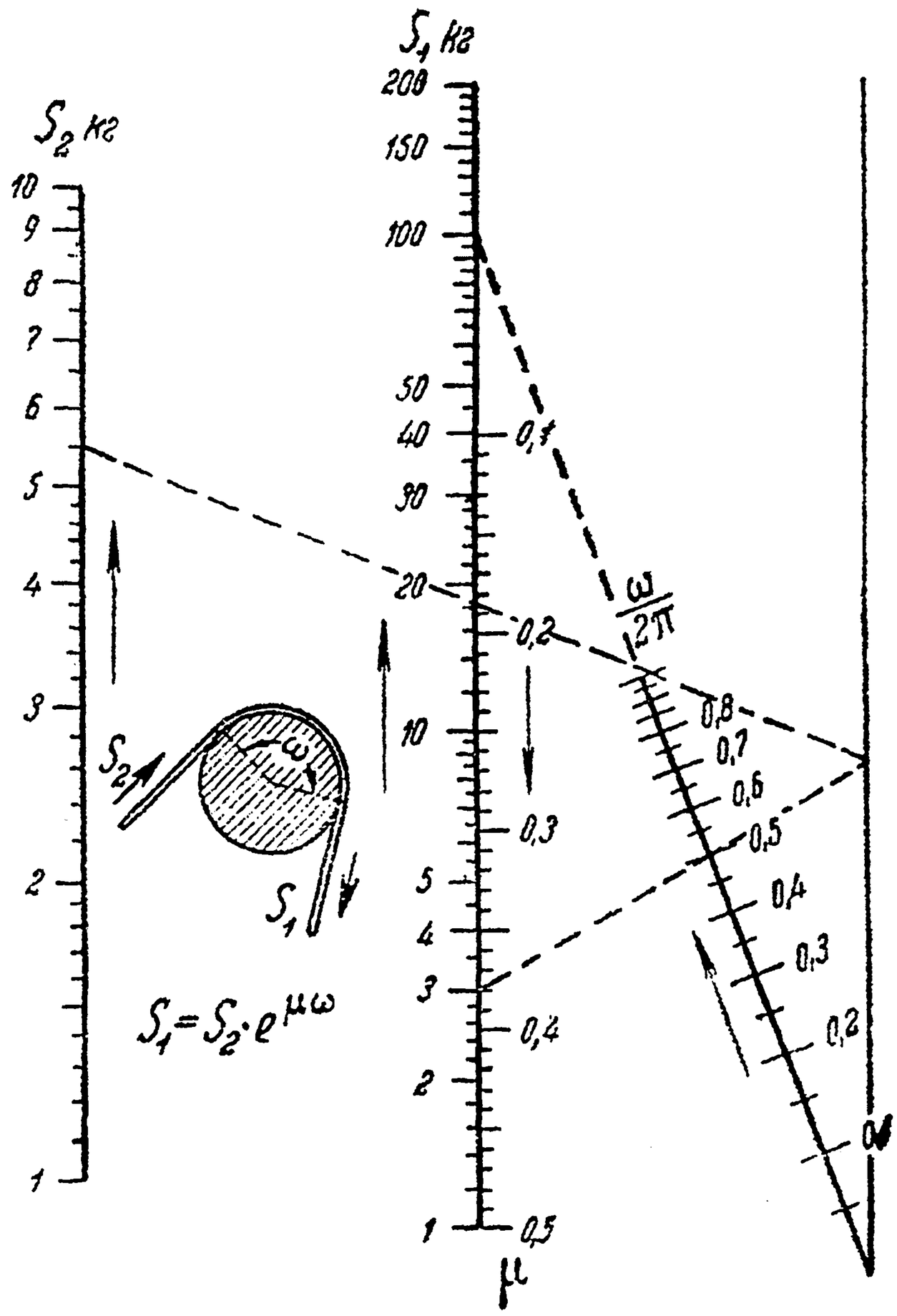
Прологарифмировав данное соотношение, легко привести его к системе:

$$\log S_1 = \log S_2 + u, \quad u = 2\pi M \cdot \mu \cdot n \qquad (M = 0{,}4343).$$

Первое развертывается в номограмму с тремя параллельными шкалами (черт. 637). Масштабы шкал (S_2), (S_1) и (u), соответственно, взяты равными 10 см, 5 см и 10 см; расстояния между осями — по 4 см. Начальная точка на оси (u) определяется по начальным точкам осей (S_2) и (S_1).

Что же касается второго соотношения, то для его графического представления прибегаем к Z-номограмме [331]. На параллельных осях поместим нормальные шкалы (u) и (μ), выбрав для первой из них (как и выше) масштаб 10 см, а для второй — масштаб 20 см; при этом ось μ можно совместить — для компактности — с осью (S_1) (см. чертеж). Для того чтобы построить на наклонной оси проективную шкалу для $n = \frac{\omega}{2\pi}$, соображаем, что при $\mu = \frac{1}{2\pi M} \doteq 0{,}366$ как раз $u = n$; таким образом эта шкала получается путем проектирования нормальной шкалы на оси (u) на наклонную ось из указанной точки на шкале (μ). Самое построение на чертеже опущено.

Пунктирная линия устанавливает по $S_2 = 5{,}5$ (кг), $\mu = 0{,}38$ и $\omega = \pi$ значение $S_1 = 18{,}2$ (кг). Заметим, что отсчеты на шкалах (S_1) и (S_2) могут быть одновременно увеличены в 10, 100,... раз.



Черт. 637. (4/5)

6. Вспомним формулу для барометрического нивелирования

$$H = 18\,400\,(1 + 0{,}00366\,t)\log\frac{b_1}{b_2},$$

дающую высоту (м) одной станции сравнительно с другой по показаниям b_1 и b_2 барометра на этих станциях, если t означает (среднюю) температуру воздуха [см. (18), n⁰ 24]. Поставим себе задачей построить номограмму для этой формулы, считая, что b_1 и b_2 изменяются от 600 до 800 (мм ртутного столба), t от $-20°$ до $40°$ С, а H от 0 до 600 (м).

Имеем:

$$H = u \cdot 18\,400\,(1 + 0{,}00366\,t), \quad \log b_1 = \log b_2 + u.$$

Второе соотношение представляется номограммой с тремя параллельными шкалами (см. чертеж 638; $\lambda = 100$ см, $\mu = 300$ см, $\nu = 75$ см, $s = \frac{1}{3}$). Начальная точка немой шкалы вполне определяется по начальным точкам остальных двух шкал.

Что же касается до первого соотношения, то его естественно развернуть в Z-номограмму. Но для того, чтобы избежать слишком маленьких размеров шкалы (t), затрудняющих производство отсчетов, мы преобразуем его к виду:

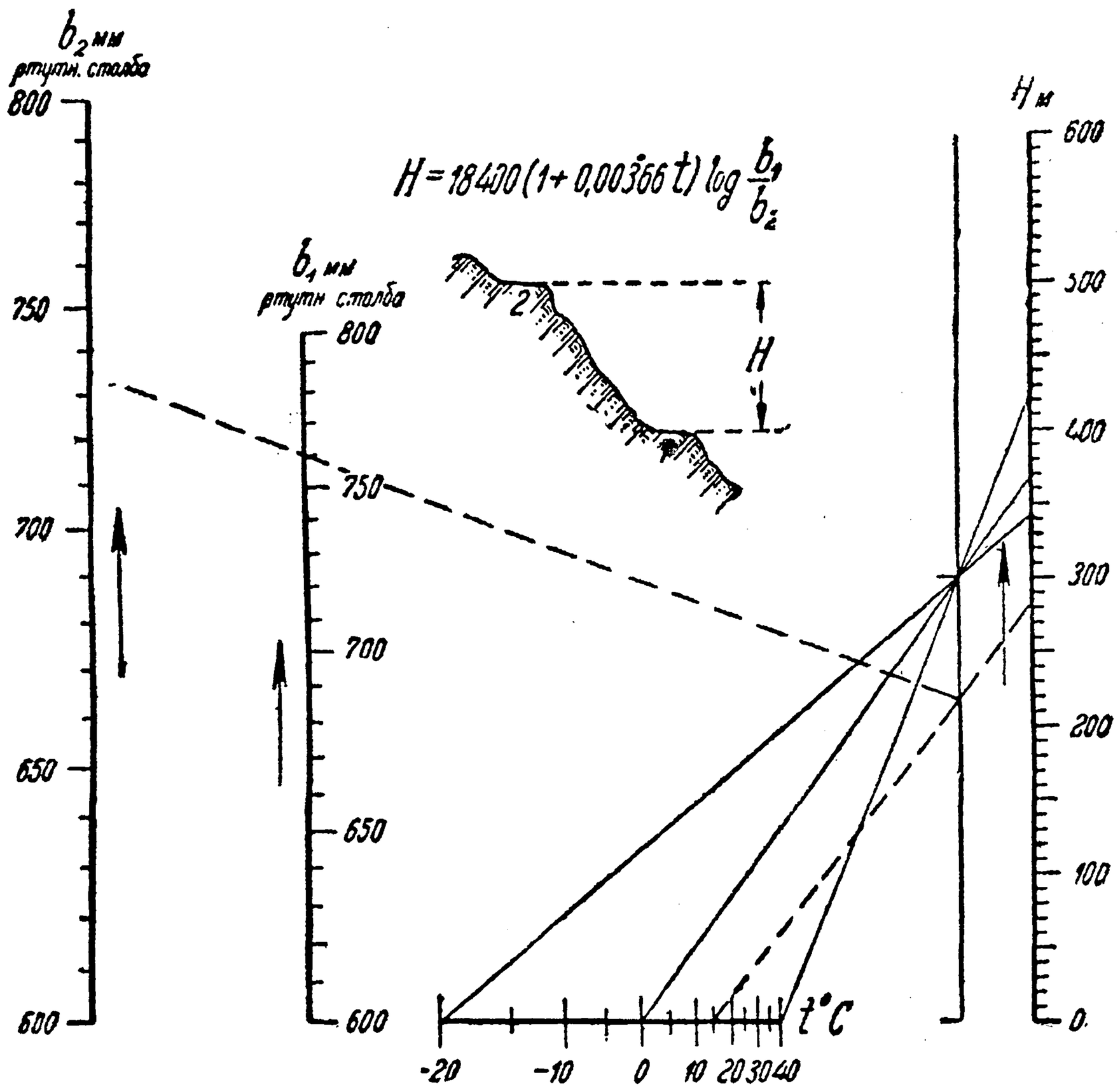
$$u = H \cdot \frac{1}{18\,400\,(1 + 0.00366\,t)}$$

и представим его номограммой из двух параллельных шкал и третьей, к ним перпендикулярной и вынесенной наружу (см. чертеж). Нормальную шкалу (H) нанесем в масштабе 0,02 см.

На наклонной шкале должна быть нанесена проективная шкала для функции

$$\frac{1}{18\,400(1+0{,}00366\,t)},$$

которая в то же время является и проективной шкалой в узком смысле. Вычислением устанавливаем, что при $u=\frac{1}{50}$, значениям $t=-20$, 0 и $+40$ отвечают зна-



Черт. 638. (2/3)

чения $H=341$, 368 и 422. Так как масштаб на немой шкале известен (300 см) и положение начальной точки также, то легко отметить на ней точку с отсчетом $u=\frac{1}{50}$; соединив ее с точками, имеющими на шкале H отсчеты 341, 368 и 422, мы и получим на шкале (t) точки, которым должны быть отнесены отсчеты — 20, 0 и 40. Затем уже обычными методами восстанавливается вся проективная шкала (t).

Пунктирная линия на черт. 638 дает $H=282$ м при $b_1=760$, $b_2=735$ (мм ртутного столба) и $t=15°$ С.

7. В качестве последнего примера рассмотрим вновь формулу для определения скорости течения воды в канале или трубе:

$$V=\frac{100\sqrt{RJ}}{1+\frac{m}{\sqrt{R}}}$$

[ср. зад. 1, 2 и 3, n° 336], сохраняя для переменных прежние промежутки изменения.

Как и выше, сведем это соотношение к системе двух уравнений:

$$u=\frac{100\sqrt{J}}{V}, \qquad u=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{m}{R},$$

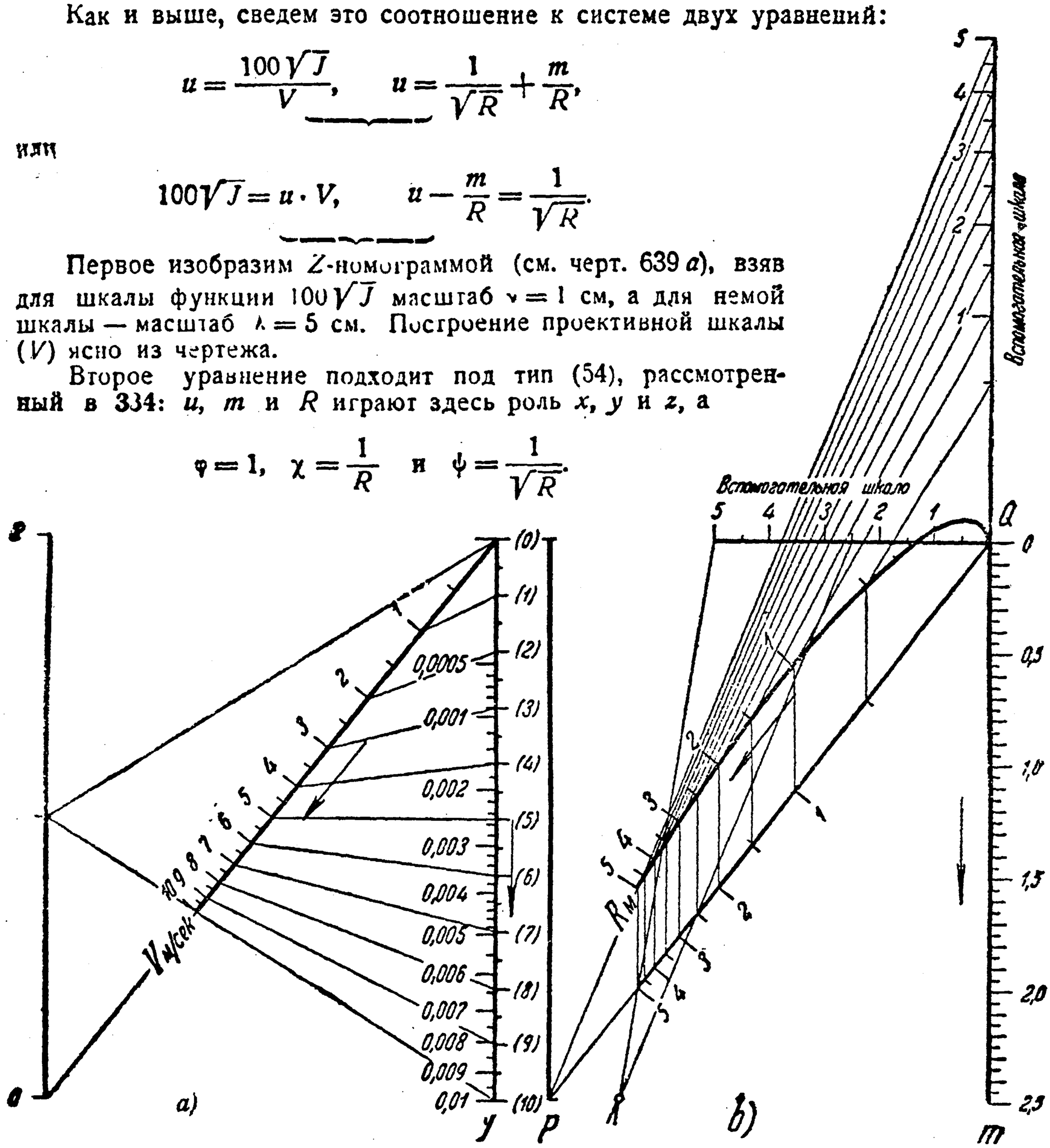
или

$$100\sqrt{J}=u\cdot V, \qquad u-\frac{m}{R}=\frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Первое изобразим Z-номограммой (см. черт. 639 *a*), взяв для шкалы функции $100\sqrt{J}$ масштаб $\nu=1$ см, а для немой шкалы — масштаб $\lambda=5$ см. Построение проективной шкалы (V) ясно из чертежа.

Второе уравнение подходит под тип (54), рассмотренный в 334: u, m и R играют здесь роль x, y и z, а

$$\varphi=1, \quad \chi=\frac{1}{R} \quad \text{и} \quad \psi=\frac{1}{\sqrt{R}}.$$



Черт. 639. (2/3)

Знак (—) коэффициента при m учтем тем, что изменим направление шкалы (m), которую мы нанесем сверху вниз (черт. 639 *b*) в масштабе $\mu=4$ см.

Для построения криволинейной шкалы (R) мы будем исходить из наклонной оси PQ, соединяющей начальные точки обеих параллельных шкал. Прежде всего нужно построить на этой оси (взяв за масштабную единицу весь наклонный отрезок) шкалу функции [см. (57), 334]

$$\frac{\frac{5}{R}}{\frac{5}{R}+4}=\frac{5}{4R+5}.$$

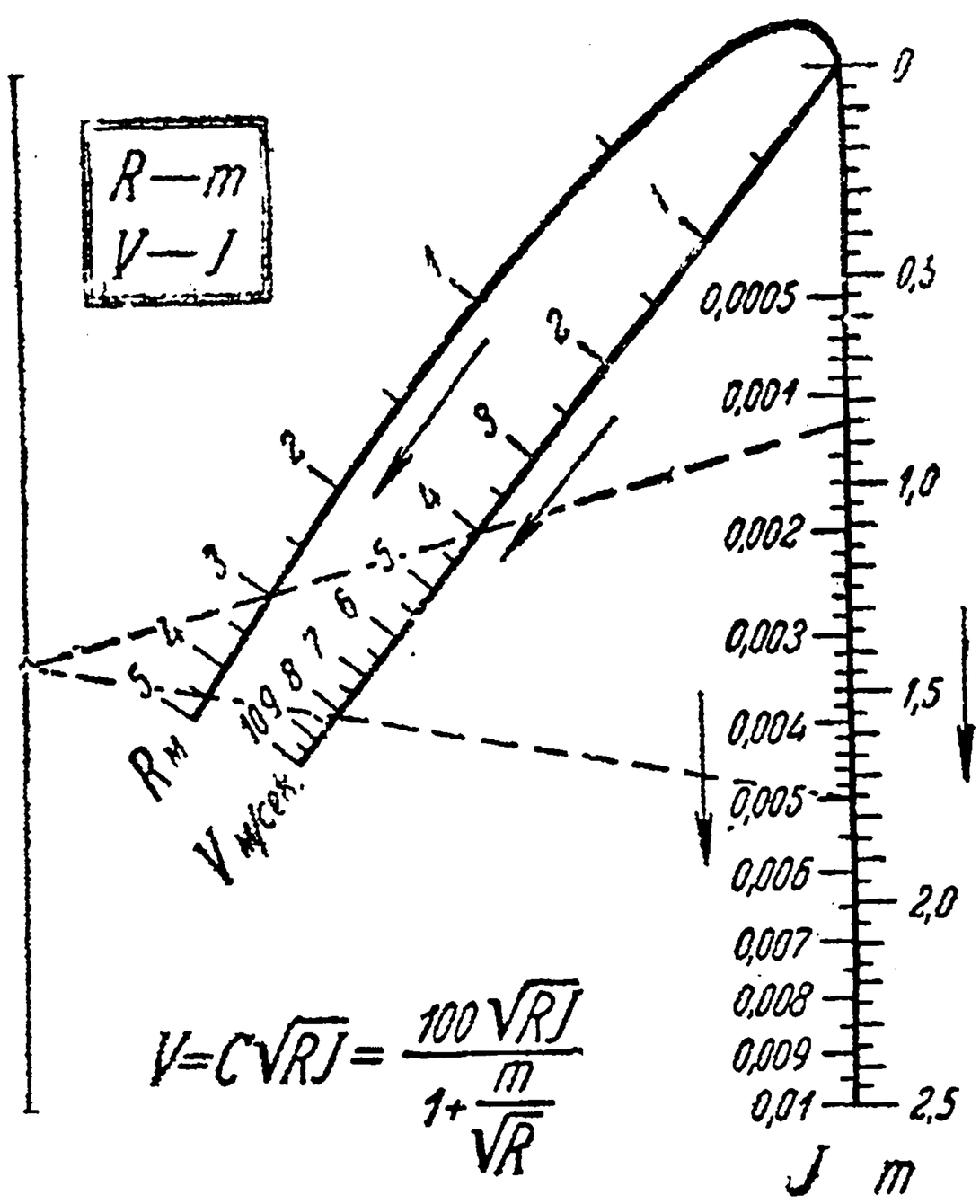
Эта **проективная шкала** легко строится обычными приемами, если предварительно отметить, напр., точки с отсчетами $R=0$, 2,5 и 5, которым отвечают зна-

чения упомянутой функции: 1, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$. Через точки деления шкалы проведем, как полагается, вертикали.

Теперь рассмотрим выражения [см. (59), (60), 334]

$$\frac{\psi}{\chi} = \sqrt{R} \text{ и } \frac{\psi}{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

Так как первое проще, то мы на правой оси (вверх от Q!) строим в масштабе $\mu = 4$ см вспомогательную шкалу функции $\sqrt{R}$ (с отметками R) и соединяем лучами точку P с точками деления этой шкалы. В пересечении этих лучей с соответственными вертикалями и получаются, как мы знаем, точки криволинейной шкалы.



Черт. 640. (2/3)

Обе номограммы наложены одна на другую на черт. 640; при этом оси (J) и (m) удалось совместить. Пунктирная линия решает задачу: найти скорость V, если гидравлический радиус $R = 3$ м, коэффициент шероховатости $m = 0{,}85$ и уклон $J = 0{,}005$. Ответ: $V = 8{,}2$ м/сек. Ср. номограммы на черт. 628, 629 и 630!

Мы не исчерпали всех методов номографии и познакомились лишь с основными ее приемами, применяемыми в более простых случаях. Но и изложенный материал с достаточной яркостью выявляет могущество номографии в упрощении расчетов по формулам. При этом на первое место выдвигаются номограммы из выровненных точек. Хотя строить их иногда труднее, чем номограммы из помеченных линий, но их компактность и отсутствие большого числа загромождающих чертеж линий, особенно же исключительная простота интерполирования — делают их незаменимым орудием для вычислителя. Это прекрасно иллюстрируется и материалом последнего n°.

Еще один совет в заключение. Не всегда сразу угадывается наиболее выгодный тип номограммы или наиболее выгодное расположение ее составных частей. Следует в этих случаях сделать предварительно несколько грубых карандашных набросков, которые помогут ориентироваться.

ОБЩИЙ ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ И ПРАВИЛ.

Жирная цифра указывает n⁰, *цифра в скобках ( ) означает страницу. Номера от 1 до 170 относятся к I части, от 171 до 245 — к первому выпуску II части, от 245 до 337 — ко второму выпуску II части.*

Абак-см. номограмма из помеченных линий.

Абсолютная величина (а. значение) числа **1** (7*); а. в. (модуль) комплексного числа **142** (381).

Абсолютная погрешность истинная **1** (7), максимальная **1** (8), суммы **5** (15), разности **6** (18); вычисл. а. п. с помощью дифференциала **71** (197-200), **226** (240-245). См. поправка к прибл. значению величины.

Абсолютно (и неабсолютно) сходящиеся ряды **203** (152).

Абсцисса точки на оси **29** (85), на плоскости **29** (86).

Адамса-Штермера метод - см. приближенное интегрирование диффер. уравнений.

Амплитуда синусоидальной величины **46** (129).

Амслера полярный планиметр, описание **195** (119-122), теория **196** (122-124).

Аналитический способ задания функции **28** (82).

Анаморфоза **327-328** (348-354), **336** (397); а. логарифмическая - см. логарифм. и полулогар. сетка.

Аргумент функции **27** (80); а. комплексного числа **142** (381).

Арккосинус, арккотангенс, арксинус, арктангенс - см. обратные круговые функции.

Архимедова спираль - см. спираль.

Асимптота **40** (114), **41** (118), **44** (123), **45** (128), **49** (140), **102** (278, 279), **335** (391).

Астроида, как гипоциклоида **114** (306); неявное уравн. а. **114** (306); касат. к а., ее отрезок между осями **123** (330); длина дуги а. **132** (354); кривизна а. **137** (368); площадь а. **173** (17); объем тела вращения **179** (43); площадь поверхности вращения **182** (55); ц. тяжести дуги **183** (59).

Бегун **12** (29).

Бернулли уравнения - см. диффер. уравнения 1-го порядка.

Бесконечная десятичная дробь **1** (7), **3** (10), **18** (53), **22** (60), **23** (65).

Бесконечно-большая величина, связь ее с бесконечно-малой **21** (58, 59).

Бесконечное значение функции **45** (128), **79** (220), **82** (225), **84** (228, 232), **200** (140-141), **228** (249), **324** (339), **333** (384).

Бесконечно-малая величина **19** (56), сумма б.-м. **20** (57-58); сравнение б.-м., порядок б.-м. **25** (69), **26** (77), **67** (190), **119** (319), **205** (157-159), **211** (178), **213** (185-192), **214** (193), **224** (231, 233, 234), **225** (239), **244** (320), **250** (25), **300** (236-238), **301** (242); главная б.-м. **25** (70); главная часть б.-м. **26** (74), **67** (191), **178** (35), **182** (57), **224** (231, 233), **330** (366*); эквивалентные б.-м. **25** (71), **26** (72, 74), **244** (321), **330** (366*); сумма бесконечно большого числа б.-м. величин **174** (22), **246** (5), **250** (25).

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, ее сумма **22** (60), из нее прибл. формула **26** (74).

Бесконечный ряд - см. ряд.

Бином Ньютона, вывод из ф-лы Тейлора **144** (287), примеры **144** (388).

Биномиальный ряд **206** (160-161).

Вектор **111** (296), **230** (259); в., как изображение синусоид. величины **46** (130), как истолкование комплексного числа **141** (380); длина в. **230** (259), геометрич. равенство в. **141** (380), **230** (259-260), геометрич. сложение и вычитание в **48** (134), **111** (296), **141** (380), **230** (260); проекции в. на оси **141** (380), **230** (261-262), **231** (263), **232** (268); произведение двух в. скалярное **233** (270), выражение его через проекции в. (271), произ-

ведение двух в. векториальное (271), проекции его на оси (271-272), произведение в. на скаляр, проекции на оси 243 (318-319); геометрич. производная в. по скаляру 243 (319), ее проекции (319-320), разложение геом. производной на составляющие (320-321); производная второго порядка (321).

Векториальное произведение двух векторов - см. вектор.

Верные знаки, число их 3 (11, 12); определение числа в. з. по относительной погрешности 4 (13); число в. з. в сумме 5 (17), разности 6 (18), произведении и частном 7 (20), 8 (22).

Вершины гиперболы 102 (278), графика 77 (214), конуса 240 (307), параболы 104 (283), эллипса 98 (272), эллипсоида 240 (301).

Визир 12 (29).

Винтовая линия, ее параметр. уравнения 238 (291), явные уравнения (292); правая и левая в. л. (292); касательная к в. л. 241 (313), она пересекает образующие цилиндра под пост. углом; соприкасающаяся плоскость к в. л. 241 (314), главная нормаль в. л. (315); длина дуги в. л. 242 (316), кривизна в. л., радиус и центр кривизн. л (317-318).

Вогнутость кривой, направление в. 128 (344-345); применение в теории кривизны 135 (361), в теории изгиба балок 272 (122).

Возвышение в квадрат, в куб с помощью логар. линейки 14 (37, 40), с помощью графика на логар. сетке 312 (293-294).

Возвышение в степень приближ. числа 9 (23), 71 (197).

Возрастание функции 76 (213).

Выпуклость кривой - см. вогнутость.

Вычисление корней уравнений: кубических 149 (400), произвольных 150 (404): метод Ньютона или касательных 151 (405), метод хорд и комбинированный метод 152, 153 (408, 409); см. графическое решение уравнений и номограммы.

Вычитание приближ. чисел 6 (18), случай близких чисел 6 (18), 26 (74), 67 (191*); в. геометрическое - см. вектор.

Гармоники 215 (196).

Гармонический анализ 215 (196); см. ряды тригонометрические; г. а. практический, схема Рунге для 12 ординат 218-219 (211-219), для 24 ординат 220-221 (219-222); применение правила Симпсона 221 (223).

Гаусса метод наименьших квадратов - см. метод н. к.

Гаусса обозначения для сумм 317 (309).

Геометрическое равенство, г. сложение и вычитание, г. дифференцирование векторов - см. вектор.

Гипербола, геом. определение, фокусы г. 101 (276); оси вещественная и мнимая, центр г. 102 (277-278); параметр г. 106 (286); эксцентриситет г. 102 (278); уравн. г., отнесенное к осям 101 (277), отнесенное к вершине 106 (285), параметрическое представление г. 110 (295); асимптоты г. 102 (278-279); сопряженные г. 102 (279); касат. и нормаль к г. 122 (328), их свойства 124 (333); кривизна г. 137 (367); г. как сечение кругового конуса 180 (290); площадь г. 171 (7).

Гипербола равнобочная 41 (117), 101 (277), 102 (279), 107 (288); графическое построение по точкам 41 (117), связь с проективной шкалой 323 (335); параметрическое представление г. р. 110 (295); кривизна, построение центра кривизны 136 (363); г. р. как эмпирическая кривая 311 (286, 288-289), 316 (305-307); см. пропорциональность обратная; площадь г. р. 171 (4).

Гиперболическая ветвь кривой 40 (114).

Гиперболические логарифмы 171 (3).

Гиперболические функции 50 (140); дифференцирование г. ф. 62 (167); разложение г. ф. в ряды 206 (162-163); аналогия г. ф. с круговыми 50 (141-142), 110 (295-296), 171 (8), 206 (165); использов. г. ф. 51 (144-145), 105 (284), 120 (320), 136 (364), 149 (400), 157 (426), 171 (5), 179 (43*), 183 (59), 184 (63), 279 (142), 280 (144, 146), 290 (191-192), 304 (262-263).

Гиперболоид однополый, уравн. 240 (302), сечения его плоскостями (302-304), прямолинейные образующие (304-305); касат. плоскость к г. о. 245 (328); г. о. вращения 240 (302), его объем 179 (42, 43).

Гиперболоид двуполый, уравн. 240 (305), сечения его плоскостями (306); касат. плоскость к г. д. 245 (328); г. д. вращения 240 (305); его объем 179 (42, 43).

Гипоциклоида, ее параметр. представление 114 (304-305); прямая, как г. 114 (307); см. астроида.

График функции 30 (87), примеры 31 (90-95); уравнение г. 30 (87); связь г. с функциональной шкалой 322 (329, 332); г. линейной функции - см. линейная функция; г. квадратичной

функции - см. парабола 2-й степени; г. обратно-пропорц. зависимости и г. дробно-линейной функции-см. гипербола равнобочная; г. обратной функции **43** (122).

Графический способ задания функции **30** (89).

Графическое дифференцирование **66** (186).

Графическое интегрирование, I-й способ (способ хорд) **197** (124-130), II-й способ (способ касат.) **198** (130-133); повторное г. и. для нахождения статич. моментов и моментов инерции **199** (133-135); г. и. диффер. уравнения $y'' = f(x)$ с помощью веревочного многоугольника **271** (119-120), сопоставление с двукратным г. и. по способу касат. (120-121).

Графическое интерполирование **30** (88).

Графическое построение по точкам гиперболы равнобочной **41** (117), параболы 2-й степени **36** (106), параболы 3-й степени **39** (113), полукубической параболы **42** (120), параболы n-й степени **40** (115), эллипса **99** (273); использование г. п. для построения функциональных шкал **323** (384-385).

Графическое решение системы двух уравнений 1-й степени **92** (253), уравн. 2-й или 3-й степени **51** (142-143), произвольного уравн. **51** (143 и след.).

Гульдина теорема о поверхности тела вращения и ее применения **183** (58-60).

Гульдина теорема об объеме тела вращения и ее применения **184** (62-65), **254** (50); обобщение Г. т. **184** (165), **256** (65).

Даламбера признак сходимости рядов **202** (149), **203** (152).

Движок, лицевая сторона д. **12** (29), **13** (30); обратная сторона д. **16** (46).

Двойная шкала **322** (331).

Двойной интеграл - см. интеграл двойной.

Декартов лист, неявное уравн. и полярное уравн. **178** (37); площадь д. л. **178** (37), **200** (140); касат. к д. л. **227** (248).

Деление отрезка в данном отношении, на плоск. **89** (244), в простр. **231** (265).

Деление прибл. чисел **7** (19), с помощью логар. линейки **13** (35), с помощью прибл. формул **85** (74); номограммы д.-см. умножение.

Дифференциал вектора (по скаляру) **243** (319).

Дифференциал независимой переменной **69** (193), **224** (233*).

Дифференциал функции одной независимой перем. **67** (190); д. как главная часть беск.-малого приращения функции **67** (191), **177** (35); таблица д. **75** (210-212); независимость формы д. от выбора независимой переменной **69** (194); д. высших порядков **69** (193), **205** (157); применение д. к выводу прибл. формул **70** (195), к прибл. вычислениям и оценке погрешн. **71** (196); к составлению диффер. уравнений **74** (210), **259** (79-81).

Дифференциал функции от нескольких перем., частный **224** (231), полный (233); полный д., как главная часть полного приращ. функции (233); независимость формы полного д. от выбора независимых перем. **225** (235, 237); применение полного д. к прибл. вычислениям и оценке погрешн. **225** (238), **226** (240-245); геом. иллюстрация понятий о частном и полном д. **245** (327); признаки полного д. **248** (14-17).

Дифференциальные уравнения, обыкновенные, **257** (73); порядок д. у. (74).

Дифференциальные уравнения 1-го порядка **257-267** (74-113); общий интеграл **257** (74), частный интеграл или частное решение (75), особенное решение **258** (79); начальные условия **257** (75); геометр. истолкование д. у. 1-го порядка **263** (94-98); нахождение д. у. по его общему интегралу (96-97); составление д. у. **259** (79).

Дифференциальные уравнения 1-го порядка и 1-й степени относительно производной **258** (75); д. у. с отделяющимися переменными **258** (75-79); линейные д. у. **264** (98-105), интегрир. множитель для них **267** (112); д. у. Бернулли **264** (101); однородные д. у. **266** (105-110); д. у. в полных дифференциалах **267** (110-113), понятие об интегрир. множителе (111-112).

Дифференциальные уравнения 2-го порядка **268-288** (113-187); общий интеграл **268** (113), частный интеграл или частное решение (113), первый интеграл (113), особенное решение **279** (143-144); начальные условия **268** (114); предельные условия (114) [особые случаи пред. усл. - см. **278** (140), **280** (146), **288** (186-187); геометр. истолкование **268** (114-115).

Дифференциальные уравнения 2-го порядка, вида $y'' = f(x)$ **268-276** (115-

131, графич. интегрир. их с помощью веревочного многоуг. **271** (119-120); д. у. вида $y'' = f(y')$ или $y'' = f(x, y')$ **277-278** (131-141); д. у. вида $y'' = f(y)$ **279-280** (141-151).

Дифференциальные уравнения 2-го порядка, линейные **281-288** (151-187); д. у. без последнего члена, вид общего интеграла **281** (152-153); д. у. без последнего члена с постоянными коэффиц. **282** (153-159), его характеристическое уравн. (156-158); д. у. с последним членом, вид общего интеграла **283** (159-160), дополнительная функция (159); случай постоянных коэффициентов, разыскивание частных решений **284** (161-168); д. у. Эйлера **287-288** (180-187).

Дифференциальные уравнения линейные высших порядков **289-290** (188-195); общий интеграл **289** (188), характеристическое уравнение (189).

Дифференциальных уравнений системы-см. система д. у.

Дифференциальные уравнения в частных производных **304-306** (260-273), порядок д. у. **304** (206); предельные условия **304** (261), **305** (266), **306** (270); начальные условия **304** (262), **305** (266), **306** (270).

Дифференцирование **54** (151), **222** (224-225); правила д. **59** (158); д. обратной функции **57** (153); д. сложной функции **61** (164), **225** (235); д. неявных функций **122** (326), **137** (365), **227** (245-248); д. графическое **66** (186); д. геометрическое-см. вектор.

Дифференцирбвание определенного интеграла по параметру, правило Лейбница **251** (31-32).

Дифференцирование почленное степенного ряда **204** (155).

Дополнительная функция **283** (159), **289** (188).

Дополнительные хорды эллипса **100** (276).

Дробная рациональная функция - см. рациональная дробь.

Дробно-линейная функция **41** (118); ее график-см. гипербола равнобочная; получение д.-л. ф. по эмпирическим данным **316** (305-307); связь с проективной шкалой **323** (333-334).

Дуга, предел отношения д. к хорде **130** (347-348), **242** (315); дифференциал д. **130** (349), **181** (48), **242** (316); производная д. по абсциссе **130** (349), по параметру **131** (351), **242** (316), по полярному углу **131** (353); вычисление длины д. с помощью неопред. интеграла **131** (350-357), с помощью опред. интеграла **181** (48-53), **242** (316).

Зависимость функциональная между величинами **27** (80), отличие ее от причинной зависимости **27** (81).

Зетовая номограмма-см. номограмма.

Знакопеременные ряды-см. ряды.

Извлечение квадр. и кубич. корня с помощью логар. линейки **14** (39, 40), с помощью прибл. формул **26** (75), с помощью графиков на логар. сетке **312** (293-294).

Интеграл двойной, его определение для случая прямоуг. области **250** (23-26), для случая кривол. области **252** (32-33), более общая точка зрения на и. д. **253** (37-38); вычисление и. д. путем сведения его к повторному **251** (26-28), **252** (33-34), **253** (39); переход к полярным координатам **253** (38-39).

Интеграл криволинейный, его определение **246** (4-5), его вычисление путем сведения к обыкнов. опред. и. **246** (5-6), **247** (6-8), с помощью первообразной функции (если она сущ.) **249** (20); и. к. по замкнутому контуру **246** (6), **249** (20); вычисление площади плоской фигуры с помощью и. к. **247** (8, 10); два типа и. к. и их свойства **249** (19-20); случай независимости и. к. от формы пути интегрирования **249** (20).

Интеграл неопределенный **72** (200), **154** (414), таблица и. н. **75** (210-212), **154** (414-415), **168** (464-471); различные формы одного и того же и. **165** (455-456), **166** (461), **167** (461, 464); и. н., выражающиеся в конечном виде через элементарные функции **162** (442), **165** (455), **166** (460); и. н., не выражающиеся в конечном виде **170** (475) [см. и. эллиптический]; геометрическое истолкование и. н. в виде переменной площади **169** (473). См. интегрирование функций.

Интеграл общий диффер. уравнения 1-го порядка **257** (74), 2-го порядка **268** (113), линейного диффер. уравнения без последнего члена **281** (153), **289** (188), с последним членом **283** (160), **289** (188); и. о. нормальных систем диффер. уравнений **291** (197-198), канонических систем диффер. уравнений **292** (202).

Интеграл определенный (простой), как разность двух значений первообразной функции **169** (474), **171** (3), как предел сумм **174** (19-23); выражение и. о. площадью **169** (473), **171** (3); свойства и. о. **172** (10-14),

интегрирование по частям **172** (12-14), замена переменной в и. о. **173** (14-19); схема применения и. о. **178** (33-35); и. о. несобственный, случай бесконечных пределов **200** (135-140), интеграл $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ **253** (42), **306** (272); случай обращения в бесконечн. подинтегральной функции **200** (140-141); и. о., зависящий от параметра, его дифференцирование по параметру **251** (31-32); разложение и. о. в бесконечный ряд **208** (169). См. приближ. вычисление и. о.

Интеграл особенный (о. решение) диффер. уравн. 1-го порядка **258** (79), 2-го порядка **279** (143-144).

Интеграл первый диффер. уравнения 2-го порядка **268** (113).

Интеграл повторный **199** (134), **251** (27), **252** (33-34), **255** (61-62); его величина не зависит от порядка составляющих интегриров. **251** (28).

Интеграл тройной, его определение **255** (57-59), вычисление и. т. путем сведения к повторному **255** (60-62); переход к цилиндрическим координатам **255** (59-60).

Интеграл частный (ч. решение) диффер. уравнения **257** (74-75), **268** (113); разыскание ч. решений в случае линейного диффер. уравн. с постоян. коэффиц. без последнего члена **282** (156-158), **289** (189), с последн. членом **284** (161-168), **289** (189), в случае диффер. уравн. в частных производных (по методу Фурье) **304** (262-263), **305** (267-268).

Интеграл эллиптический 1-го, 2-го, 3-го рода **170** (477); и. э. 1-го рода **181** (52), полный **181** (53), разложение его в ряд **208** (170-171), **280** (151), и. э. 2-го рода **181** (51), полный **181** (51), **194** (118), разложение его в ряд **208** (170-171), прибл. вычисл. с помощью ряда **210** (178).

Интегрирование дифференц. уравнений-см. дифференц. уравнения; и. д. у. с помощью рядов **295** (213-219); численное и. д. у., приближенное-см. приближенное и. д. у.

Интегрирование полных дифференциалов **248** (14-17), **267** (110-112).

Интегрирование почленное рядов **207-208** (165-171), **216** (198-199), **305** (268-269).

Интегрирование функций **73** (203); правила и. **73** (203-206); и с помощью простейших приемов **155** (415); и путем замены переменной **73**, III (205), **156** (419); и. по частям **158** (428); и. рацион. дробей **160-163** (434-447); и. иррацион. выражений, содержащих $\sqrt[n]{ax+b}$ **157** (424) или $\sqrt{ax^2+bx+c}$ **164** (443-452); Эйлеровы подстановки **165** (453); и. рацион. выражений от $\sin x$ и $\cos x$ **166-167** (456-464).

Интегрирующий множитель **267** (111-113), **250** (23).

Интерполирование **28** (82—84), и. графическое **30** (88), линейное **28** (84), **35** (105), **93** (256*); и с помощью полинома, интерполяционная формула Лагранжа **146** (390-392), признак пригодности для и. полинома данной степени **315** (303-305); и. с помощью эмпирической формулы **307** (273), см. эмпирические формулы.

Интерполирование в номограмме, в случае функцион. шкалы **322** (331), в случае номограммы из помеч. линий **325** (342), **336** (397), в случае номограммы из выровненных точек **329** (355), **330** (365), **337** (412).

«Истинное значение» неопределенного выражения **22** (61).

Кавальери принцип **179** (46).

Каноническая система диффер. уравнений-см. системы диффер. уравнений.

Кардиоида, как эпициклоида **114** (306); параметр. представление к. **119** (317); к., как улитка, ее полярное уравн. **119** (317); длина дуги к. **132** (355); кривизна **136** (363); площадь **178** (36); площ. поверхности вращения **182** (55); полярный момент инерции к. **254** (46).

Касательная к плоской кривой **65** (183); ее уравнение **120** (321), связанные с нею отрезки **120** (321), **121** (323-325), **261** (90), **263** (95, 96), **279** (143); к. в вершинах графика **77** (215); к. к кривой, заданной неявным уравнением **122** (326), **227** (247-248), заданной параметрическими уравн. **126** (338), заданной полярным уравнением **127** (341); степень близости к. и кривой **67** (191), **205** (159).

Касательная к пространств. кривой, ее уравнения **241** (311-312).

Касательная плоскость к поверхности **245** (325-326), **254** (431).

Катеноида **136** (364), **280** (145), кривизна к. **136** (364), эволюта к. **139** (375).

Квадратичная функция **36** (105), **38**

(108), наиб. и наим. значения к. ф. 38 (110); свойство ее производной 64 (180), 68 (193); определение ее коэффиц. по опытным данным, по методу выбран. точек 146 (390), 314 (299-300), по методу уравновеш. погрешностей 314 (300), по методу наим. квадратов 317 (312). См. парабола 2-ой степени.
«Квадратура» = вычисление интеграла или площади 169 (475).
Кольцо, площадь его поверхн. 183 (60), объем 184 (65).
Комплексные числа - см. числа комплексные.
Конические сечения 108 (290), 240 (307).
Конус второго порядка, уравн. 240 (306), к. асимптотический (307-308), сечения к. плоскостями (307); касат. плоскость к к. 245 (329); к. вращения (круговой к.), уравн. 240 306); объем кругового к. 179 (40), случай усеченного к. 179 (46); ц. тяжести кругового к. (тела) 190 (91), то же для поверхн. его (91); площадь фигуры, лежащ. на поверхн. кругового к. 254 (44).
Координаты точек на плоскости, прямоугольные 29 (84); косоугольные 323 (335), 334 (386); начало к., оси к., координатные углы 29 (86); преобразование к., перенос начала 37 (107), поворот осей и общее преобраз. к. 107 (286); к. полярные, полюс и полярная ось 116 (308); связь между прямоуг. и полярными к. 116 (309).
Координаты точек в пространстве, прямоугольные 231 (262-263, 264); начало к., оси к., координатные углы (262—263); правая и левая системы координатных осей (262-263); преобразование к., перенос начала 234 (274), поворот осей (275-276), Эйлеровы углы (276), общее преобразование к. (276); к. цилиндрические 255 (59).
Корни полинома, к. алгебр. уравнения см. полином.
Корню спираль-см. спираль.
Косинус, котангенс-см. тригонометрические функции.
Косинус, котангенс гиперболические-см. гиперболические функции.
Косинусы направляющие 232 (266).
Коши (Эйлера-) метод - см. приближенное интегриров. диффер. уравнений.
Коэффициент пропорциональности 32 (97), 33 (98, 99), 74 (209, 210); определение к. п. из опытных данных по методу средних арифмет. 309 (277), по методу уравновешив. погрешностей 309 (278), по методу наим. квадратов 317 (308-309).
Коэффициент угловой прямой на плоскости 34 (100), 92 (250); обращение его в ∞ 92 (251), 122 (327*), 126 (339*).
Коэффициенты направления прямой в пространстве 239 (293).
Коэффициенты Фурье 216 (202), 321 (328).
Кривая на плоскости, ее аналитич. представление явным или неявным уравнением 30 (87), 92 (250), параметрич. уравнениями 110 (294), полярным уравн. 117 (312).
Кривая в пространстве, аналитич. представление ее двумя неявными уравн. 238 (289-290), параметрич. уравнениями (290-291).
Кривизна плоской кривой, средняя 133 (357), к. в точке 134 (358); круг, центр и радиус к. 135 (360); степень близости круга к. к кривой 205 (159).
Кривизна пространственной кривой 242 (316-317); круг, центр и радиус к. (318).
Криволинейная шкала 334 (385-387).
Криволинейный интеграл - см. интеграл криволинейный.
Кривые 2-го порядка, кривые n-го порядка 108 (289).
Круг, центр тяжести дуги к. 183 (59), момент инерции к. 185 (67), то же для полукруга (71), то же для кругового кольца (69); полярный момент инерции к. 120 (91); центр тяжести и момент инерции кругового сектора 254 (45).
Кубическая парабола - см. парабола 3-й степени.
(43); исследование к. у. 148 (397), число веществ. корней 15 (43), 148 (399); решение к. у. с помощью логар. линейки 15 (43); вычисление корней к. у. с помощью тригоном.
Кубическое уравнение, привед. вид 15 функций 149 (400); номограмма для решения к. у. 335 (390-391).

Лагранжа формула, ф. конечных приращений 68 (192), 175 (26-27); интерполяционная 146 (392).
Лейбница правило, дифференцирование интеграла по параметру 251 (31, 32).
Лемниската, ее полярное уравн. 119 (318), неявное уравн. л. в прямоуг. координатах (319); характер л. вблизи полюса 119 (319), 137 (369); касат. к л. 127 (343); кривизна л. 137 (369); площадь л. 178 (36); длина дуги л. 181 (52), 200 (141);

площадь поверхности вращения 182 (55).
Линейная функция 32 (97), 33 (98), ее график 34 (99); каждая функция прибл. уподобляется л. ф. 67 (191); установление коэффиц. линейной функции по двум ее значениям и т. п. 94 (257 и сл.); установление коэффиц. л. ф. из опытных данных, по методу натянутой нити 94 (259), 310 (280), по методу уравновешив. погрешностей 310 (280), по методу наим. квадратов 327 (310-311); приведение к л. ф. других формул 311-313 (284-299).
Линейные диффер. уравнения-см. диффер. уравн.
Линейчатая поверхность 240 (304, 309), 247 (11).
Логарифмическая линейка 11-17 (27-52); л. л. системы Рица 12 (29), 14 (40), 15 (45), 16 (47, 48, 49); нахождение логарифма по числу и обратно, с помощью л. л. 16 (46); производство других действий-см. по их названиям; точность вычислений по л. л. 12 (30), 71 (198).
Логарифмическая сетка, л. бумага 312 (293-294), 328 (350-353), 336 (400-402).
Логарифмическая спираль-см. спираль.
Логарифмическая функция и ее график 44 (122), связь его с л. шкалой 322 (332); характер возрастания л. ф. 44 (123), 56 (153); дифференц. л. ф. 56 (152); приближ. формулы 26 (73, 78), 211 (179), 212 (183-184); разложение в ряд л. ф. 208 (166); см. логарифмы.
Логарифмическая шкала 11 (27), 312 (293), 314 (298), 322 (329), 324 (336, 337), 329 (355), 330 (362-365), 337 (403-409); связь с графиком л. ф. 322 (332); снятие л. ш. с л. бумаги или л. линейки, изменение масштаба 323 (332-333); «периодичность» л. ш. 12 (30), 312 (294*), 314 (299), 328 (352), 336 (400). См. логарифмич. и полулогарифмич. сетка.
Логарифмы, переход от одной системы л. к другой 23 (67), 44 (124), 56 (152); см. модуль; л. натуральные или неперовы. 23 (66), 44 (124), 56 (153); основание натуральных л., неперово число *e* 23 (65), его вычисление с помощью ряда 210 (176); вычисление ln 10 с помощью опред. интеграла 194 (117-118), ln 2 с помощью ряда 210 (177).

Маклорина ряды 204 (156*).
Максимумы и минимумы функции (одной переменной) 77 (214); м. и м. квадратичной функции 38 (110); правила для нахождения м. и м. 79 (219), 80 (221). См. наибольш. и наименьш. значения функции.
Масштаб на осях координат 29 (85), 30 (88), 31 (90-95), 34 (99, 101), 51 (145), 65 (184), 92 (250*); м. шкал на логар. линейке 11 (28), 16 (47-49); м. при вычислении площадей и средних значений 175 (25-26); м. при графич. дифференцировании 66 (186), при графич. интегрировании 197 (127, 128), 198 (132-133); м. при построении функциональной шкалы, двойной шкалы 322 (330, 331); изменение м. 323 (332); выбор м. для шкал, входящих в состав номогр. из выровн. точек 329 (356-357, 358), 330, 331 (369-370), 332, 333 (380-381), 334 (386-387), 335, 337; м. при наложении двух абаков 336 (396).
Метод выбранных точек для опред. коэффиц. эмпирич. формулы 146 (390-393), 314 (300), 315 (303), 316 (305), 319 (319, 321, 322, 323).
Метод выровненных точек для представления номограммой зависимости между 3-мя перем. 329-335 (354-395), между 4-мя перем. 337 (402-412).
Метод касательных (Ньютона) для вычисления корней уравнения - см. вычисление корней, м. к. для графич. интегрирования - см. графическое интегрирование.
Метод координат 88 и сл. (243 и сл).
Метод наименьших квадратов для определ. коэффиц. эмпирич. формулы 317 (307-312), 318 (312-318), 319 (319, 320, 321, 322); применение м. н. к. к составлению приближ. формул 320 (324-325), в частности к тригоном. суммам 321 (325-328).
Метод натянутой нити для определ. коэффициентов линейной эмпирич. формулы (или приводящейся к линейной) 94 (259), 310 (280), 311 (284), 312 (290, 295), 313 (297, 298).
Метод неопределенных коэффициентов-при выводе формулы Тэйлора для полинома 144 (385-386) и ряда Тэйлора 204 (155, 157*), при разложении рацион. дробей на простые 162-163 (442-447, особ. 444), при разыскании частных решений диффер. уравнения 284 (161-168), при интегрировании диффер. уравнений рядами 295 (215-216.
Метод помеченных линий (или м. семейства кривых) для представления номограммой зависимости между 3-мя перем. 325-328 (341-354) между 4-мя перем. 336 (395-402).

Метод стоячих волн (Фурье) для решения диффер. уравнений в частных производных **304** (262-263, 265), **305** (267-268).
Метод уравновешивания погрешностей для определ. коэффициентов эмпирич. формулы **308** (276), **309** (278), **310** (280), **311** (285), **312** (290), **313** (297), **314** (300), **315** (303).
Метод хорд для вычисления корней уравнения - см. вычисление корней, м. х. для графич. интегрирования - см. графич. интегрирование.
Многозначная функция **42** (120), **43** (122), **49** (138).
Модуль для перехода от одной системы логарифмов к другой, в частности от натуральн. к десятичн. **23** (67), **24** (69), **44** (124), **226** (245).
Модуль комплексного числа **142** (381).

Наибольш. и наименьш. значения квадратичной функции **36** (105), **38** (109); н. и н. значения функции (одной переменной) **83** (226); упрощения при их разыскании **84** (232); задачи, к ним сводящиеся **71** (199), **84-87** (228-242), **136** (364), **138** (374); выбор независимой перем. **86** (236); случай не-непрерывной независимой перем. **87** (241); достижение н. и н. значения на концах промежутка **84** (229, 231), **85** (234, 235); графический способ нахождения н. и н. значений **31** (94).
Наибольш. и наименьш. значения функции двух или нескольких перем. **87** (240), **228** (248-252), см. также метод наим. квадратов; случай связанных переменных **228** (252), **229** (255, 256-257).
Направляющие косинусы **232** (266).
Натуральные логарифмы - см. логарифмы.
Начало координат **29** (85, 86), **231** (263).
Начальные условия, в случае диффер. уравнения 1-го пор. **257** (75), **263** (97), 2-го пор. **268** (114), высшего пор. **289** (189-190); в случае нормальных систем диффер. уравнений **291** (198), канонических систем **292** (202-203); в случае диффер. урав. в частных производных **304** (262), **305** (266), **306** (270).
Независимая переменная **27** (80), изменение н. п. **27** (80), **31** (91), при дифференцировании **69** (194), при интегрировании функций **156** (419), **173** (14), при интегрировании диффер. уравнений **287** (180), **295** (217), **296** (220).
Немая ось **336** (397), н. шкала **337** (403).

Неопределенные выражения вида $\frac{0}{0}$ **22** (61-64), **25** (72), **26** (78), **54** (151), **182** (57), **330** (366*); н. в. вида $\frac{\infty}{\infty}$ **22** (64-65), **102** (278), н. в. вида $\infty - \infty$ **102** (278).
Неперово число, см. число *e*.
Непрерывная функция, функция с н. графиком **84** (228), **215** (195), **216** (204).
Несобственный определенный интеграл — см. интеграл определенный.
Нечетная функция **173** (19), разложение н. ф. в ряд по синусам **216** (201-202), **217** (206).
Неявные функции **27** (80-81), дифференцирование их **122** (326), **137** (365), **227** (245-248).
Номография **322-337** (329-412).
Номограмма **322** (329); н. для зависимости между 2-мя перем.: график, двойная шкала **322-324** (329-342); н. для зависимости между 3-мя перем.: н. из помеч. линий (абак) **325-328** (341-354), н. из выровненных точек с тремя параллельн. шкалами **329-330** (354-369,) Z-н. **331-332** (369-379), радиальная н. **333** (379-385), н. с криволинейной шкалой **334-335** (385-395); н. для зависимости между 4-мя перем.: н. из помеч. линий **336** (395-402), н. из выровненных точек **337** (402-412).
Нормаль к плоской кривой, ее уравн. **120** (321), отрезок н. **120** (321), **263** (95, 97*), **279** (143); см. поднормаль; н. к пространств. кривой, главная н. **241** (315); н. к поверхности **245** (327-328).
Нормальная плоскость к простр. кривой **241** (315).
Нормальная система диффер. уравнений - см. система д. у.
Нормальная шкала **322** (331).
Нормальное уравн. плоскости - см. плоскость.
Нормирующий множитель - см. плоскость.
Ньютона бином, см. бином Н.
Ньютона метод для вычисл. корней - см. метод касательных.

Обратная функция **43** (120), **44** (123), ее производная **57** (153), **58** (157), **69** (195).
Обратные круговые или тригон. функции **49** (138); их дифференцирование **58** (157), прибл.. формулы **211** (179), **212** (184-185); разложение в ряды **208** (166-167).
Общий интеграл - см. интеграл общий.
Объем, вычисление о. тела по поперечн-

ным сечениям с помощью обыкнов. опред. интеграла **179** (38-46), **256** (63), **180** (47, 48), **194** (114) о. тела вращения **179** (39), **194** (115), **254** (50); о. некоторых тел ограниченных линейчатыми поверхностями **247** (11); вычисленные о. цилиндрич. бруса с помощью двойного интеграла **250** (23-26), **252** (32-33), **256** (63); вычисление о. произв. тела с помощью тройного интеграла **256** (63); о. тела в цилиндрич. координатах **256** (64-65).

Однородная функция степени m **266** (107*).

Округление числа **3** (10), по правилу дополнения **3** (11).

Окружность, ее уравнение в прямоуг. коорд. неявное и явное **96** (268); общий вид уравнения о. **96** (269); параметрическое представл. о. **110** (295); полярное уравн. о. **117** (312), **253** (40, 41), **254** (44, 46); касательная к о. **123** (331); кривизна о. **133** (358), **277** (132-133).

Оси координат на плоскости **29** (86), в пространстве **231** (263).

Особенная точка на кривой **227** (248), на поверхности **245** (329).

Особенный интеграл (о. решение)-см. интеграл особенный.

Остаток ряда (бесконечного) **201** (143).

Отделение переменных в дифференц. уравнениях 1-го порядка **253** (75—76).

Относительная погрешность истин. и максим. **2** (8); связь с абсолютной **2** (9); определение о. п. по числу верных знаков **4** (12); о. п. суммы **5** (16), разности **6** (18), произвед. и частного **7** (19), **226** (240-241), степени и корня **9** (23), **71** (197); о. п. при пользовании логар. линейкой **12** (30), **71** (198); вычисление о. п. с помощью дифференцирования **71** (197-200), **226** (240-244).

Парабола 2-ой степени **36** (105), **38** (108); графич. построение по точкам **36** (106); геометр. определение п., фокус и директриса п. **104** (282); параметр п. **106** (286); уравнение п., отнесенное к оси и касат. в вершине **104** (283); касат. и нормаль к п. **122** (329), их свойства **124** (333), **125** (337); построение касат. к п. **124** (334); подкасат., поднораль **120** (321), **121** (323-325); кривизна п. **137** (365); построение центра кривизны **137** (366); эволюта п. **139** (375); п. как предельный образ для эллипса и гиперболы **106** (286); п. как сечение кругового конуса **108** (290); площадь п. **171** (5, 6); длина дуги п. **181** (49), разложение в ряд **208** (167-168); центр тяжести площади **184** (63); п. как приближение к цепной линии **212** (181); п. как эмпирич. кривая - см. квадрат. функция.

Парабола 3-й степени **39** (111-112); графич. построение по точкам **39** (113); кривизна **136** (364), **138** (371); п. как эмпирическая кривая, определение ее коэффиц. по методу выбран. точек **315** (303), **316** (306), **319** (321), по методу уравновеш. погрешностей **315** (303), по методу наим. квадратов **317** (312).

Парабола полукубическая **42** (120); графическое построение по точкам **42** (120), п. п. как эволюта обыкнов. параболы **139** (375).

Парабола n-ой степени **39** (114), графич. построение по точкам **40** (115), подкасат. **120** (321).

Параболическая ветвь кривой **39** (114).

Параболоид вращения, уравнения **240** (308); объем **179** (41), поверхн. **182** (54).

Параболоид эллиптический, уравнение **240** (308), сечения плоскостями (308-309); касат. плоскость **245** (329).

Параболоид гиперболический, уравнение **240** (309, 310), сечения плоскостями (309), прямолинейные образующие (309); касат. плоскость **245** (329).

Параметр эллипса, гиперболы, параболы **106** (285-286); п. в уравнениях плоской или пространств. кривой - см. параметрическое представление кривой; п. в уравнении семейства кривых **263** (94); п. в определенном интеграле **251** (31).

Параметрическое представление кривой на плоскости **110** (294), **110-112** (296-302), **208** (170), **334** (386-387); в пространстве **238** (290-293).

Первообразная функция - см. интеграл неопределенный; п. ф. для дифференциального выражения $P \cdot dx + Q \cdot dy$ **248** (14), определение ее с точностью до пост. слагаемого (17).

Перегиб, точки п. **77** (215), **129** (345), **134** (359), т. п. интегральной кривой **193** (132).

Переменная величина **19** (54); зависимость между п. в. **27** (79), независимая п. в., зависимая п. в. **27** (80); см. функция.

Период синусоидальной величины **46** (129).

Периодическая функция **215** (194), **216** (200); разложение ее на гармоники - см. ряды Фурье и гармонический анализ.
Планиметр Амслера - см. Амслера планиметр.
Плоскость, нормальное уравн. п. **236** (281), приведение общего уравн. к нормальн. виду, нормирующий множитель (282-283), явное уравн. п. (284), уравн. в отрезках (284), п. через точку **237** (285), угол между двумя плоскостями (285-286), условие параллельн. двух п. (286-287), условие перпендикулярности двух п. (287), расстояние от точки до п. (287), расстояние между двумя параллельн. п. (287-288); см. прямая в пространстве.
Площадь криволинейной трапеции **169** (474-476), **171** (3, 9), **254** (43) знак п. **174** (23); п. фигуры, простирающейся по одному измерению в бесконечность **200** (135-136, 141); п. сектора, в полярных координатах **178** (33-38), **254** (43); вычисление п. произвольной плоской фигуры двойным интегралом **254** (43); п. поверхности вращения **182** (53-57); п. кривой поверхности **254** (43-44); п. проекции плоской фигуры **171** (7), **254** (43).
Площадь треугольника по координатам вершин **91** (247), **233** (272), геометр. смысл знака п. **91** (248), **233** (272*), п. многоугольника **91** (249).
Поверхность, аналитическое представление п. уравнением явным **235** (277-278), неявным (278).
Поверхность вращения, ее уравнение **235** (279-280); площадь п. в. **182** (53-57), статич. моменты и ц. тяжести п. в. **190** (91).
Поверхности второго порядка **240** (299-311).
Поверхности линейчатые - см. линейчатые п.
Повторный интеграл - см. интеграл повторный.
Погрешность приближ. значения - см. абсолютная и относительная погрешность.
Подера кривой **126** (340).
Подинтегральная функция **72** (200).
Подкасательная к кривой **120** (321), **121** (323), **263** (96).
Поднормаль к кривой **120** (321), **121** (323-325).
Показательная функция **44** (122); характер ее возрастания **44** (123), **57** (155); дифференциров. п. ф. **57** (155); диффер. уравнение, характеризующее показательную функцию **74** (209-210); приближ. формулы **211** (179), **212** (181, 183); разложение в ряд п. ф. **206** (159); п. ф. в эпирической формуле **313** (296-299), сведение к линейной функции с помощью логарифмирования **313** (296-298), **318** (315-316) с помощью полулогарифмической бумаги **313** (298-299).
Полином целый **39** (111); дифференц. п. **59** (159-160), производн. высших пор. **64** (177), интегрирование п. **73** (204-205); корн. п. и разложение его на линейные множители **143** (382); простые, кратные корни (383); связь между корнями и коэффициентами (384); признаки кратности **145** (388); разложение п. на вещественные множители 1-й и 2-й степени (390); вычисление корней п. **150-153** (404-413); интерполирование с помощью п. **146** (390), признак пригодности п. данной степени **315** (303-304).
Полный дифференциал - см. дифференциал и интегрирование п. д.
Полулогарифмическая сетка, п. бумага **313** (298), **336** (402).
Полюс планиметра **195** (119); п. при графич. дифференцировании **63** (186), п. при графич. интегрировании **197** (125); п. системы координат **116** (308).
Полярная диаграмма функциональной зависимости **117** (310-312).
Полярное уравнение кривой **117** (312).
Полярные координаты, п. ось, п. радиус-вектор, п. угол **116** (308).
Понселе приближ. формула для $\sqrt{1+x^2}$ **321** (325).
Поправка к приближ. значению **201** (143*).
Постоянные произвольные при интегрировании функций **72** (202), определение их из условий задач **74** (208-210), **131** (350, 351, 353); п. п. в общем интеграле диффер. уравнения или системы - см. интеграл общий; определение их из начальных или предельных условий - см. начальные условия, предельные условия.
Правило дополнения **3** (11).
Правило Лейбница - см. Лейбница правило.
Правило сокращенного умножения **8** (22).
Предел переменной величины **18-19** (53-56), действия над переменными и их п. **20** (56-58), примеры **22** (60-65), **23** (65-67); п. возрастающей ограниченной переменной **202** (145).

Предельные условия в случае обыкновен. дифференц. уравнений 2-го порядка 268 (114), особые формы п. у. 278 (140), 280 (146), 288 (186-187); особая роль п. у. по сравнению с начальными условиями 286 (177), 290 (193); п. у. в случае диффер. уравнений высших порядков 289 (189-190); п. у. в случае диффер. уравнений в частных производных 304 (261-262), 305 (266), 306 (270).

Приближенное вычисление определенных интегралов: способ прямоугольников 191 (100-104), способ трапеций 192 (104-106), правило Симпсона 193 (106-109); см. Амслера планиметр, гармонический анализ и графич. интегрирование; п. в. с помощью рядов 209 (173-174); график для интеграла $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varphi} e^{-\alpha^2}d\alpha$ 306 (271-272).

Приближенное интегрирование обыкн. диффер. уравнений по способу Эйлера-Коши: уравн. 1-го пор. 297 (223-227); уравн. высших пор. и систем уравнений 298 (227-233), п. и. по методу Адамса-Штермера: уравн. 1-го пор. 300-302 (236-253), вычисление начальных значений 301 (242-244) сопоставление вычислений по методу Адамса-Штермера и по способу трапеций (в случае приведения к квадратуре) 302 (246-253), применение мет. Адамса-Штермера к уравн. высших пор. и к системам уравнений 303 (253-260).

Приближенные формулы элементарные для $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\cos\alpha$, $\ln(1+\alpha)$ $(1+\alpha)^n$, $\sqrt{1+\alpha}$ и др. 26 (72-73), применение их 26 (74-78), 138 (370, 372, 373); п. ф., полученные путем дифференцирования 70 (195), 71 (196); п. ф., непосредственно получающиеся усечением ряда Тэйлора 211-212 (178-185); другие п. ф. 213-214 (185-193); п. ф., получающиеся с применением метода наим. квадратов 320-321 (324-328).

Принцип сложения малых действий 224 (233).

Приращение независ. переменной 32 (96), 33 (98); п. функции (одной перем.) 32 (96), 33 (98), главная часть бескон.-малого п. функции 67 (90), формула конечных приращений 68 (192), п. функции от нескольких переменных, частное 222 (224), полное 224 (232), главная часть бесконечно-малого п. функции 224 (231, 233).

Проективная шкала 323 (332-334), 324 (338-339), 330 (359), 331 (374, 376, 379), 335 (389), 337 (410, 411-412); связь ее построения с графич. построением гиперболы по точкам; п. ш. для данной функции 324 (340), 331 (371*, 373), 332 (375, 377), 335 (393), 337 (410).

Проекция вектора на ось, основные теоремы 230 (261); см. вектор.

Производная вектора по скаляру см. вектор.

Производная функции одной переменной 54 (150), геом. истолкование 65 (183-184); вычисление п. по таблице значений функции 64 (177), 205 (158); п. высших порядков 63 (174); логарифмическая п. 62 (172), 71 (197); таблица п. 75 (210-212); см. дифференцирование.

Производные частные функции нескольких переменных 222 (224-227), геометр. истолкование их 245 (327); п. высших порядков 223 (227-230), перестановка двух последовательных дифференцирований 223 (228-229); см. дифференцирование.

Пропорциональность прямая 28 (84), 32 (95), 33 (98), 67 (191), 309 (277-279), 317 (308-309); обратная 31 (92, 93), 41 (117).

Прямая на плоскости, ее уравн. явное 34 (100), неявное 92 (251); угловой коэффиц. п. 34 (100); п. через точку 93 (254), через две точки 93 (255), уравн. п. в форме пропорции 93 (256); уравн. прямой в отрезках 92 (254), 93 (257); угол между двумя прямыми 95 (261); условие параллельности 34 (101), 95 (262), условие перпендикулярности 95 (262); расстояние между паралл. п. 95 (264), расстояние от точки до п. 95 (266).

Прямая в пространстве, ее уравнения 238 (290), параметрич. представление п. (292-293), уравнения п. в виде пропорций 239 (293-294); п. через точку (293-294), через две точки (296-297); угол между двумя п. 239 (295), условие параллельности двух п. (295), условие перпендикулярности двух п. (296), условие параллельности п. и плоскости (296), условие перпендикулярности п. и плоскости (296).

Прямоугольник, моменты инерции п. 185 (66, 70).

Прямоугольников способ, для приближ. вычисления определ. интегралов 191 (100-104).

Радиальная номограмма - см. номограмма.
Радиальная спираль - см. спираль.
Радиус кривизны - см. кривизна.
Разложение функций в степенные или в тригонометрические ряды - см. ряды Тэйлора и ряды Фурье.
Разности функции **299** (233-236), первая (233), вторая (234), третья (235); характерная особенность последов. р. многочлена **299** (235), **315** (303-304).
Разрывная функция, ф. производящая скачки **217** (204-207), **219** (219); ф. обращающаяся в бесконечность - см. бесконечные значения функции.
Расстояние между двумя точками, на плоскости **88** (243), в пространстве **231** (265); р. между двумя параллельн. прямыми и от точки до прямой, на плоскости **95** (264-266); р. от точки до плоскости и р. между двумя параллельн. плоскостями **237** (287-288).
Рациональные дроби, разложение на простые **147** (393 и сл.), **155** (417), **161** (440-441), **162** (442 и сл.).
Рекуррентные формулы в интегральном исчислении **159** (432-433), **172** (13-14).
Рунге схемы для производства гармонического анализа - см. гармонич. анализ.
Ряд бесконечный, его члены, частные суммы **201** (142); сумма бесконечного р. **22** (60), **201** (142); остаток ряда (143); сходящиеся и расходящиеся р. (144), свойства сходящихся р. (144-145); признаки сходимости положительных рядов **202** (145-151); признак Даламбера для положит. р. **202** (149), для произвольных рядов **203** (152); абсолютно и неабсолютно сходящиеся ряды (151-152); знакопеременные ряды (154), особенности приближения их частных сумм к сумме ряда **209** (171); приближенные вычисления с помощью р. знакопеременных **209** (171-175), положительных **210** (175-178).
Ряды Тэйлора, степенные ряды **204-208** (154-171), радиус и промежуток сходимости степенного р. **204** (154-155); формулы Тэйлора для коэффиц. степенного р. (155-156); разложение приращения функции **205** (157); разложения в ряды Тэйлора элементарных функций: e^x **206** (159), $\sin x$ (159), $\cos x$ (160), $\operatorname{tg} x$ (163), $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ (162), $\operatorname{th} x$ (163), $(1+x)^m$ (160), $\ln(1+x)$, **207** (166), $\operatorname{arctg} x$ (1166), $\arcsin x$ (167), $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ **208** (167); почленное дифференцирование степенного р. **204** (155), **295** (215, 218), **296** (220); почленное интегрирование степенного р. **207-208** (165-171); применение степенных рядов к интегрированию диффер. уравнений и систем их **295-296** (213-223), **300** (236-238), **301** (242).
Ряды Фурье, тригонометрические ряды **215-217** (194-211), **265** (104-105), **285** (171), **304** (264), **305** (268-269); определение коэффициентов почленным интегрированием **216** (198-202), **305** (268-269), разложением их в ряды **217** (209-211), по методу наим. квадратов **321** (325-328); коэффициенты Фурье **216** (200); приближение частных сумм к сумме ряда Фурье **217** (205, 207), оценка средней квадратич. погрешности **321** (328); см. гармонический анализ.

Семейство кривых, зависящее от одного параметра **263** (94 и сл.), **325** (341), от двух параметров **263** (94*); см. метод с. к. в номографии.
Симпсона правило для приближ. вычисления определ. интегралов **193** (106-109); применение к вычислению коэффиц. Фурье **221** (223).
Синус, предел отношения к дуге **22** (62), приближ. формула **26** (72, 77), **138** (370); см. тригонометр. функции.
Синус гиперболический-см. гиперболические функции.
Синусоида, площадь с. **169** (473-474), **174** (24); средняя ордината с. **176** (28); объем тела вращения **179** (43); длина дуги с. **181** (52); площадь поверхности вращения **182** (55); центр тяжести площади **184** (63); связь с. с эллипсом **99** (274).
Синусоидальные величины **46** (128); изображение их векторами **46** (130), **47** (134); сложение с. в. одного периода **47** (133), разных периодов **48** (135), биения (136-138); дифференциров. с. в. **62** (167), интегриров. с. в. **74** (207).
Система обыкнов. дифференц. уравнений **291-294** (195-213); нормальная с. **291** (195-201), общий интеграл (197-198), начальные условия (198); сведение дифференц. уравнения высш. порядка к нормальной с. **291** (198-199), **298** (228, 230), **303** (255, 256); каноническая с. **292-294** (201-213), сведение к нормальной с.,

общий интеграл **292** (202), начальные условия (202-203), непосредственное решение канонической системы **292** (203-204), **293** (206-208), **294** (212).
Скалярное произведение 2-х векторов - см. векторы.
Скалярные величины, скаляры 230 (259).
Скачки функции 217 (204-207), 219 (219).
Скорость изменения функции, средняя и в данной тчоке 53 (148-150), 56 (153), **57** (155), **61** (166), **62** (168), **72** (202), **73** (209), **169** (472), **176** (30-31), **222** (224, 225).
Сложение геометрич. векторов - см. векторы.
Сложение приближенных чисел 5 (15); номогр. сложения **329** (355).
Сложная функция **61** (164-165), **225** (235), ее дифференцирование **61** (165 и сл.), **69** (195), **225** (235-238).
Соприкасающаяся плоскость к пространств кривой **241** (313-314), **244** (323).
Сопряженные диаметры эллипса **100** (275), с. гиперболы **102** (279), с. мнимые числа **140** (378).
Спираль Архимедова **118** (313-315), **126** (340); касательная к А. с. **127** (343), кривизна А. с. **136** (363); А. с. как подера эвольвенты круга **126** (340); площад. А. с. **178** (36); длина витка **181** (50).
Спираль логарифмическая **118** (315), **127** (343-344), **132** (356); касательная к л. с. составляет пост. угол с радиусом вектором **127** (342-343); длина дуги л. с. **131** (353-354), **200** (140); кривизна л. с. **136** (362).
Спираль радиальная, с. Корню **208** (169-170).
Среднее значение функции (одной переменной) **175** (24), **176** (28-33), **194** (110); зависимость с. з. от выбора независимой переменной **176** (30); теорема о с. з. **175** (26), **176** (29), **177** (33), обобщение ее **175** (27); коэффициент Фурье a_0, как с. з. **216** (198); с. з. функции от двух переменных **254** (42).
Среднее квадратическое значение функции **176** (31-32), **178** (38).
Средняя ордината (или абсцисса) кривой **175** (25), **194** (101), **195** (122), **197** (128-129); средние линии кривой **176** (33), **197** (126), **198** (131).
Средняя квадратич. погрешность **317** (310, 312, 313, 315), **320** (324), **321** (326, 328).
Степенная функция **40** (114), построение ее графика по точкам **40** (114-116), дифференцирование с. ф. **55** (151); приближ. формулы **23** (73, 75, 76), **211** (179), **212** (182, 183, 184), **213** (186, 188, 191); биномиальный ряд **206** (160-162); с. ф. в эмпирической формуле **312** (289-296), сведение к линейной функции путем логарифмирования **312** (289-292), **318** (315), с помощью логарифм. бумаги **312** (293-296).
Степенные ряды - см. ряды.
Стоячие волны - см. метод с. в.
Сфера - см. шар.
Сферическая поверхность, ее уравнение 235 (279).

Таблица производных и дифференциалов **75** (210-212); т. интегралов **75** (210-212), **154** (414-415), **168** (464-471).
Таблицы логарифмов, чисел и тригонометрич. величин, точность вычисления по ним **71** (197-199).
Табличный способ задания функции 28 (82); вычисление производных при таком задании **64** (177), **205** (158); вычисление интегралов - см. приближ. вычисление опред. интегралов.
Тангенс - см. тригонометр. функции.
Тангенс гиперболич. - см. гиперболич. функции.
Тело вращения, объем **179** (38), **194** (115), **254** (50); статич. моменты и центр тяжести **254** (50-52); моменты инерции относит. оси вращения **190** (92), **254** (52); см. поверхность вращения.
Тор - см. кольцо.
Точка возврата (острие) полукубич. параболы **42** (120), эволюты **139** (375), трактрисы **261** (90).
Точка перегиба - см. перегиб.
Трактриса **261** (90).
Трапеций способ для приближ. вычисления определ. интегралов **192** (104-106), применение к вычислению коэффиц. Фурье **219** (212), **220** (219).
Трапеция, центр тяжести т. **184** (64), момент инерции т. **185** (69, 70).
Треугольник, площадь т. по координатам его вершин **91** (247), **233** (272), геометр. смысл знака площади **91** (248), **233** (272*); центр тяжести т. **184** (64), моменты инерции т. **185** (66-70).
Тригонометрические ряды - см. ряды.
Тригонометрические суммы n-ного порядка, наилучшее приближение к данной функции **321** (326-328).
Тригонометрические функции и их графики **45** (125); приближ. формулы **26** (72), **211** (178-181), **212** (182, 185), **213** (185-187, 189-192);

дифференцир. т. ф. 58 (155), 59 (161); разложение т. ф. в ряды 206 (159-160, 163); нахождение т. ф. по углам, и обратно, с помощью логар. линейки 16 (47), 26 (77); погрешности логарифмо-тригон. таблиц 71 (199); приближ. вычисл. т. ф. с помощью рядов 209 (172).
Тройной интеграл - см. интеграл тройной.
Тэйлора формула, для полинома, см. формула Т.; Тэйлора ряды - см. ряды.

Убывание функции 76 (213).
Угловой коэффициент - см. коэффициент угловой.
Угол, перевод у. из градусной меры в дуговую и обратно, по логар. линейке 17 (51).
Угол между двумя прямыми на плоскости 95 (261), у. между прямой и кривой, двумя кривыми 124 (331), 127 (342); у. между двумя направлениями (двумя прямыми) в пространстве 232 (267-268), 239 (295); у. между двумя плоскостями 237 (285-286).
Уклон прямой 34 (100-101), 92 (250), кривой 65 (83).
Улитка 119 (316-317), площадь у. 178 (36); см. кардиоида.
Умножение приближ. чисел 7 (19), сокращенное у. 8 (22); у. с помощью логар. линейки 13 (30); различные номограммы у. 326 (343), 328 (350), 329 (355), 331 (370-371).
Уравнение, его решение - см. графическое решение уравнений, номограмма и вычисление корней уравнений.
Уравнения кривой или поверхности - см. кривая, поверхность.

Фаза синусоидальной величины, начальная ф. 46 (129).
Фокусы эллипса 97 (270), гиперболы 101 (276), параболы 104 (282); фокальные свойства этих кривых 124-125 (331-338).
Формула конечных приращений 68 (192), связь с теоремой о среднем значении в интегральном исчислении 175 (26-27).
Формула интерполяционная Лагранжа 146 (392).
Формулы приближ. - см. приближ. формулы.
Формулы Эйлера - см. Эйлера формулы.
Формулы эмпирич. — см. эмпирическ формулы.
Функциональная сетка 327-328 (348-354) 336 (397, 399). См. логарифмич. и полулогарифмич. сетка.
Функциональная шкала 322 (329-330), связь ф. ш. с графиком функции (332); случай функции, изменяющейся в разных направлениях 337 (407).
Функция, аргумент ее 27 (80); способы задания ф.: аналитич. 28 (82), таблич. 28 (82), графич. 30 (89).
Функция от нескольких переменных 27 (81), 87 (240), 222-229 (234-258); «пространств. график» или «модель» ф. 235 (277-278); частное приращение ф. 222 (224), полное приращение 224 (232), частные производные 222 (224-227), частные произв. высших порядков 223 (227-230), перестановка двух последов. дифференцирований 223 (228-229), частные дифференциалы и полный дифференциал 224 (231-235), независимость формы полного дифференциала от выбора независимых перем. 225 (235, 237), дифференцирование сложной функции (235-236), дифференцирование неявных функций 227 (245-248), наибольшие и наименьшие значения ф. 228-229 (248-258).
Функция гиперболич., дробно-линейная, квадратичная, линейная, логарифмическая, многозначная, непрерывная, нечетная, обратная, обратные круговые, однородная, первообразная, периодическая, подинтегральная, показательная, разрывная, рациональная, сложная, степенная, тригонометрические - см. по названиям функций.
Фурье коэффициенты 216 (202), 321 (328).
Фурье метод - см. метод стоячих волн.
Фурье ряды - см. ряды Фурье.

Характеристические уравнения для линейных диффер. уравнений с постоянными коэффициентами 282 (156-158), 289 (189).

Центр кривизны - см. кривизна.
«Центр тяжести» системы «опытных точек», при составлении эмпирической формулы 310 (284), 311 (289), 314 (302).
Цепная линия 105 (284), 278 (133-135); касат. к ц. л. 120 (320); кривизна 136 (361); длина дуги 131 (350); площадь 171 (5); объем тела вращения 179 (42), 184 (63); площадь поверхности вращения 182 (54); центр тяжести дуги 183 (59); центр

тяжести площади 184 (63); парабола, как приближение к ц. л. 212 (181); см. катеноида.
Циклоида, ее параметр. представление 113 (302), явное уравн. (304); касат. к ц. 126 (338); кривизна ц. 136 362); длина дуги ц. 131 (351-352); площадь 173 (17); объем тела вращения 179 (43); площадь поверхности вращения 182 (55); центр тяжести дуги 183 (60); центр тяжести площади 184 (64).
Цилиндр круговой, момент инерции относит. оси 190 (91), относит. плоскости среднего сечения (92), относит. плоскости, проход. через ось 254 (54).
Цилиндр второго порядка эллиптический, гиперболический, параболический 241 (311).
Цилиндрическая поверхность, ее уравнение 235 (279).
Цилиндрические координаты 255 (59).
Цилиндрический (призматический) брус, его объем 250 (23-26), 252 (32-33), статические моменты и центр тяжести 254 (52), моменты инерции 254 (54).
Цилиндрический отрезок, объем 179 (44), 252 (36), площадь боковой поверхности 190 (90), центр тяжести 254 (53).

Частный интеграл (ч. решение) диффер. уравнения - см. интеграл частный.
Частота синусоидальной величины 46 (129).
Четная функция 173 (19), ее разложение по косинусам 216 (201), 217 (206).
Числа рациональные и иррациональные 23 (65), 114 (305).
Числа вещественные и комплексные 140 (377), ч. мнимые, сопряженные 140 (377); чисто мнимые ч. 141 (379); действия над комплексными числами 140 (377-379); геометр. истолкование комплексн. числа 141 (379); модуль и аргумент комплексн. ч., тригонометрич. форма комплексн. ч. 142 (381), 206 (164); формулы Эйлера 206 (164).
Число e, как предел $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ при $\alpha \to 0$ 23 (65), 24 (67); ряд, определяющий число e 206 (159); приближ. вычисление e 210 (176).
Число π, приближ. вычисление его с помощью определ. интегралов 191 (104), 192 (106), 193 (109), 194 (116-117), с помощью ряда 210 (174-175).
Число верных знаков - см. верные знаки.
Число целых знаков 13 (32).

Шар (сфера), площадь поверхности шарового пояса 182 (54); центр тяжести полушара 190 (91); ц. тяжести его поверхности (91); момент инерции ш. 190 (92).
Шкала двойная, криволинейная, логарифмическая, немая, нормальная, проективная, функциональная - см. по этим названиям.
Шкалы на логарифмич. линейке 12 (29), ш. квадратов, кубов 12 (29), равномерная ш. 16 (46), ш. синусов и тангенсов 16 (47).
Штермера (Адамса -) метод - см. приближ. интегрирование дифференц. уравнений.
Штрихи особые на логар. линейке 17 (51).

Эвольвента круга, ее параметр. представление 115 (307); касат. 126 (340); длина дуги 132 (355); подера э. к. (Архимедова спираль) 126 (340); кривизна э. к. 136 (362).
Эволюты и эвольвенты 139 (374); длина дуги эволюты эллипса 181 (150).
Эйлера дифференц. уравнения 287 (180-187), 289 (189).
Эйлера-Коши метод - см. приближ. интегрирование диффер. уравнений.
Эйлера формулы, связывающие тригонометр. и показательную функции 206 (163-164), 217 (210*), 282 (158).
Эйлеровы подстановки 165 (453).
Эйлеровы углы 234 (276).
Экстраполирование 307 (273).
Эксцентриситет эллипса 98 (272), гиперболы 102 (278).
Элемент площади в прямоуг. координатах 250 (24), 252 (32), в полярных координатах 253 (338); э. объема в прямоуг. координатах 255 (58), в цилиндрич. координатах 255 (59).
Эллипс 97 (210), 103 (279), 254 (48); фокусы э. 97 (270); центр и оси э. 98 (271-272), эксцентриситет э. (272), параметр э. 106 (285); уравн. э., отнесенное к осям 97 (271), к вершине 106 (285); параметрич. представление э. 110 (295-297); графич. построение э. по точкам 99 (273); эллипсограф 111 (297); э., как проекция окружности 99 (273-274); э., как сечение кругового цилиндра 99 (274); э. как сечение кругового конуса 108 (290); сопряженные диаметры, дополнительные хорды э. 100 (275-276); касат. и нормаль

к эллипсу **122** (326), их свойства **122** (328), **124** (331), **125** (334); проведение касат. к эллипсу **122** (327), **124** (332-333); кривизна **136** (364), **137** (367), построение центра кривизны **137** (367-368); эволюта э. **139** (375), длина дуги ее **181** (50); преобразование общего уравнения э. к простейшему виду **109** (291), **254** (48); площадь э. **171** (6), **173** (16); длина дуги э., всего обвода э. **181** (51), **194** (118); статич. моменты полу-обвода **183** (58); статич. моменты и центр тяжести квадранта э. **184** (63).

Эллипсоид, уравнение поверхн. **240** (299, 301), **256** (69), то же для э. вращения (299), центр э. (300), вершины и оси э. (301), сечения э. плоскостями (300-301); касат. плоскость и нормаль к э. **245** (328, 330); объем э. вращения **179** (40), объем трехосного э. **179** (45), **256** (63-64); площадь поверхности э. вращения **182** (56-57); центр тяжести октанта э. **254** (53), момент инерции относ. оси **254** (55).

Эллиптический интеграл - см. интеграл эллипт.

Эмпирические формулы, их назначение и составление **41** (120), **60** (162), **307** (274-276), **319** (318-319), э. ф. вида: $y = a$ **308** (276-277), **317** (308), $y = ax$ **309** (277-279), **317** (308-310), **318** (312-313), $y = ax + b$ **94** (259), **310** (279-284), **317** (310-312), **318** (313-314), $y = a \cdot \varphi(x) + b$ или $y = a \cdot \varphi(x) + b \cdot \psi(x)$ **311** (284-289), **318** (314-315), $y = cx^a$ **121** (324), **312** (289-296), **318** (315), $y = \beta \cdot \alpha_x$ **313** (296-299), **318** (315-316), $y = ax^2 + bx + c$ **314** (299-303), **317** (312), **318** (317-318), $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **315** (303-305), **316** (306), $y = \frac{ax+b}{x+c}$ **316** (305-307); см. метод натянутой нити, уравновешивания погрешностей, выбранных точек, наименьших квадратов; использование логар. бумаги **312** (293-294), полулогар. бумаги **313** (298); замена отдельных групп «опытных точек» их «центрами тяжести» **310** (284), **311** (289), **314** (302).

ПЕРЕЧЕНЬ ПРИКЛАДНЫХ ВОПРОСОВ, РАССМОТРЕННЫХ ИЛИ ЗАТРОНУТЫХ В КНИГЕ.

Жирная цифра указывает №, *цифра в скобках ( ) означает страницу. Номера от 1 до 170 относятся к I части, от 171 до 245—к первому выпуску II части, от 245 до 337—ко второму выпуску II части.*

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Геометрия масс.

Масса неоднородного тела **255** (57-58).

Статические моменты и центр тяжести системы матер. точек. на плоск. **90** (246), в простр. **231** (266), кривой **183** (57-60), плоской фигуры **184** (61-65), **199** (133-134) (граф. интегрир.), **254** (45-46), тела **190** (90-91), **247** (12), **256** (67), (тела вращения) **254** (50-52), (цилиндр. бруса) **254** (52); теор. Гульдина **183** (58-60), **184** (62-65), **254** (50), (обобщение) **184** (65), **256** (65).

Моменты инерции плоской системы матер. точек, плоской фигуры относ. оси, лежащей в плоскости (экваториальный м. и.) **185** (65-71), **254** (45), **199** (135) (граф. интегрир.), изменение м. и. при параллельном перенес. оси **185** (69), при вращении оси **254** (47); эллипс инерции (47-48), центробежный момент (47), изменение его при параллельном перенес. осей координат (48-49), определение положения главных осей инерции (49); полярный м. и. **190** (91), **254** (46-47), связь с экваториальными м. и. (46); м. и. кругового цилиндра относ. оси его **190** (91-92), относ. плоскости ср. сечения (92), м. и. тела вращ. относ. оси, шара (92); м. и. произвольного тела **256** (67); изменение м. и. тела относит. оси при вращении оси (68), эллипсоид инерции, главные оси инерции (69), центробежные моменты (69).

Кинематика и к. механизмов.

Скорость, средняя с. **52** (146-147), с. в данный момент (147-148), угловая с. **53** (148), определение пути по с. **74** (207-208), построение графика (s, v) по графикам (t, s) и (t, v) **31** (91); с., как вектор **230** (259-260), угловая с., как вектор **233** (272-273); с. в криволин. движении **244** (321-322); распределение с. точек вращающегося твердого тела, теорема о сложении вращений **233** (272-273); число оборотов и средняя с. поршня в функции с. паровоза, диам. колес и хода поршня (ном.) **326** (348); окружн. с. шкива в завис. от диам. и числа обор. (ном.) **328** (351, 352), **330** (362-363, 364); число обор. токарного станка (граф.) **35** (103-104).

Ускорение, среднее у. **63** (175), у. в данный момент (175), угловое у. (175); определение у. по скорости **74** (207-208), графич. опред. у. по диаграмме (s, v) **121** (323); у. как вектор **230** (259), у. в криволинейном движении, разложение у. на касательную и центростремительную составляющие **244** (321-324); определение скорости и у. впускного клапана цил. паровой машины (граф. диффер.) **66** (187), то же для пневмат. молота (187-188), вычисл. ускорения конвейерного механизма (по табл. знач. скорости) **244** (321-324); определ. углового у. по числу оборотов путем вычисл. по таблице **64** (181), путем граф. дифференцирования **66** (189-190).

Равномерное движение **32** (96-97), **94** (258), его график (ж.-д. графики) **35** (102-103).

Равнопеременное движение, в частности, падение тяжелой матер. точки (при отсутств. сопрот.) **31** (93), **38** (110-111), **66** (162), **63** (175), **74** (208), **176** (30).

Гармоническое колебание 46 (130), 62 (168), 63 (175), 111 (296); осуществление г. к. в кривошипе с поступат. движущейся кулиссой 46 (130-131) и в эксцентрике, очерченном по улитке 119 (317-318); сложение двух г. к. одного периода 47 (133-134), — разных периодов (биения) 48 (135-138), сложение взаимно перпендикулярных г. к. 111 (296-297).

Затухающие колебания 62 (169), 63 (175-176), 81 (222-224).

Катание без скольжения: круга по прямой 113 (303), круга по кругу 114 (304), прямой по кругу 115 (308), логар. спирали по прямой 132 (356).

Эллиптическое движение, эллипсограф 111 (297-299); э. коромысла, коромысла Эванса (299).

Антипараллельный кривошип, построение центроид 103 (280); эллиптические колеса 125 (334-337).

Колеса, очерченные по дугам логар. спирали 133 (356-357); очерчивание ножей и зубцов фрез по логар. спирали 127 (343-344).

Гиперболоидальные колеса 240 (305).

Гипоциклоидальный механизм 114 (397).

Кулаки, поступательные 65 (184-185), вращающиеся (эксцентрики) 117 (313), 118 (315), 119 (317-318).

Кривошип без шатуна (с поступ. кулиссой) 46 (130-131).

Кривошипно-шатунный механизм 46 (131-133), 16 (51), 217 (209-211); скорость и ускорение крейцкопфа 62 (169), 63 (176), 48 (136); распределение скоростей и ускорений в точках шатуна 244 (324-325); ход поршня при дезаксации (прибл. ф.) 26 (75).

Статика и с. сооружений.

Трение, закон Кулона, коэффициент трения, угол наивыгодн. тяги груза по плоскости (угол трения) 85 (234-235).

Веревочная кривая, как форма равновесия нити; случай нагрузки, равномерно распределенной по длине (цепная линия) 278 (133-135), 51 (145); общий случай нагрузки, распределенной по проекции 269 (116-117), случай равномерно распределенной нагрузки (парабола, цепной мост) 105 (283-284), 121 (323); веревочный многоугольник 270-271 (117-120).

Форма свода с горизонтально ограниченной грузовой площадью (катеноида) 280 (144-145); вычисл. (прав. Симпсона) горизонт. распора арки 194 (115-116).

Давление ветра на дымовую трубу 190 (94-95).

Давление грунта на подпорную стенку 85 (235-236).

Давление зерна на стенки силоса (формулы Янсена) 261 (86-87); (номогр.) 332 (375-376).

Разводный мост, уравновешив. переменного момента по системе Дерше 127 (340-341); противовес с использованием эволюты 139 (374-375).

Подъемный кран с параболич. поперечиной 125 (357-358).

Динамика и д. машин.

Закон движения Ньютона 63 (175-176), (в векториальной форме) 244 (323), (уравнения движения мат. точки) 244 (323), 292 (202); 176 (30), 268 (116), 278 (136), 280 (147, 149), 285 (168, 169, 172).

Бросание тяжелой точки под углом к горизонту 112 (300-302), траектория водяной струи (302); влияние малых изменений в нач. условиях на дальность полета ядра 225 (238).

Падение тяжелого тела в среде с сопротивлением 278 (136-137), парашют (137-138).

Центробежная сила 244 (323), поверхность жидкости во вращающ. сосуде 121 (324-325), 179 (41), измеритель угловой скор. Брауна 121 (325); ж.-д. закругления, подъем наружного рельса 138 (369-370); вращение пластины или тела вокруг оси, условия уничтожения действия ц. с. 254 (49-50), 256 (69-70), давление ошибочно насаж. диска на ось и подшипники 256 (70-72); провисание трансмиссионного каната 278 (135-136).

Колебательные явления, гармонич. колебание под действ. упругой силы 280 (147-149); затухающие колебания, при наличии сопротивления 285 (168-169); вынужденные колебания и резонанс, при отсутствии сопротивления 285 (169-172), при наличии сопротивления 285 (172-175), 82 (224-226).

Математич. маятник, при отсутствии сопротивл., прибл. диффер. уравн. 280 (149-150); точное уравн., выражение периода эллипт. интегралом 280 (150-151), интегрир. с помощью ряда 295 (217), приближ. интегрир. 298 (228, 230), 303 (255-256); диффер. уравнение колебания м. м. при наличии сопротивления, интегрир.

его с помощью ряда 295 (218-219), приближ. интегрир. 298 (230-233), 303 (256-259).

Связанные колебания, поперечные колебания вала, несущего шкивы 293 (204-207), вынужденные колебания и резонанс (207-208); динамический поглотитель колебаний (208-209).

Изгибание вращающегося вала 290 (190-193).

Быстро вращающийся шпиндель 294 (209-213).

Поперечные колебания стержней 304 (260-265).

Паровая машина или газовый двигатель, касат. усилие на пальце кривошипа, среднее 176 (29) (граф. интегрир.) 197 (128-129), анализ к. у. 219 (213), 221 (220-221, 222), анализ работы внешних сил 219 (216-217), 221 (221-222); уравн. движения одноцилиндр. паровой машины, приближ. инегрир. его 302 (246-253).

Работа, выражение ее скалярным произведением 233 (272); р. переменной силы 187 (77-81), связь между р. силы и приращением кинетич. энергии (78), геометр. истолкование р. 188 (81-82); силовое поле, работа сил поля (кривол. интеграл) 276 (3-4); случай, когда силы имеют потенциал, силовая функция 249 (21); ньютонианское притяжение 200 (137), 249 (21-22).

Испытание машины на свободное движение по инерции 64 (181-182); (граф. дифференцир.) 66 (189-190), (эмпир. ф.) 310 (282), 314 (301, 302), 318 (317).

Подъемный кран, зависим. усилия от подымаемой тяжести (граф.) 31 (91).

Насос, зависим. между затратой энергии и высотой подачи (эмпир. ф.) 310 (281-282), 318 (313-314).

Сопротивление материалов.

Растяжение и сжатие, модуль упругости, опытное опред. его 309 (279), зависимость м. у. от температуры (граф.) 31 (90), зависимость между сжатием буферной пружины и ее нагрузкой (эмпир. ф.) 315 (305), зависимость разрывного удлинения бруска от длины его (эмпир. ф.) 311 (287), 318 (314-315); натяж. воздушного провода (кубич. уравн.) 15 (46); стержень равного сопротивления растяжению 180 (46-48); степенной закон Баха 312 (291-292), 318 (315).

Кручение, зависимость модуля к. от температуры (граф.) 31 (93), завис. между крутящим моментом и углом кручения (эмпир. ф.) 312 (291).

Напряженное состояние в окрестности точки: плоской - эллипс напряжений 111 (396); пространственной - нормальное и касательное напряжения 232 (269-270), эллипсоид напряжений 240 (301), установл. ориентации площадки по задан. направлению относящегося к ней напряж. 245 (329-330).

Изгиб балок: моменты инерции употреб. сечений 185 (65-71, (таблица м. и.) 186 (74-75), (номогр.) 326 (345-346), 330 (362, 363), 332 (374); изгибающий момент и момент сопротивления 186 (71-77), нейтральная линия (72, 73), гипотеза Бернулли (72), значение полых балок (76-77), парадокс Эммерсона (77), таблица м. с. (74-75); диффер. уравнение изогнутой оси 272 (121-122); и. б. с одним заделанным, другим свободным концом 273 (123-124), построение упругой линии по способу верев. многоугольника 274 (124-125); и. б. с опертыми концами 275 (125-129); общий случай непрерывно распред. нагрузки, понятие об интенсивности нагрузки средней и в данном сечении 53 (149-150), опред. изгиб. момента в общем случае, нахожд. упругой линии в случае треугольной нагрузки 276 (129-130); связь между изгибающим моментом, перерезывающим усилием и интенсивн. нагрузки 64 (176), 276 (130-131); упругие линии при разл. условиях нагрузки и закрепления 31 (94), 84 (229), 130 (346-347), балка прямоуг. сечения наиб. прочности или наиб. жесткости 87 (238-239).

Изгиб балки на упругом основании 290 (193-196).

Изгиб кривого бруса (прибл. ф.) 212 (183-184).

Продольный изгиб балки 286 (175-180), критическая или ломающая сила 286 (175, 176, 179), эмпир. ф. Тетмайера 310 (282-284); п. и. под действием собств. веса 296 (219-223).

Потенциальная энергия деформации, при растяжении или сжатии 187 (78-79), 188 (82), 190 (93-94), (теор. Клапейрона) 187 (79-80), случай растяж. под действием собств. веса 190 (94); п. э. д. при изгибе 190 (99-100), случай балки на упругом основании 200 (139-140); теор. Кастильяно 225 (238-240), 251 (31-32); примен. принципа наим. работы к расчету статич. неопределимых систем 229 (257-258), 251 (32).

Быстро вращающиеся диски, распределение напряжений в них **262** (91-92), **288** (186-187), диск равного сопротивления **262** (91-94).

Колебательные явления, связанные колебания, изгибание вращающегося вала, быстро вращающийся шпиндель, поперечные колебания стержней - см. в рубрике «Динамика и д. машин».

Деформация толстостенной трубы **288** (183-185), (граф.) **31** (94), формулы Ламе-Рэнкина и Брикса (прибл. ф.) **212** (183), (номогр.) **330** (367), **332** (376-379).

Давление между рельсом и шиной колеса ж.-д. вагона **254** (55-57).

Железобетонная балка, опред. положения нейтр. оси (кубич. уравн.) **15** (45-46), расчет площади арматуры (номогр.) **324** (335), **335** (391-393), зависим. между напряжением в железе и степ. армирования перед появлением трещин (эмпир. ф.) **311** (288-289).

Детали машин.

Диаметр заклепки, завис. от толщины склепыв. части (граф.) **31** (93).

Винтовая пружина, ее грузоподъемн. (ном.) **336** (400, 402).

Толщина трубопровода, формулы Ламе-Рэнкина и Брикса **212** (183), **330** (367), **332** (376-378).

Трение канатов и ремней, формула Эйлера **260** (81-83), (номогр.) **336** (402), **337** (408-409), определение коэффиц. трения по ф. Э. **313** (299); простой ленточный тормоз **260** (83-84); натяжения в трансмиссион. ремне (84-85); завис. коэффиц. трения от скор. ремня (эмпир. ф.) **311** (286); завис. передаваемой мощности от скор. и диаметра шкива (номогр.) **326** (346-348).

Фрикционная передача, завис. между коэффиц. трения и скольжением для ф. п. из фибры (граф.) **41** (120), (эмпир. д.) **316** (306-307).

Валы, завис. диаметра сплошного в. от скручив. момента и допускаемого напряжения скруч. (ном.) **328** (350-351), **330** (363, 364-365); завис. внешн. и внутр. диаметров пустотелого вала от скручив. момента и допускаемого напряжения скруч. (ном.) **337** (404-406).

Цапфы, работа силы трения в плоской пяте **189** (85-87), в цилиндрических шипах (88-90); антифрикционная пята Шиле **261** (90-91); завис. коэффициента трения в подшипнике от температ. (эмпир. ф.) **313** (299).

ТЕПЛОТА И ТЕПЛОТЕХНИКА

Тепловые свойства тел, теплопередача.

Шкалы температур, сопоставление различных ш. т. **32** (97), **94** (258), (граф.), **35** (103).

Расширение тел, коэффиц. линейного (объемного) р., средний и при данной температуре **53** (149); опред. коэффиц. объемного р. воды по формуле для ее объема **60** (162).

Теплоемкость, средняя и при данной температуре **53** (149), **176** (31); опред. т. воды по формуле для колич. тепла **60** (162), по таблице знач. колич. тепла **64** (181); нахождение колич. тепла по т. **74** (208-209).

Охлаждение, скор. о. тела, средняя и в данный момент **53** (149), закон о. Ньютона **74** (209), **278** (140), опред. постоянных **309** (277, 278), **317** (309-310), формула для температуры **74** (209), опред. постоянных **313** (297, 298), **318** (315-316); кривая о. стального образца (граф. диффер.) **66** (189).

Теплопередача, основной закон. т. **278** 138); т. через трубу **278** (138-140); теплоотдача стержня **280** (145-147); завис. коэффиц. т. от коэффициентов теплоперехода на обогреваемой и на охлажд. стороне поверхности нагрева (ном.) **326** (344), **330** (359-360), **333** (381); охлаждение трубы в воздушном потоке (эмпир. ф.) **312** (292).

Неустановившиеся процессы, распростр. тепла в плоской стене **305** (265-270), то же в случае бесконечно толстой стены **306** (270-273).

Пары и газы.

Водяной пар, завис. между давлением и температурой насыщ. п. (граф.) **31** (90), (ном.) **324** (337), (эмпир. ф.) **319** (319-324); завис. теплоты испарения от температуры (эмпир. ф.)

310 (282), 314 (300-301), 315 (303-304); опред. теплосодержания и энтропии перегретого п. по их дифференциалам (в теории Каллендар-Моллье) 248 (18-19).

Идеальные газы, закон Бойля - Мариотта (граф.) 31 (93), 41 (119), закон Гэй-Люссака 35 (103), 94 (258), формула Клапейрона 223 (226) [ср. 227 (248)], термодинамич. поверхность 241 (310); адиабатический процесс, формула Пуассона 261 (85-86), (граф.) 40 (116), (ном.) 328 (351-353), 330 (367-369); работа расширения газа 187 (80-81), 200 (137); тепло, поглощ. газом при произвольн. (обратимом) процессе (кризол. интеграл) 247 (12-14), завис. этого тепла от самого процесса, понятие об энтропии 249 (23).

Реальные газы, завис. между объемом и давлением пара в цилиндре (эмпир. ф.) 312 (290-291, 295); опред. показателя политропы по подкасат. 121 (323-324), планиметрированием 173 (18); работа газа (пара) при расширении, индикат. диаграмма 187 (81), 188 (84), 30 (89), (прибл. выч. площ.) 194 (110), (граф. интегр). 197 (128); среднее давл. 176 (29), 188 (84-85).

Тепловые машины

Мощность двигателя по индик. диаграмме 188 (84-85); завис. между м. и расходом пара (эмпир. ф.) 94 (259); завис. между индикат. и действительной м. газомотора (эмпир. ф.) 95 (260).

Коэффиц. полезного действия (термич.) для цикла Дизеля (номогр.) 330 (366-367), 332 (378, 379); зависим. к. п. д. газомотора от его мощности (граф.) 31 (91).

Компрессор поршневой, наивыгодн. распределение промежут. давлений 229 (232-233); опред. промежут. давлений для машины тройного расшир. (граф. интегрир.) 197 (130).

Сопло Лаваля, его форма 84 (231-232), зависим. давления от площади поперечн. сечения (эмпир. ф.) 314 (302-303), 318 (317-318).

Работа трения рабочего колеса турбины, зависим. ее от числа оборот. (эмпир. ф.) 312 (295), от уд. веса пара (эмпир. ф.) 310 (282).

Тахограмма газового двигателя 31 (91).

Степень расшир. пара (граф. решение уравн.) 51 (145).

Истечение топлива из жиклера, эмпир. ф. Лорэ 311 (237).

ДРУГИЕ ОБЛАСТИ НАУКИ И ТЕХНИКИ

Электричество и магнетизм, электротехника.

Действие тока на магнитный полюс, закон Био и Савара 190 (96-97), случай бескон. проводника 200 (138); действие кругового тока на магнит (прибл. ф.) 70 (195-196), наиб. действие 84 (230-231).

Гальванич. ток, наиб. мощность (граф.) 31 (94); 85 (232); завис. тепла, выделяемого г. т., от силы тока (граф.) 31 (93).

Мостик Витстона, его градуирование 324 (338-339), наивыгодн. положение контакта 71 (199-200).

Переменный ток, сила т. 53 (149), среднее знач. силы т. (синусоидального) 176 (29), действующая сила т. (действующее напряжение) 176 (32), интегральная сила т. 200 (138-139) изменение напряж. в цепи п. т. (граф.) 48 (136); тепло, выделяемое при п. т. 190 (96); экстратоки замыкания и размыкания 62 (168), 261 (88-90); диффер. уравнение п. т., его интегрир. в случае синусоидального напряжения 265 (103-104), в общем случае (104-105); падение напряжения при разряде конденсатора 74 (210).

Термоэлектрическая пара, калибрование ее (эмпир. ф.) 146 (391-392).

Вольтова дуга, завис. между силой тока и напряж. (граф.) 41 (120).

Лампочка накаливания, завис. между силой тока и напряж. (граф.) 45 (117).

Электровоз, завис. между током и тягой (эмпир. ф.) 94 (260).

Нагревание машины, стацион. температура электр. машины (номогр.) 336 (394-395); скорость измен. температуры обмотки мотора (по таблице знач. темп.) 64 (181), (граф. дифференц.) 66 (187).

Гидромеханика, гидравлика.

Гидростат. давление, центр давления, момент его 190 (92-93).

Вольтмановская вертушка (эмпир. ф.) 310 (280-281), 317 (311-312).

Движение воды в реке, зависим. скорости от глубины (эмпир. ф.) **146** (393), **314** (300); завис. расхода воды от высоты горизонта (эмпир. ф.) **314** (302); д. в. в канале, средн. скорость по формуле Базена **176** (29); д. в. в водопроводной трубе, наиб. скорость течения **87** (239), (граф. решение уравн.) **51** (143-144), степень заполнения водой (граф. решение уравн.) **51** (143), зависимости между расходом, скоростью, диаметром и пьезометр. уклоном (номогр.) **326** (344), **330** (363, 364), **328** (350), **330** (363, 364), **322** (374-375); малая формула Куттера (номогр.) **324** (339-340), формула Шези-Куттера (ном.) **336** (397-399), **337** (410-412).

Истечение жидкости через прямоуг. отверстие, через прямоуг. водослив **190** (96), (номогр.) **328** (354), **330** (360-362), **333** (382-384), **337** (406-407); зависим. коэффиц. истечения от напора (эмпир. ф.) **311** (286).

Коэффициент быстроходности гидравлических турбин (ном.) **336** (399-400, 401), **337** (403-404).

Плоское установившееся течение жидкости, расход жидкости через контур (кривол. интеграл) **247** (12), случай существования функции тока **249** (22-23).

Геодезия

Измерение расстояний и углов: установление длины стержня путем сравнения с образцовым метром (эмпир. ф.) **318** (314); р. между двумя точками по плану в горизонталях **26** (75), погрешности при измерении р. рейкой (прибл. ф.) **26** (15), погрешн. от провисания мерной ленты (прибл. ф.) **214** (193), погрешн. при определ. элементов треугольника **226** (241-244); определ. постоянной дальномера **309** (279), **318** (312-313).

Определение площади многоуг. участков земли по координатам вершин **91** (249).

Представление части земной поверхности в плане, допустимые ее размеры, оценка погрешности **212** (182-183).

Разбивка закруглений на местности, (прибл. ф.) **212** (181-182), отношение стрелы дуги к стреле полудуги **26** (77), переходные кривые для ж.-д. закруглений **138** (371-374), радиальная спираль в роли переходной кривой **208** (169-170); подъем наружного рельса на ж.-д. закруглениях **138** (369-371), (номогр.) **324** (338).

Барометрическое нивелирование, вывод барометр. формулы **24** (67-69), **74** (210), формула Бабине **26** (78); погрешность барометр. формулы **226** (244-245); номогр. для б. ф. **324** (336), **337** (409-410).

Геофизика

Барометрическая формула — см. *барометрическое нивелирование* в рубрике «Геодезия».

Градиенты давления и температуры **53** (149), **62** (162).

Поправки барометра за температуру, (прибл. ф.) **26** (74), (номогр.) **332** (373-374).

Ускорение силы тяжести, поправка за высоту (прибл. ф.) **26** (75).

Практическая геометрия

Длина дуги круга (приб. ф.) **213** (186-188), д. обвода эллипса (прибл. ф.) (188-189), прибл. выражение д. дуги через хорду и стрелу **214** (192-194), приближ. спрямление дуги круга **213** (189-192), д. подвесной цепи висячего моста **208** (168), (прибл. ф) **214** (194), малые изменения д. **70** (195), д. открытого ремня (прибл. ф.) **26** (76).

Площадь кругового сегмента (прибл. ф.) **213** (185-186), п. кольцеобразного сечения трубы (прибл. ф.) **26** (74); п. сечений корабля **194** (110-113).

Объем винта и винтовой нарезки, о. цилиндрической и конической пружины **256** (65-67); о. и водоизмещение корабля **194** (114).

Очертание свода, составл. из двух парабол **107** (289); эллиптическое **111** (290), определение швов для него **123** (329); вычерчивание коробовой кривой с помощью эволюты **139** (375-376); профиль моста, очерч. по двум прямым, сопряженным параболой **121** (322).

Коленчатые трубы, срезание сгибаемого листа по синусоиде **99** (275).

Сечение канала, наивыгодн. **87** (239-241).

Тяговые вопросы

Поезд, опред. скорости п. (граф. реш. уравнения) **51** (145); завис. коэффиц. трения между тормозн. колодками и бандажами от скорости п. (граф.) **31** (94), (эмпир. ф.) **316** (305-306), завис. удельн. сопротивления паровозу от скор. (граф.) **31** (93),

завис. сопротивления поезду на кривой от ее радиуса (граф.) 31 (93), то же — от скорости п. (эмпир. ф.) 311 (285).
Автомобиль, лобовое сопротивление воздуха (эмпир. ф.) 146 (393).
Судно, завис. между скоростью с. и затрачиваемой мощностью (эмпир. ф.) 311 (286).
Аэроплан, давление на крыло а. при различных скоростях (эмпир. ф.) 312 (291).

Светотехника.

Прожектор (рефлектор), очертание зеркала 125 (337), 266 (109-110).
Сила света, полярная диаграмма распределения с. с. 117 (310-311), применение его к определ. средней сферической с. с. (диаграмма Руссо) 190 (97-99), 194 (109-110).
Освещенность горизонтальная (номогр.) 337 (407-408), условия наибольшей о. 86 (236-237), 337 (407).

Экономические вопросы в технике.

Область влияния ж.-д. станции 103 (280-281).
Скорость судна экономич. 85 (238), (граф.) 31 (94).
Число пролетов моста наивыгодн. 87 (241-242).
Расположение ответвления к водопроводной (железнодорожной) магистрали, наивыгодн. 85 (233-234).
Сечения проводов электр. питательной сети, наивыгодн. 229 (253-256).
Сечения труб водопроводной магистрали, наивыгодн. 229 (256-257).

Разные вопросы.

Вентиляция, основное уравн. в. 261 (87-88).
Газопровод, форм. Поле для расчета г. (ном.) 328 (353-354), 330 (363, 364).
Резание металлов, завис. скорости р. от площади поперечного сечения стружки (эмпир. ф.) 312 (295-296), (номогр.) 324 (336-337).
Модератор, сопротивл. воздуха вращающейся пластине 190 (94).
Способ зеркала и шкалы (Поггендорфа) (прибл. ф.) 212 (184-185).
Сферический треугольник, формула с. т. (номогр.) 332 (375), 333 (384-385).
Звукометрич. способ обнаруж. неприятельской батареи 103 (281-282).
Производительность пороха, опред. ее по кривой давления 194 (110).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Глава XV. Криволинейные и кратные интегралы.

246. Работа сил поля. Криволинейный интеграл 3
247. Примеры и задачи на криволинейные интегралы 6
248. Интегрирование полных дифференциалов 14
249. Два типа криволинейных интегралов 19
250. Задача о вычислении объема. Понятие о двойном интеграле 23
251. Вычисление двойного интеграла путем приведения его к повторному . 26
252. Случай криволинейной области 32
253. Переход к полярным координатам 37
254. Примеры и задачи на вычисление двойного интеграла 42
255. Масса неоднородного тела. Понятие о тройном интеграле 57
256. Примеры и задачи на вычисление тройного интеграла 63

Глава XVI. Дифференциальные уравнения.

257. Основные понятия. Уравнения первого порядка 73
258. Уравнения первой степени относительно производной. Отделение переменных 75
259. Замечание о составлении дифференциальных уравнений 79
260. Трение канатов и ремней 81
261. Задачи на составление дифференциальных уравнений 85
262. Диск равного сопротивления 91
263. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка 94
264. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 98
265. Переменный синусоидальный ток 103
266. Однородные уравнения 105
267. Уравнения в полных дифференциалах 110
268. Дифференциальные уравнения второго порядка. Уравнения вида $y'' = f(x)$ 113
269. Задача о веревочной кривой 116
270. Задача о веревочном многоугольнике 117
271. Графическое интегрирование уравнения $y'' = f(x)$ 119
272. Изгиб балок. Дифференциальное уравнение изогнутой оси 121
273. Изгиб балок с одним заделанным, другим свободным концом 123
274. Графическое построение упругой линии 124
275. Изгиб балки с опертыми концами 125
276. Общий случай непрерывно распределенной нагрузки 129
277. Дифференциальные уравнения вида: $y'' = f(y')$ или $y'' = f(x, y')$ 131
278. Задачи 133
279. Дифференциальные уравнения вида: $y'' = f(y)$ 141
280. Задачи 144
281. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка, без последнего члена 151
282. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, без последнего члена 153
283. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка, с последним членом 159
284. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами, с последним членом 161
285. Колебательные явления 163
286. Задача о продольном изгибе 175
287. Уравнение Эйлера 180
288. Задачи 183

Глава XVII. Дифференциальные уравнения.

289. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков 188
290. Задачи 190
291. Системы дифференциальных уравнений. Нормальные системы 195
292. Общий случай канонической системы 201
293. Связанные колебания 204
294. Быстро вращающийся шпиндель 209
295. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов . . . 213
296. Продольный изгиб под действием собственного веса 219
297. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений по способу Эйлера-Коши 223
298. Случай дифференциальных уравнений высших порядков и систем уравнений 227
299. Понятие о разностях функции 233
300. Метод Адамса-Штермера для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка 236
301. Дополнительные замечания к методу Адамса-Штермера 242
302. Приближенное интегрирование уравнения движения одноцилиндровой паровой машины 246
303. Приближенное интегрирование системы уравнений и уравнений высших порядков 253
304. Дифференциальные уравнения в частных производных. Колебания стержней 260
305. Распространение тепла в плоской стене 265
306. Случай бесконечно толстой стены 270

Дополнение I. Эмпирические формулы.

307. Общие замечания об эмпирических формулах 274
308. Приближение с помощью постоянной 276
309. Приближение с помощью формулы $y = ax$ 277
310. Приближение с помощью линейной формулы $y = ax + b$ 279
311. Формулы, приводящиеся к линейной 284
312. Формулы вида $y = cx^a$. Логарифмическая бумага 289
313. Формулы вида $y = \beta \cdot \alpha^x$. Полулогарифмическая бумага 296
314. Формулы вида $y = ax^2 + bx + c$ 299
315. Формулы вида $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 303
316. Формулы вида $y = \frac{ax + b}{x + c}$ 305
317. Метод наименьших квадратов 307
318. Примеры и задачи на метод наименьших квадратов 312
319. Заключительные замечания о составлении эмпирических формул 318
320. Применение метода наименьших квадратов к составлению приближенных формул 324
321. Приближение с помощью тригонометрических сумм 325

Дополнение II. Элементы номографии.

322. Зависимость между двумя переменными. Функциональная шкала и график 329
323. Важнейшие функциональные шкалы 332
324. Примеры и задачи 335
325. Зависимость между тремя переменными. Номограммы из помеченных линий (абаки) 341
326. Примеры и задачи 342
327. Применение функциональных сеток. Анаморфоза 348
328. Примеры и задачи 350
329. Метод выровненных точек. Номограммы с тремя параллельными шкалами 354
330. Примеры и задачи 359
331. Зетовые номограммы 369
332. Примеры и задачи 373
333. Радиальные номограммы 379

334. Номограммы с криволинейной шкалой 385
335. Примеры 388
336. Зависимость между четырьмя переменными. Номограммы из помеченных линий 395
337. Применение метода выровненных точек 402
Предметный указатель 413
Перечень прикладных вопросов 429

Редактор *Е. В. Пулькина.*
Корректор *В. О. Шприна.*
Сдано в набор 19/VII 1933 г.
Формат 62×94 1/16
Ленгорлит № 23142.

ГТТИ № 276.
Тираж 22 000—27 1/2 л.

Техн. редактор *Р. В. Зидина.*

Подписано к печати 22/X 1933 г.
Тип. зн. в 1 п. л. 52 416.
Заказ № 1294.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ФИХТЕНГОЛЬЦ Г. М.
МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ
Ч. I
Стр. 488. Цена 6 р. 20 к., пер. 80 к.

ФИХТЕНГОЛЬЦ Г. М.
МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ
Ч. II, вып. I
Стр. 382. Цена 5 р. 25 к., пер. 75 к.

СМИРНОВ В. И.
КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
Том I
Стр. 442. Цена 5 р. 50 к., пер. 1 р. 50 к.

СМИРНОВ В. И.
КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
Том II
Стр. 518. Цена 4 р. 50 к., пер. 1 р. 25 к.

Продажа во всех магазинах и отделениях Книготоргобъединения

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

СМИРНОВ В. И.

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Том III

Стр. 518. Цена 9 р., пер. 1 р. 50 к.

ФИЛИПС Г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Стр. 320. Цена 4 р., пер. 75 к.

ФИЛИПС Г.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Стр. 440. Цена 5 р. 25 к., пер. 75 к.

Продажа во всех магазинах и отделениях Книготоргобъединения